Università degli Studi di Cassino
Dipartimento di Strutture, Ambiente e Territorio

SSD ING-IND 15 – Disegno e Metodi dell'Ingegneria Industriale

CAGD

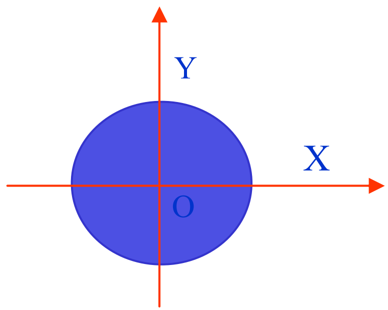
Computer Aided Geometric Design

Ing. Massimo Martorelli – Ing. Domenico Speranza

Rappresentazione

Una generica curva Γ (nel piano e nello spazio) si può esprimere mediante un'equazione matematica che individua tutti i suoi punti. In base alla forma di questa equazione si parla di:

Rappresentazione implicita



Rappresentazione parametrica

L'***equazione implicita*** di Γ è del tipo $f(x,y)=0$ e descrive una relazione soddisfatta dalle coordinate x e y di tutti e soli i punti che giacciono su Γ. Per ogni data curva esiste un'unica rappresentazione in forma implicita a meno di una costante moltiplicativa.

$$\mathbf{x^2 + y^2 - 1 = 0}$$

Nella ***forma parametrica*** la curva Γ è rappresentata da una funzione del tipo:

$$\mathbf{P(t) = (x(t),y(t)) \quad t \in [a,b]}$$

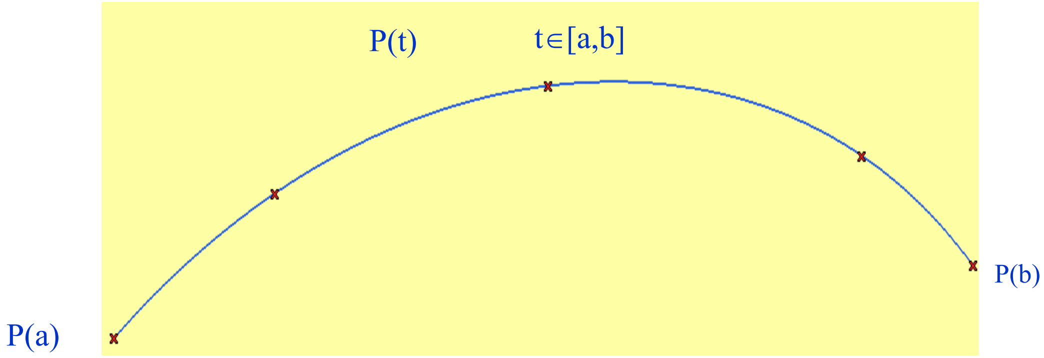
$$\mathbf{\Gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \; t \in [0, 2\pi]}$$

Vantaggi e Svantaggi

- **Aggiungendo una terza coordinata z(t) la forma parametrica: P(t) = (x(t), y(t), z(t)) descrive una curva nello spazio, mentre la forma implicita è adatta a descrivere solo curve su un piano (xy,xz,yz).**

- **La forma parametrica non è univocamente determinata per cui la stessa curva si può rappresentare con funzioni coordinate completamente diverse.**

- **Geometrie non limitate (come, per esempio, rette) si rappresentano più facilmente in forma implicita; curve limitate o pezzi di superfici, si rappresentano meglio in forma parametrica limitando l'intervallo di variazione del parametro t.**

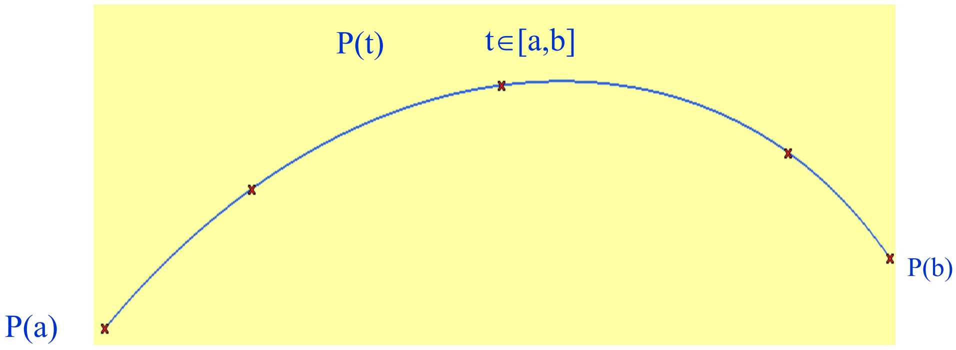


Vantaggi e Svantaggi

- **Le curve parametriche possiedono un orientamento “naturale”: quello per valori crescenti del parametro (da P(a) a P(b)). Di conseguenza, su di esse, si possono generare facilmente sequenze ordinate di punti.**

- **La complessità di molte operazioni geometriche dipende dalla rappresentazione scelta. Calcolare un punto su una curva è facile in forma parametrica e più complesso in forma implicita, mentre determinare se un punto giace o no su una curva è immediato in forma implicita mentre è più complesso in forma parametrica.**

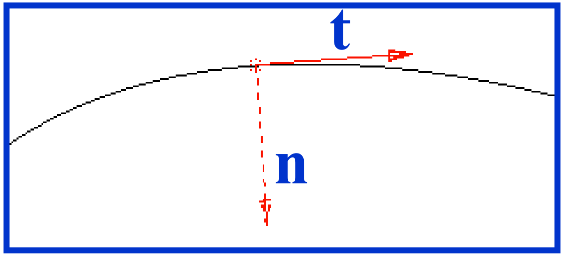
- **La forma parametrica è più conveniente per l’elaborazione su un computer. I coefficienti di molte forme parametriche hanno un notevole significato geometrico questo si traduce in un modo intuitivo di progettare la curva.**



Proprietà Analitiche

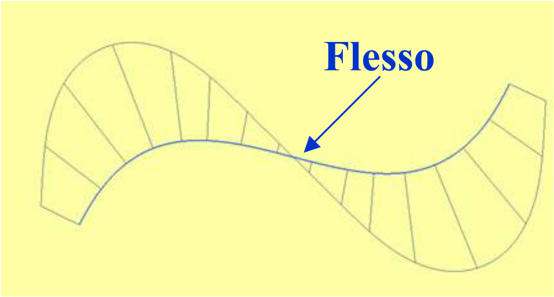
Per ogni curva Γ si possono definire:

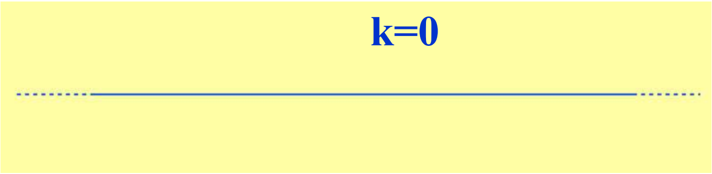
✓ ***Vettore tangente;***



✓ ***Vettore normale;***

✓ ***Curvatura (k(t)): e*****sprime di quanto Γ si "scosta" da una retta.**
La curvatura è zero se e solo se Γ è una retta.





✓***Raggio di curvatura (1/k(t)):*** **geometricamente si può interpretare come il raggio del cerchio che localmente meglio approssima la curva in un punto.**

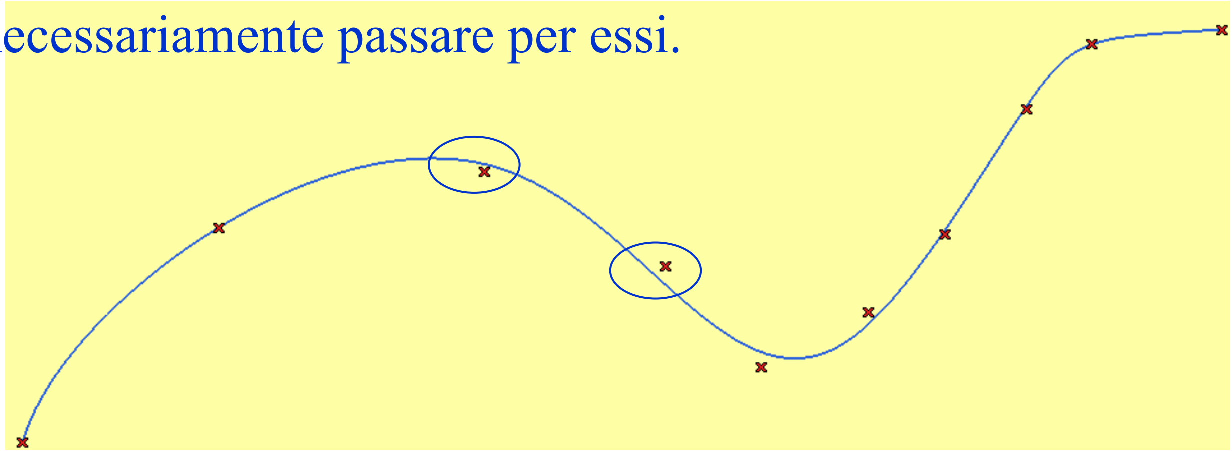
Caratteristiche delle curve utilizzate per il CAD

Nella progettazione CAD si utilizzano curve per le quali…

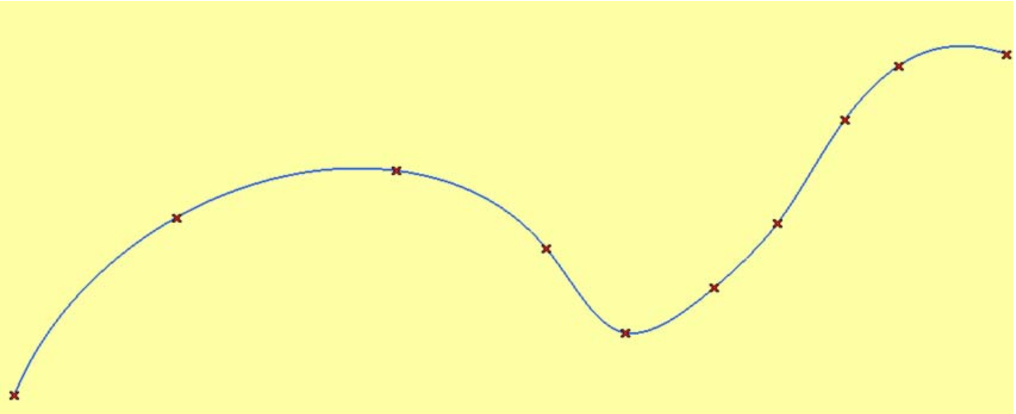
- ✓… sia semplice la valutazione numerica e la determinazione delle proprietà analitiche ;
- ✓…la modifica possa essere immediata ed intuitiva ed abbia effetti locali;
- ✓…sia possibile avere un controllo locale della forma specie nei punti di maggiore interesse per il progettista;
- ✓…la rappresentazione analitica abbia un significato geometrico non algebrico;
- ✓…sia possibile risolvere problemi di approssimazione od interpolazione di nuvole di punti.

Curve Approssimanti – Curve Interpolanti

Approssimanti: curve che riproducono l’andamento di una serie di punti senza necessariamente passare per essi.



Interpolanti: curve passanti per un insieme di punti.



Polinomiali a tratti

Molte delle precedenti caratteristiche sono ottenibili utilizzando funzioni polinomiali mediante cui una generica curva assume un'espressione simile alla seguente:

$$P(t) = (x(t), y(t), z(t)) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$$

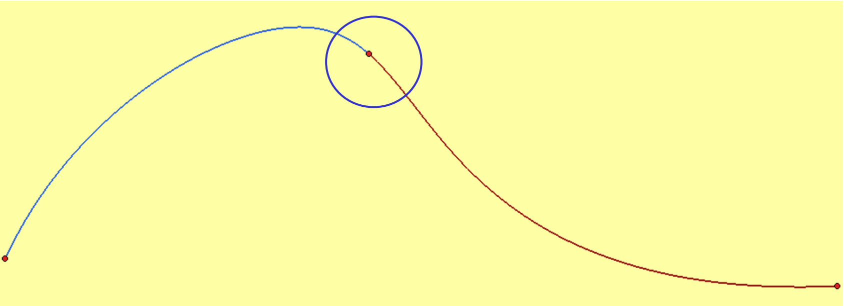
Le polinomiali:

✓Sono di semplice valutazione e modifica;

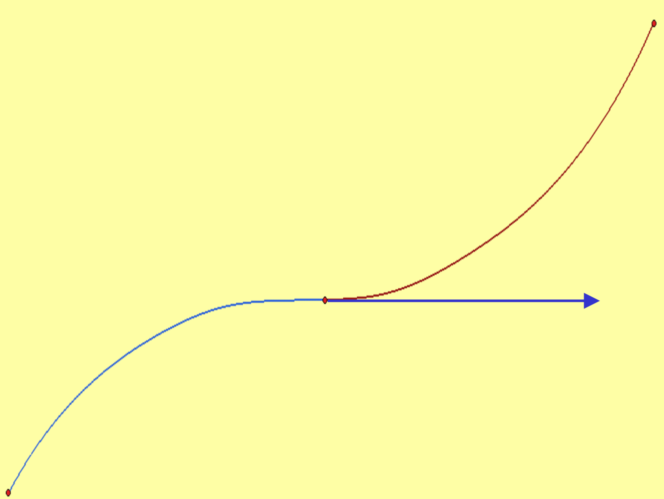
✓Risolvono problemi di interpolazione e approssimazione.

Infine congiungendo diversi tratti di polinomi (polinomiali a tratti) si possono ottenere curve "regolari" e capaci di riprodurre forme complesse.

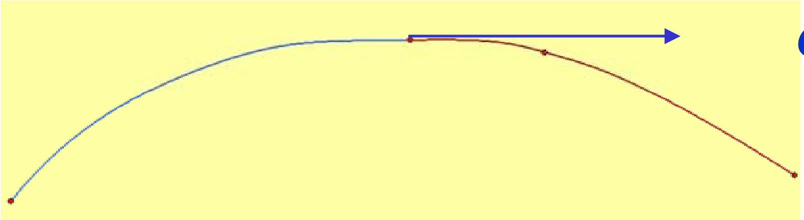
Continuità tra curve



C^0 - **Due curve hanno un estremo in comune**



C^1 - **Due curve hanno in comune la tangente**

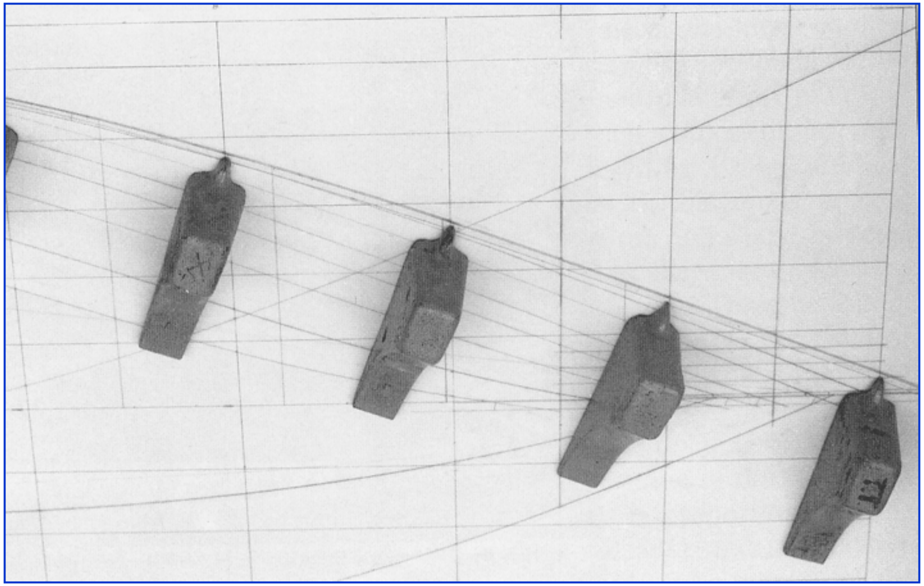


C^2 - **Due curve hanno stessa tangente e curvatur**

Curve spline

Il nome deriva dal campo navale.

La spline è una lamina flessibile che viene usata come curvilinea (listelli).



Le spline sono particolari curve polinomiali a tratti, costituite da archi di curva che si succedono uno dietro l'altro, la cui espressione analitica si ottiene imponendo una serie di condizioni numeriche:

- ✓ Passaggio della curva per un insieme di punti;
- ✓ Condizioni di continuità tra una polinomiale e la successiva.

Spline cubica

In particolare, una ***spline cubica*** è una polinomiale a tratti che:

- ✓ Interpola *n* punti (chiamati punti di definizione);
- ✓ Consiste in *n*-1 archi consecutivi (chiamati *rami* della spline);
- ✓ Ha grado 3 ed ammette continuità di curvatura (continuità 2) in tutti i suoi punti (in particolare, nei punti di giunzione delle diverse polinomiali).

Le condizioni analitiche sopra citate (passaggio per una serie di punti e regolarità della curva) non permettono di determinare univocamente la spline interpolante. Si impongono, dunque, ulteriori condizioni negli estremi:

- ✓ A curvatura nulla: il tratto di curva in un intorno dell'estremo coincide con la tangente alla spline nell'estremo stesso;
- ✓ Componenti fisse: il tratto di curva in un intorno dell'estremo coincide con una direzione tangente a una linea o curva selezionata oppure specificata immettendo le componenti X, Y e Z;
- ✓ Circolare: il tratto di curva in un intorno dell'estremo coincide con una circonferenza passante per i tre punti di definizione più prossimi all'estremo.

Inconvenienti delle spline

- Nella loro espressione analitica, i coefficienti hanno un significato algebrico e non geometrico, quindi, non permettono di capire facilmente come una loro modifica può fare variare la forma della curva;
- Nascono per interpolare dei punti;
- Una modifica alla curva si ripercuote su tutta la curva e non solo localmente.

Soluzioni

Utilizzare altre polinomiali a tratti definite secondo criteri diversi rispetto a quelli utilizzati per le spline.

Polinomi di Bernstein

B - splines

Polinomi di Bernstein

Fissato un numero naturale n, si chiama ***"Polinomio di Bernstein di grado n"*** la funzione parametrica così definita:

$$t \in I = [0,\ 1] \subset \mathbb{R} \longrightarrow J_i^n(t) \quad \in \mathbb{R}$$

$$J_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \qquad \text{dove} \qquad \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

$$i = 0, \ldots\ldots, n$$

Curve di Bézier

I polinomi di Bernstein sono le "funzioni di base" delle ***curve di Bézier***,queste sono curve parametriche definite nel seguente modo:

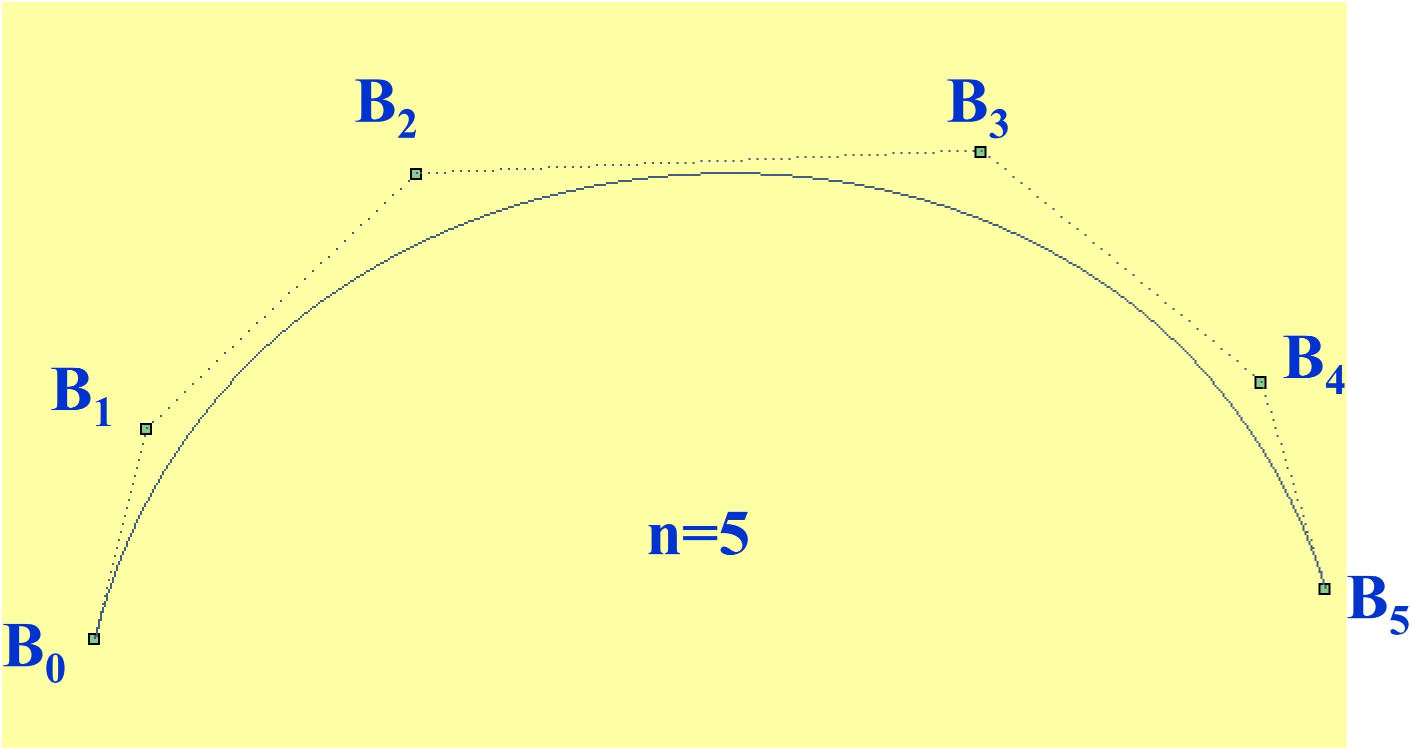
$$\mathbf{t} \in \mathbf{I} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{X(t)} \in \mathbb{R}^{2}$$

$$X(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i J_i^n(t)$$

Dove:

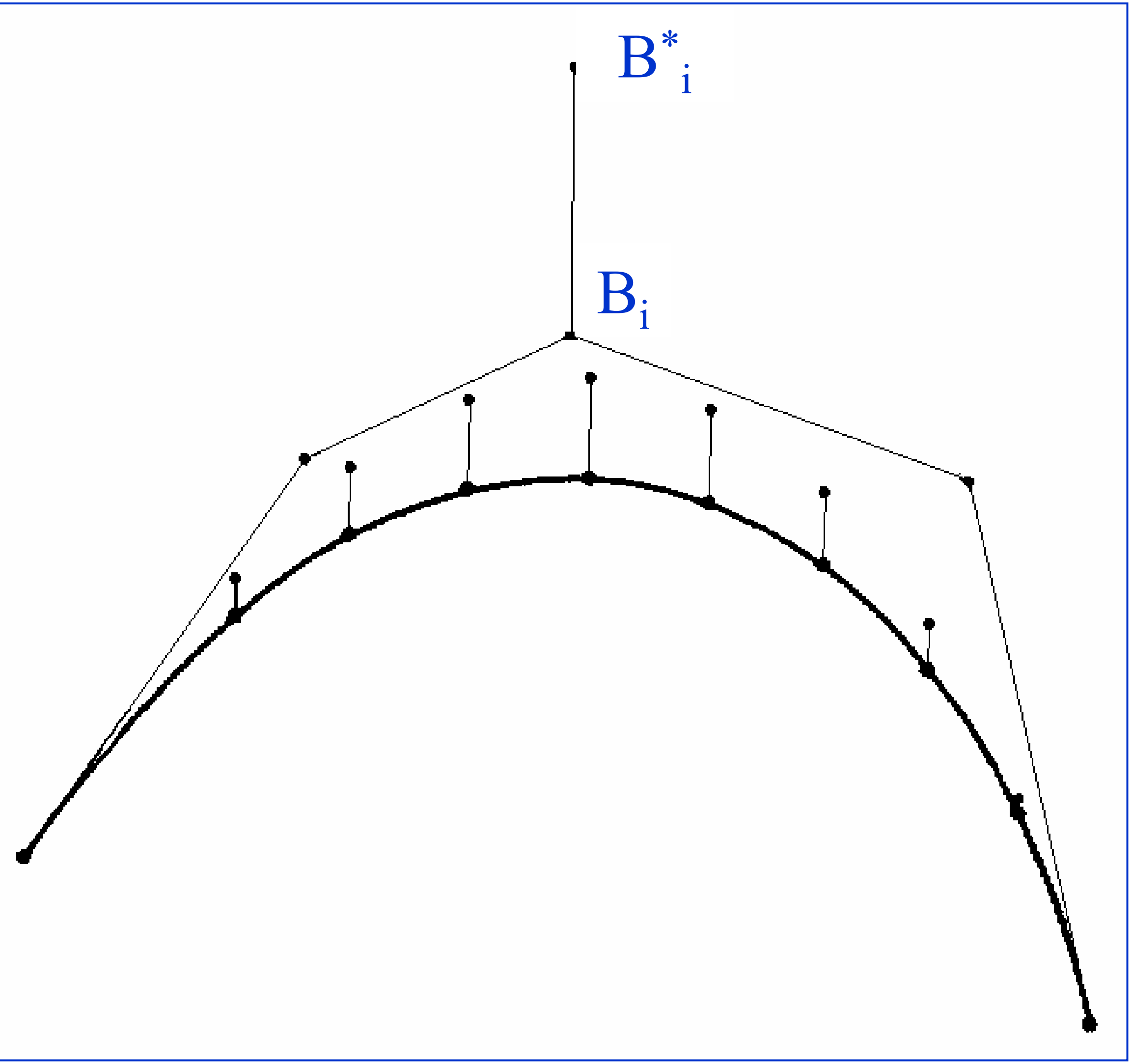
- n è il grado dei polinomi di Bernstein; $J_i^n(t)$
- B_i sono n+1 punti di R^2 detti **"*Punti di controllo*"** che individuano i vertici di un poligono detto ***"poligono di controllo"*.**

Poligono di Controllo



Le curve di Bezier sono funzioni polinomiali di grado n (strettamente vincolato al numero di punti di controllo) il cui grafico è contenuto nella cella convessa generata dai vertici del poligono di controllo ed ammette estremi coincidenti con i punti estremi B_0 e B_n. La curva “segue” l’andamento del suddetto poligono.

Modifica dei punti di controllo



Se su una curva di Bezier X(t) si sposta un punto di controllo B in una nuova posizione B_i^*, tutta la curva si sposta in direzione parallela a $B_i – B_i^*$.

Curve razionali di Bézier

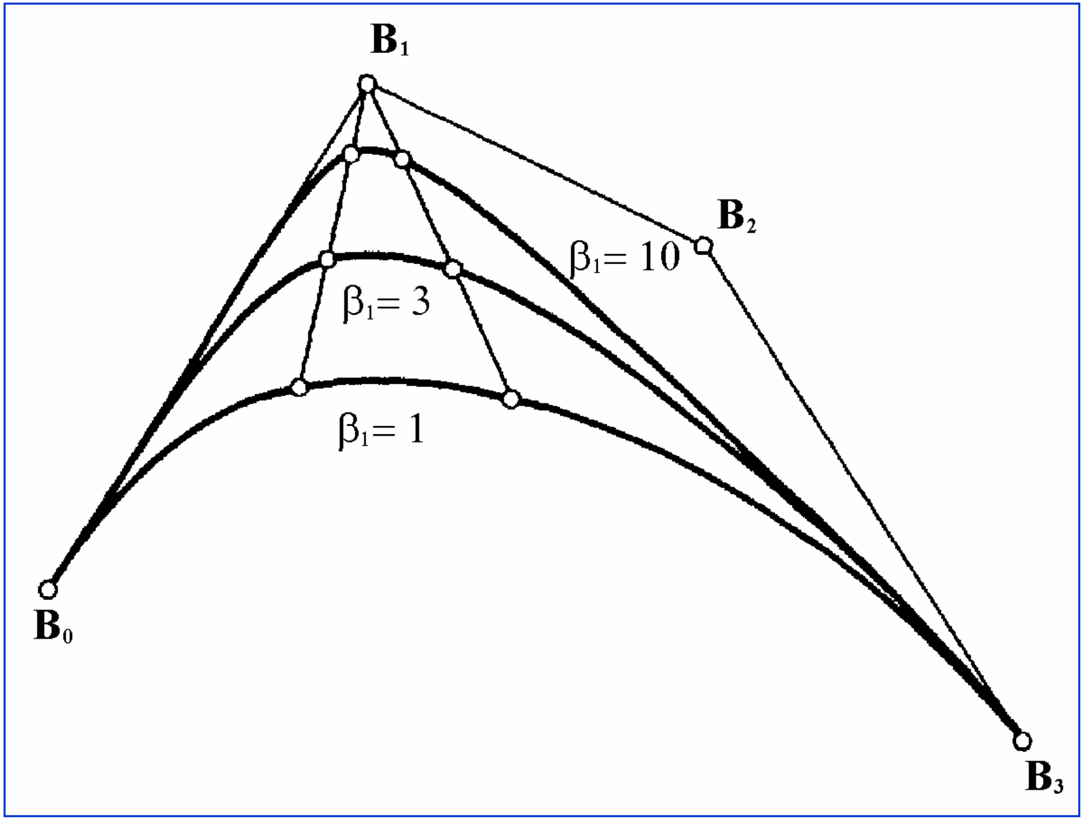
Si chiama "***curva razionale di Bezier***" una curva parametrica definita nell'intervallo reale I=[0, 1] ⊂ R a valori in R^2 (o, equivalentemente, in R^3) e tale che:

$$\mathbf{t} \in \mathbf{I} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{X(t)} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$$

$$X(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} \beta_i B_i J_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} \beta_i J_i^n(t)}$$

✓ β_i sono dei valori non negativi detti **"pesi"** ed associati ai punti di controllo

Pesi



I pesi assegnati ai punti di controllo permettono una maggiore “libertà di movimento” alla curva in quanto, al loro variare, X(t) cambia forma pur mantenendo lo stesso poligono di controllo.

In particolare, all’aumentare del valore di β_i , X(t) si spinge verso B_i mentre al diminuire di β_i , X(t) si allontana da B_i .

Vantaggi delle curve di Bézier

- ✓ Permettono un controllo molto spinto della propria forma mediante spostamento dei punti di controllo;
- ✓ Possono essere “raffinate” aumentandone il grado (inserendo, quindi, nuovi punti di controllo);
- ✓ Le curve di Bézier razionali permettono di effettuare modifiche mediante la modifica dei pesi e senza il bisogno di spostare i punti di controllo.

Svantaggi delle curve di Bézier

✓ Un cambiamento di un punto di controllo si ripercuote su tutta la curva;

✓ Il numero di punti di controllo è strettamente collegato al grado dei polinomi da utilizzare (**grado = numero di punti di controllo + 1**), per cui l’utilizzo di curve con molti punti di controllo richiede necessariamente polinomi di grado elevato.

B-splines

Si chiama "***B-spline***" la funzione parametrica definita mediante la seguente formula ricorsiva:

$$N_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t)$$

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & t \in [t_i, t_{i+1}[\\ 0 & altrimenti \end{cases} \qquad i = 0, \dots, n$$

Dove:

- ✓ n è un numero naturale fissato;
- ✓ $T = \{t_0, \dots, t_{n+k}\}$ è un vettore di numeri reali, detti "***nodi***", non decrescente $t_i \le t_{i+1}$ (i nodi coincidono con i punti di giuntura delle diverse polinomiali);
- ✓ k è un numero naturale fissato, tale che $2 \le k \le n$, detto ***"ordine della curva".***

Le curve B-splines sono, dunque, polinomiali a tratti di grado k-1 (non vincolato dal numero di punti di controllo), di classe C_{k-2} ed il cui grafico è contenuto nella cella convessa generata dai B0, …, Bn.

Vettore dei nodi

Uniforme: gli elementi sono equamente spaziati.

Esempio: T =[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]

Aperto Uniforme: i primi e gli ultimi k elementi di T coincidono mentre i rimanenti elementi sono equamente spaziati.

Esempio: T = [0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4]

Non Uniforme: elementi completamente asimmetrici.

Esempio: T= [-2, 1, 1.5, 1.5, 4]

Curve B-spline

Si chiama "***curva B-spline***", una curva P(t) definita in $J \subseteq I = [0,1] \subset \mathbb{R}$, a valori in $\mathbb{R}^2$ (od, equivalentemente, in $\mathbb{R}^3$), tale che:

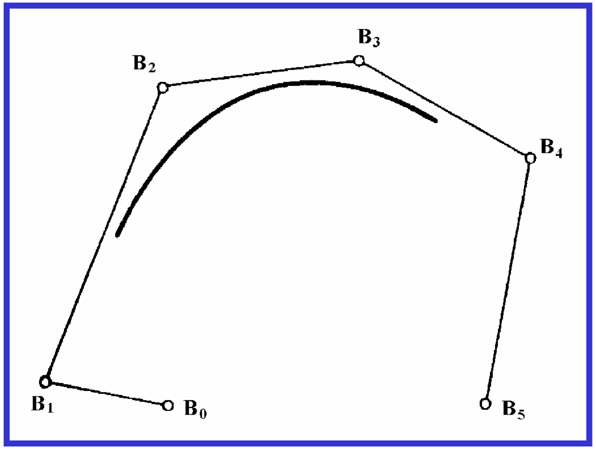
$$t \in J \subseteq I \subset \mathbb{R} \longrightarrow P(t) \in \mathbb{R}^2 \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1}] = J$$

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i N_{i,k}(t)$$

Dove:

- ✓ n è un numero naturale fissato;
- ✓ $N_{i,k}(t)$ con i = 0, …, n sono B-splines con vettore di nodi $T = \{t_0, \ldots, t_{n+k}\}$, di ordine uguale a k ($n \geq k-1$).
- ✓ B_i sono n+1 punti di $\mathbb{R}^2$ detti "***Punti di controllo***" che individuano i vertici di un poligono detto ***"poligono di controllo"***.

Tipologia di Curve B-spline

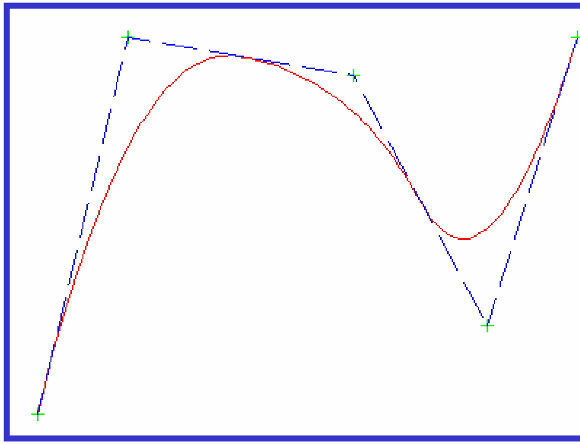


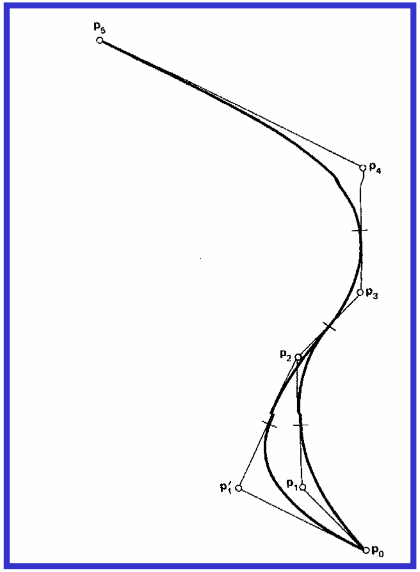
Uniformi

Gli estremi di P(t) non coincidono con quelli del poligono di controllo per cui la forma della curva non si può facilmente prevedere conoscendo solamente il suddetto poligono.

Aperte uniformi

In tal caso gli estremi di P(t) sono i punti estremi B_0 e B_n .



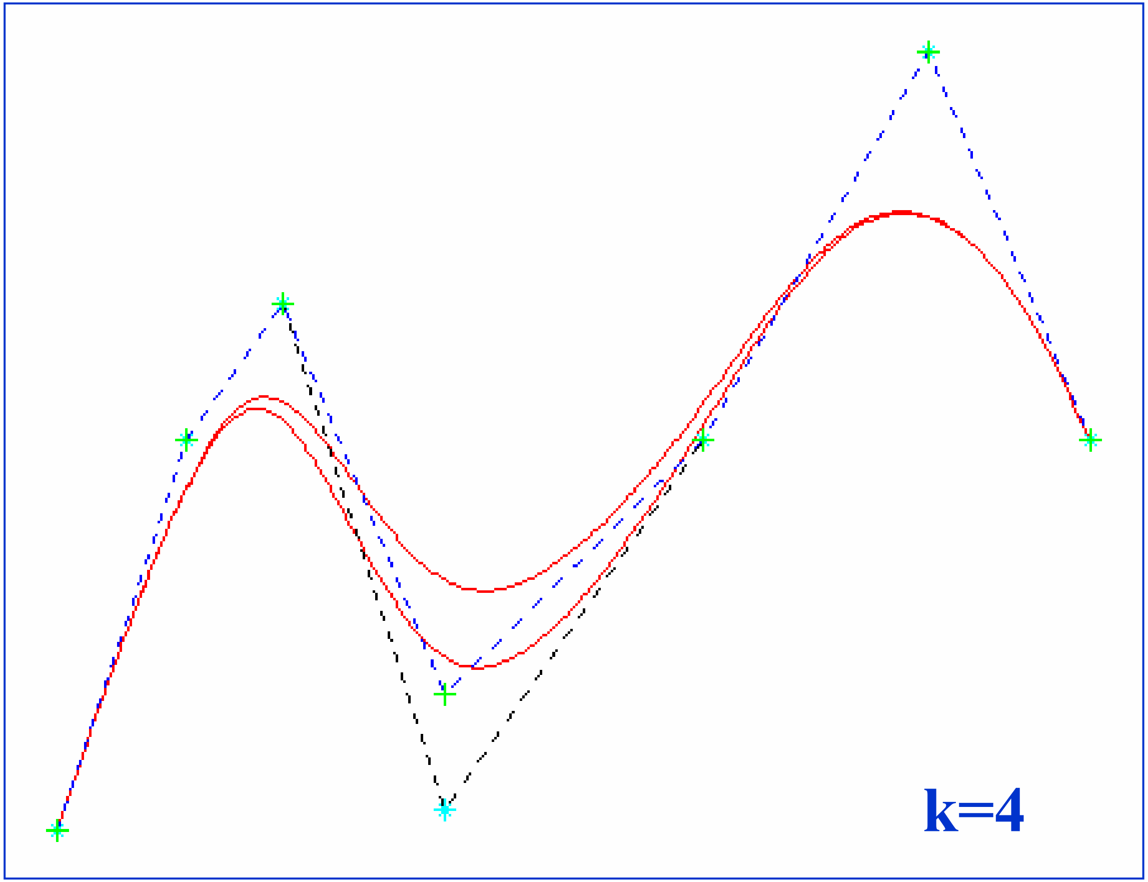


Non uniformi

In tal caso P(t) si può utilizzare anche per rappresentare curve discontinue essendo particolarmente flessibile".

Modifica dei punti di controllo

La modifica della posizione di un punto di controllo si ripercuote solo sulla parte di curva corrispondente a k/2 lati del poligono di controllo adiacenti al vertice spostato.



Curve B – spline razionali

Si chiama "***B-spline razionale***" una curva P(t) definita nell'intervallo reale $J \subseteq I = [0, 1] \subset \mathrm{R}$, a valori in R^2 (od, equivalentemente, in R^3) e tale che:

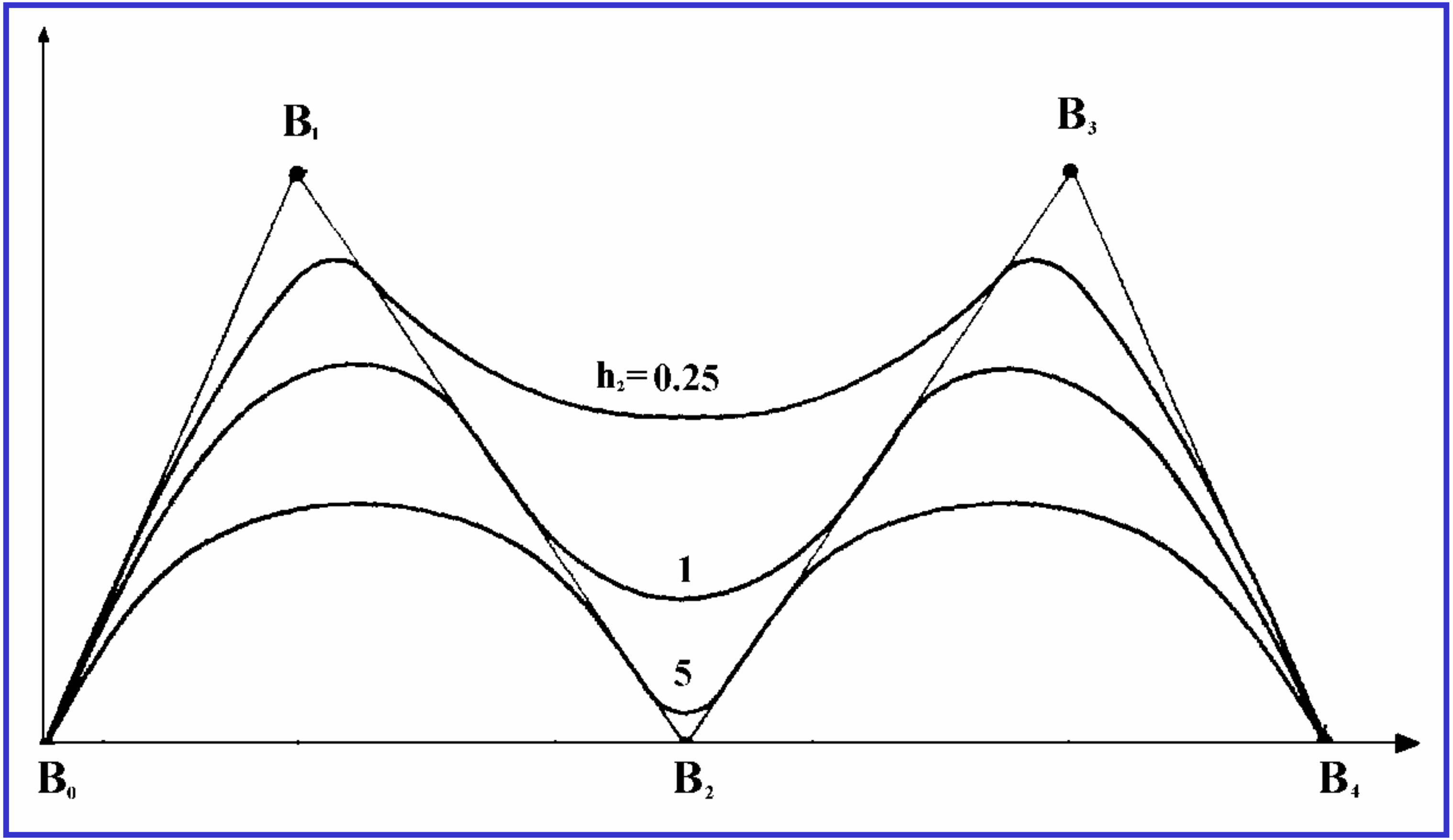
$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} h_i \, B_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=0}^{n} h_i \, N_{i,k}(t)}$$

$$\mathbf{t} \in \mathbf{J} \subseteq \mathbf{I} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{P(t)} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$$

Dove:

- ✓ n è un numero naturale fissato;
- ✓ I B_i sono n+1 punti di R^2 detti "***Punti di controllo***" che individuano i vertici di un poligono detto ***"poligono di controllo"***;
- ✓ gli h_i sono valori non negativi detti "***pesi***" ed associati ai punti di controllo;
- ✓ $N_{i,k}$ è la B-spline di ordine k;
- ✓ Il parametro t varia nell'intervallo $J = [t_k, t_{n+1}] \subseteq I$.

B – spline razionali
Variazione dei pesi



Vantaggi delle B-splines

Le curve B-splines superano due limiti delle curve di Bézier:

- ✓ La modifica di un punto di controllo non si ripercuote su tutta la curva ma solo su una sua parte;
- ✓ Il numero dei punti di controllo non è legato al grado dei polinomi utilizzati.

Le curve B-splines estremamente flessibili sono diventate, nella loro forma più evoluta (le NURBS) uno standard nei programmi di modellazione geometrica.

NURBS = Non Uniform Rational B-Splines

Le NURBS sono B-Splines razionali con vettore di nodi non uniforme. Questo vuol dire che per modificare una NURBS si può agire in tre diversi modi:

1. Cambiare il vettore dei nodi;
2. Muovere i punti di controllo;
3. Modificare i pesi.

Rappresentazione delle superfici

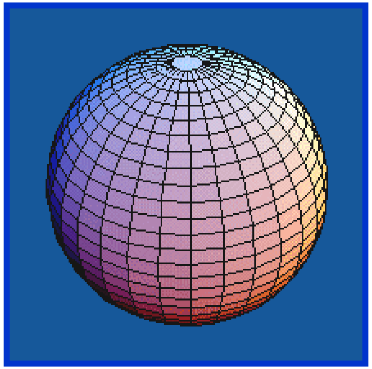
Equazioni implicite

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

Funzioni parametriche

$$\Gamma(u,v) = (\sin(u)\cos(v), \sin(u)\sin(v), \cos(u))$$

$$u \in [0, \pi] \quad v \in [0, 2\pi]$$

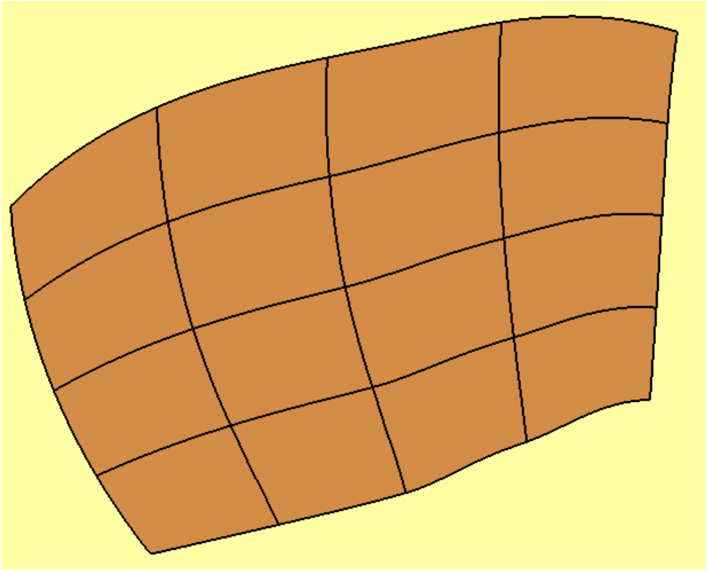


Patch di superfici

Una superficie complessa può essere pensata come un insieme di superfici più semplici, Patch, unite con opportune condizioni di continuità sui bordi comuni.

Una patch è definita da:

- 4 curve che la delimitano (curve di contorno);
- 4 punti angolari (intersezioni fra le curve).



Superfici intere di Bézier

Si chiama "***superficie intera di Bezier***" una superficie parametrica definita come:

$$Q: (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow Q(u,v) \in \mathbb{R}^3$$

$$Q(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} B_{i,k} J_i^n(u) J_k^m(v)$$

Dove:

- ✓ $J_i^n(u)$ e $J_k^m(v)$ sono i polinomi di Bernstein di grado n ed m;
- ✓ $B_{i,k}$ sono $(n+1)\cdot(m+1)$ punti di R^2 detti "***Punti di Bezier***" che individuano i vertici di un reticolato detto "***Rete di Bezier***".

Superfici razionali di Bézier

Si chiama ***"superficie razionale di Bezier"*** una superficie parametrica definita come:

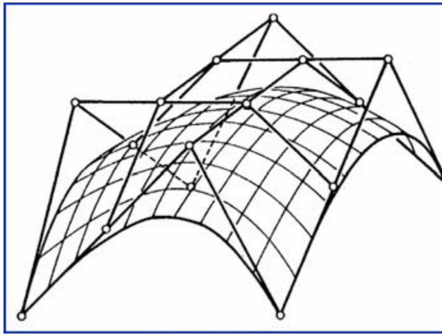
$$Q: (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow Q(u,v) \in \mathbb{R}^3$$

$$Q(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} \beta_{i,k} B_{i,k} J_i^n(u) J_k^m(v)}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} \beta_{i,k} J_i^n(u) J_k^m(v)}$$

- ✓ $J_i^n(u)$ e $J_k^m(v)$ sono i polinomi di Bernstein di grado n ed m;
- ✓ $B_{i,k}$ sono (n+1)·(m+1) punti di R^2 detti ***"Punti di Bezier"*** che individuano i vertici di un reticolato detto ***"Rete di Bezier"***.
- ✓ $\beta_{i,j}$ sono valori non negativi detti ***"pesi"*** associati ai punti di controllo.

Superfici intere B-splines

Si chiama "***superficie intera di B-splines***" una superficie parametrica definita come:



$$S: (u, v) \in J \times Y \subseteq [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S(u,v) \in \mathbb{R}^3$$

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} B_{i,j} N_{i,k}(u) M_{j,l}(v)$$

Dove:

- ✓ $N_{i,k}(u)$ e $M_{j,l}(v)$ sono B-splines di ordine k ed l;
- ✓ $B_{i,k}$ sono $(n+1)\cdot(m+1)$ punti di R^3 detti "***Punti di de Boor***" che individuano i vertici di un reticolato detto ***"Rete di de Boor"***.

Superfici razionali B-splines

Si chiama "***superficie razionale di B-splines***" una superficie parametrica definita come:

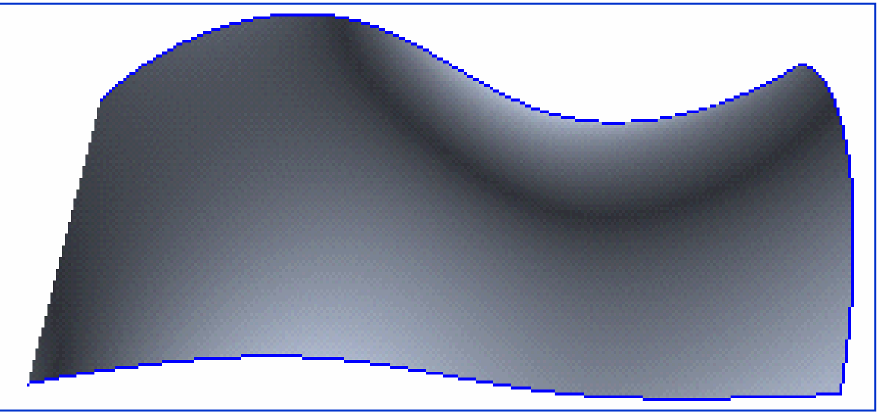
$$S: (u, v) \in J \times Y \subseteq [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S(u,v) \in \mathbb{R}^3$$

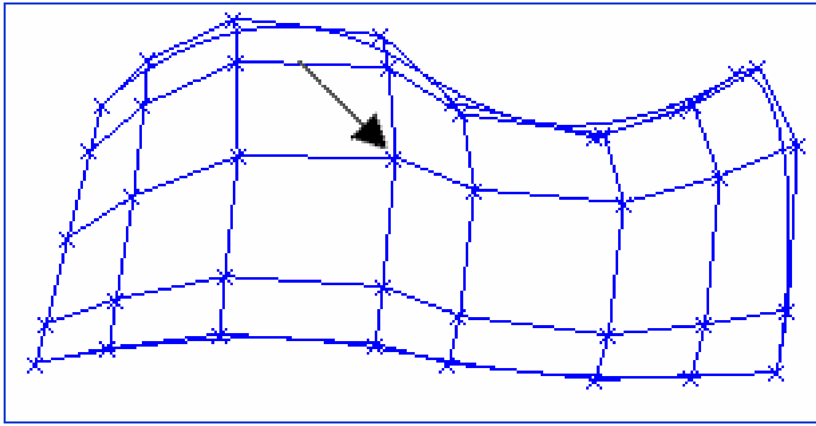
$$S(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \beta_{i,j} B_{i,j} N_{i,k}(u) N_{j,l}(v)}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \beta_{i,j} N_{i,k}(u) N_{j,l}(v)}$$

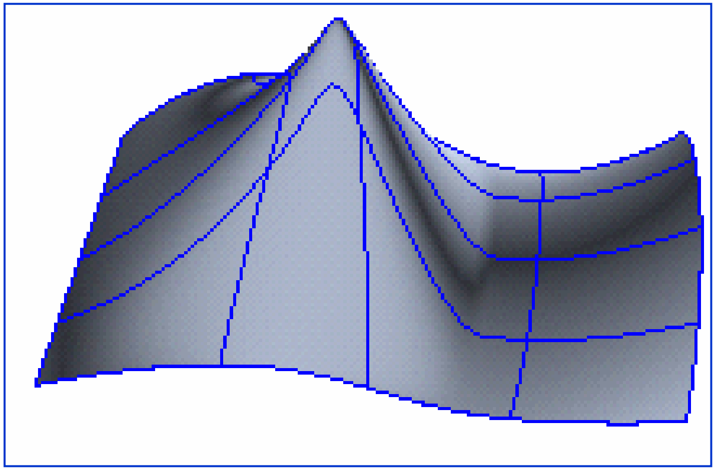
Dove:

- ✓ $N_{i,k}(u)$ e $M_{j,l}(v)$ sono B-splines di ordine k ed l;
- ✓ $B_{i,k}$ sono $(n+1)\cdot(m+1)$ punti di R^3 detti "***Punti di de Boor***" che individuano i vertici di un reticolato detto ***"Rete di de Boor"***.
- ✓ $\beta_{i,j}$ sono valori non negativi detti "***pesi***", associati ai punti di controllo.

Modifica dei punti di controllo



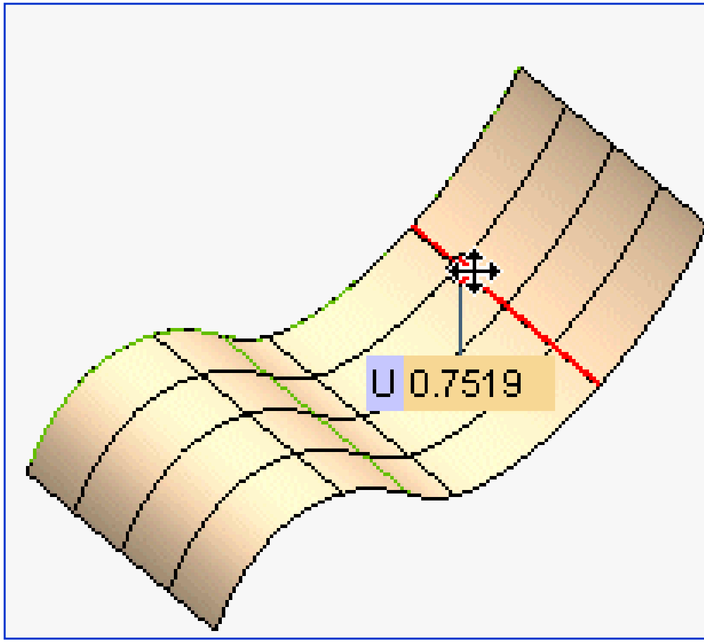




Curve isoparametriche

Sia S(u,v) è una superficie parametrica.

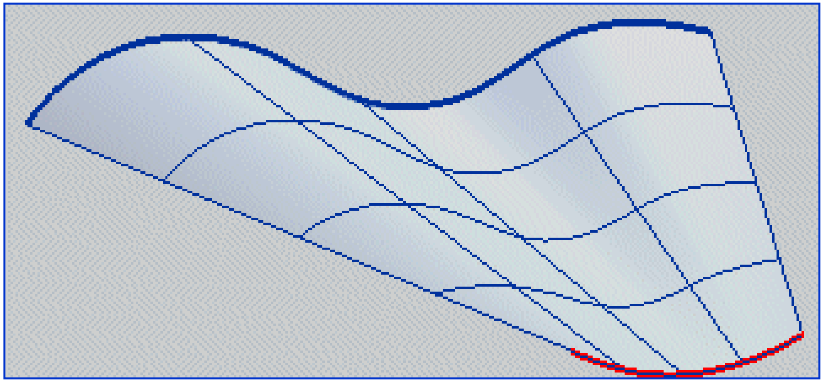
Fissato u=uo (costante) si valuta S(uo,v): si ottiene una ***curva*** detta ***isoparametrica***.



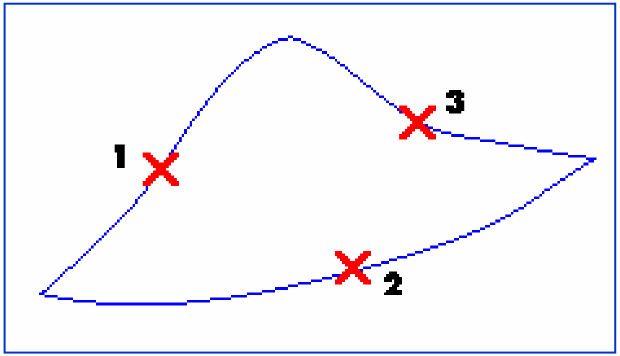
Le isoparametriche sono, quindi, curve che giacciono sulle superfici e sono costituite da tutti i punti ottenuti imponendo uno stesso valore ad uno dei parametri.

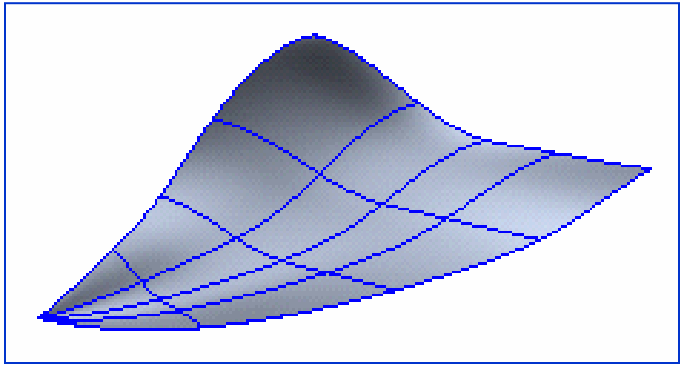
Superfici Rigate – Superfici Tese

Una ***superficie rigata*** è ottenuta congiungendo con tratti rettilinei punti omologhi di due curve.



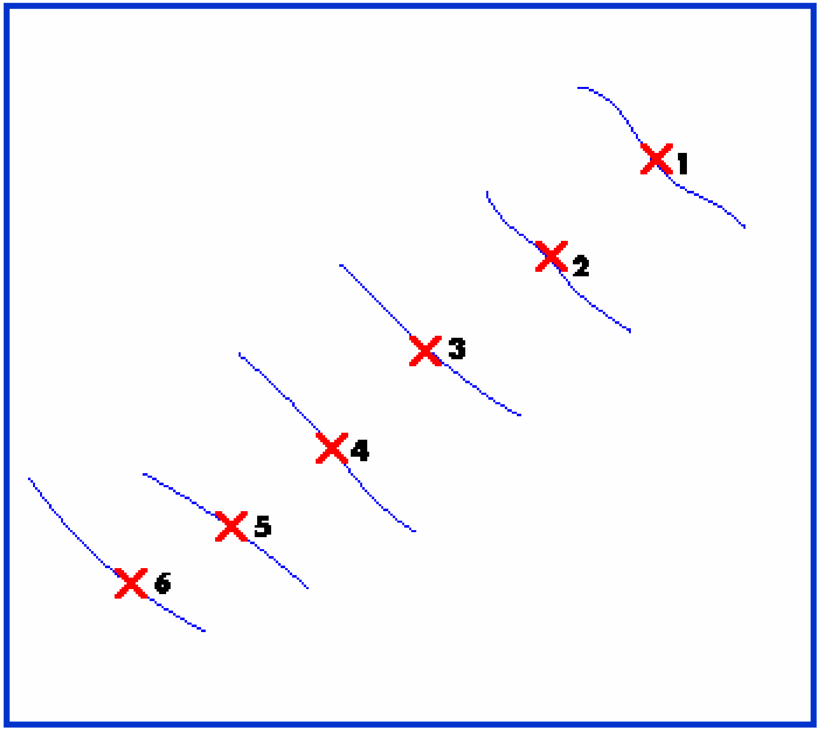
Sono definite indicando tre o quattro curve e/o bordi di superfici; tali entità coincideranno con i bordi della superficie generata.
La ***superficie*** ottenuta è detta ***tesa***: è, infatti, la superficie più liscia fra quelle individuate a partire dai bordi indicati.

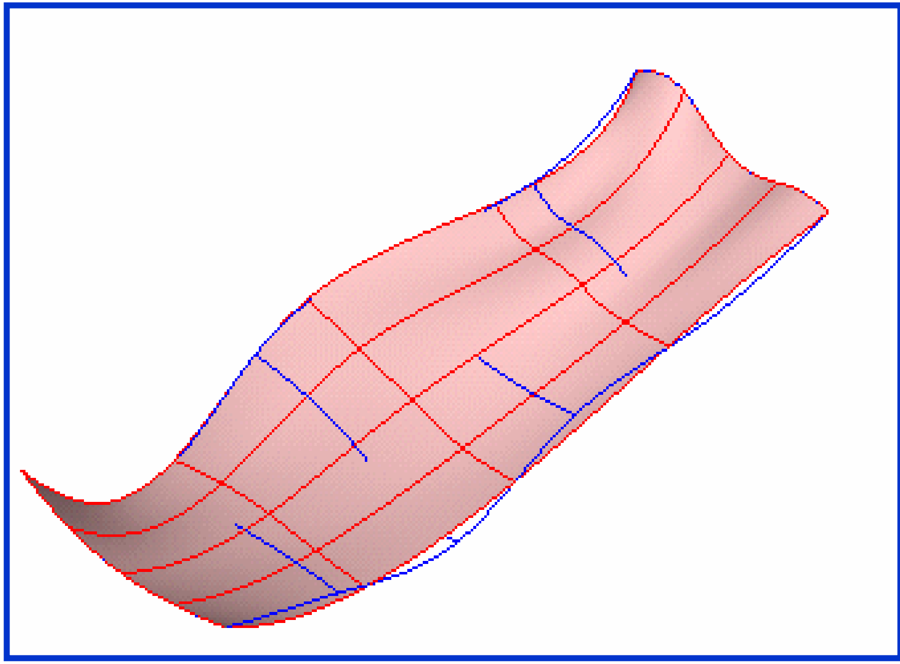




Superfici Curve u

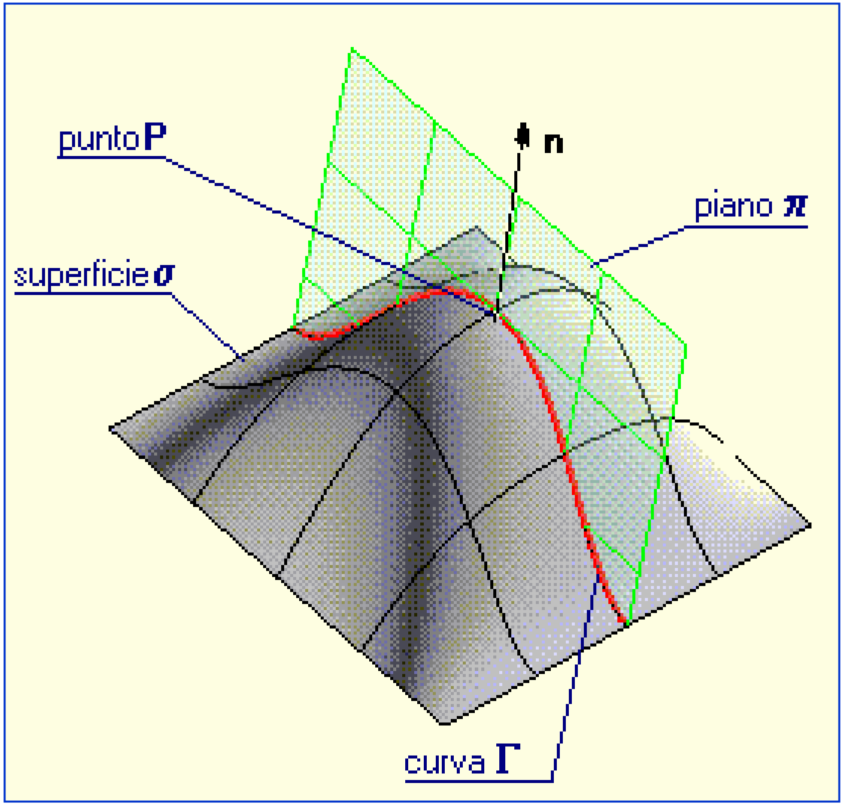
Dato un insieme di curve nello spazio che non si intersecano in alcun punto, è possibile stendere su di esse una superficie, detta ***"superficie curve u"***, che ammette le curve note come curve isoparametriche.





Curvatura di una superficie

Sia P un punto su σ ed n la normale di σ in P. Ogni piano π passante per P contenente n interseca σ in una curva Γ la cui curvatura si chiama curvatura normale di σ in P e si denota con k_n.

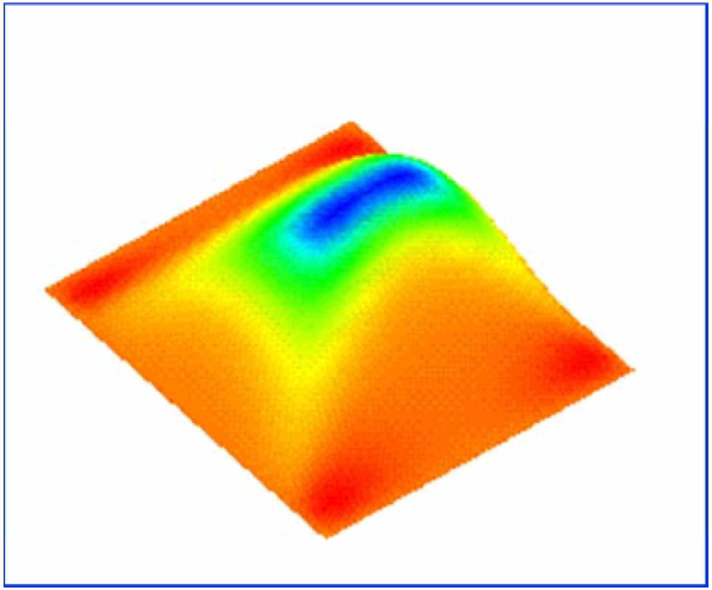


Curvature Principali

Eulero ha però dimostrato che "*esistono e sono uniche una direzione per la quale la curvatura è massima ed una direzione per la quale la curvatura è minima*".

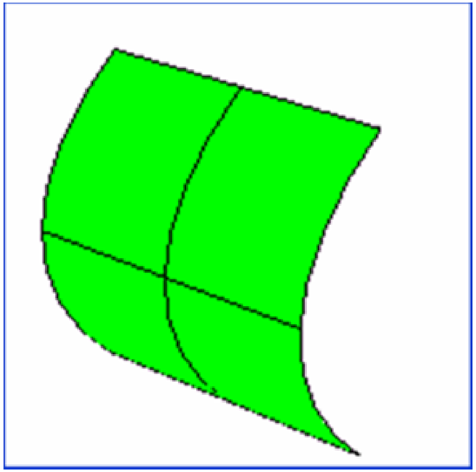
Le curvature in tali direzioni sono dette ***curvature principali*** e si denotano con k_1 e k_2. Il prodotto K delle curvature principali si chiama "Curvatura Gaussiana si σ in P"

$$K = k_1 \bullet k_2$$



Superfici Sviluppabili

Le superfici "sviluppabili" sono superfici per cui la curvatura gaussiana è identicamente nulla. L'annullarsi della curvatura gaussiana K richiede che almeno una delle due curvature principali k_1 e k_2 sia nulla. Tale curvatura indica la direzione lungo cui la superficie si riduce ad una retta.



Esempio superfici sviluppabili: coni, cilindri

Esempio superficie non sviluppabile: sfera

Sono molto utili in determinati campi industriali perché se la loro forma deve essere riprodotta mediante lamiere metalliche, la lavorazione necessaria a piegare quest'ultime è molto semplice.