*Università degli Studi di Cassino*

*Facoltà di Ingegneria*

*Lezioni del Corso di*

# Fondamenti di Metrologia Meccanica

***A.A. 2005-2006 Prof. Paolo Vigo***



## Indice

*Me spiego: da li conti che se fanno*
*secondo le statistiche d'adesso*
*risurta che te tocca un pollo all'anno*

*E se nun entra ne le spese tue,*
*t'entra ne la statistica lo stesso*
*perché c'è un altro che ne magna due*

Trilussa



- Una misura è sempre una variabile casuale e può essere intesa come somma di un evento deterministico (misurando) e di altri eventi aleatori sovrapposti (errori di misura/correzioni)
- Per una stima corretta della misura e degli errori è necessario applicare tecniche statistiche per il trattamento dei dati aleatori (stima "a posteriori") e la teoria della probabilità (stima "a priori")

**Probabilità (stima *a priori*)**

se ciascun evento è equiprobabile la *probabilità* di accadimento risulta pari al numero di eventi favorevoli diviso il numero di eventi possibili

la probabilità è un numero compreso tra 0 e 1 (tra 0 e 100%), in particolare risulta pari a zero quando l'evento è impossibile; risulta invece pari ad uno (100%) quando l'evento è certo

- *testa/croce* *probabilità 50% (1/2)*
- *dado* *probabilità 16,7% (1/6)*

**Frequenza (stima *a posteriori*)**

- la *frequenza* di un evento è il numero di volte in cui l'evento si è manifestato, diviso il numero totale delle prove effettuate
- la frequenza è quindi diversa dalla probabilità dell'evento
- la differenza tra frequenza e probabilità può essere tanto più grande quanto minore è il numero di prove effettuate
- se si fa tendere il numero delle prove ad infinito, il valore della frequenza tende a coincidere con quello della probabilità.

*per funzioni discrete* $F_k = \frac{m_k}{n}$ $P = \lim_{n\to\infty} \frac{m_k}{n}$

*per funzioni continue* $f_k = \frac{1}{\Delta x}\frac{m_k}{n}$ $p(x) = \lim_{\Delta x\to 0,\, n\to\infty} \frac{1}{\Delta x}\frac{m_k}{n}$



**Media $\mu$ / Valore atteso della variabile *x*, *E(x)*:**

- per una variabile casuale continua $\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)xdx$
- per una variabile discreta $\mu = E(x) = \sum_{i=1}^{N} (P_i \cdot x_i)$
- nel caso di N eventi equiprobabili il valore medio può essere valutato più semplicemente mediante la media aritmetica

$$\mu = E(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

*Parametri Statistici*

La **Varianza** è il valore atteso $E([x-\mu]^2)$ della variabile $(x-\mu)^2$

- per una variabile casuale continua risulta pari a:

$$\sigma^2 = E\left([x-\mu]^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)(x-\mu)^2\, dx$$

- per una variabile discreta risulta pari a:

$$\sigma^2 = E\left([x-\mu]^2\right) = \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot (x_i-\mu)^2$$

Lo **scarto tipo** è la radice quadrata della varianza; nel caso di N eventi equiprobabili lo scarto tipo può essere anche valutato mediante la relazione semplificata :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}$$

Università degli Studi di Cassino — *Corso di Fondamenti di Metrologia Meccanica*

*Parametri Statistici*

Una variabile casuale **z**, può essere la composizione di più variabili casuali

$$z = ax + by$$

- se $x$ e $y$ sono **non correlate** tra loro:

$$E(x \cdot y) = E(x) \cdot E(y) \Rightarrow \sigma_z^2 = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2$$

- se $x$ e $y$ sono **correlate** tra loro :

$$E(x \cdot y) \neq E(x) \cdot E(y) \Rightarrow \sigma_z^2 = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 + 2ab\sigma_{x,y}$$

- dove $\sigma_{x,y}$ è la ***covarianza*** delle due variabili, definita come:

$$\sigma_{xy} = E\left[(x-\mu_x)(y-\mu_y)\right]$$

*variabili aleatorie correlate sono l'altezza e il peso di un individuo*

I ***gradi di libertà*** di un campione sono pari al numero degli elementi meno il numero dei parametri che sono determinati dal campione e vengono presi in considerazione:

$$\nu = n - p$$

Ad esempio, nel calcolo della varianza del campione, dovendo introdurre il valor medio stimato (un parametro, $p$=1), allora il numero di gradi di libertà è pari a $\nu$=$n$-1 ed ecco il motivo per cui è più corretto scrivere:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}$$



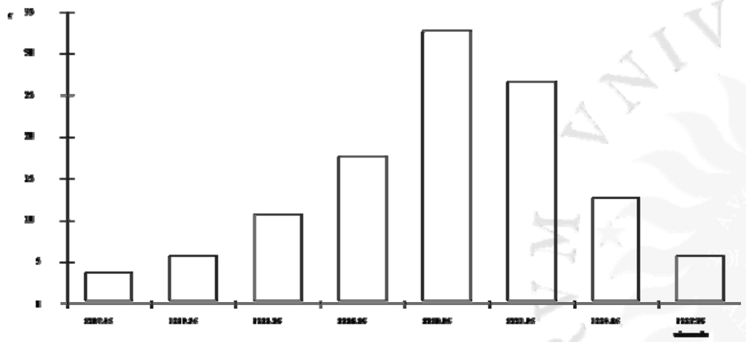
Regole fondamentali per una analisi statistica corretta ed affidabile:

- numero degli elementi costituenti il campione sufficientemente grande
- campione collezionato in modo casuale
- elementi campionati appartenenti alla medesima popolazione

| Parametri | Popolazione | Campione |
|---|---|---|
| Media | $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\cdot x dx$ | $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_k$ |
| Varianza | $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)(x-\mu)^2 dx$ | $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_k-\bar{x})^2$ |

*Parametri Statistici di una distribuzione*

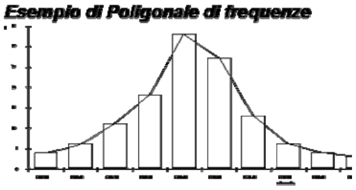
**Esempio di distribuzione di frequenze di misure**



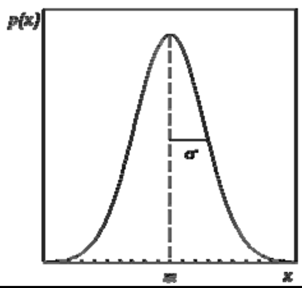
Università degli Studi di Cassino
*Corso di Fondamenti di Metrologia Meccanica*
*La Curva di Gauss*

quanto più piccolo è $\Delta x$, tanto più l'istogramma tende alla curva continua

*Esempio di Poligonale di frequenze*



Esempio di funzione di Gauss



***La Curva di Gauss***

la probabilità di un intervallo sotteso ad una barra dell'istogramma sarà con buona approssimazione:

$$P_k = p_n(x) \cdot \Delta x \qquad p_n(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- distribuzione di probabilità normale o gaussiana.
- *p(x)* rappresenta la densità di probabilità.
- per un intervallo [*a*,*b*] finito si può stimare la probabilità:

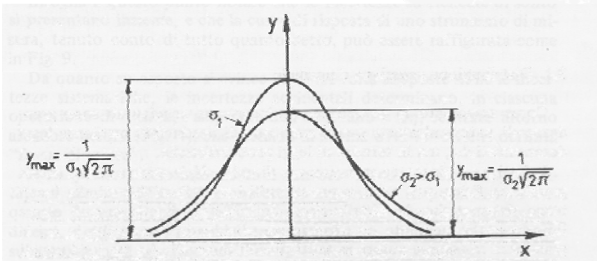
$$P\{a < x < b\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx$$

Università degli Studi di Cassino
*Corso di Fondamenti di Metrologia Meccanica*

Nella pratica si rilevano istogrammi asimmetrici e irregolari a causa di:

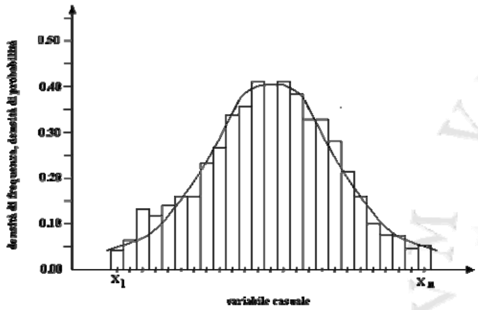
- campione troppo piccolo
- variazione casuale di grandezze d'influenza
- polarizzazione dell'osservatore,
- limiti imposti a priori alla variabilità dell'osservazione

$n \to \infty$ l'istogramma tende ad avere per inviluppo la curva continua



**Istogramma di densità di frequenza con valori di $x_k$ equispaziati di $x$.**

con $n$ grande (> 25/30) *densità di frequenza* → *probabilità*




Se l'insieme di valori discreti è anche una rappresentazione di un continuo di valori, ciascuna frequenza dell'istogramma approssima la probabilità che il valore cada tra $x_k$ e $x_{k+1}=x_{k+x}$



**proprietà della distribuzione di Gauss**

- ✓ *autoriproduzione*
  la risultante della composizione di più variabili aventi distribuzione normale presenta anch'essa una distribuzione normale
- ✓ *distribuzione limite*
  data una popolazione di varianza non infinita, le medie di ***N*** elementi tratti dalla popolazione tendono ad assumere la distribuzione normale (*teorema del limite centrale)*

**i parametri della curva di Gauss**

*la media determina la posizione della curva lungo l'asse*
*lo scarto determina la forma della curva*