



Università degli Studi di Cassino
Facoltà di Ingegneria

Lezioni del Corso di Fondamenti di Metrologia Meccanica

A.A. 2005-2006 Prof. Paolo Vigo



Università degli Studi di Cassino

Corso di Fondamenti di Metrologia Meccanica

Indice

1. Incertezza di Misura
2. Propagazione delle Incertezze
3. Errore Massimo Tollerato





Alcune definizioni di Incertezza

- ✚ Parametro, associato al risultato di una misurazione, che caratterizza la dispersione dei valori ragionevolmente attribuibili al misurando (VIM, 1993)
- ✚ Stima di valori caratterizzante il campo di valori entro cui cade il valore vero del misurando (VIM, 1984)
- ✚ Valutazione quantitativa dell'errore possibile nel valore stimato del misurando fissato un assegnato livello di confidenza (probabilità)



EA-4/02 *Expression of the uncertainty of Measurement in Calibration*, 1999

UNI CEI ENV 13005 *Guida all'espressione dell'incertezza di misura*, 2000

La **ISO Guide** (recepita in Italia come UNI CEI ENV 13005: 2000) classifica le incertezze di misura in due gruppi distinti:

- **Tipo A**: comprende quelle incertezze di misura la cui valutazione può essere basata su metodi statistici (oggettivi).
- **Tipo B**: comprende quelle incertezze la cui stima è basata su “altri metodi”; ciò, inevitabilmente, implica elementi di valutazione di tipo soggettivo.

Incertezza di Misura**Incertezza di tipo A**

- Ripetizione della misura
- Modello distribuzione statistica
- Stima dei parametri della distribuzione
- Stima dell'incertezza tipo

Modello della Misura (incertezza di tipo A)

1. misura come media delle ripetizioni
2. valutazione dello scarto tipo delle misure
3. stima dell'incertezza di tipo A

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

aumentando il numero di misure (**n**) **diminuisce** il contributo dell'incertezza di tipo A

$$u^2(\bar{x}) = s^2(\bar{x}) = \frac{s_x^2}{n}$$

Incertezza di Misura**Esercizio:**

Misura della massa incognita mediante una bilancia elettronica.

L'osservatore effettua misure ripetute in modo tale da rendere evidenti le cause di incertezza che si vogliono stimare (es. collocando la massa in posizioni diverse, ripetendo le misure durante un periodo sufficientemente lungo da comprendere le variazioni di temperatura, ecc.)

Tabella delle misure (g)

x(1) = 100.0568	x(14) = 99.96014
x(2) = 99.99646	x(15) = 99.92793
x(3) = 99.93649	x(16) = 99.93853
x(4) = 99.99458	x(17) = 100.0021
x(5) = 100.0761	x(18) = 99.97930
x(6) = 99.99119	x(19) = 100.0216
x(7) = 99.98705	x(20) = 99.97158
x(8) = 99.99824	x(21) = 100.0437
x(9) = 100.0437	x(22) = 99.96122
x(10) = 99.98410	x(23) = 99.99166
x(11) = 100.0140	x(24) = 99.95460
x(12) = 100.0120	x(25) = 100.0684
x(13) = 99.96027	

**Incertezza di Misura**

la migliore stima della massa incognita viene fornita dalla media delle 25 misurazioni:

$$\bar{X} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} x(i) = 99.995 \text{ g}$$

la stima dell'incertezza di tipo A può essere semplicemente ricavata sulla base della stima dello scarto tipo del campione (confidenza al 95%)

$$s = \sqrt{\frac{1}{24} \sum_{i=1}^{25} (x(i) - \bar{X})^2} = 0.040 \text{ g} \quad \longrightarrow \quad U = 2 \frac{s}{\sqrt{25}} = 0.016 \text{ g}$$

In questo caso nulla possiamo dire sull'incertezza dovuta al campione di riferimento o alla stabilità dello strumento. In tal caso solo una stima a priori di tali componenti di incertezza consentirà una stima sufficientemente affidabile della fascia di incertezza.

**Incertezza di Misura****Incertezza di tipo B**

Le sorgenti di informazione per la stima dell'incertezza tipo B sono le conoscenze a priori che l'operatore di misura può reperire anche in modi diversi come :

- ✓ dati di misure precedenti
- ✓ esperienza o conoscenza circa il comportamento di materiali o strumenti
- ✓ specifiche del costruttore
- ✓ dati di taratura o di altri certificati;
- ✓ incertezza assegnata a dati di riferimento presi in manuali o banche dati e bibliografia scientifica
- ✓ previsioni circa le variazioni di grandezze d'influenza o della grandezza d'ingresso stessa (es., comportamento dinamico).



Incertezza di Misura

Modello della Misura (incertezza di tipo B)

- ✓ Individuare le cause di errore
- ✓ Correggere l'errore probabile
- ✓ Individuare l'intervallo (a, b) entro il quale può essere contenuto l'errore
- ✓ Ipotizzare la distribuzione di errore
- ✓ Stimare l'incertezza tipo
- ✓ (Calcolare numero di gradi di libertà)



Incertezza di Misura

Esercizio:

Misura con un'unica pesata della massa incognita effettuata mediante una bilancia elettronica con una portata pari a 120 g.

E' possibile stimare le incertezze solo come di tipo B.

Fonte di incertezza	Incertezza tipo
🚩 Grandezza di riferimento	0.05 mg
🚩 Stabilità (3 mesi)	0.1 mg
🚩 Eccentricità	0.3 mg
🚩 Influenza della temperatura (a 20 ± 5 °C)	0.4 mg
🚩 Linearità	0.2 mg
🚩 Ripetibilità	0.1 mg
🚩 Risoluzione	0.1 mg

$$u_c = \sum_{i=1}^n u_B(i)^2 = 0.568 \text{ g} \quad \longrightarrow \quad U = 2 \cdot u_c = 1,136 \text{ g}$$



Incertezza di Misura

Si potrebbero immaginare due casi limite:

- il caso di una **singola misurazione** (o una invariabilità del risultato della misura), in cui è impossibile stimare le incertezze di tipo A e tutte le cause di errore vengono stimate mediante l'approccio probabilistico di tipo B
- il caso di **misure numerose** in cui tutte le grandezze di influenza vengono fatte variare in modo casuale al fine di stimare a posteriori le cause di incertezza statisticamente come incertezze di tipo A e considerando nulle le incertezze di tipo B.



Incertezza di Misura

Stimati i diversi contributi di incertezza (tipo A e B) si procede alla loro composizione in un unico valore u_C (incertezza composta:

$$u_C^2 = u_A^2 + u_{1B}^2 + \dots + u_{nB}^2$$

L'incertezza estesa viene calcolata moltiplicando l'incertezza tipo per il **fattore di copertura (k)** che corrisponde ad una assegnata probabilità di copertura (livello di confidenza).

$$U_C = k \cdot u_C$$

I laboratori esprimono l'incertezza estesa con un fattore di copertura k tipicamente pari a 2 (che corrisponde ad un livello di confidenza circa pari al 95%)



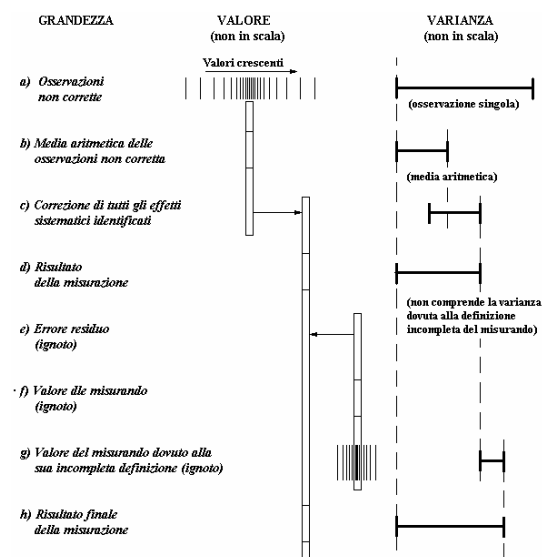
Incertezza di Misura

Processo di misura e stima dell'incertezza

1. Definizione dell'equazione della misura
2. Correzioni
3. Cause di incertezza
4. Stima incertezza tipo A
5. Stima incertezze tipo B
6. Stima gradi di libertà
7. Scelta livello di confidenza e fattore di copertura
8. Calcolo incertezza composta estesa
9. Espressione del risultato della misura e relativa incertezza



Incertezza di Misura

**Processo di misura
e stima dell'incertezza**



Propagazione delle Incertezze

la grandezza misurata (*uscita*) Y è funzione di altre N grandezze $X_1, X_2, \dots, X_N$ (*ingressi, grandezze di influenza*) mediante una relazione funzionale f :

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

le grandezze X_i possono essere interpretate sia come grandezze misurate, sia come grandezze di influenza per la misura

La funzione f dell'equazione di misura non rappresenta semplicemente il principio fisico di misura, ma l'intero metodo di misura e quindi contiene tutte le grandezze che contribuiscono all'incertezza di misura (i.e. operatori, ambiente, misurando, procedura).



Propagazione delle Incertezze

L'errore E_y complessivo degli N contributi errori E_{x_i} . Sulla base dell'equazione di misura ed utilizzando come modello matematico uno sviluppo in serie di Taylor di punto iniziale x_m approssimato ai soli termini del primo ordine è possibile ricavare :

$$E_y = \frac{\partial f}{\partial X_1} \cdot E_{x_1} + \frac{\partial f}{\partial X_2} \cdot E_{x_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial X_n} \cdot E_{x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i} \cdot E_{x_i}$$

Per errori non correlati si dimostra che l'incertezza composta è :

$$u^2(Y) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)^2 u^2(X_i) = \sum_{i=1}^n c_i^2 u^2(X_i) = \sum_{i=1}^n u_i^2(Y)$$

- c_i coefficienti di sensibilità (poiché descrivono quanto una variazione nella stima di un generico ingresso X_i influenzi la stima della grandezza in uscita Y , cioè quanto questa sia sensibile alla stima dell'ingresso in questione)
- $u_i(Y)$ contributi di incertezza su Y derivanti dalle incertezze $u(X_i)$

**Leggi di propagazione per legami funzionali semplici**

Operatore Matematico	Legame Funzionale	Legge di propagazione
Somma e Differenza	$Y = \sum_{i=1}^n X_i$	$u_c^2(Y) = \sum_{i=1}^n u_c^2(X_i)$
Prodotto e Rapporto	$Y = \prod_{i=1}^n X_i$	$u_c^2(Y) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{Y}{X_i}\right)^2 u_c^2(X_i)$
Potenza	$Y = X^\alpha$	$u_c^2(Y) = \alpha^2 \cdot X^{2(\alpha-1)} u_c^2(X)$
Logaritmo	$Y = \log X$	$u_c^2(Y) = \frac{u_c^2(X)}{X^2}$

**Propagazione delle incertezze: il caso di grandezze correlate**

Nel caso in cui uno o più errori (quindi incertezze) siano correlati tra loro è necessario utilizzare la seguente relazione:

$$\begin{aligned}
 u^2(Y) &= \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right) u(X_i) \right)^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2 \cdot u^2(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n c_i \cdot c_j \cdot u(X_i, X_j) = \\
 &= \sum_{i=1}^n c_i^2 \cdot u^2(X_i) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n c_i \cdot c_j \cdot r(X_i, X_j) \cdot u(X_i) \cdot u(X_j)
 \end{aligned}$$

avendo indicato con:

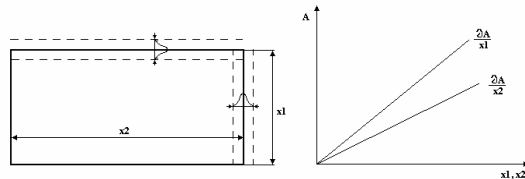
- $u(X_i, X_j)$ la covarianza associata alle stime di X_i e X_j
- $r(X_i, X_j)$ il coefficiente di correlazione tra X_i e X_j



Propagazione delle Incertezze

Esercizio:*Propagazione delle incertezza in una misura di superficie*

si voglia misurare, mediante una misura indiretta, l'area incognita di una scrivania, avente superficie rettangolare di dimensioni x_1 e x_2 .



la superficie è il prodotto delle misure delle due dimensioni x_1 ed x_2 : $A = x_1 \cdot x_2$

l'incertezza associata alla determinazione dell'area A , sarà, dunque, funzione delle incertezze associate alle misure di x_1 ed x_2 , secondo la relazione:

$$u_C^2(A) = \left(\frac{\partial A}{\partial x_1} \right)^2 u_C^2(x_1) + \left(\frac{\partial A}{\partial x_2} \right)^2 u_C^2(x_2)$$



Propagazione delle Incertezze

1) coefficienti di sensibilità sono pari a:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1$$

2) incertezze (tipo A) delle due dimensioni

$$x_1 = (1,5 \pm 0,02) \text{ m}$$

$$x_2 = (1,0 \pm 0,04) \text{ m}$$

3) propagando le due incertezze

$$u_C^2(A) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 u_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 u_2^2$$

4) l'incertezza tipo composta sarà:

$$u_C(A) = \sqrt{(1,0)^2 0,02^2 + (1,5)^2 (0,04)^2} = \pm 0,06 \text{ m}$$

5) la superficie incognita risulterà:

$$A = (1,5 \pm 0,06) \text{ m}^2$$



Massimo Errore PerMESSo

errore massimo tollerato MPE (*Maximum Permissible Error*, OIML-V2) nella verifica delle prestazioni degli strumenti di misura

limite di tolleranza SL (*Specification Limit*, ISO/FDIS 14253-1), conformità delle tolleranze geometriche di un pezzo meccanico

In *metrologia legale* occorre verificare la conformità sia al momento della fabbricazione (*verifica prima*), sia periodicamente in campo o in laboratorio (*verifica periodica*).

Uno strumento (prodotto) si considera conforme quando l'errore di misura E , valutato per appropriati valori del suo campo di misura (proprietà), è inferiore a quello massimo tollerato MPE (intervallo di tolleranza):

$$|E| = |X - X_{rv}| < \text{MPE}$$



Massimo Errore PerMESSo

La verifica non è mai un'operazione che porta ad un risultato certo dal momento che non esiste metodica di misura, nè tanto meno di taratura, che abbia incertezza pari a zero.

Esiste un rischio quantificabile di accettare uno strumento (prodotto) non conforme o, viceversa, di scartare uno conforme.

Il giudizio di conformità è quindi connesso al livello di confidenza con cui effettuiamo le verifiche in questione.

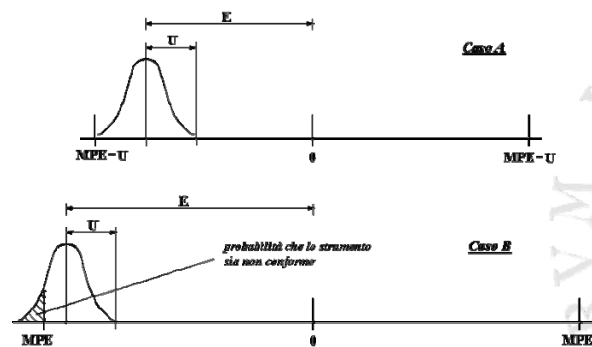
$$|E| = |X - X_{rv}| < \text{MPE} - U$$



Massimo Errore PerMESSo

Per evitare di avere un' elevata probabilità di scartare strumenti (prodotti) conformi, è necessario mantenere un rapporto ottimale tra MPE ed U.
 Convenzionalmente, in Metrologia Legale, questo rapporto è pari a:

$$|E| = |X - X_{rv}| < MPE - U, \text{ con } U < 1/3 MPE$$



Verifica prima degli strumenti di misura:

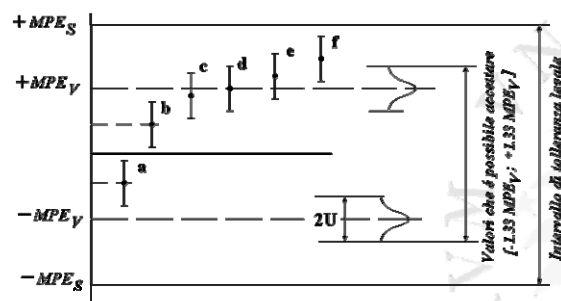
a) strumento conforme; b) strumento non conforme



Massimo Errore PerMESSo

Verifica metrico legale:

- ✚ errore massimo tollerato in verifica MPE_V
- ✚ errore massimo tollerato in servizio MPE_S (pari a 2 volte MPE_V)



Verifica periodica degli strumenti di misura:

(casi a-d conformi, casi e-f non conformi)