

# Modellistica delle linee di trasmissione

## PARTE II

### Analisi qualitativa e quantitativa di reti di elementi distribuiti e concentrati

prof. Antonio Maffucci

## Sommario

Parte I: Modelli nel dominio della frequenza e nel dominio del tempo. Circuiti equivalenti nel dominio del tempo.

**Parte II: Analisi qualitativa e quantitativa di reti di elementi distribuiti e concentrati.**

## Reti di interconnessioni e circuiti concentrati

Equazioni del modello a  
linea

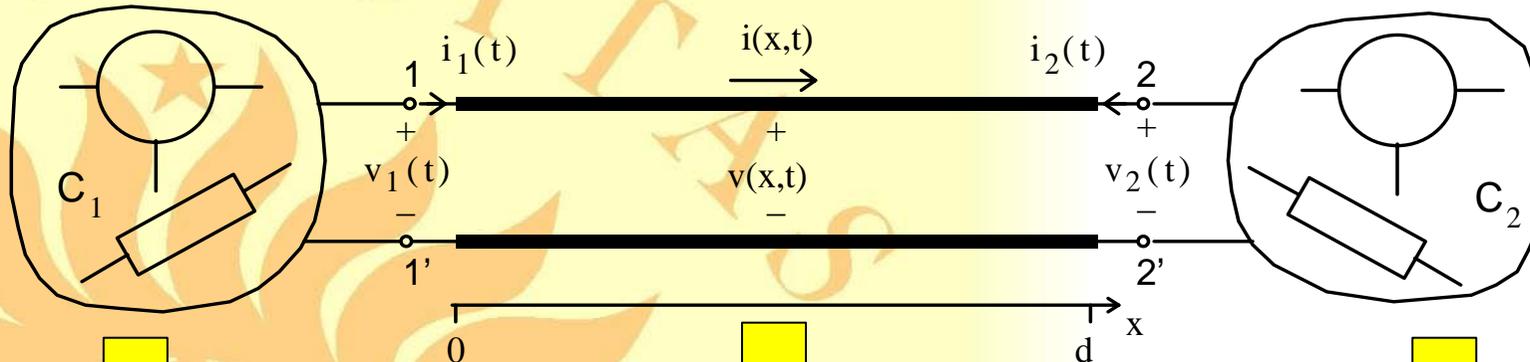
+

caratteristiche dei bipli  
terminali

**1. *Il modello analitico è sempre ben posto?***

**2. *Le soluzioni numeriche convergono sempre?***

## Formulazione del problema

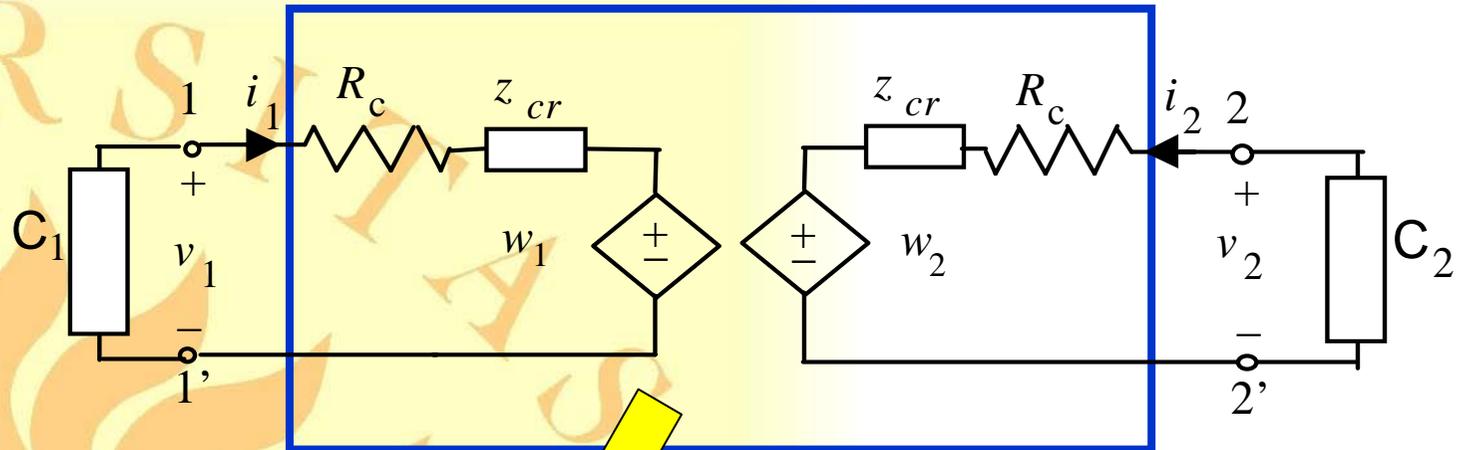


$$f_1[v_1(\cdot), i_1(\cdot), t] = 0$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial V(x, s)}{\partial x} = Z(x, s) I(x, s) \\ -\frac{\partial I(x, s)}{\partial x} = Y(x, s) V(x, s) \end{cases}$$

$$f_2[v_2(\cdot), i_2(\cdot), t] = 0$$

## Modello



$$\begin{cases} v_1(t) - R_c i_1(t) = w_1(t) + z_{cr}(t) * v_1(t) \\ v_2(t) - R_c i_2(t) = w_2(t) + z_{cr}(t) * v_2(t) \\ w_1(t) = p(t) * [2v_2(t) - w_2(t)] \\ w_2(t) = p(t) * [2v_1(t) - w_1(t)] \end{cases}$$

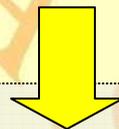
$$R_c = \sqrt{L/C}$$

$$z_{cr}(t) = L^{-1} \left\{ \sqrt{Z(s)/Y(s)} - R_c \right\}$$

$$p(t) = L^{-1} \left\{ \exp \left[ -d \sqrt{Z(s)Y(s)} \right] \right\}$$

## Proprietà della $z_{cr}(t)$

$z_{cr}(t)$  = funzione regolare



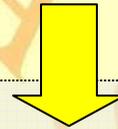
**Il kernel dell'equazione integrale**

$$v(t) - R_c i(t) = w(t) + \int_0^t z_{cr}(t - \tau) i(\tau) d\tau$$

**è sempre integrabile**

## Proprietà della $p(t)$

$$p(t) = 0 \text{ for } t < T = d\sqrt{LC}$$

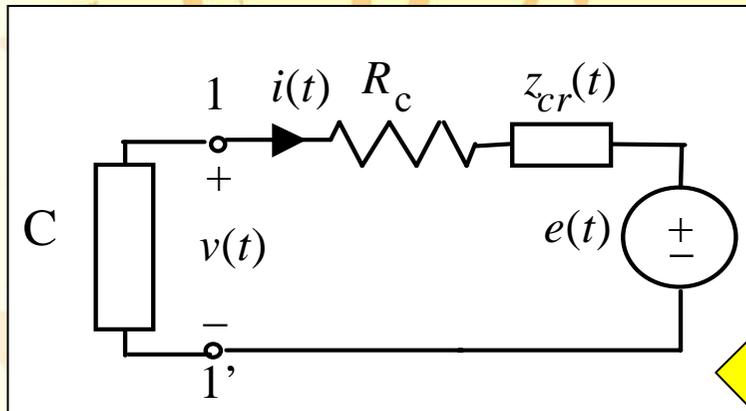


**Le leggi di controllo delle  $w(t)$  sono con ritardo**

$$w_1(t) = \int_0^{t-T} p(t-\tau)[2v_2(\tau) - w_2(\tau)]d\tau$$

**in ogni istante  $t$  le due terminazioni sono  
disaccoppiate**

## Problema all'istante $t$



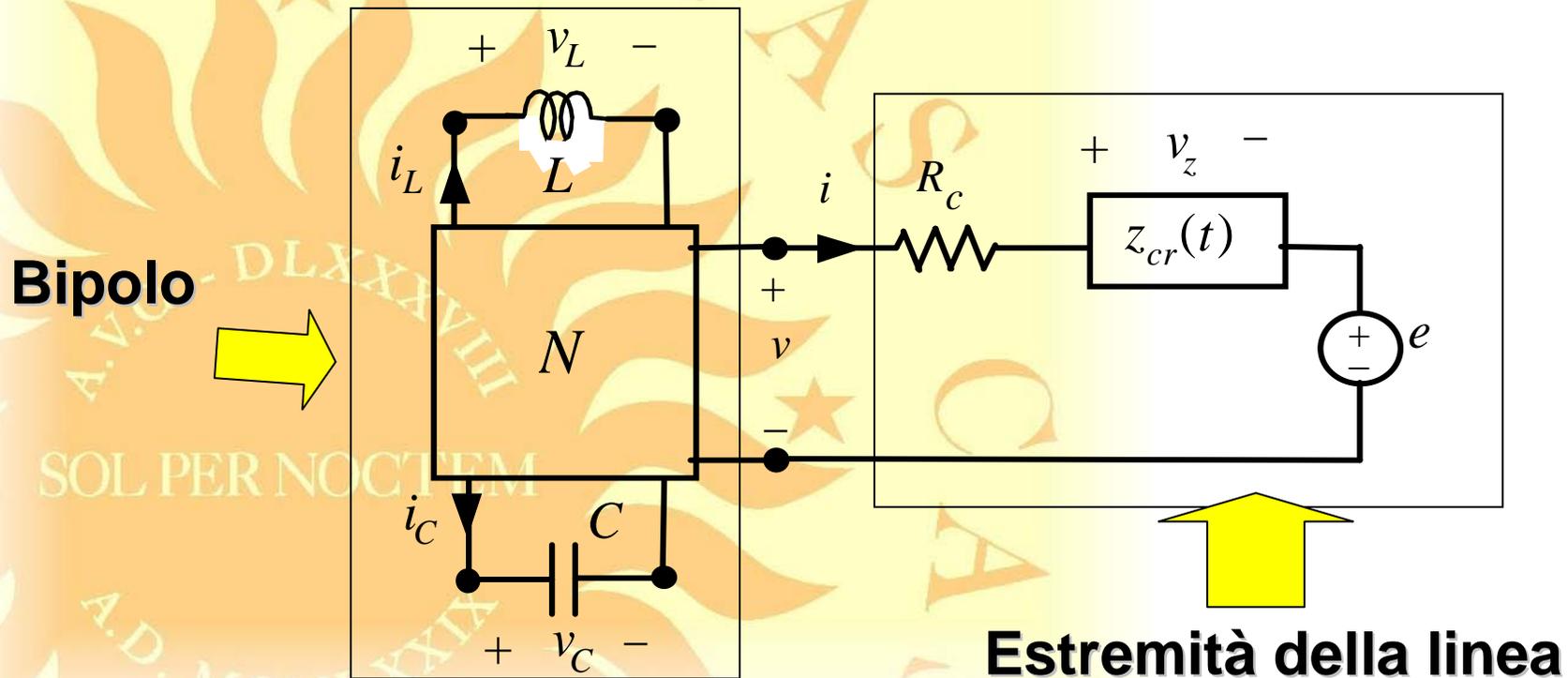
$$v(t) - R_c i(t) = e(t) + \int_0^t z_{cr}(t-1) i(\tau) d\tau$$

$$f[v(\cdot), i(\cdot), t] = 0$$

Il modello è ben posto?

E' possibile formulare condizioni per garantire che sia tale?

## Esempio: linea terminata su un bipolo non lineare e dinamico



## Modello matematico

### *Elementi dinamici*

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau + v_C(0)$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v_L(\tau) d\tau + i_L(0)$$

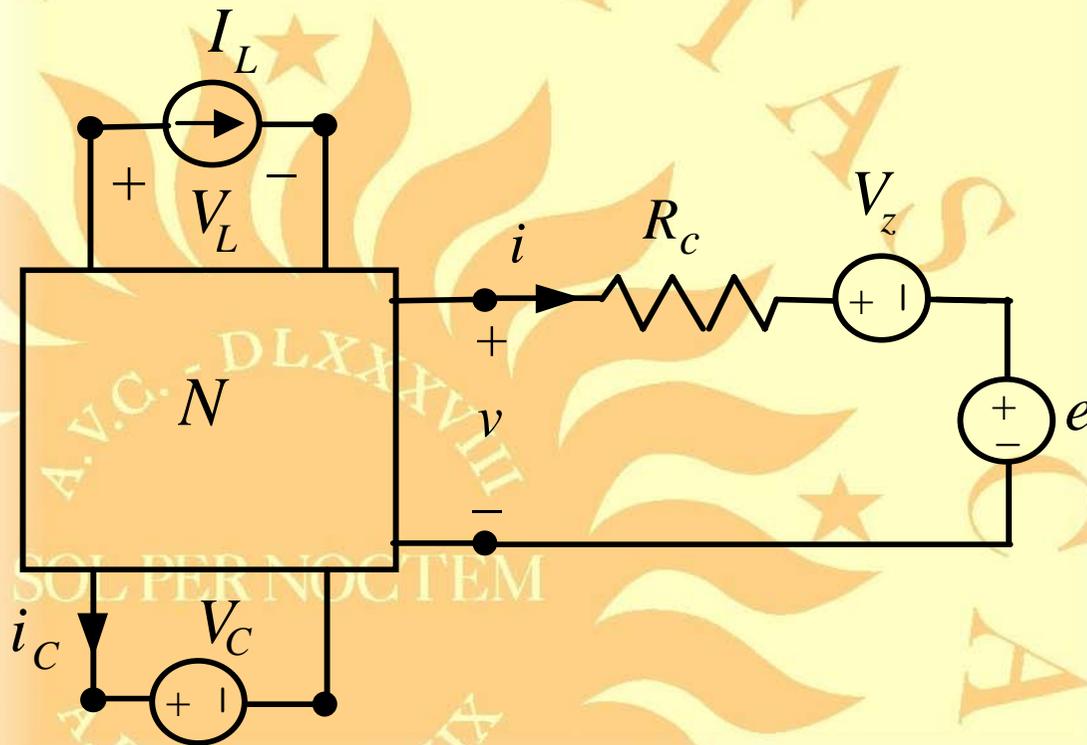
$$v_z(t) = \int_0^t z_{cr}(t-\tau) i(\tau) d\tau$$

### *Sottorete resistiva*

$$v(t) - R_c i(t) - v_z(t) - e(t) = 0$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{v}_N, \mathbf{i}_N, v_C, i_C, v_L, i_L, v, i) = \mathbf{0}$$

Il problema è ben posto se tutte le grandezze sono esprimibili in funzione delle variabili di stato  $v_c, i_L, v_z$



**Circuito resistivo associato**

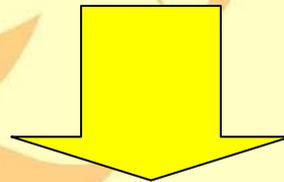
$$v_c = V_c \quad i_L = I_L$$

$$v_z = V_z$$

**generatori di sostituzione**

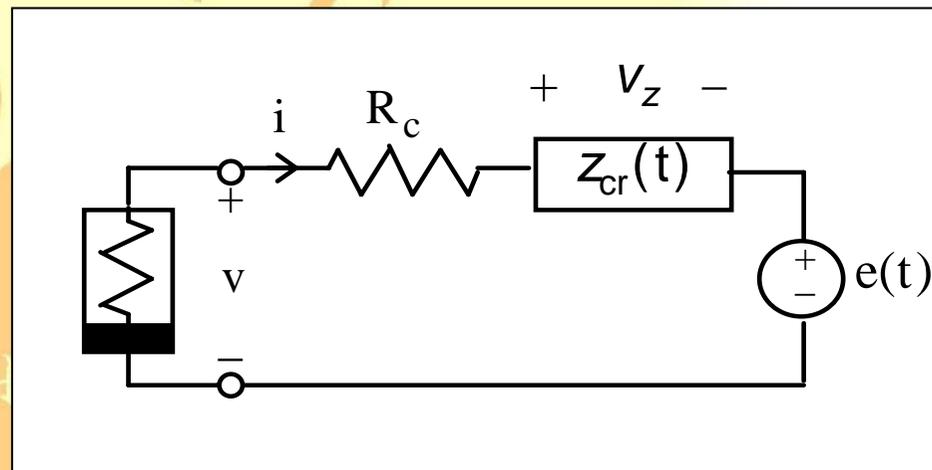
## Un risultato generale

Il problema è ben posto se il circuito resistivo associato ammette una ed una sola soluzione



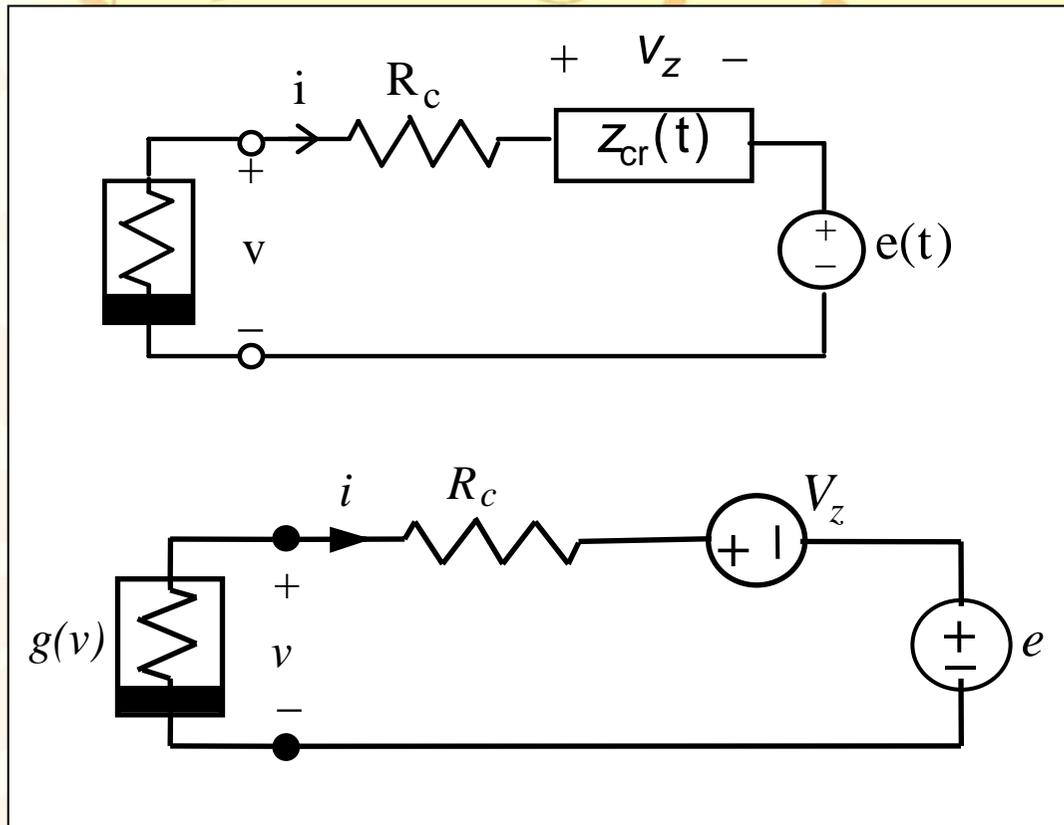
In questo modo tutti i risultati della Teoria dei Circuiti concentrati si estendono ai circuiti distribuiti

## Esempio: linea terminata su un resistore non lineare

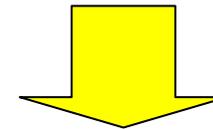


$$\begin{cases} i(t) + g[v(t)] = 0 \\ v(t) - R_c i(t) - v_z(t) - e(t) = 0 \\ v_z(t) = \int_0^t z_{cr}(t - \tau) i(\tau) d\tau \end{cases}$$

## Circuito resistivo associato



$$\begin{cases} i(t) + g[v(t)] = 0 \\ v(t) - R_c i(t) - v_z(t) - e(t) = 0 \\ v_z(t) = \int_0^t z_{cr}(t - \tau) i(\tau) d\tau \end{cases}$$



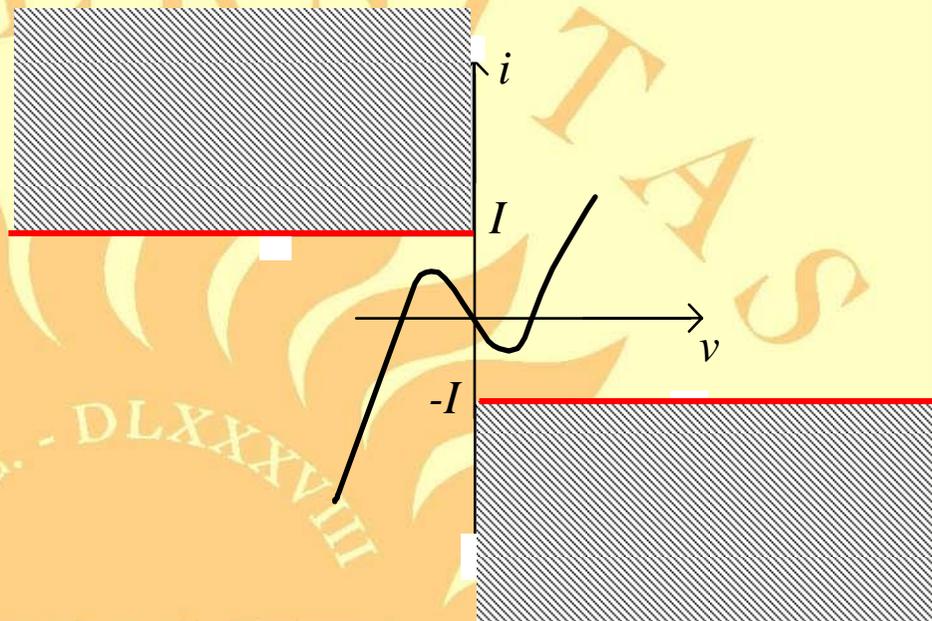
$$\begin{cases} i + g(v) = 0 \\ v - R_c i - (v_z + e) = 0 \end{cases}$$

## Condizioni sufficienti per la corretta posizione

- 1) la funzione  $g(v)$  è continua
- 2) il resistore è debolmente attivo
- 3) vale la relazione  $\frac{dg}{dv} > -\frac{1}{R_c}$

*Queste condizioni sono sufficienti a garantire che il modello ammette una ed una sola soluzione*

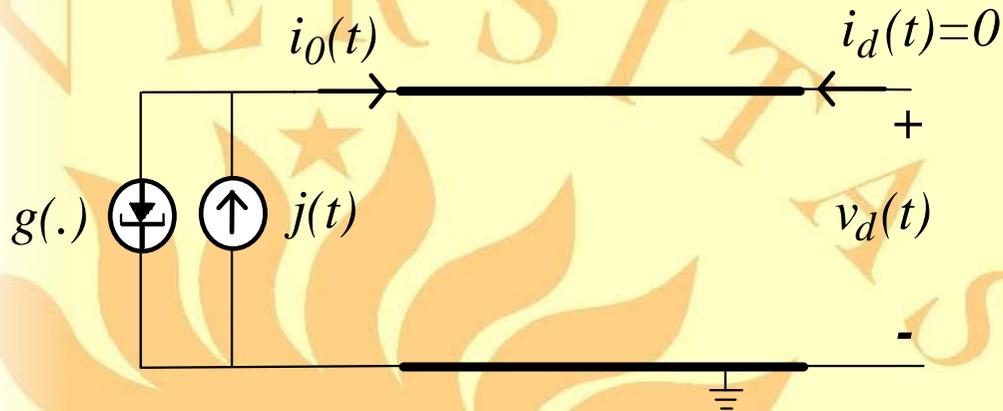
## Resistore debolmente attivo



resistore controllato in  
tensione debolmente  
attivo

La condizione  $\frac{dg}{dv} > -\frac{1}{R_c}$  impone un limite alla pendenza  
nel tratto negativo della stessa

## Un problema mal posto



Ipotesi: linea senza perdite, condizioni iniziali nulle, non è verificata la condizione sulla pendenza

$$dg/dv < -1/R_c$$

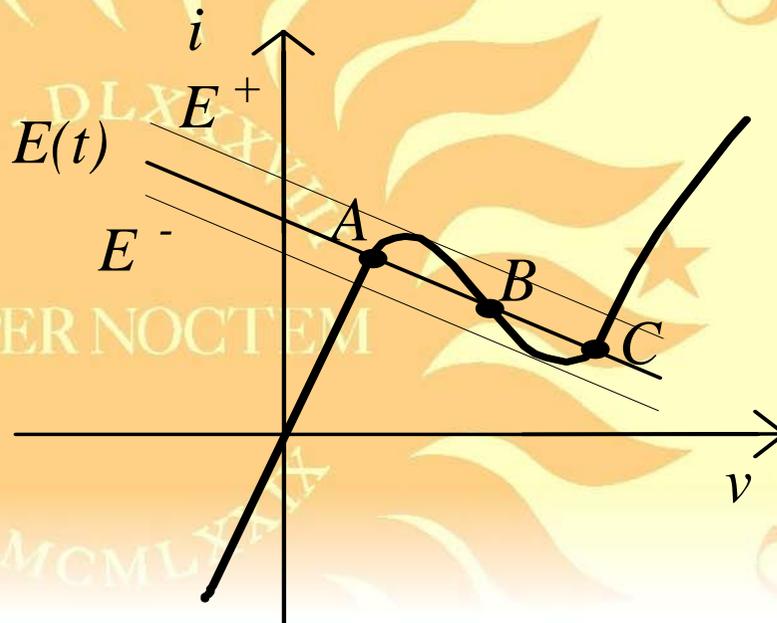
Soluzione alla terminazione di sinistra:

$$v - R_c (g(v) - j) - w = 0$$

## Un problema mal posto

$$v - R_c (g(v) - j) - w = 0$$

la soluzione è data dall'intersezione della  $g(\cdot)$  con la retta  
 $(E(t) - v(t)) / R_c$ , dove  $E(t) = -R_c j(t) + w(t)$

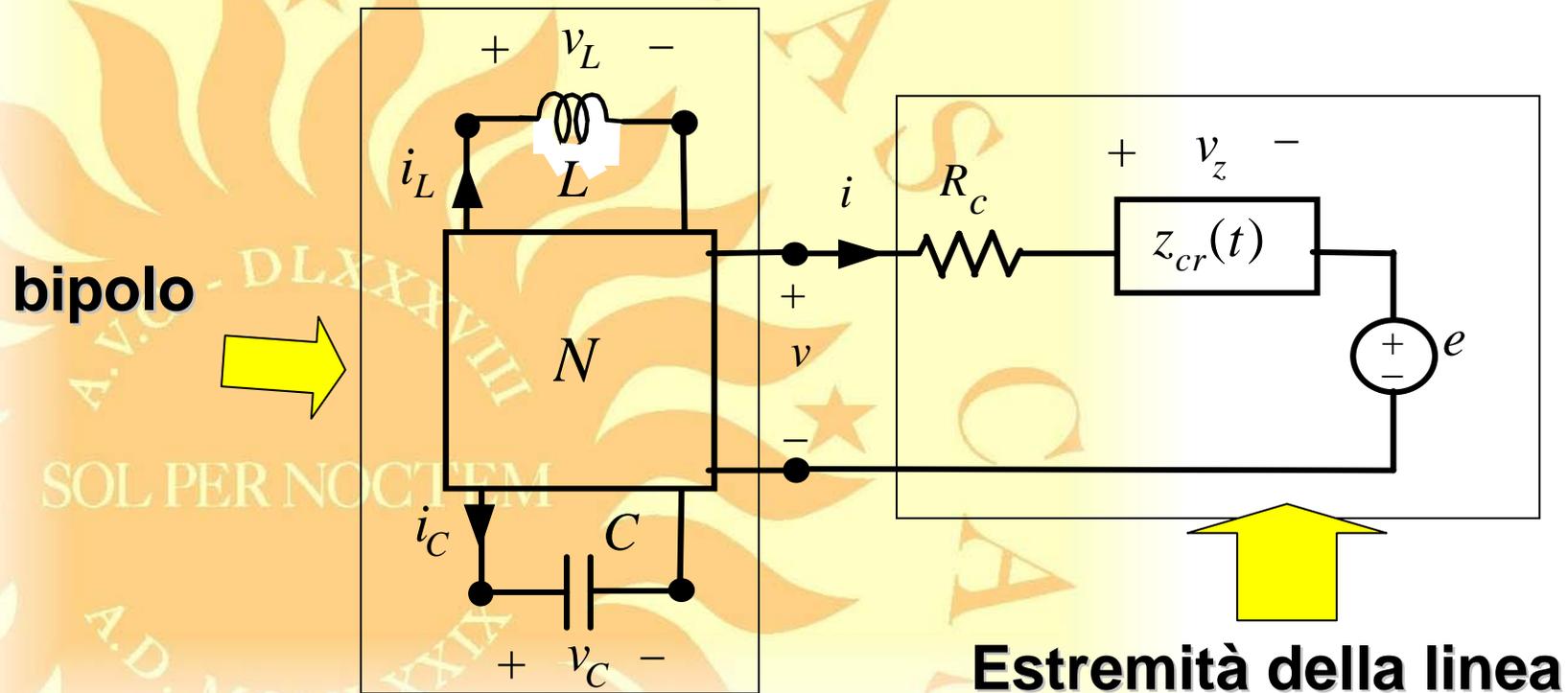


quando

$$E^- < E(t) < E^+$$

non è più garantita  
l'unicità della soluzione

## Modello numerico di una linea terminata su un bipolo non lineare e dinamico

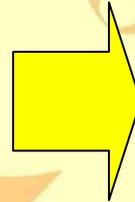


## Modello numerico

*integrazione con la regola dei trapezi*

$$v_z(t) = \int_0^t z_{cr}(t-\tau)i(\tau)d\tau$$

$$t_m = m\Delta t$$



$$V_z^{(m)} - \frac{\Delta t z_{cr}^{(0)}}{2} I^{(m)} = S^{(m)}$$

$$S^{(m)} = \Delta t \sum_{r=1}^{m-1} z_{cr}^{(m-r)} I^{(r)} + \frac{\Delta t}{2} z_{cr}^{(m)} I^{(0)}$$

## Modello numerico

$$I_L^{(m)} - \frac{\Delta t}{2L} V_L^{(m)} = Q_I^{(m)}$$

$$V_z^{(m)} - \frac{\Delta t z_{cr}^{(0)}}{2} I^{(m)} = S^{(m)}$$

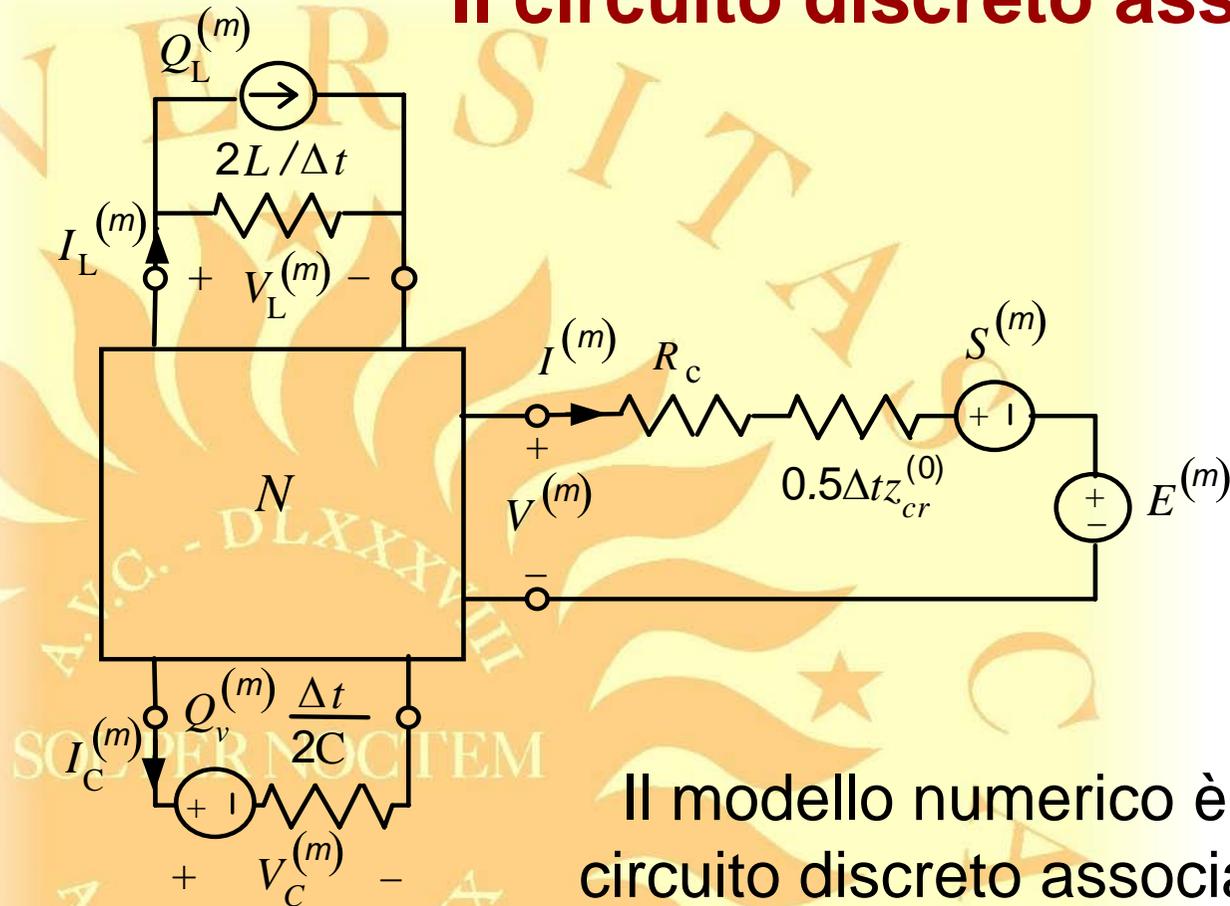
$$V_C^{(m)} - \frac{\Delta t}{2C} I_C^{(m)} = Q_V^{(m)}$$

$$V^{(m)} - R_c I^{(m)} - V_z^{(m)} = E^{(m)}$$

$$\mathbf{N}\left(\mathbf{V}^{(m)}, \mathbf{I}^{(m)}, V_C^{(m)}, I_C^{(m)}, V_L^{(m)}, I_L^{(m)}, V_z^{(m)}, I_z^{(m)}\right) = \mathbf{0}$$

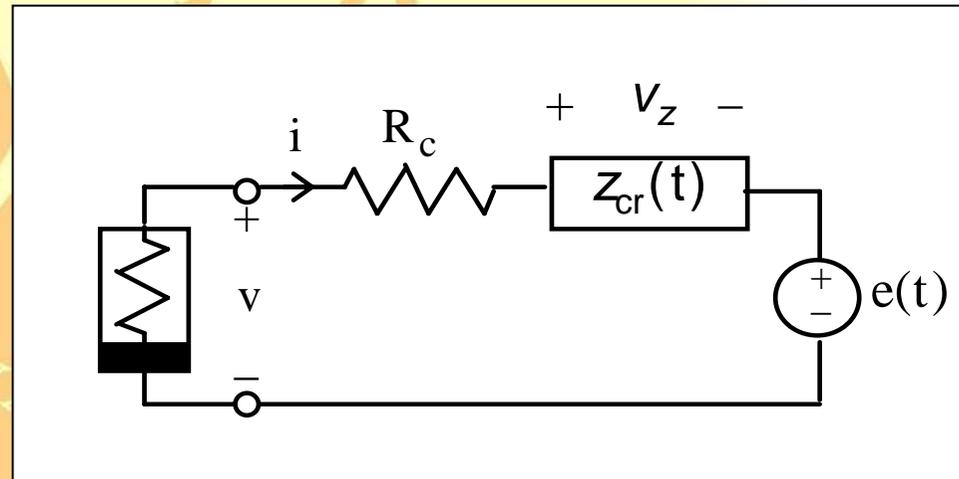
E' possibile garantire la  
convergenza della soluzione  
numerica?

## Il circuito discreto associato



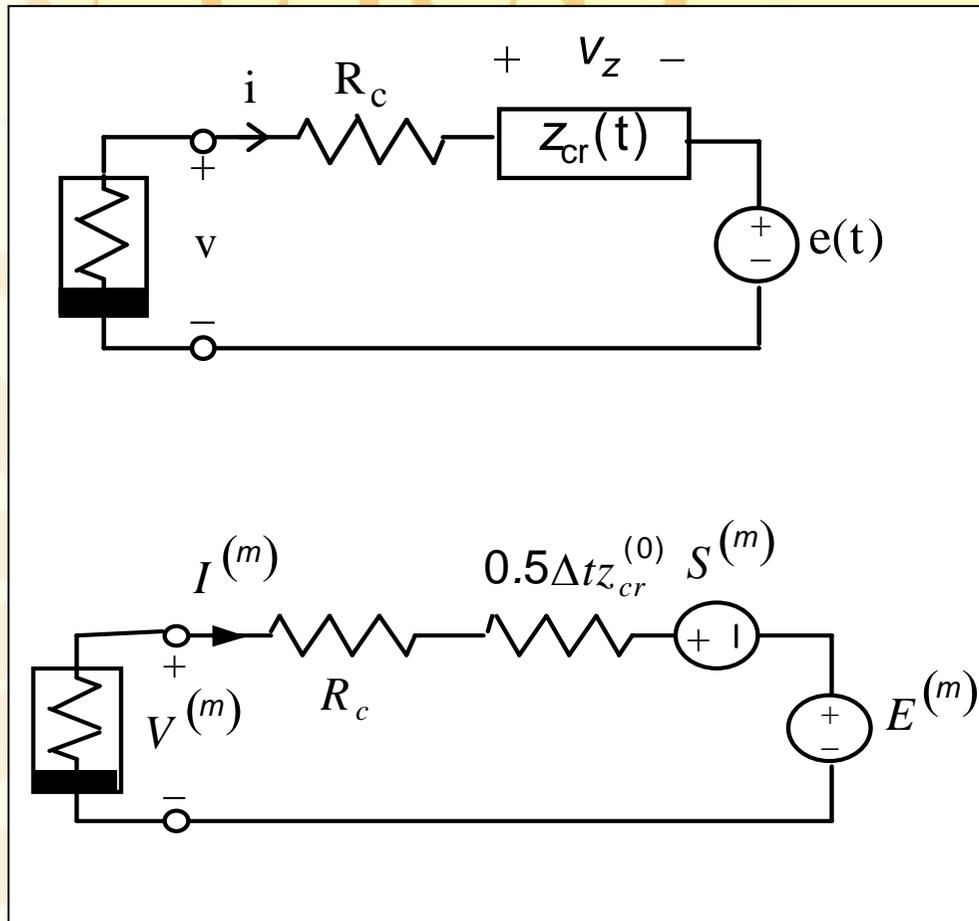
Il modello numerico è ben posto se il circuito discreto associato ammette una ed una sola soluzione

## Esempio: linea terminata su un resistore non lineare

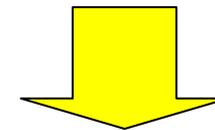


$$\begin{cases} i(t) + g[v(t)] = 0 \\ v(t) - R_c i(t) - v_z(t) - e(t) = 0 \\ v_z(t) = \int_0^t z_{cr}(t - \tau) i(\tau) d\tau \end{cases}$$

## Circuito discreto associato



$$\begin{cases} i(t) + g[v(t)] = 0 \\ v(t) - R_c i(t) - v_z(t) - e(t) = 0 \\ v_z(t) = \int_0^t z_{cr}(t - \tau) i(\tau) d\tau \end{cases}$$



$$\begin{cases} I^{(m)} + g(V^{(m)}) = 0, \\ V^{(m)} - R_c I^{(m)} - V_z^{(m)} = E^{(m)} \\ V_z^{(m)} - 0.5 z_{cr}^{(0)} \Delta t I^{(m)} = S^{(m)} \end{cases}$$

## Corretta posizione del problema numerico

- 1) la funzione  $g(v)$  è continua
- 2) il resistore è debolmente attivo

3) vale la relazione  $\frac{dg}{dv} > -\frac{1}{R_{eff}}$

$$R_{eff} = R_c \left( 1 + 0.5 \Delta t z_{cr}^{(0)} / R_c \right)$$

*Queste condizioni sono sufficienti a garantire che il modello numerico ammette una ed una sola soluzione*

## Interpretazione della condizione sulla pendenza

$$\frac{dg}{dv} > -\frac{1}{R_{eff}} \quad R_{eff} = R_c \left( 1 + 0.5 \Delta t z_{cr}^{(0)} / R_c \right)$$

Per un particolare problema resta fissata la quantità

$$x_m = \min \left\{ R_c \frac{dg}{dv} \right\}$$

Il passo di discretizzazione dovrà risultare

$$\Delta t < \frac{2}{|v|} \frac{1 + x_m}{|x_m|}$$

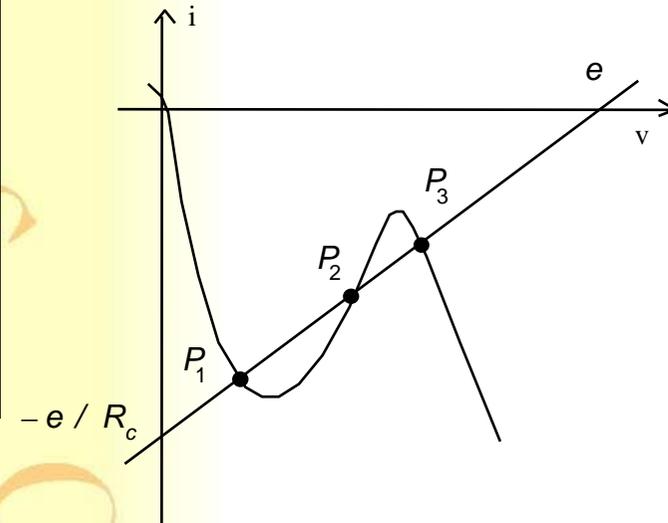
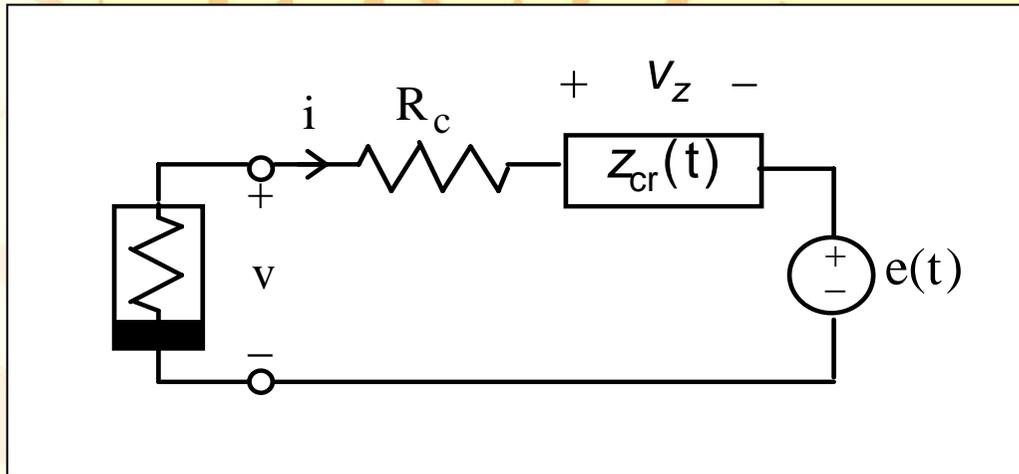
## Interpretazione della condizione sulla pendenza

$$\Delta t < \frac{2}{|v|} \frac{1+x_m}{|x_m|} \quad x_m = \min \left\{ R_c \frac{dg}{dv} \right\}$$

Se la condizione sulla pendenza è rispettata, si ha  $x_m > -1$  quindi è sempre possibile scegliere un  $\Delta t$  opportunamente piccolo in modo che il problema numerico risulti ben posto.

In caso contrario qualunque sia  $\Delta t$  il problema numerico è sempre mal posto (non c'è l'unicità)

## Riformulazione di un problema mal posto

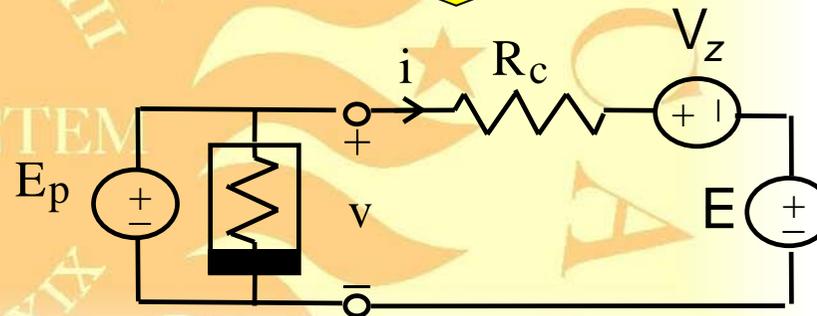
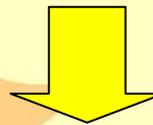
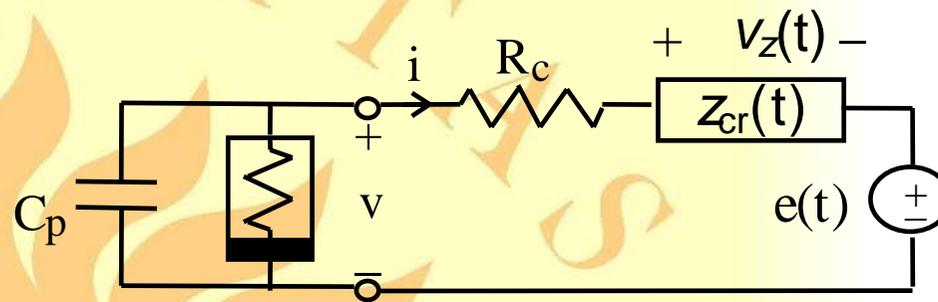


$$\begin{cases} i + g(v) = 0 \\ v - R_c i - (V_z + e) = 0 \end{cases}$$

$$i = F(u) = F(V_z + e)$$

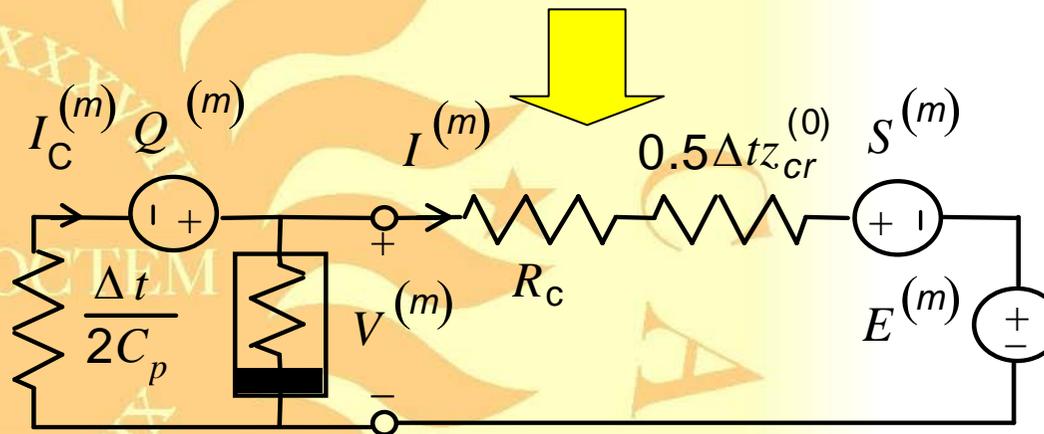
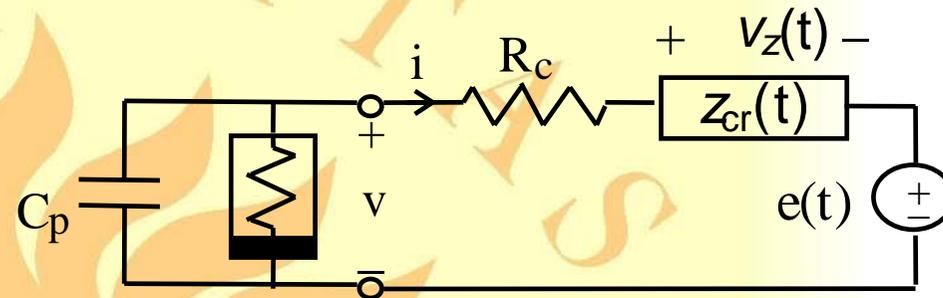
$$\frac{dg}{dv} < -\frac{1}{R_c}$$

## Modello di ordine superiore: effetto di una capacità parassita



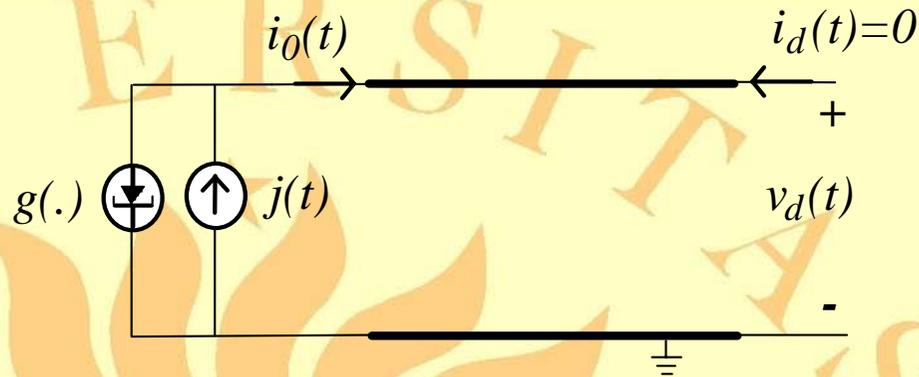
**circuito resistivo associato**

## Modello di ordine superiore: effetto di una capacità parassita

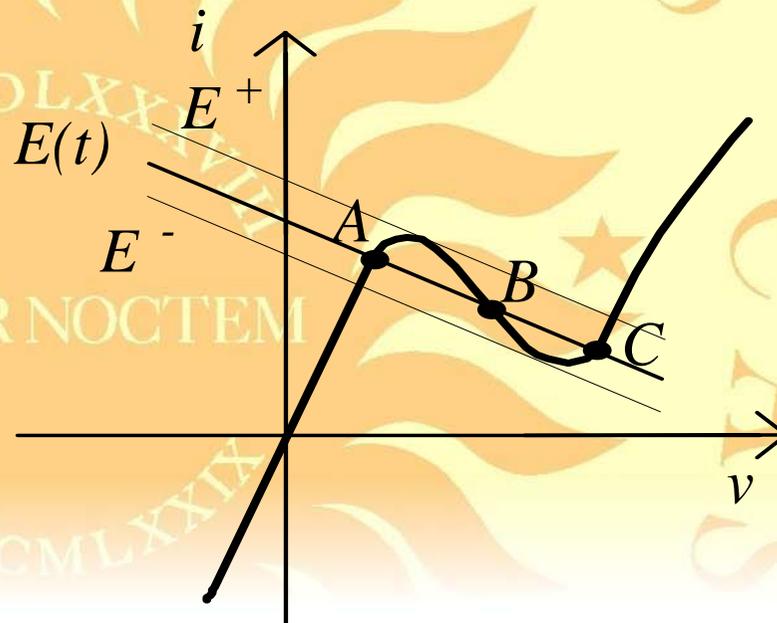


**circuito discreto associato**

## Interpretazione del modello di ordine superiore



$$dg/dv < -1/R_c$$

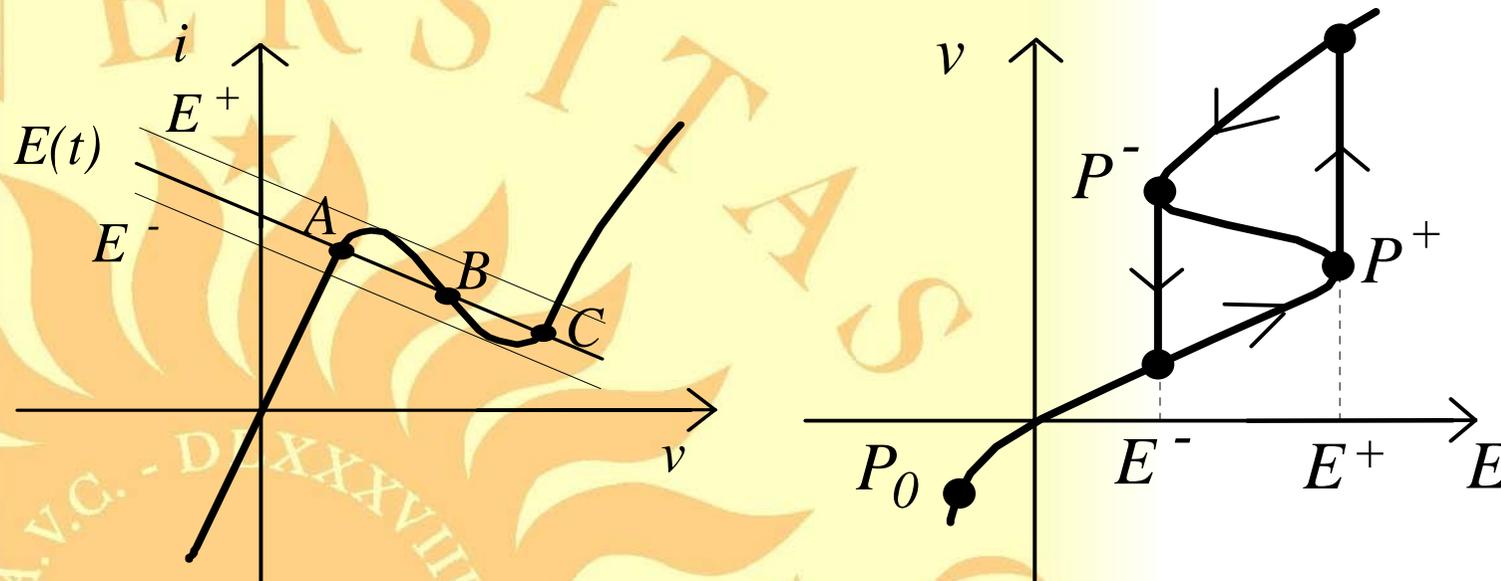


quando

$$E^- < E(t) < E^+$$

non è più garantita  
 l'unicità della soluzione

## Interpretazione del modello di ordine superiore

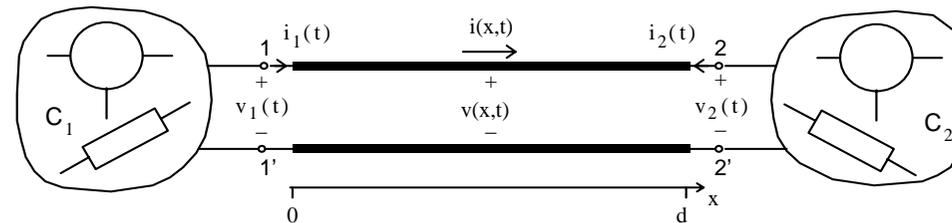


la capacità impone la *continuità della soluzione*,  
quindi si discriminano le possibili soluzioni in  $E^- < E(t) < E^+$



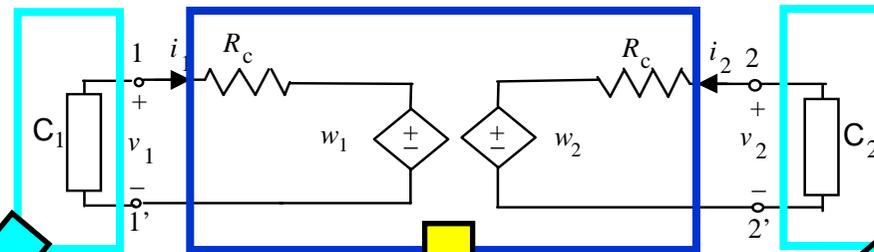
# Simulazione di linee di trasmissione singole ideali

## Formulazione del problema



$$z_c(t) = R_c \delta(t)$$

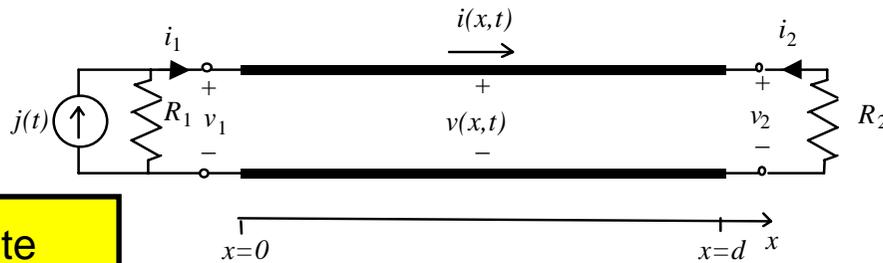
$$p(t) = \delta(t - T)$$



$$f_1[v_1(\cdot), i_1(\cdot), t] = 0$$

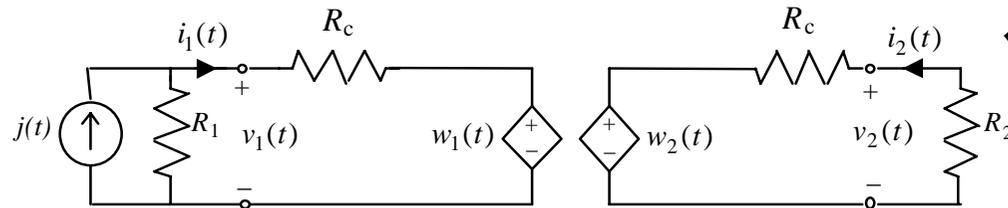
$$\begin{cases} v_1(t) - R_c i_1(t) = w_1(t) \\ v_2(t) - R_c i_2(t) = w_2(t) \\ w_1(t) = 2v_2(t - T) - w_2(t - T) \\ v_2(t) = 2v_1(t - T) - w_1(t - T) \end{cases}$$

$$f_2[v_2(\cdot), i_2(\cdot), t] = 0$$



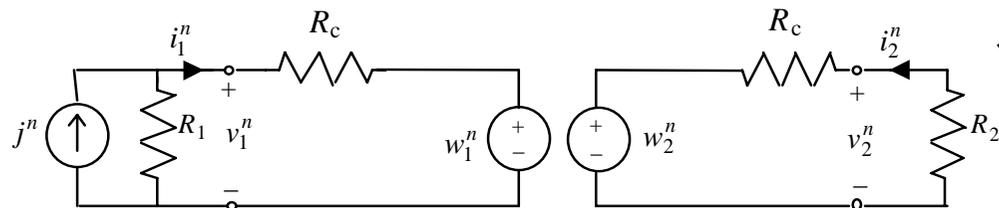
rete

$$\begin{cases} v_1(t) - R_c i_1(t) = w_1(t) \\ v_2(t) - R_c i_2(t) = w_2(t) \\ w_1(t) = 2v_2(t-T) - w_2(t-T) \\ w_2(t) = 2v_1(t-T) - w_1(t-T) \end{cases}$$



Circuito equivalente

$$\begin{cases} i_1(t) = j(t) - v_1(t)/R_1 \\ v_2(t) = -R_2 i_2(t) \end{cases}$$

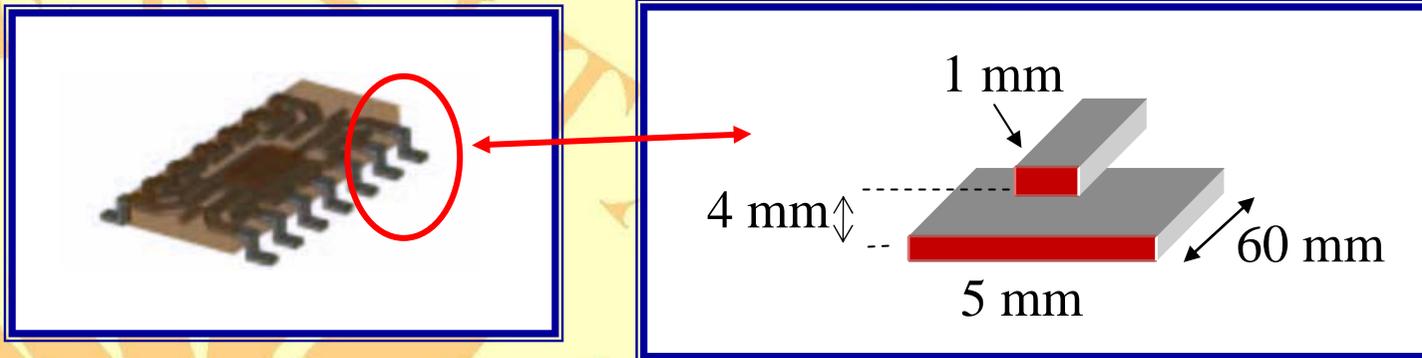


Circuito discreto associato

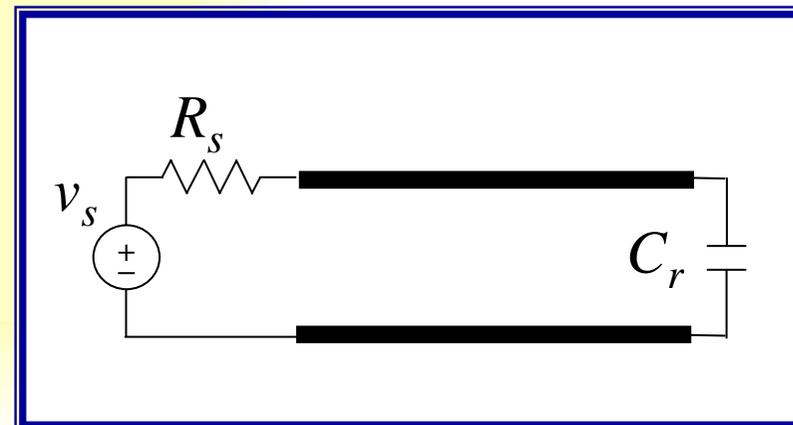
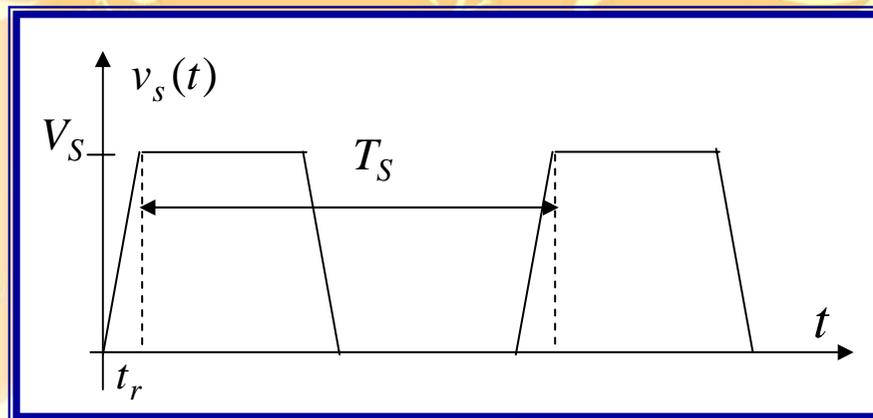
$$\begin{cases} v_1^n = \frac{R_1}{R_1 + R_c} (w_1^n + R_c j^n) \\ v_1^n = \frac{R_2}{R_2 + R_c} w_2^n \end{cases} \quad \begin{cases} t = n\Delta t \\ T = m\Delta t \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1^n = 2v_2^{n-m} - w_2^{n-m} \\ w_2^n = 2v_1^{n-m} - w_1^{n-m} \end{cases}$$

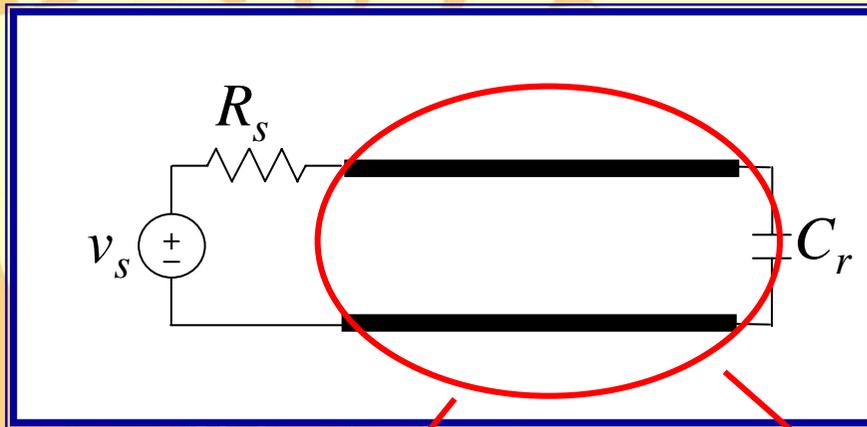
## Esempio: analisi di interconnessione su package



**problema- tipo:** trasmissione del segnale di clock



## Confronto tra modelli: distribuito e concentrato



$$L = 0.324 \mu\text{H/m}$$

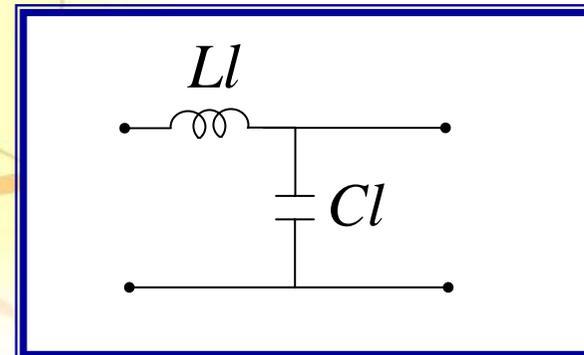
$$C = 34.37 \text{ pF/m}$$

$$Z_0 = 97.02 \Omega$$

$$T = 0.2 \text{ ns}$$

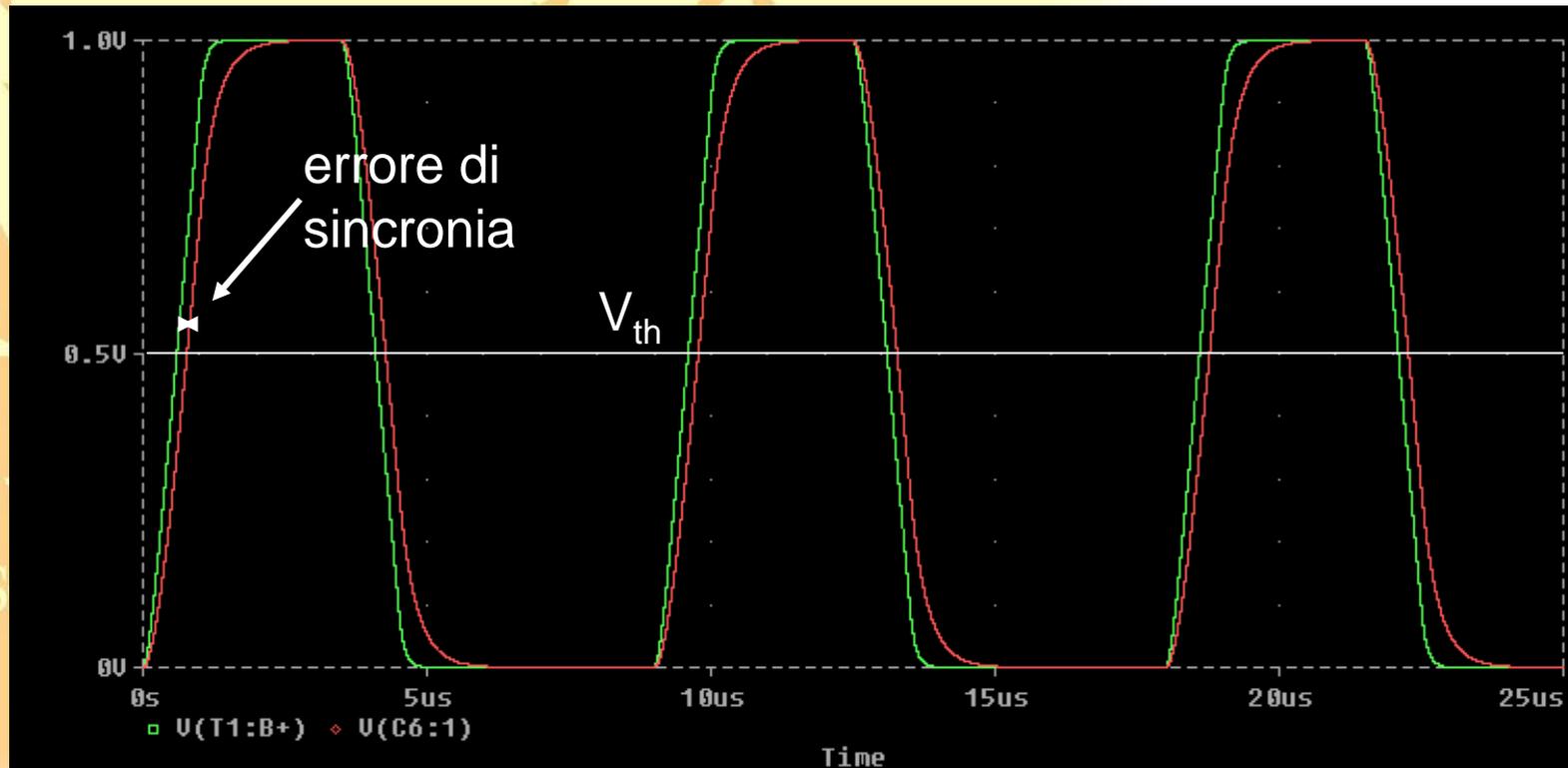
$$l = 60 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} -\frac{dv(z,t)}{dz} &= L \frac{di(z,t)}{dt} \\ -\frac{di(z,t)}{dz} &= C \frac{dv(z,t)}{dt} \end{aligned}$$



## Tensione sul ricevitore

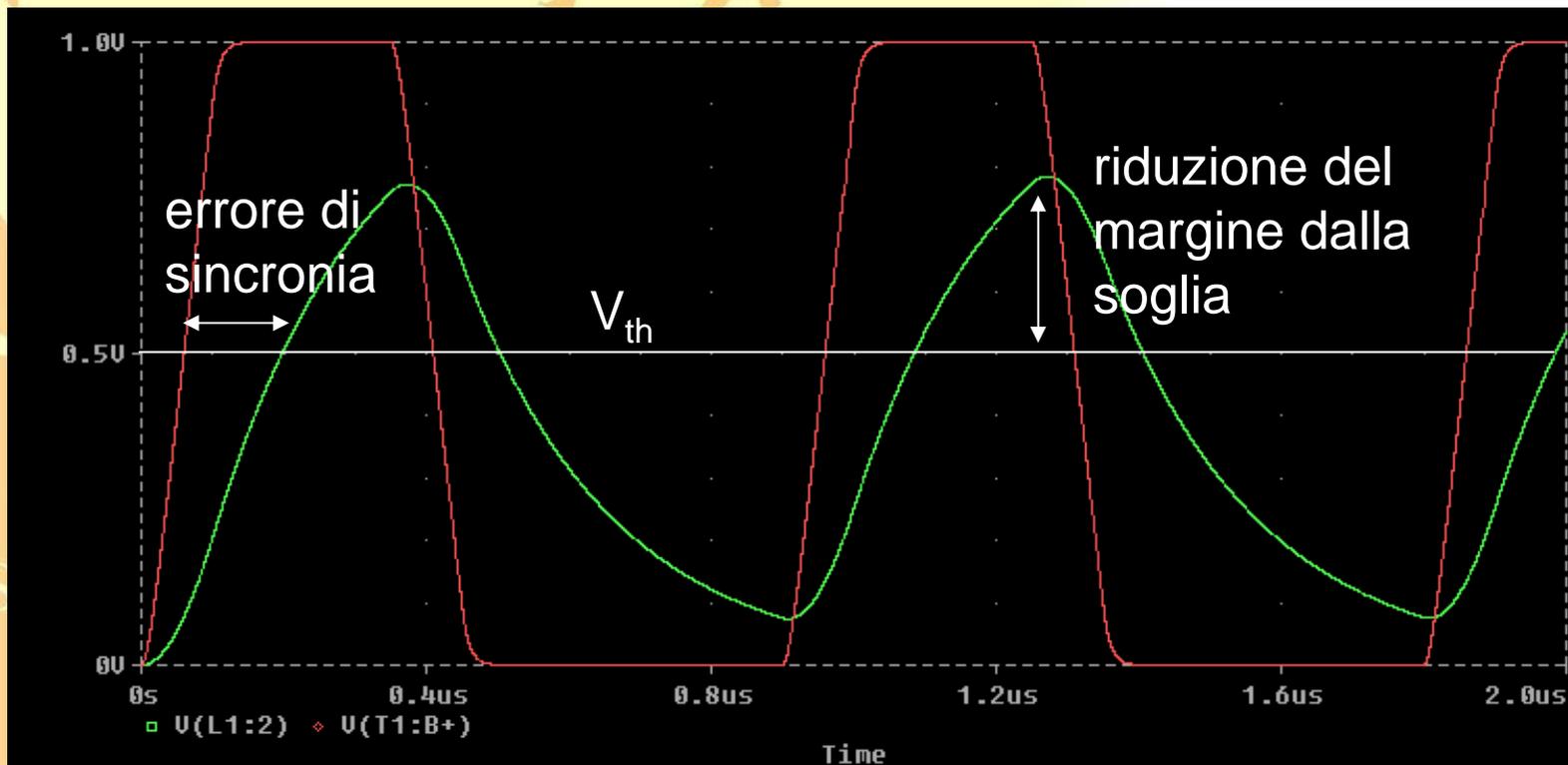
$$V_s = 1 \text{ V}, R_s = Z_0, C_r = 1 \text{ nF}, t_r = 1 \mu\text{s}, T_s = 9 \mu\text{s}$$



— distribuito — concentrato

## Tensione sul ricevitore

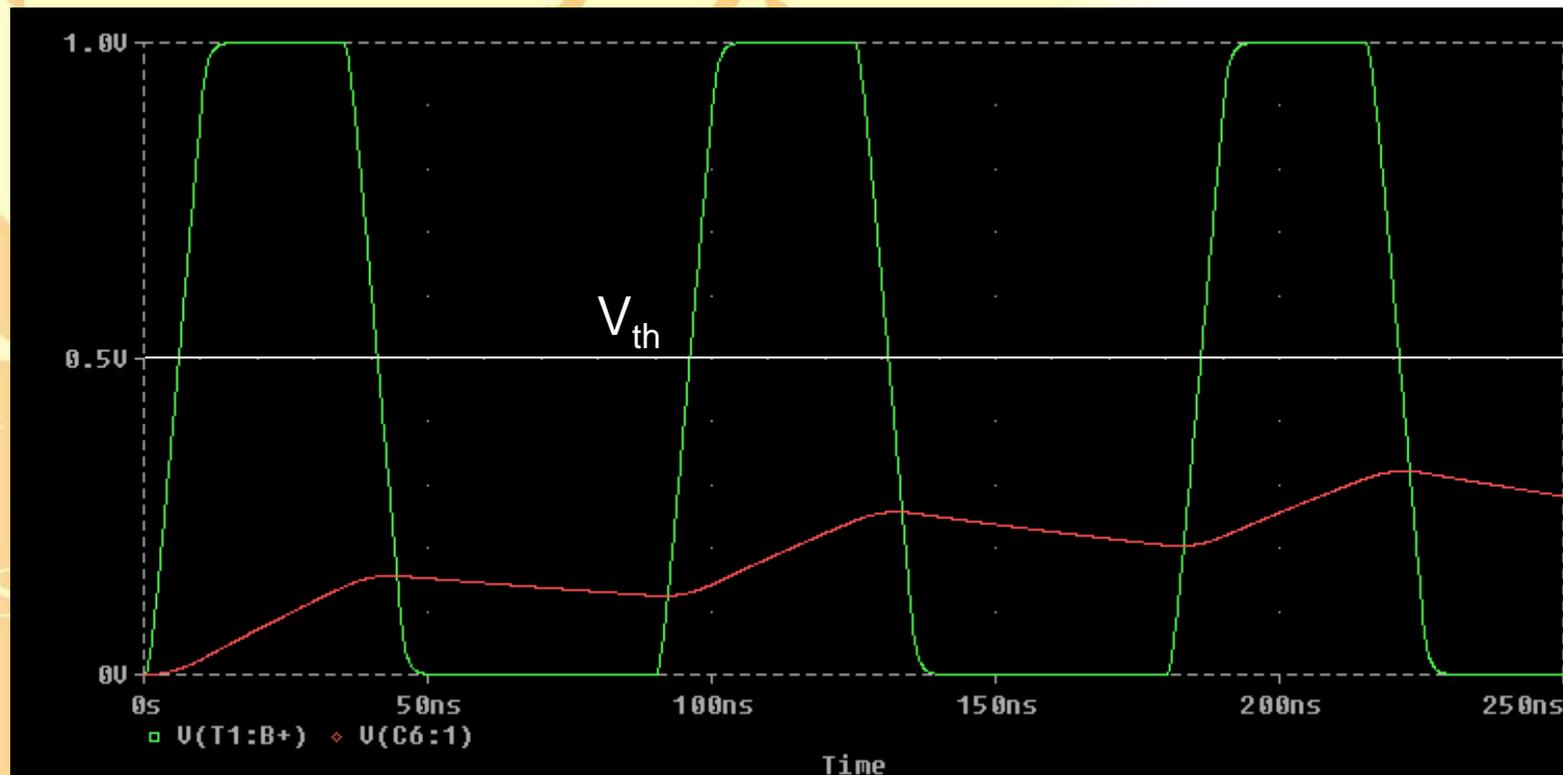
$$V_S = 1 \text{ V}, R_S = Z_0, C_r = 0.1 \text{ nF}, t_r = 0.1 \mu\text{s}, T_s = 0.9 \mu\text{s}$$



— distribuito — concentrato

## Tensione sul ricevitore

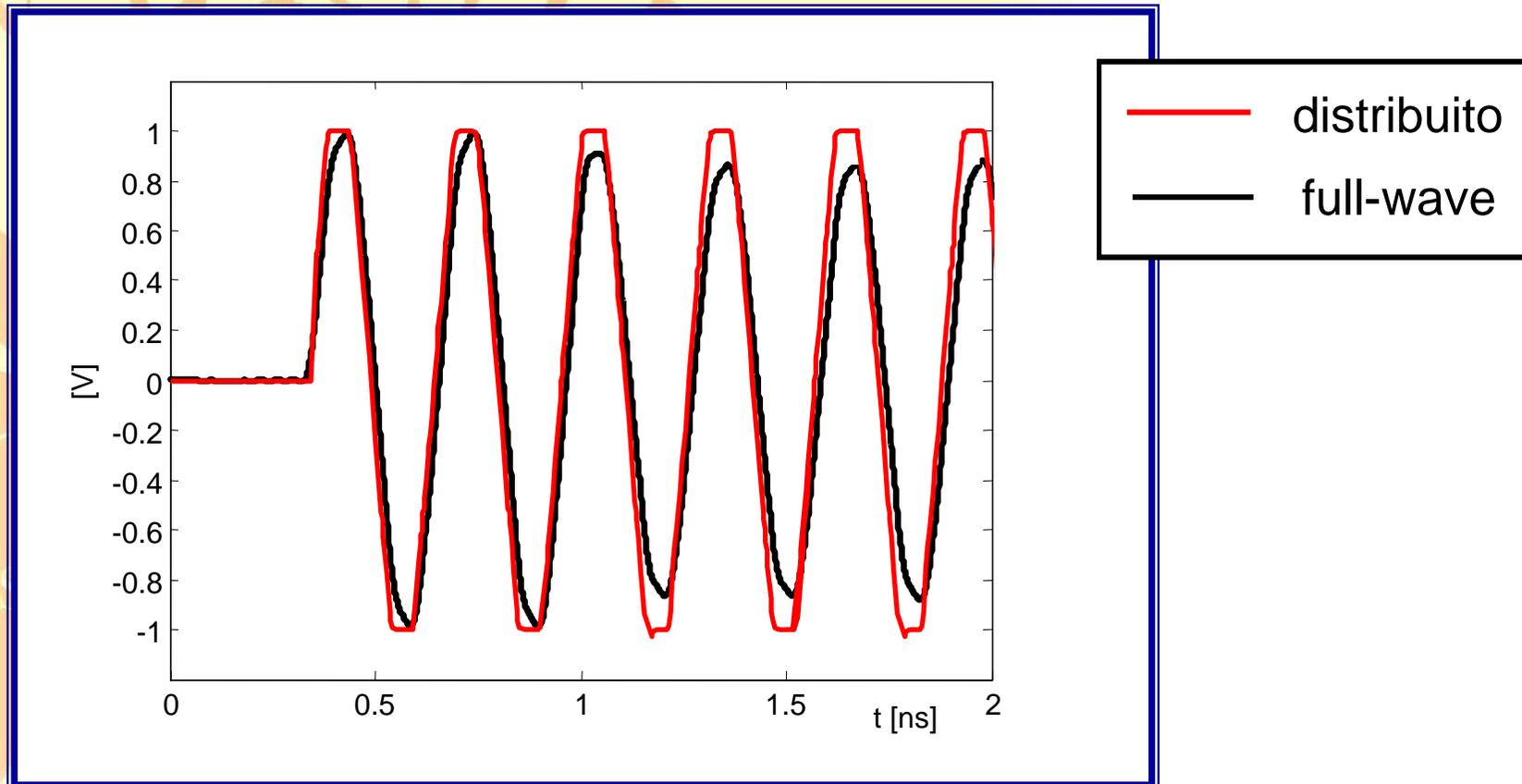
$$V_S = 1 \text{ V}, R_S = Z_0, C_r = 0.01 \text{ nF}, t_r = 10 \text{ ns}, T_s = 90 \text{ ns}$$



— distribuito      — concentrato

## Tensione sul ricevitore

$$V_S = 1 \text{ V}, R_S = Z_0, C_r = 0.1 \text{ pF}, t_r = 0.09 \text{ ns}, T_S = 0.3 \text{ ns}$$

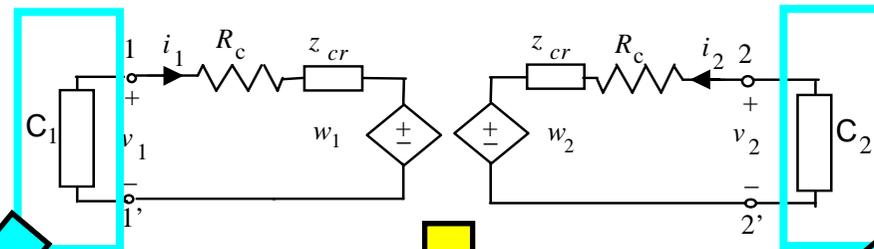
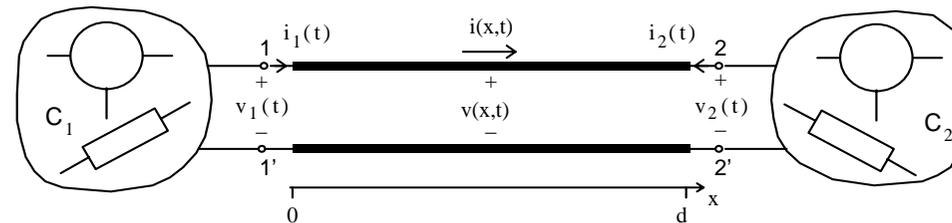


$\lambda$  confrontabile con la dimensione trasversa: occorre un modello full-wave!



# Simulazione di linee di trasmissione singole con perdite

## Formulazione del problema



$$f_1[v_1(\cdot), i_1(\cdot), t] = 0$$

$$\begin{cases} v_1(t) - R_c i_1(t) - z_{cr}(t) * i_1(t) = w_1(t) \\ v_2(t) - R_c i_2(t) - z_{cr}(t) * i_2(t) = w_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1(t) = p(t) * [2v_2(t) - w_2(t)] \\ v_2(t) = p(t) * [2v_1(t) - w_1(t)] \end{cases}$$

$$f_2[v_2(\cdot), i_2(\cdot), t] = 0$$

## Valutazione delle risposte impulsive

$$Z_c(s) = Z_{cp}(s) + Z_{cr}(s)$$



$$z_c(t) = z_{cp}(t) + z_{cr}(t)$$

$$P(s) = P_p(s) + P_r(s)$$



$$p(t) = p_p(t) + p_r(t)$$

per  $s \rightarrow \infty$  :

$$P(s) \approx P_p(s)$$

$$P_r(s) = O(s^{-1})$$

$$Z_c(s) \approx Z_{cp}(s)$$

$$Z_{cr}(s) = O(s^{-1})$$

- decomposizione in parte *principale* e *regolare*
- valutazione analitica delle parti principali
- valutazione numerica dei remainders

## Convoluzioni: metodo dei trapezi

$$t = n\Delta t \quad T = m\Delta t$$

$$\tilde{v}(t) = z_{cr}(t) * i(t) \quad \rightarrow$$

$$\tilde{v}^n \cong \frac{\Delta t}{2} z_{cr}^0 i^n + S^n$$

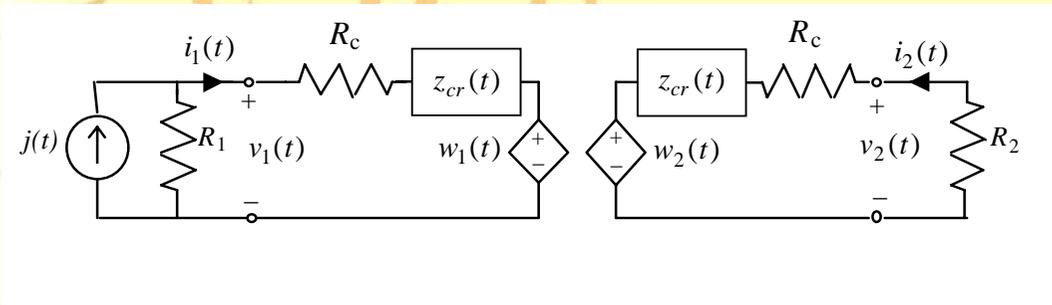
$$S^n = \frac{\Delta t}{2} z_{cr}^n i^0 + \Delta t \sum_{k=1}^{n-1} z_{cr}^{n-k} i^k$$

$$\tilde{w}(t) = p(t) * y(t)$$

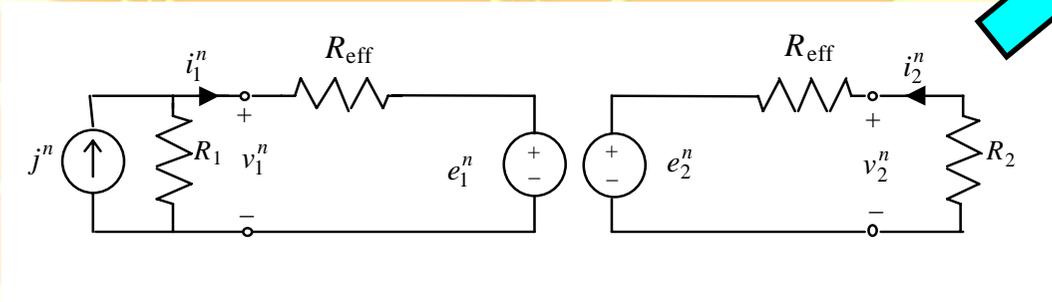
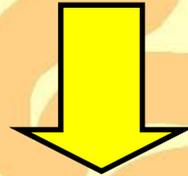
$$y(t) = 2v(t) - w(t) \quad \rightarrow$$

$$p_r(t) = L^{-1} \left\{ e^{-sT} [P(s) - P_p(s)] \right\}$$

$$\tilde{w}^{(n)} = \frac{\Delta t}{2} p_r^0 y^{(n-m)} + \Delta t \sum_{k=1}^{n-1} \hat{p}_r^{(n-k)} y^{(k-m)}$$

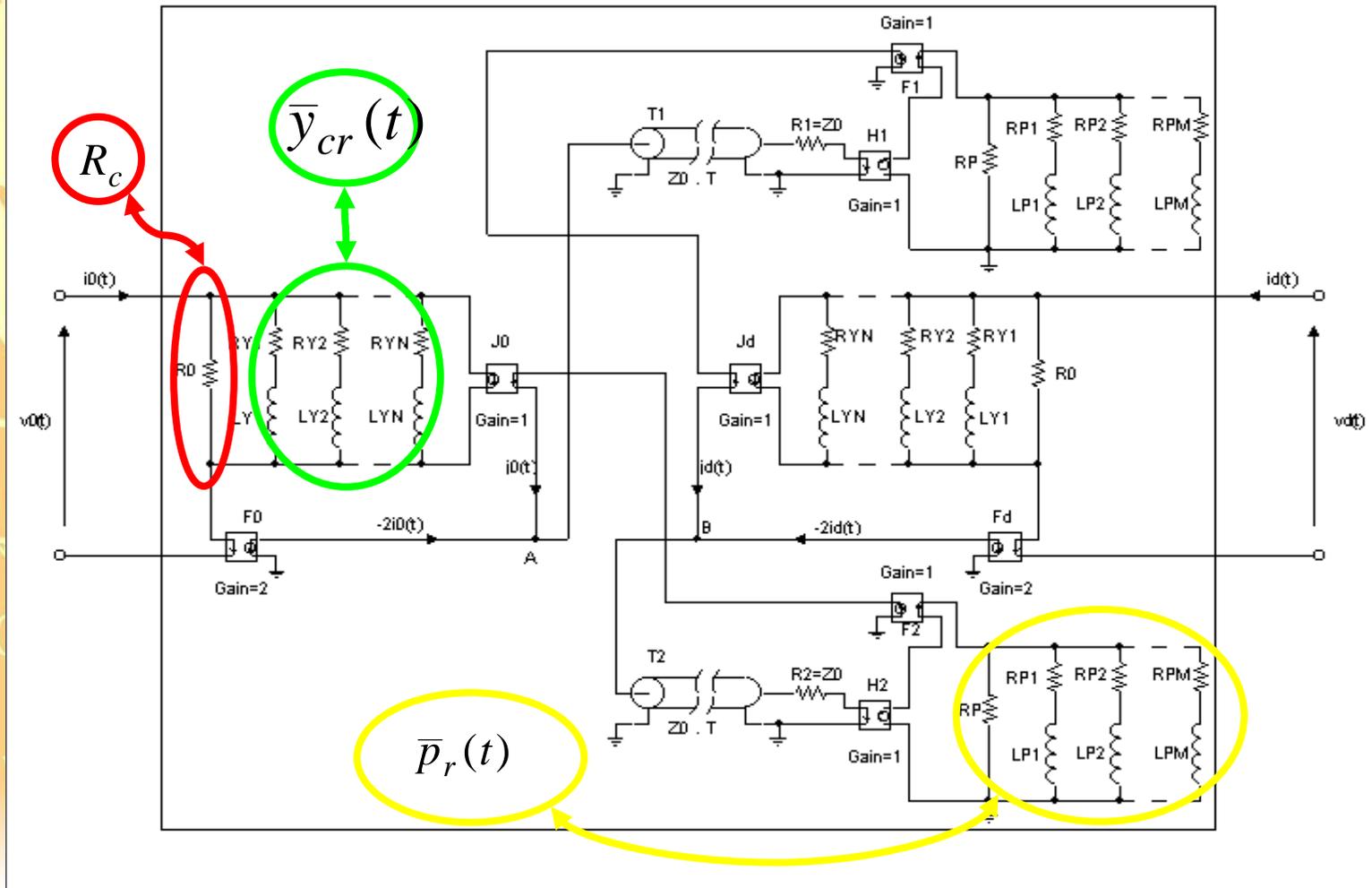


$$R_{eff} = R_c + 0.5 z_{rc}^0 \Delta t$$

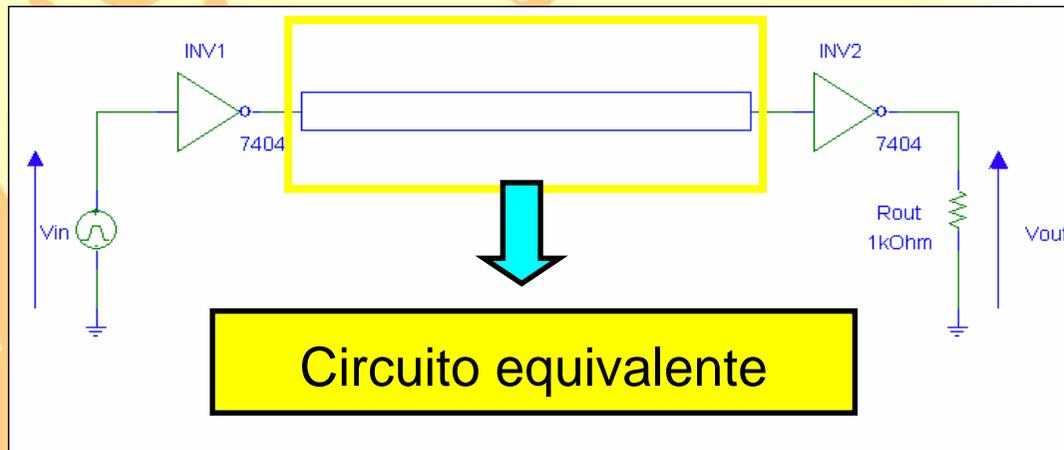


$$\begin{cases} v_1^n = \frac{R_1}{R_1 + R_{eff}} (e_1^n + R_{eff} j^n) \\ v_1^n = \frac{R_2}{R_2 + R_{eff}} e_2^n \\ e_1^n = w_1^n + \frac{\Delta t}{2} z_{cr}^n i_1^{;0} + \Delta t \sum_{k=1}^{n-1} z_{cr}^{n-k} i_1^{;k} \\ e_2^n = w_2^n + \frac{\Delta t}{2} z_{cr}^n i_2^{;0} + \Delta t \sum_{k=1}^{n-1} z_{cr}^{n-k} i_2^{;k} \end{cases}$$

## Esempio: linea singola RLGC



## Esempio: effetto di distorsione del segnale introdotto dalle perdite



$$C = 4 \text{ pF} / \text{cm}$$

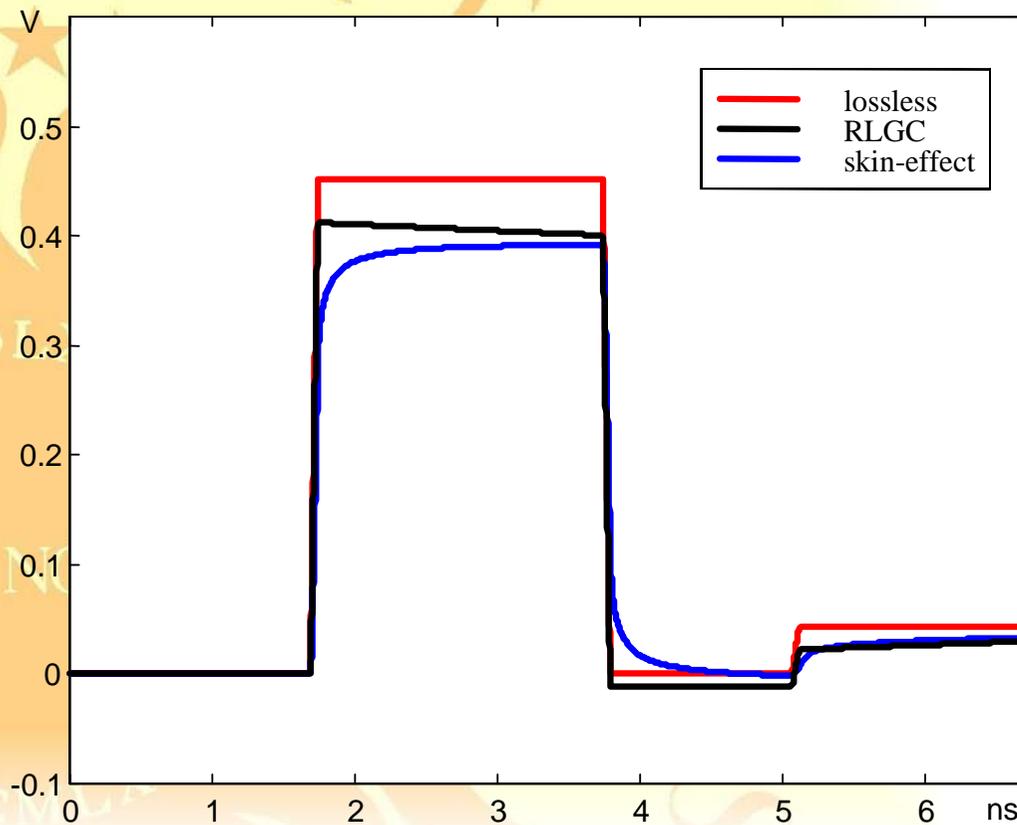
$$L = 10 \text{ nH} / \text{cm}$$

$$R = 2.5 \Omega / \text{m}$$

$$G = 0.5 \text{ mS} / \text{cm}$$

$$d = 5 \text{ cm}$$

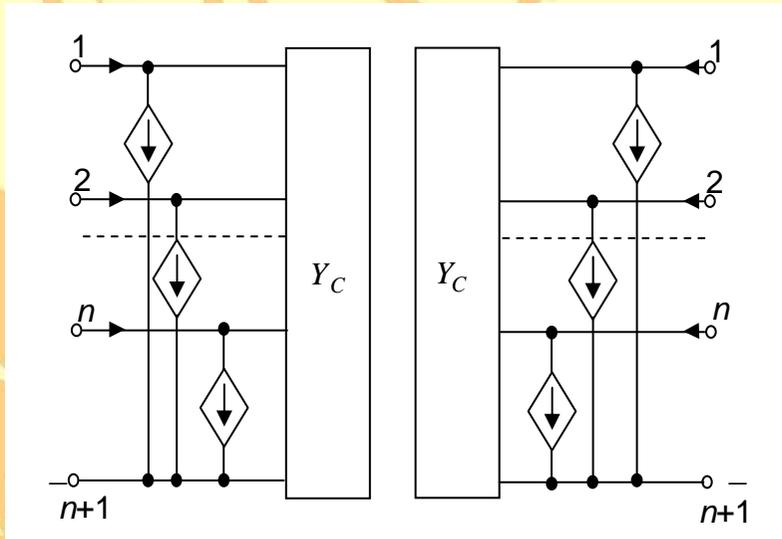
## Esempio: effetto di distorsione del segnale introdotto dalle perdite





# Simulazione di linee di trasmissione multiconduttore

## Linee ad $n+1$ conduttori con ritardi diversi



$$\mathbf{i}_1(t) = y_c(t) * \mathbf{v}_1(t) + \mathbf{j}_1(t)$$

$$\mathbf{i}_2(t) = y_c(t) * \mathbf{v}_2(t) + \mathbf{j}_2(t)$$

$$\mathbf{j}_1(t) = p(t) * [-2\mathbf{i}_2(t) + \mathbf{j}_2(t)]$$

$$\mathbf{j}_2(t) = p(t) * [-2\mathbf{i}_1(t) + \mathbf{j}_1(t)]$$

Due casi possibili:

Dielettrico omogeneo:  $n$  modi TEM  
 con la stessa velocità

$$\Rightarrow p(t) = I\delta(t - T)$$

Dielettrico non-omogeneo:  $n$  modi  
 TEM con la velocità diverse

$$\Rightarrow p(t) = T_v \Delta(t) T_v^{-1} = \sum_{h=1}^n \mathbf{e}_h \mathbf{s}_h^T \delta(t - T_h)$$

## Funzioni descrittive: operatore di propagazione e ammettenza caratteristica

$$y_c(t) \xleftrightarrow{L} Y_c(s) = L^{-1} \sqrt{Z^{-1}(s) Y^{-1}(s) Y(s)}$$

$$p(t) \xleftrightarrow{L} P(s) = e^{-d \sqrt{Y(s) Z(s)}}$$

Non è possibile valutarle analiticamente

Non è possibile ricorrere ad una procedura di inversione completamente numerica, per la presenza di termini *irregolari*

**Parametri indipendenti  
dalla frequenza**

$$Z(s) = R + sL$$

$$Y(s) = G + sC$$

**Parametri dipendenti dalla  
frequenza (skin-effect)**

$$Z(s) = R + K\sqrt{s} + sL$$

$$Y(s) = G + sC$$

## Esempio: linea RLGC a 4 conduttori

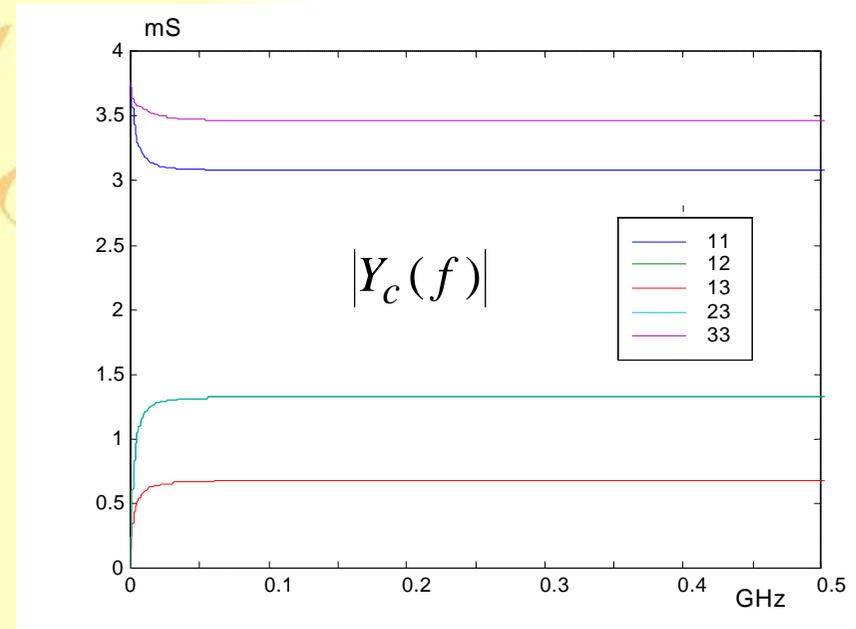
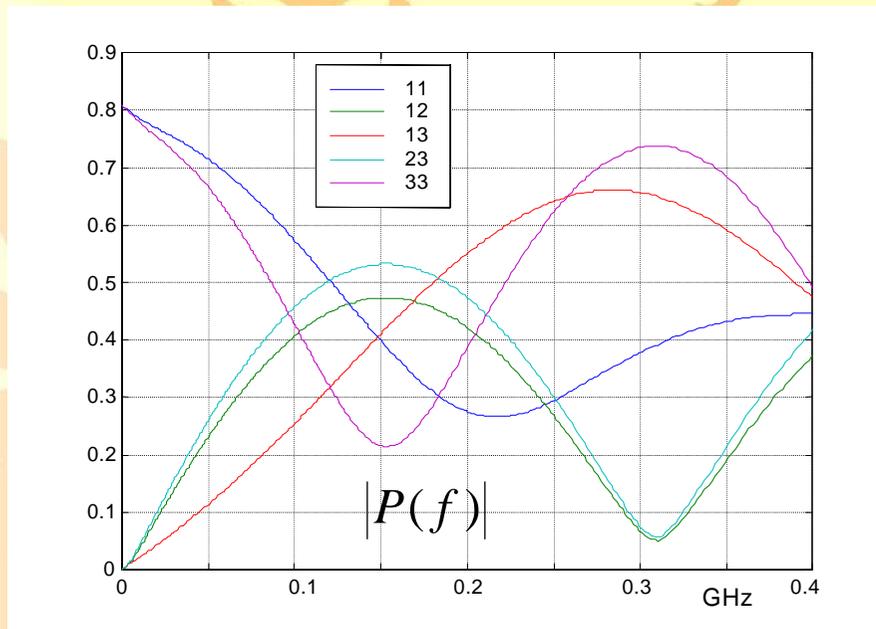
$$L = \begin{bmatrix} 2.42 & 0.69 & 0.64 \\ 0.69 & 2.36 & 0.69 \\ 0.64 & 0.69 & 2.42 \end{bmatrix} [\mu H] / [m] \quad C = \begin{bmatrix} 21.0 & -12.3 & -4.01 \\ -12.3 & 26.2 & -12.3 \\ -4.01 & -12.3 & 21.0 \end{bmatrix} [pF] / [m]$$

$$G = \text{diag}(0.59, 0.59, 0.59) [mS] / [m]$$

$$R = \text{diag}(41.67, 41.67, 41.67) [\Omega] / [m]$$

modo	$\mu_i / 10^7 [s^{-1}]$	$T_i [ns]$
1	3.6404	8.8272
2	6.6667	2.3437
3	8.1404	1.9879

## Esempio: spettro di ampiezza delle funzioni descrittive



## Valutazione semi-analitica delle risposte impulsive di una linea multiconduttore

$$Y_c(s) = Y_{cp}(s) + Y_{cr}(s)$$



$$y_c(t) = y_{cp}(t) + y_{cr}(t)$$

$$P(s) = P_p(s) + P_r(s)$$



$$p(t) = p_p(t) + p_r(t)$$

$$P(s) \approx P_p(s) \quad \text{per } s \rightarrow \infty$$

$$P_r(s) = O(s^{-1}) \quad \text{per } s \rightarrow \infty$$

$$Y_c(s) \approx Y_{cp}(s) \quad \text{per } s \rightarrow \infty$$

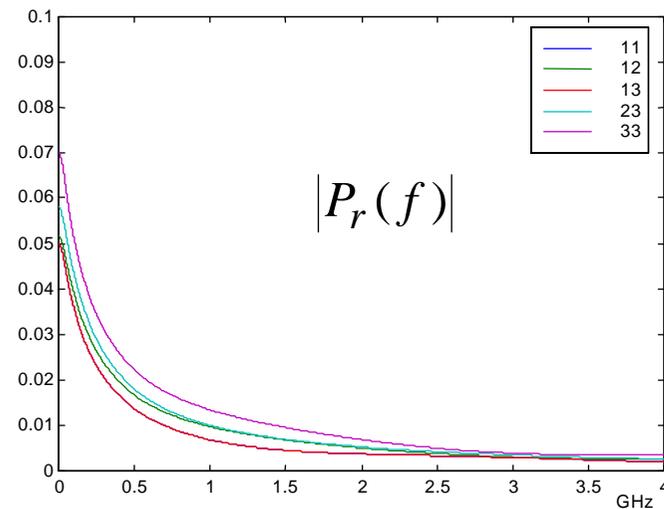
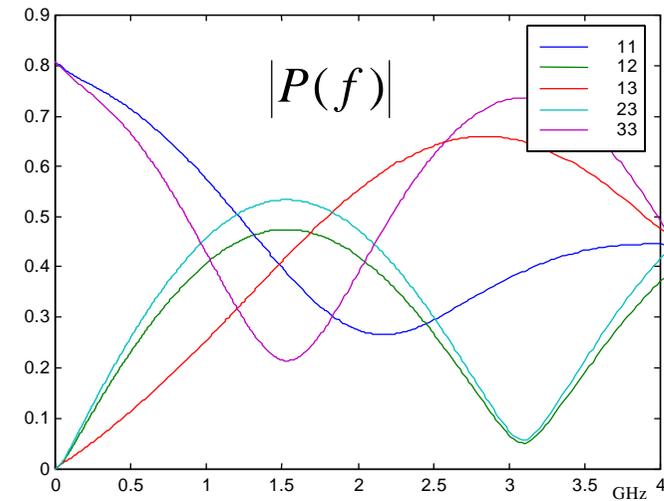
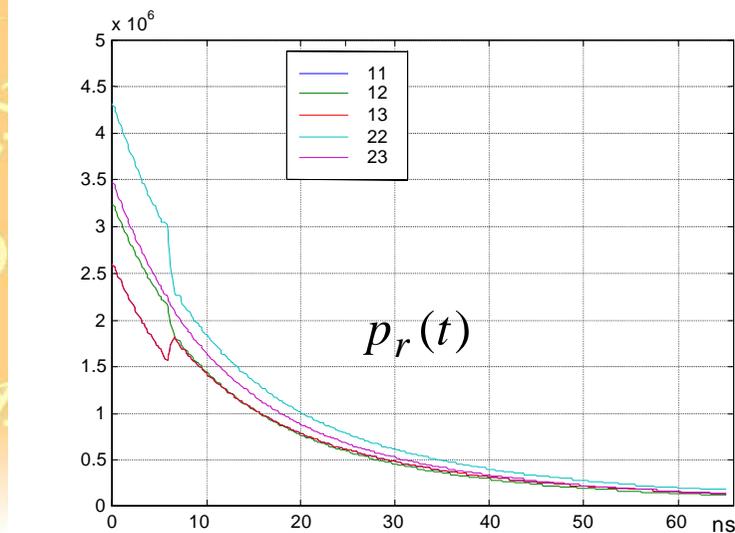
$$Y_{cr}(s) = O(s^{-1}) \quad \text{per } s \rightarrow \infty$$

## Parte principale di P(s)

$$P_p(t) = \sum_{i=1}^n e^{-\mu_i T_i} A_i \delta(t - T_i)$$

$$A_i = \mathbf{u}_i^{(0)} \left( \mathbf{w}_i^{(0)} \right)^T \quad \mu_i = \frac{c_i^2 \lambda_i^{(1)}}{2}$$

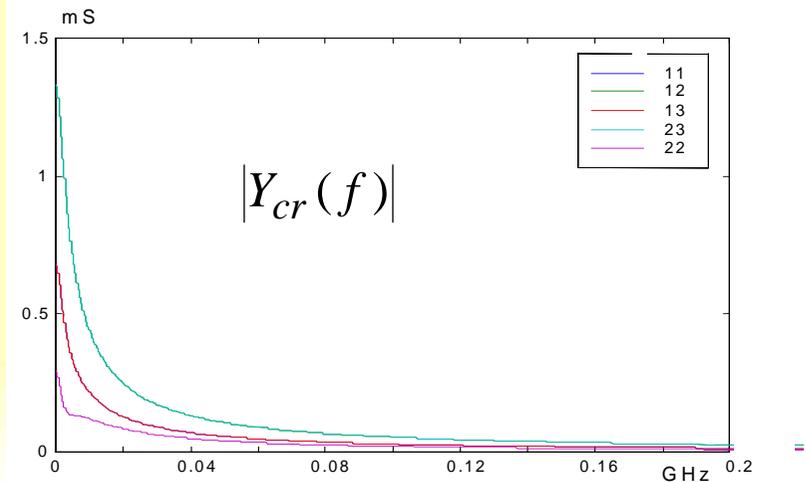
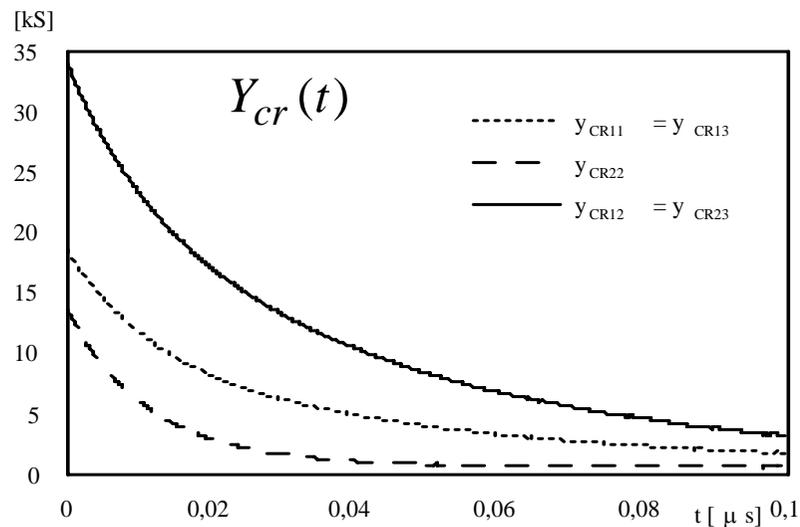
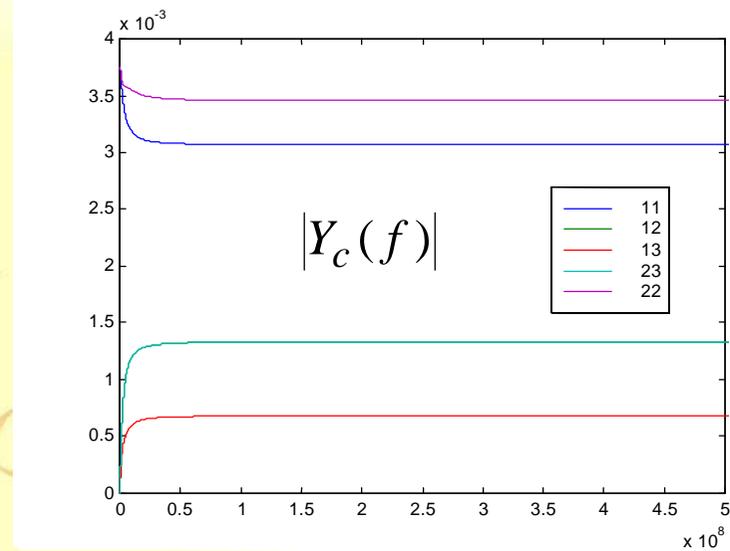
$$W = U^{-1}$$



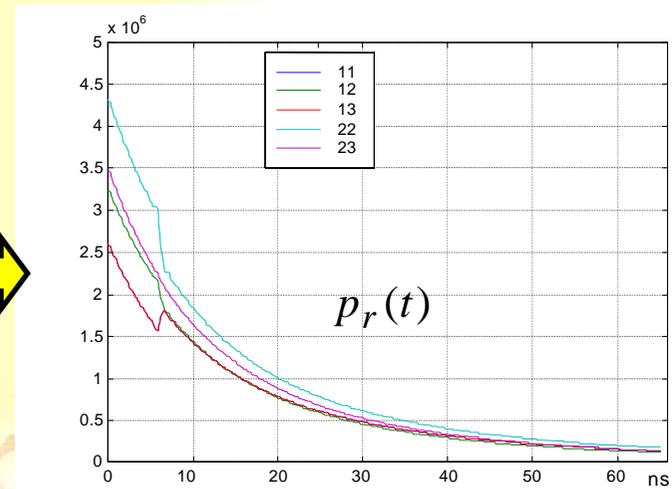
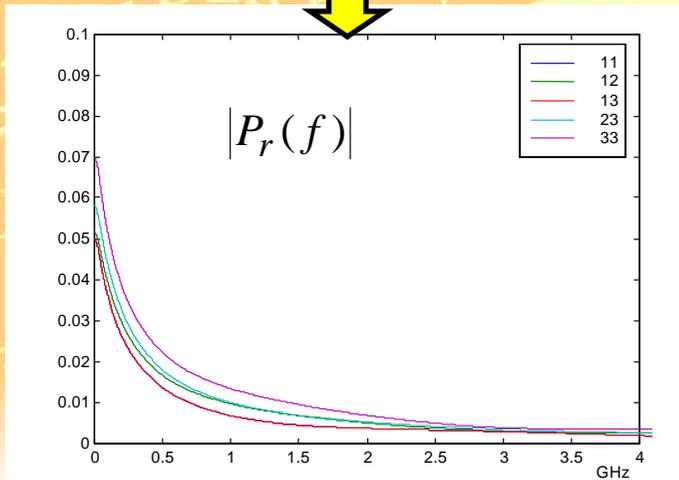
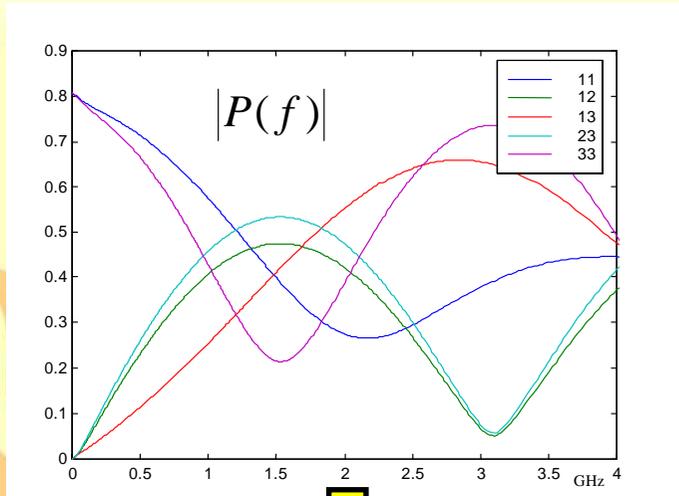
## Parte principale di $Y_c(s)$

$$Y_{cp}(s) = G_c \quad y_{cp}(t) = G_c \delta(t)$$

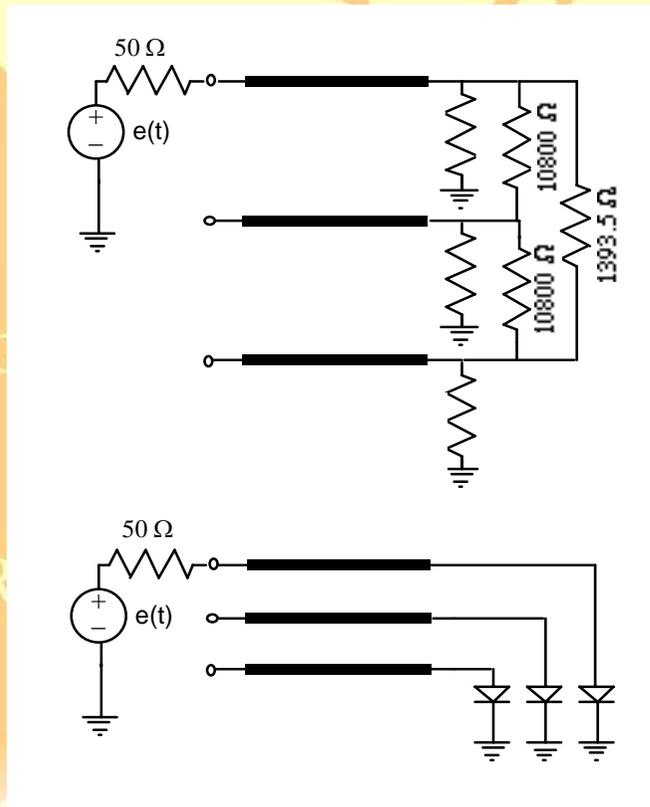
$$G_c = \sqrt{L^{-1} C^{-1} C}$$



## Parte regolare di $P(t)$



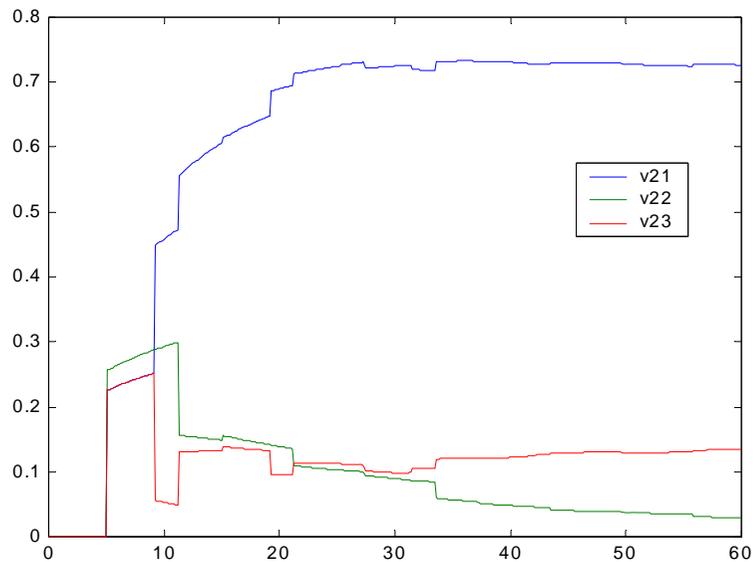
## Stima del crosstalk



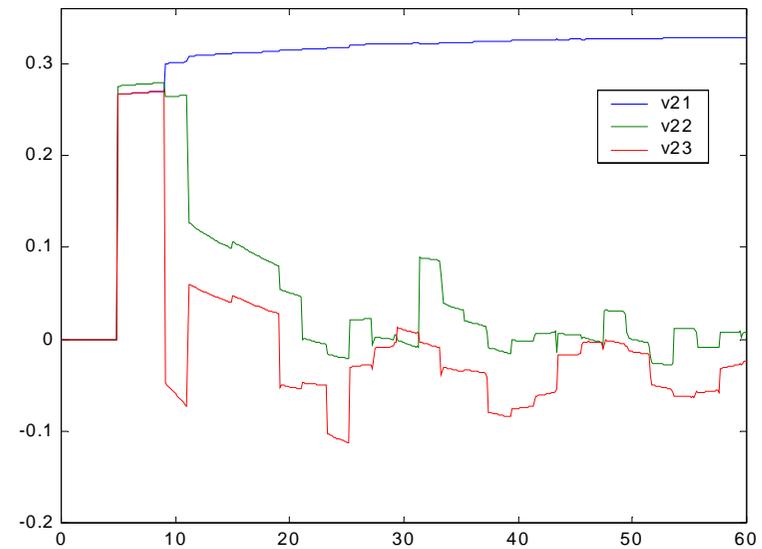
**Carichi lineari**

**Carichi non lineari**

## Stima del crosstalk



lineare



Non lineare