

Laboratorio di compatibilità elettromagnetica

Modelli per l'analisi delle interconnessioni



Antonio Maffucci

D.A.E.I.M.I.
Università degli Studi di Cassino



maffucci@unicas.it

A. Maffucci, Laboratorio di Compatibilità Elettromagnetica 2005-2006

Cenni all'analisi di Signal Integrity



Studio di due aspetti fondamentali in un sistema di trasmissione:

- **Qualità del segnale ricevuto**
- **Timing**

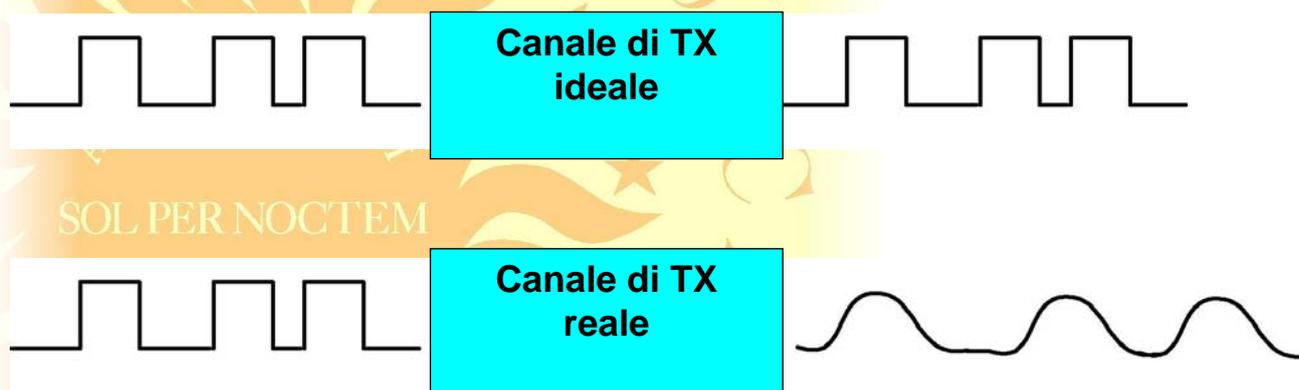
OCCORRE QUASI SEMPRE UN'ANALISI NEL DT

A. Maffucci, Laboratorio di Compatibilità Elettromagnetica 2005-2006

L'analisi di Signal Integrity

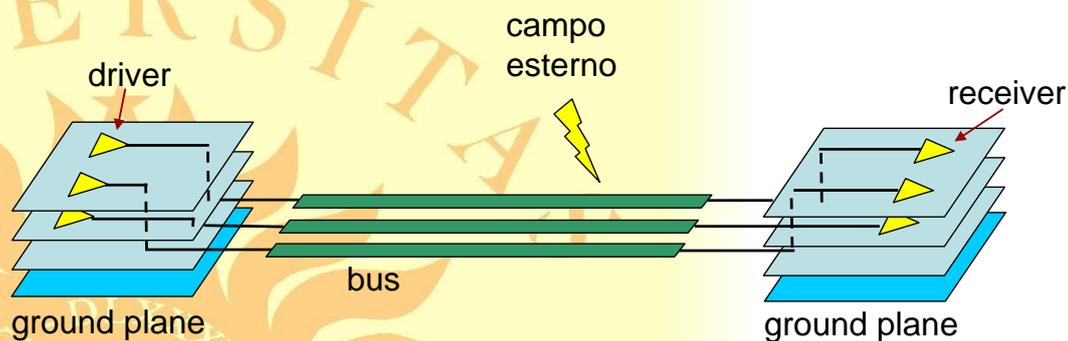
Studio di due aspetti fondamentali in un sistema di trasmissione:

- Qualità del segnale ricevuto
- Timing



A. Maffucci, Laboratorio di Compatibilità Elettromagnetica 2005-2006

Principali cause di deterioramento del segnale



Crosstalk	Ritardo	Attenuazione
Riflessione	Distorsione	Campi esterni
Delta I Noise	Ground Bounce	Radiazione

A. Maffucci, Laboratorio di Compatibilità Elettromagnetica 2005-2006

Principali punti critici

Comportamento non ideale dei dispositivi

Comportamento non ideale delle interconnessioni

Accoppiamenti indesiderati con campi esterni

Effetti parassiti legati alle discontinuità e alle terminazioni

Comportamento non ideale del ground

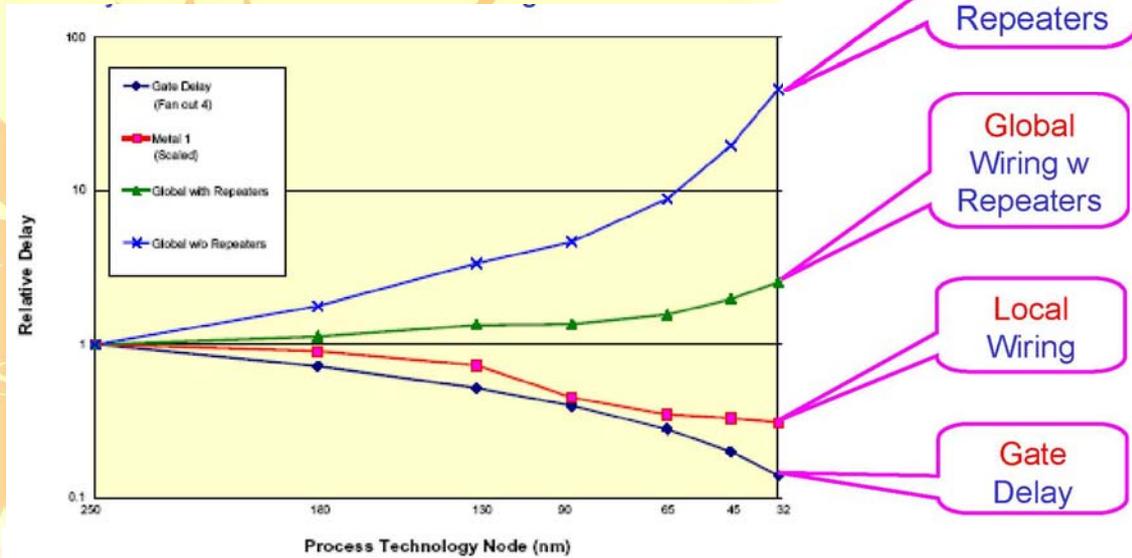
Separazione non perfetta tra parte analogica e digitale

Separazione non perfetta tra segnali e power

Il problema delle interconnessioni

	1997	2003	2006	2012
Chip size (mm²)	300	430	520	750
Number of transistors (million)	11	76	200	1400
Interconnect width (nm)	200	100	70	35
Total interconnect length(km)	2.16	2.84	5.14	24

Il problema delle interconnessioni: effetto sul ritardo del segnale



Source: ITRS roadmap 2004

A. Maffucci, Laboratorio di Compatibilità Elettromagnetica 2005-2006

Richiami sulla propagazione guidata

A. Maffucci, Laboratorio di Compatibilità Elettromagnetica 2005-2006

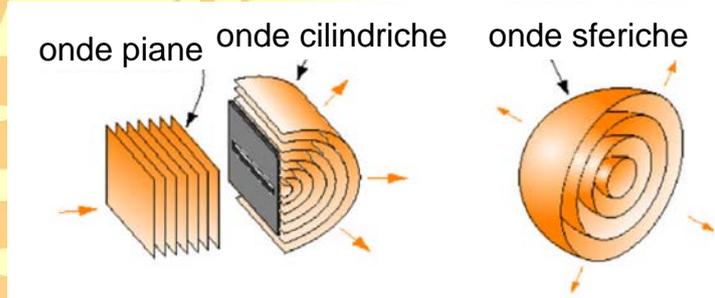
Onde elettromagnetiche

le equazioni di Maxwell complete ammettono soluzioni *viaggianti*

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= \mathbf{0} \\ \nabla^2 \mathbf{H} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$



velocità di propagazione: $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

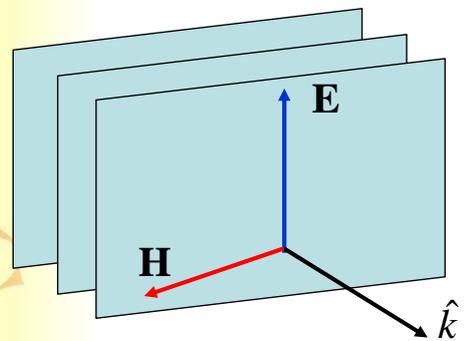
Onde elettromagnetiche

struttura fondamentale delle onde piane

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\zeta} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}$$

impedenza intrinseca: $\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

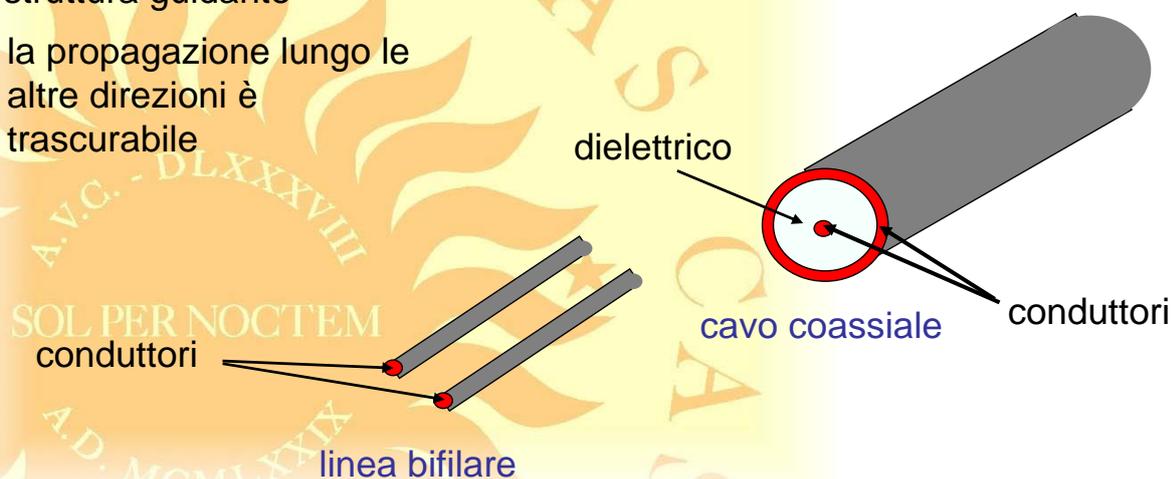
$\zeta_0 = 377 \Omega, \quad v_0 = c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$



Propagazione guidata

la direzione di propagazione è imposta dall'asse longitudinale di una struttura guidante

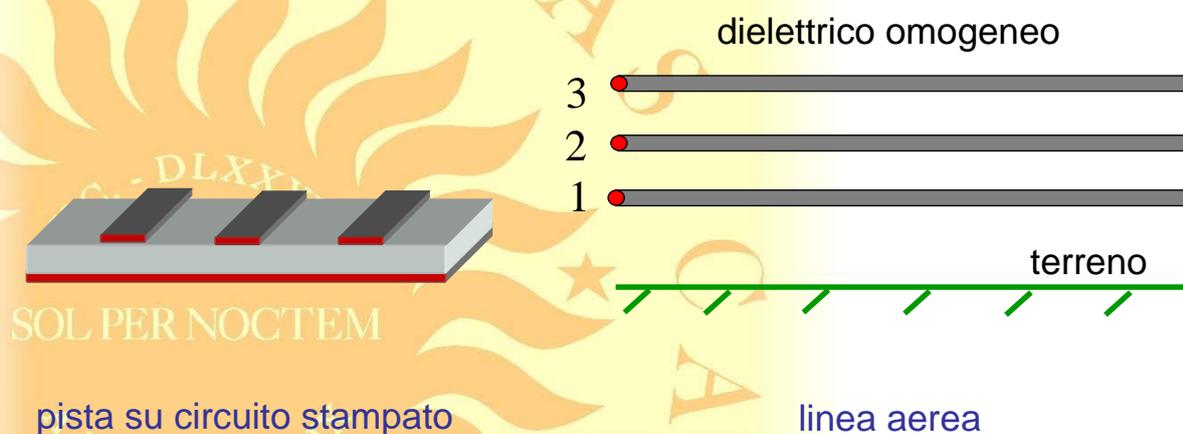
la propagazione lungo le altre direzioni è trascurabile



A. Maffucci, Laboratorio di Compatibilità Elettromagnetica 2005-2006

Propagazione guidata

altri esempi di strutture guidanti



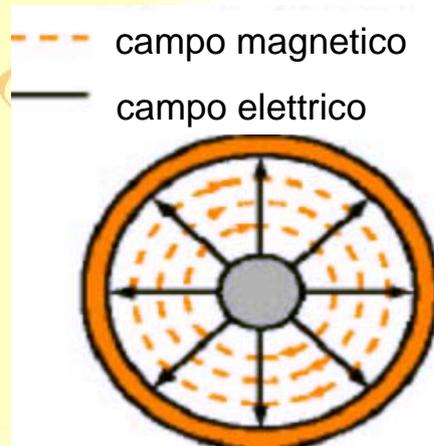
A. Maffucci, Laboratorio di Compatibilità Elettromagnetica 2005-2006

Strutture guidanti: modi di propagazione

modi di propagazione: soluzioni particolari delle equazioni di Maxwell nelle strutture guidanti

MODO TEM
(Trasverso Eletto-Magnetico)

modo fondamentale per strutture a connessione molteplice



Strutture guidanti: modi di propagazione

supponiamo che il campo dipende solo da z e si propaghi lungo z :

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= \mathbf{0} \\ \nabla^2 \mathbf{H} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

2 onde TEM



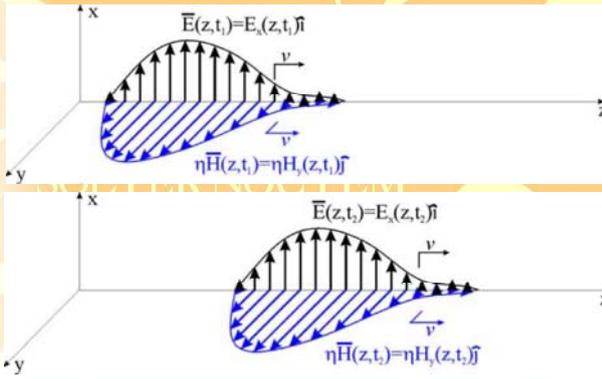
$$\begin{aligned}\{E_x(z,t), H_y(z,t)\} \\ \{E_y(z,t), H_x(z,t)\}\end{aligned}$$

Strutture guidanti: modi di propagazione

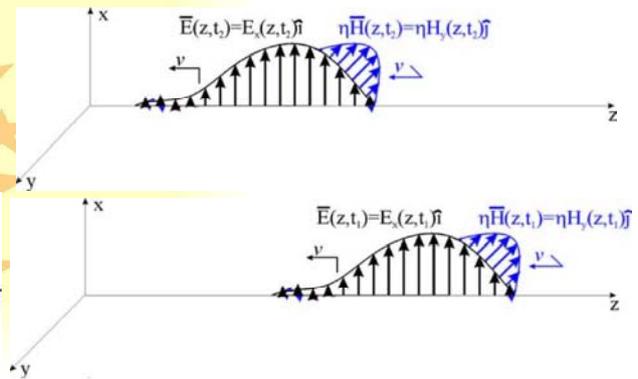
$$E_x(z,t) = E_x^+(t - z/v) + E_x^-(t + z/v)$$

$$H_y(z,t) = \frac{1}{\xi} \left(E_x^+(t - z/v) - E_x^-(t + z/v) \right)$$

progressiva



regressiva

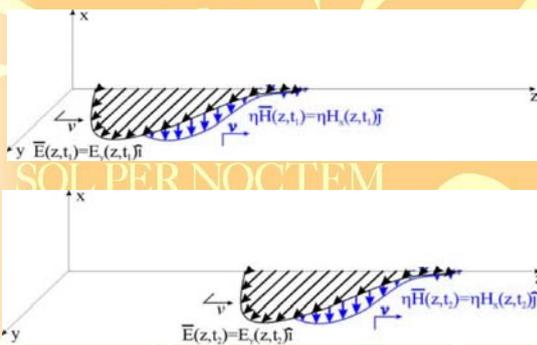


Strutture guidanti: modi di propagazione

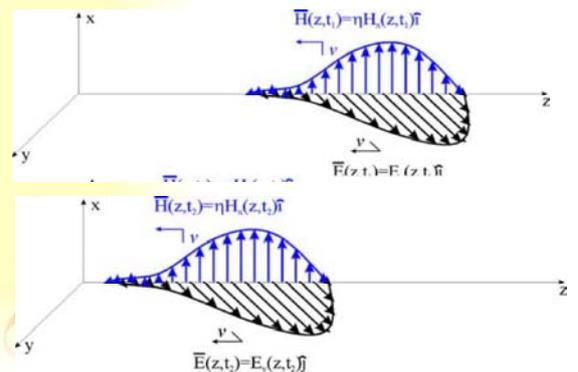
$$E_y(z,t) = E_y^+(t - z/v) + E_y^-(t + z/v)$$

$$H_x(z,t) = -\frac{1}{\xi} \left(E_y^+(t - z/v) - E_y^-(t + z/v) \right)$$

progressiva



regressiva



Modi di propagazione

A frequenza zero esiste solo il modo fondamentale

TEM = Trasverso elettromagnetico

Al crescere della frequenza vengono eccitati i modi superiori:

TE = Trasverso elettrico

TM = Trasverso magnetico

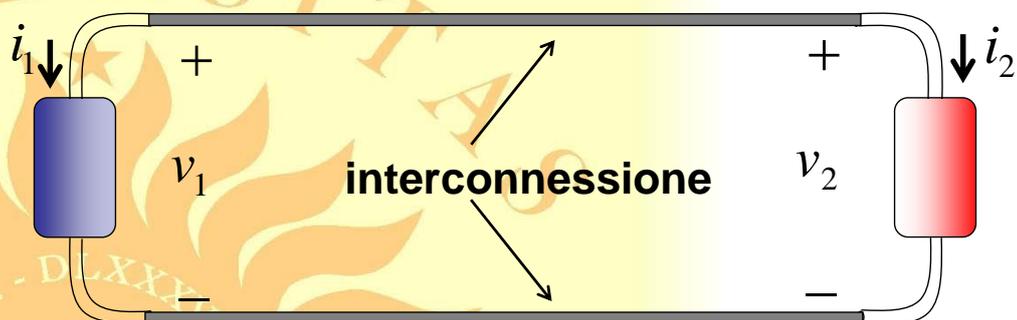
SOL PER NOCTEM

Nelle condizioni di funzionamento normale si cerca di non eccitare modi superiori (potenza dissipata)

Modellistica delle interconnessioni

SOL PER NOCTEM

Modello di una interconnessione



Modelli concentrati:

$$i_1 + i_2 = 0$$

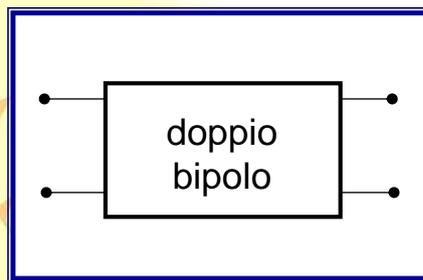
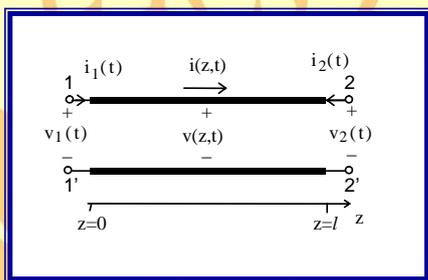
$$v_1 - v_2 = 0$$

Modelli distribuiti e full-wave

$$i_1 + i_2 \neq 0$$

$$v_1 - v_2 \neq 0$$

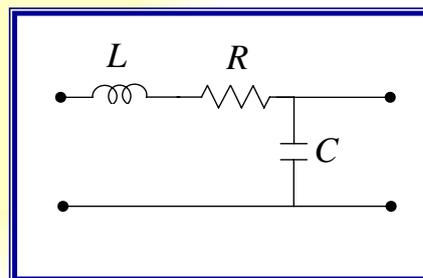
Modello concentrato di una interconnessione



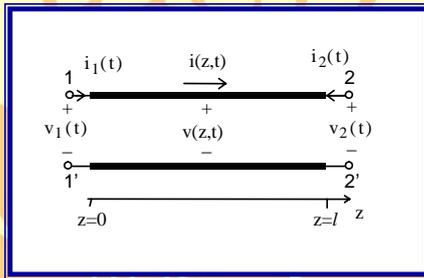
Il modello consente di caratterizzare l'oggetto in termini di un multiporale concentrato:

linee **eletttricamente corte**

$$l/\lambda \leq 0.1$$



Modello distribuito di una interconnessione



$$\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = -L \frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

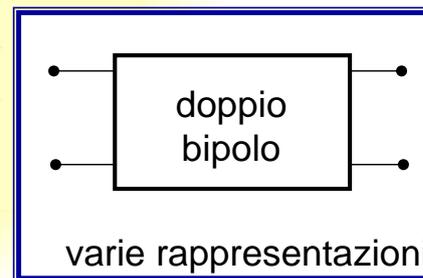
$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -C \frac{\partial v(z,t)}{\partial t}$$

telegrafisti

L'interconnessione elettrica si descrive con il modello di propagazione guidata TEM:

linee **eletticamente lunghe**

$$l/\lambda > 0.1$$



Modello a linea di trasmissione: linea singola ideale

$$\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = -L \frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -C \frac{\partial v(z,t)}{\partial t}$$

L = induttanza per unità di lunghezza

C = capacità per unità di lunghezza

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{mezzi omogenei})$$

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{Eq.delle onde}$$

$$v(z,t) = v^+(t - z/c) + v^-(t + z/c - T)$$

$$Z_0 i(z,t) = v^+(t - z/c) - v^-(t + z/c - T)$$

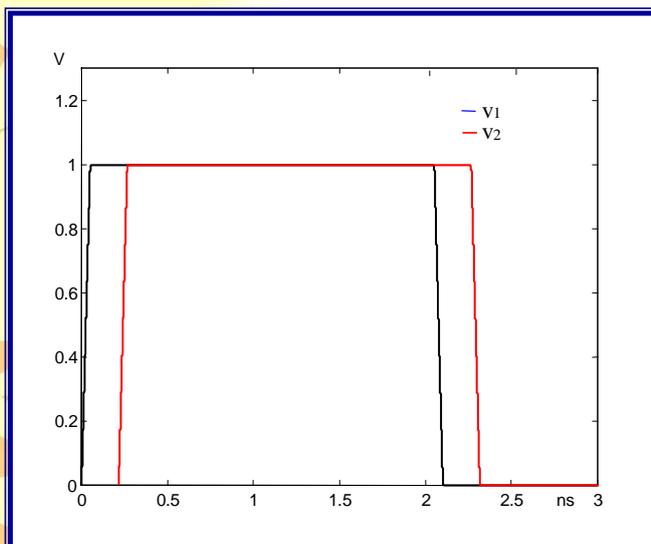
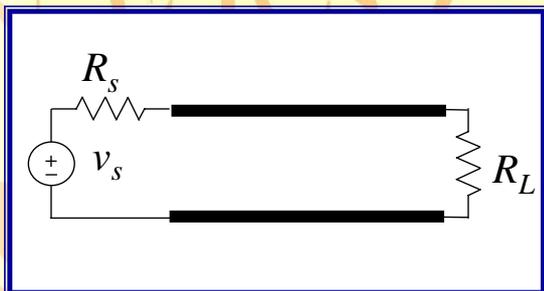
impedenza caratteristica

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

tempo di transito

$$T = l\sqrt{LC}$$

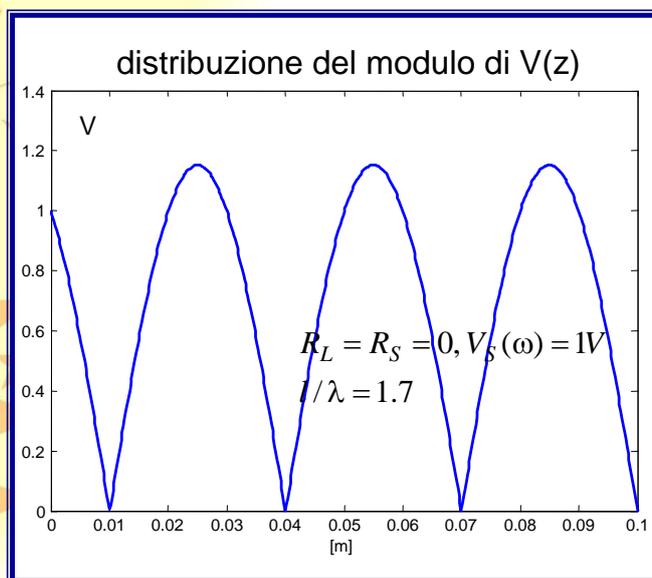
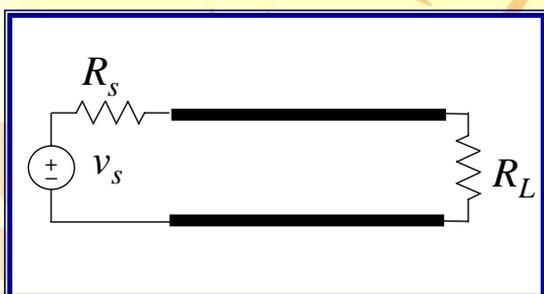
Effetto delle linee di trasmissione: ritardo



ritardo di propagazione

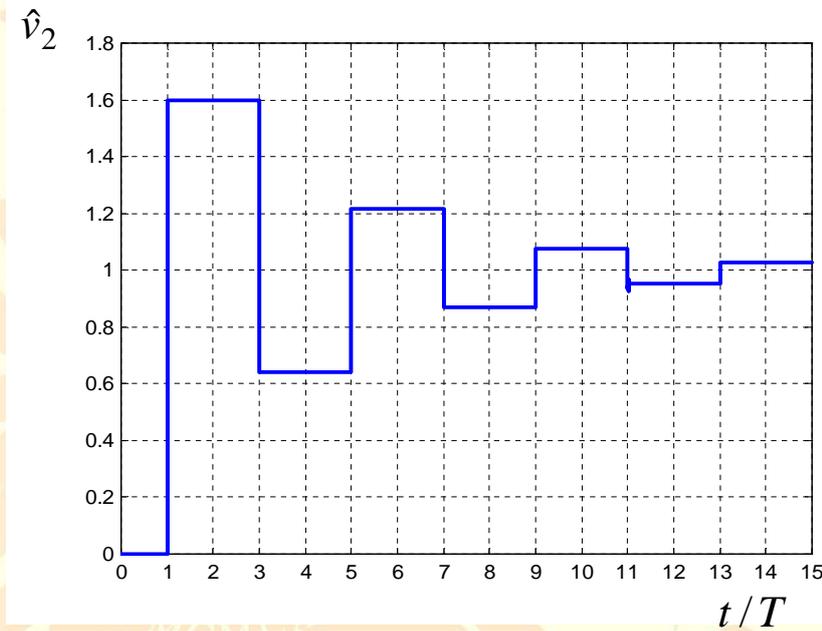
$$T = l\sqrt{LC}$$

Effetto delle linee di trasmissione: distribuzione di corrente e tensione



I conduttori non sono equipotenziali!

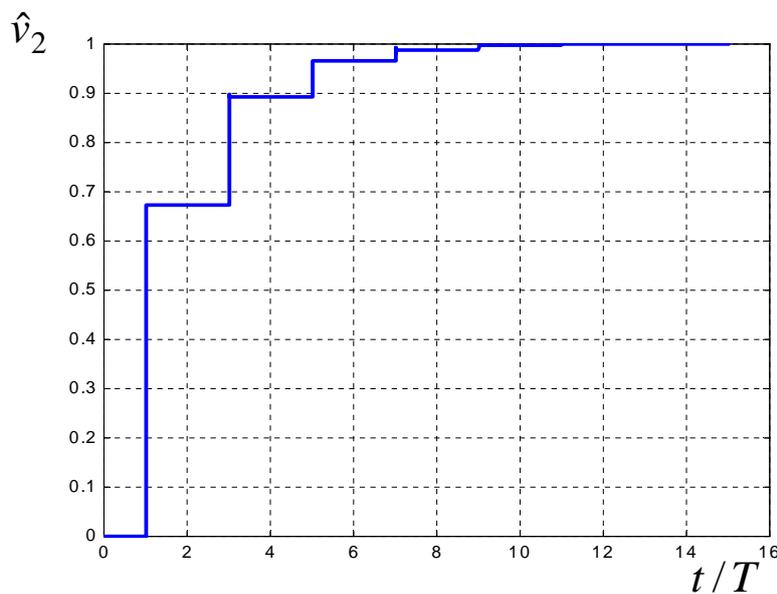
Effetto delle linee di trasmissione: overshoots



disadattamento tra carichi ed impedenza caratteristica

$$R_L > Z_0$$

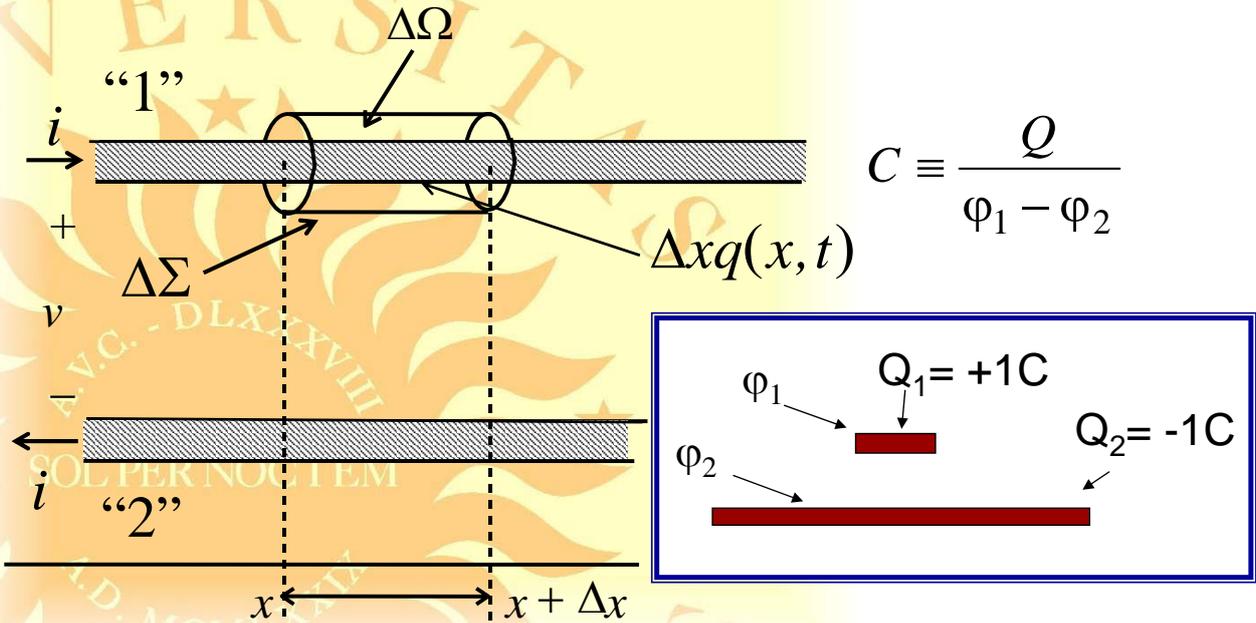
Effetto delle linee di trasmissione: undershoots



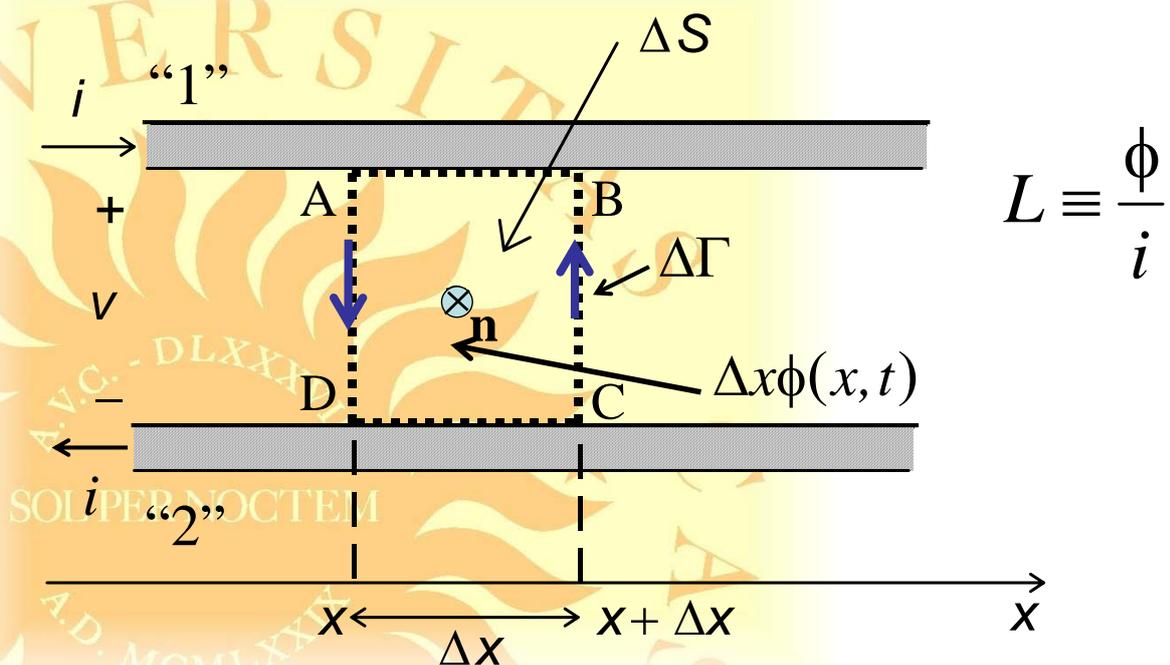
disadattamento tra carichi ed impedenza caratteristica

$$R_L < Z_0$$

Definizione dei parametri p.u.l.: capacità

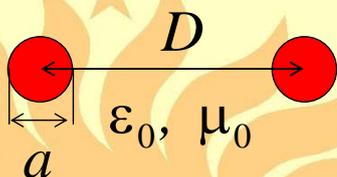


Definizione dei parametri p.u.l.: induttanza



Parametri p.u.I. per strutture canoniche

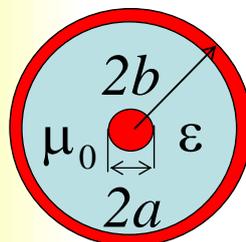
Linea bifilare



$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \cosh^{-1} \frac{D}{2a}$$

$$C = \pi \epsilon_0 \frac{1}{\cosh^{-1} \frac{D}{2a}}$$

Cavo coassiale

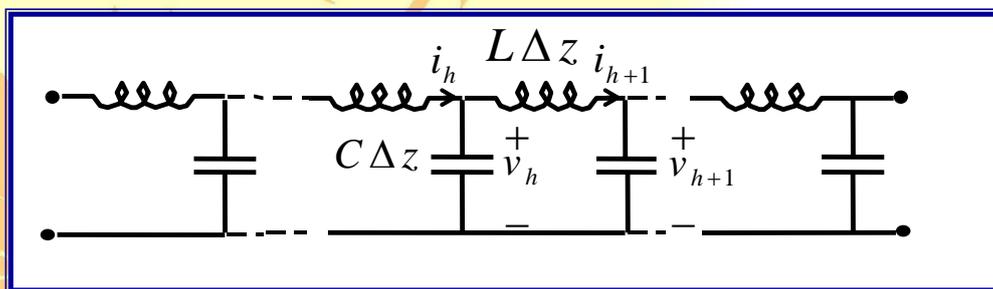


$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$C = 2\pi \epsilon \frac{1}{\ln \frac{b}{a}}$$

Modellistica delle linee di trasmissione

tecnica della segmentazione: linea singola ideale

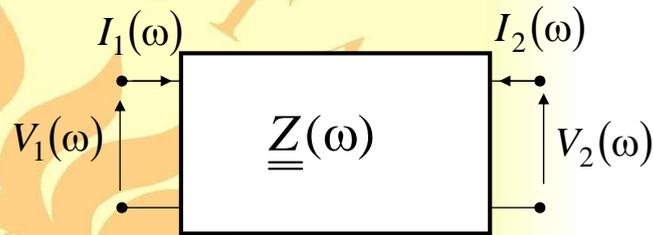


Segmenti necessari per un segnale con rise-time t_r (banda a 3 dB): $N \geq 10 \frac{T}{t_r}$

$$\begin{aligned} t_r &= 0.2ns & l &= 10cm \\ C &= 1pF/cm & L &= 5nH/cm \\ N &\geq 35 \end{aligned}$$

Modelli equivalenti nel dominio della frequenza

Matrice delle impedenze

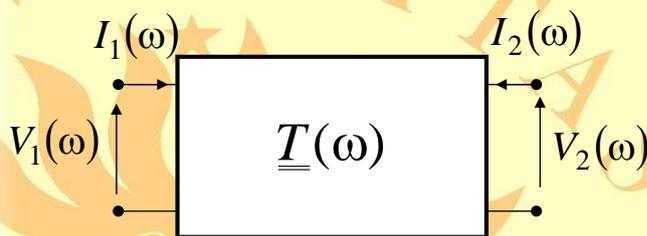


$$V_1(\omega) = Z_{11}(\omega)I_1(\omega) + Z_{12}(\omega)I_2(\omega)$$

$$V_2(\omega) = Z_{21}(\omega)I_1(\omega) + Z_{22}(\omega)I_2(\omega)$$

Modelli equivalenti nel dominio della frequenza

Matrice di trasmissione



$$\underline{k}(\omega) = -j[\underline{Z}(\omega)\underline{Y}(\omega)]^{-1/2}$$

$$\underline{Z}_c(\omega) = [\underline{Z}(\omega)\underline{Y}(\omega)]^{-1/2}\underline{Z}(\omega)$$

$$T_{11}(\omega) = T_{22}(\omega) = \cos(\underline{k}(\omega)l)$$

$$T_{12}(\omega) = -j \sin(\underline{k}(\omega)l)\underline{Z}_c(\omega)$$

$$T_{21}(\omega) = -j \sin(\underline{k}(\omega)l)\underline{Z}_c^{-1}(\omega)$$

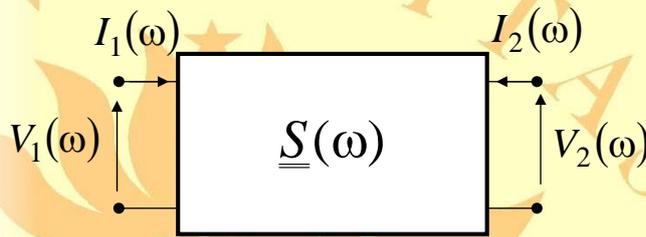
$$V_2(\omega) = T_{11}(\omega)V_1(\omega) + T_{12}(\omega)I_1(\omega)$$

$$-I_2(\omega) = T_{21}(\omega)V_1(\omega) + T_{22}(\omega)I_1(\omega)$$

La rappresentazione T è molto conveniente, in quanto consente di trattare agevolmente sistemi in cascata

Modelli equivalenti nel dominio della frequenza

Matrice di scattering



$$\hat{V}_1(\omega) = A_1(\omega) + B_1(\omega)$$

$$\hat{V}_2(\omega) = A_2(\omega) + B_2(\omega)$$

$$\hat{I}_1(\omega) = A_1(\omega) - B_1(\omega)$$

$$\hat{I}_2(\omega) = A_2(\omega) - B_2(\omega)$$

$$\hat{V}_1(\omega) = \frac{V_1(\omega)}{\sqrt{Z_0}}, \quad \hat{V}_2(\omega) = \frac{V_2(\omega)}{\sqrt{Z_0}}$$

$$\hat{I}_1(\omega) = \sqrt{Z_0} I_1(\omega), \quad \hat{I}_2(\omega) = \sqrt{Z_0} I_2(\omega)$$

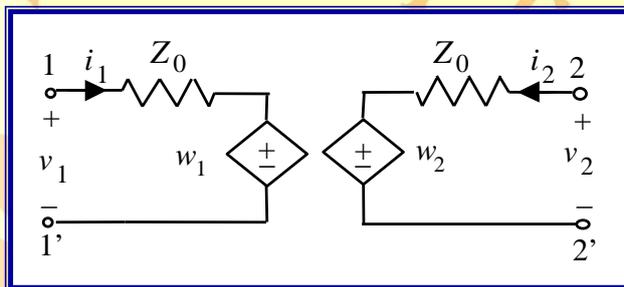
$$B_1(\omega) = S_{11}(\omega)A_1(\omega) + S_{12}(\omega)A_2(\omega)$$

$$B_2(\omega) = S_{21}(\omega)A_1(\omega) + S_{22}(\omega)A_2(\omega)$$

La rappresentazione S si adatta bene alla caratterizzazione sperimentale dei componenti ad alta frequenza e al bilancio di potenza

Modelli equivalenti nel dominio del tempo

modello open-loop (metodo delle caratteristiche): linea singola ideale



$$\begin{cases} v_1(t) - Z_0 i_1(t) = w_1(t) \\ v_2(t) - Z_0 i_2(t) = w_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1(t) = v_2(t - T) + Z_0 i_2(t - T) \\ w_2(t) = v_1(t - T) + Z_0 i_1(t - T) \end{cases}$$

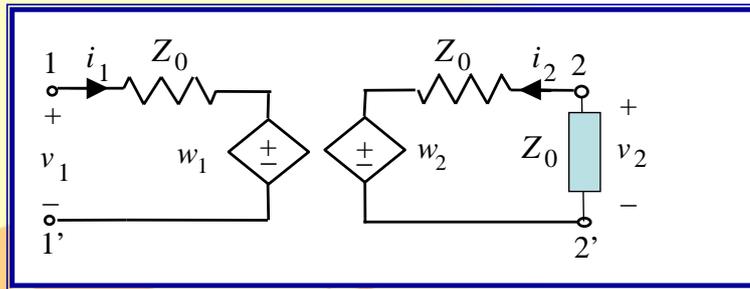
$$\begin{cases} w_1(t) = v_2(t - T) + Z_0 i_2(t - T) \\ w_2(t) = v_1(t - T) + Z_0 i_1(t - T) \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1(t) = v_2(t - T) + Z_0 i_2(t - T) \\ w_2(t) = v_1(t - T) + Z_0 i_1(t - T) \end{cases}$$

w_1, w_2 sono nulli se la linea è **adattata**: $v_1(t) = -Z_0 i_1(t), v_2(t) = -Z_0 i_2(t)$

Il modello si presta in modo naturale ad una procedura di risoluzione **ricorsiva** (SPICE)

Linea adattata



$$\begin{cases} v_2 = Z_0 i_2 + w_2 \\ v_2 = -Z_0 i_2 \end{cases} \Rightarrow 2v_2 = w_2 \quad \begin{cases} w_1(t+T) = 0 & t \geq 0 \\ \Downarrow \\ w_1(t) = 0 & t \geq T \\ v^-(t) = 0 & t \geq T \end{cases}$$

$$w_1(t+T) = 2v_2(t) - w_2(t)$$

LINEA CON PERDITE: modello quasi-TEM

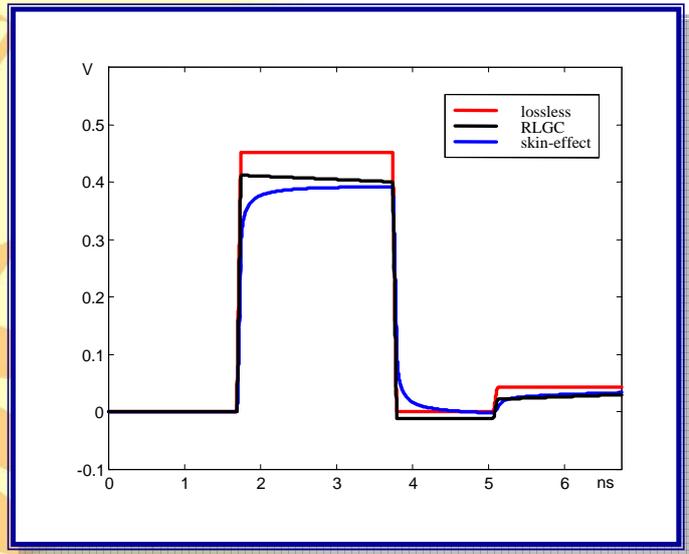
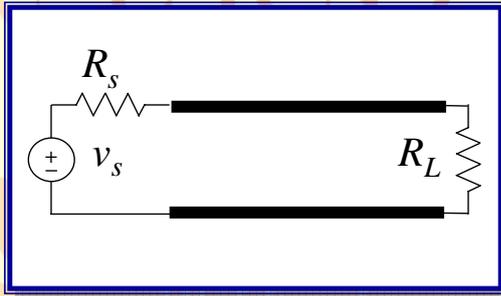
$$\begin{aligned} \frac{\partial v(z,t)}{\partial z} &= -Ri(z,t) - L \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} &= -Gv(z,t) - C \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \end{aligned}$$

Linee con perdite indipendenti da f
 R = resistenza per unità di lunghezza
 G = conduttanza per unità di lunghezza

$$\begin{aligned} \frac{dV(z,\omega)}{dz} &= -Z(z,\omega)I(z,\omega) \\ \frac{dI(z,\omega)}{dz} &= -Y(z,\omega)V(z,\omega) \end{aligned}$$

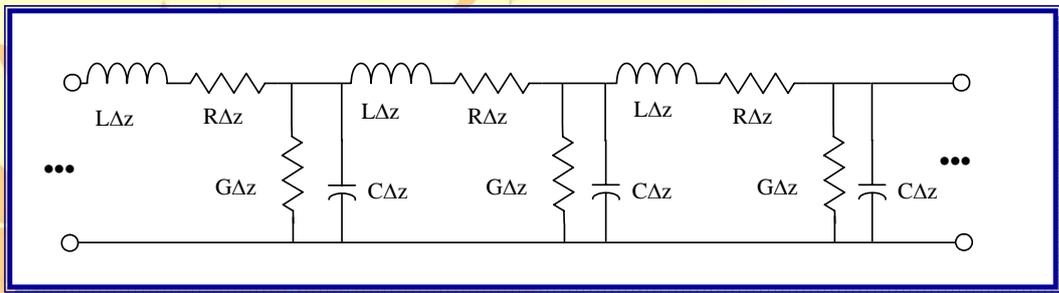
Linee con perdite dipendenti da f e da z
 Z = impedenza per unità di lunghezza
 Y = ammettenza per unità di lunghezza

Effetto delle perdite: distorsione



effetto delle perdite
nella forma d'onda
dei segnali trasmessi

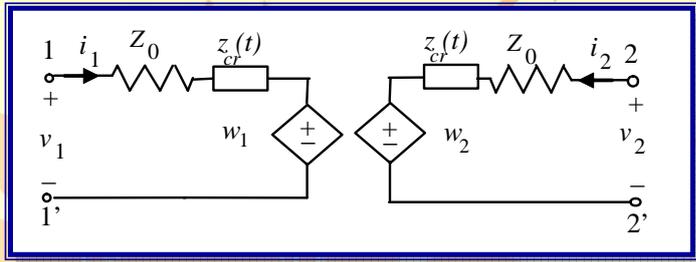
Linea singola RLGC: segmentazione



Il caso di linea singola con parametri dipendenti da frequenza
richiederebbe celle elementari molto complesse

Linea singola con perdite: equivalente nel dominio del tempo

modello open-loop: linea singola reale



$$\begin{cases} v_1(t) - Z_0 i_1(t) = z_{cr}(t) * i_1(t) + w_1(t) \\ v_2(t) - Z_0 i_2(t) = z_{cr}(t) * i_2(t) + w_2(t) \\ w_1(t) = p(t) * [v_2(t) + Z_0 i_2(t)] \\ w_2(t) = p(t) * [v_1(t) + Z_0 i_1(t)] \end{cases}$$

operatore di propagazione

$$P(\omega) = \exp(-l\sqrt{Z(\omega)Y(\omega)}) = P_\infty(s) + P_r(s)$$

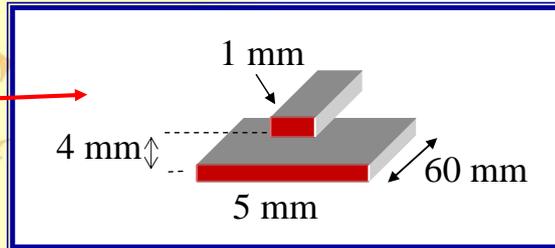
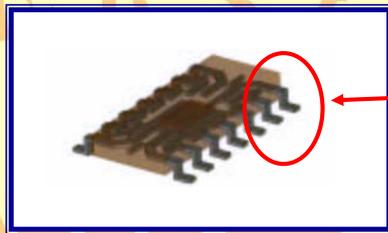


$$p(t) = e^{-\mu T} \delta(t - T) + p_r(t - T)$$

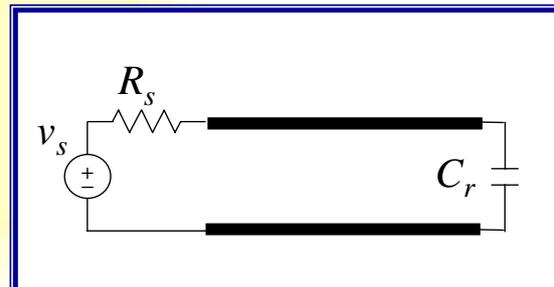
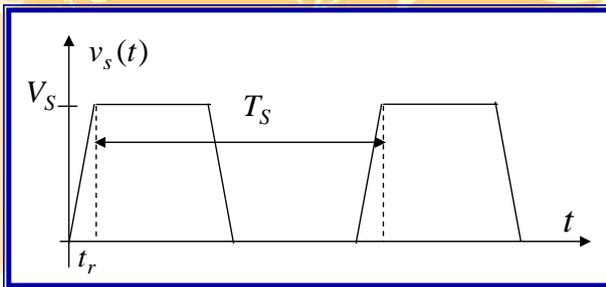
Un problema di integrità di segnale:

**effetto della modellazione delle
interconnessioni digitali ad alta
velocità**

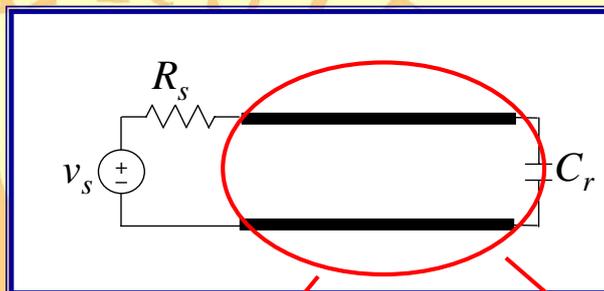
Interconnessione su package



problema- tipo: trasmissione del segnale di clock



Confronto tra modelli: distribuito e concentrato



$$L = 0.324 \mu\text{H/m}$$

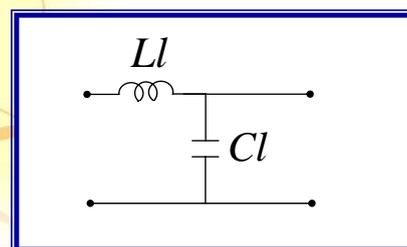
$$C = 34.37 \text{ pF/m}$$

$$Z_0 = 97.02 \Omega$$

$$T = 0.2 \text{ ns}$$

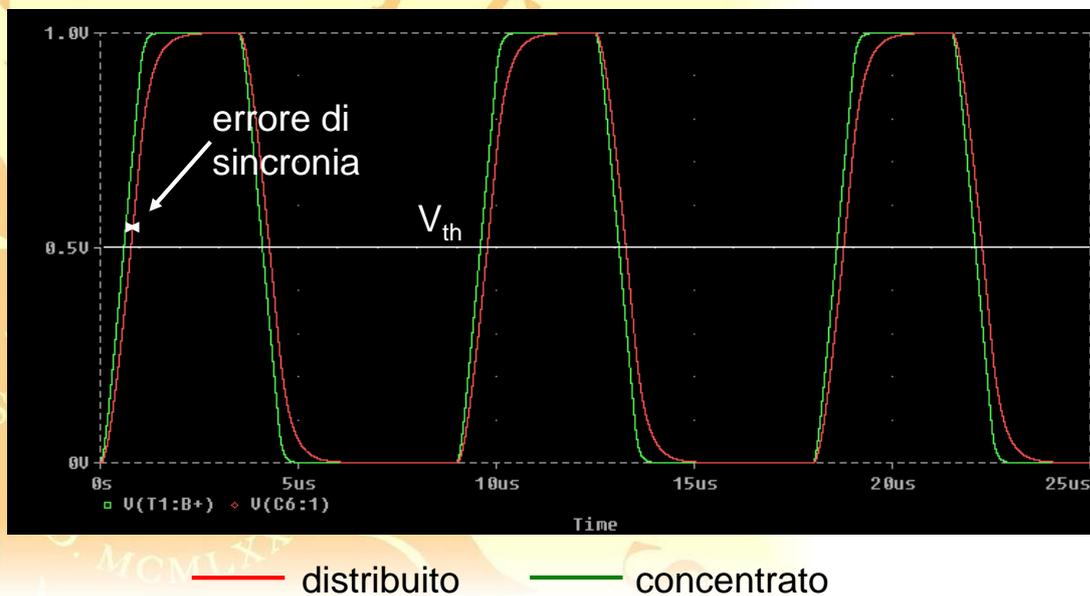
$$l = 60 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} -\frac{dv(z,t)}{dz} &= L \frac{di(z,t)}{dt} \\ -\frac{di(z,t)}{dz} &= C \frac{dv(z,t)}{dt} \end{aligned}$$



Tensione sul ricevitore

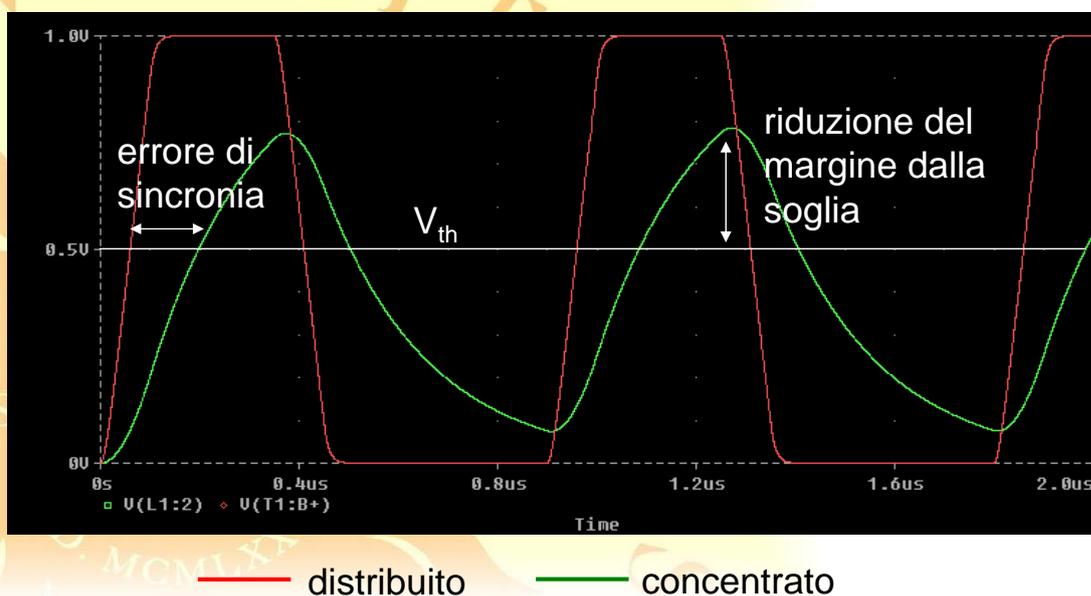
$$V_s = 1 \text{ V}, R_s = Z_0, C_r = 1 \text{ nF}, t_r = 1 \mu\text{s}, T_s = 9 \mu\text{s}$$



A. Maffucci, Laboratorio di Compatibilità Elettromagnetica 2005-2006

Tensione sul ricevitore

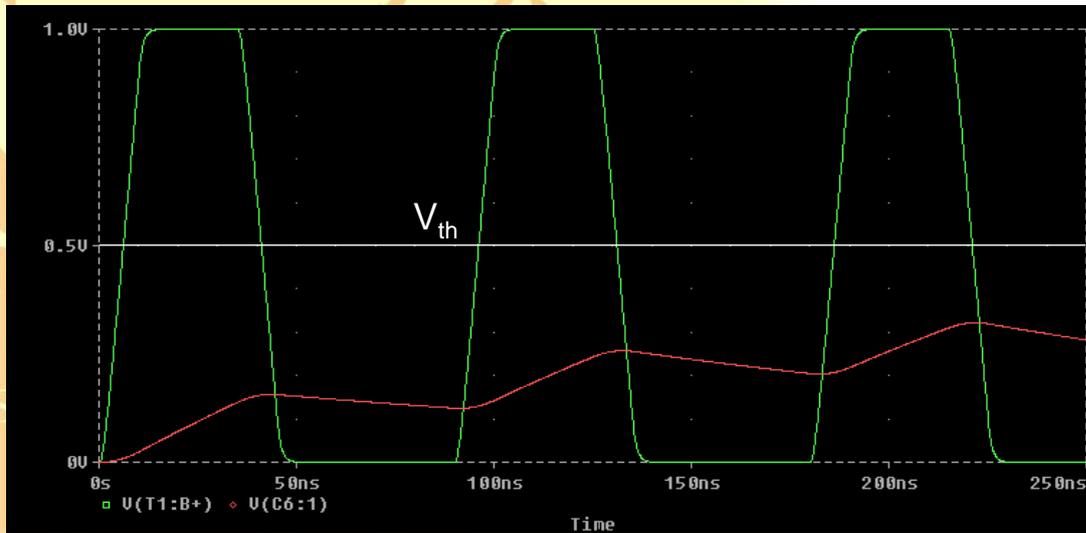
$$V_s = 1 \text{ V}, R_s = Z_0, C_r = 0.1 \text{ nF}, t_r = 0.1 \mu\text{s}, T_s = 0.9 \mu\text{s}$$



A. Maffucci, Laboratorio di Compatibilità Elettromagnetica 2005-2006

Tensione sul ricevitore

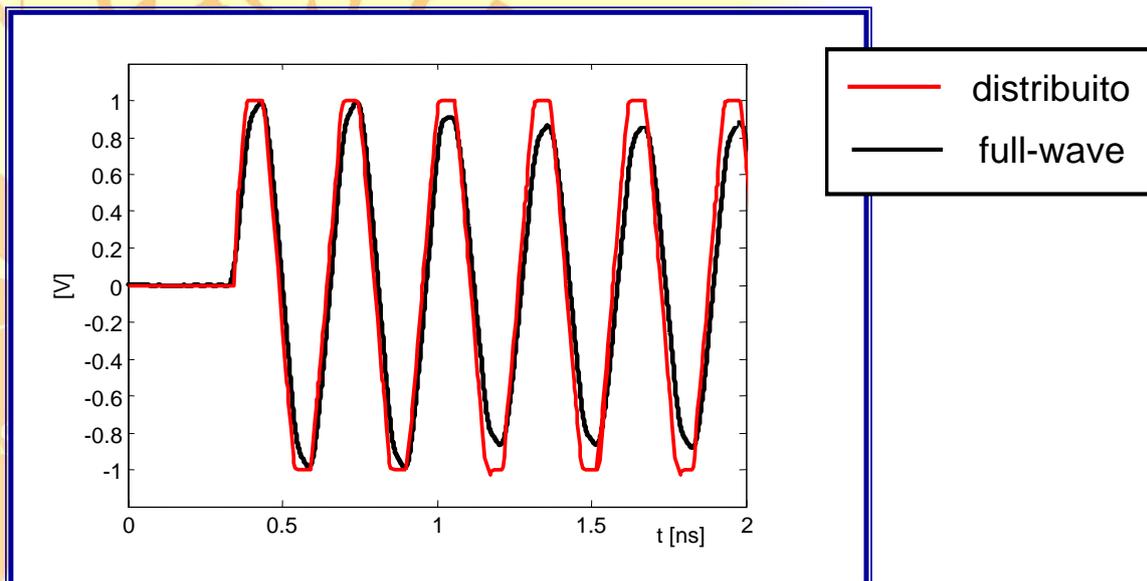
$$V_S = 1 \text{ V}, R_S = Z_0, C_r = 0.01 \text{ nF}, t_r = 10 \text{ ns}, T_S = 90 \text{ ns}$$



— distribuito — concentrato

Tensione sul ricevitore

$$V_S = 1 \text{ V}, R_S = Z_0, C_r = 0.1 \text{ pF}, t_r = 0.09 \text{ ns}, T_S = 0.3 \text{ ns}$$



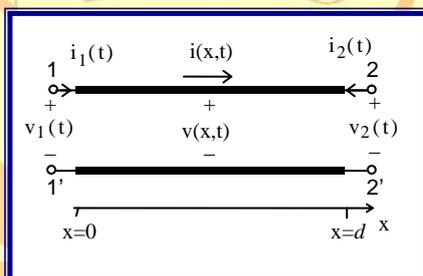
λ confrontabile con la dimensione trasversa: occorre un modello full-wave!

Appendice:

derivazione del modello circuitale equivalente nel DT di una linea ideale

A. Maffucci, Laboratorio di Compatibilità Elettromagnetica 2005-2006

Linea singola ideale



$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = -L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = -C \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$$

telegrafisti

Condizioni iniziali nulle

A. Maffucci, Laboratorio di Compatibilità Elettromagnetica 2005-2006

Soluzione in forma viaggiante

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \quad \frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial v}{\partial t}$$

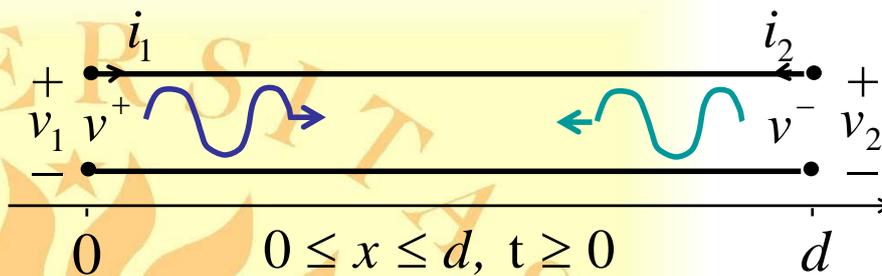
$$v(x, t) = v^+(t - x/c + \alpha^+) + v^-(t + x/c + \alpha^-)$$

$$i(x, t) = \frac{1}{R_c} [v^+(t - x/c + \alpha^+) - v^-(t + x/c + \alpha^-)]$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{velocità di propagazione}$$

$$R_c = Z_0 = \sqrt{L/C} \quad \text{impedenza caratteristica}$$

α^+ e α^- costanti arbitrarie

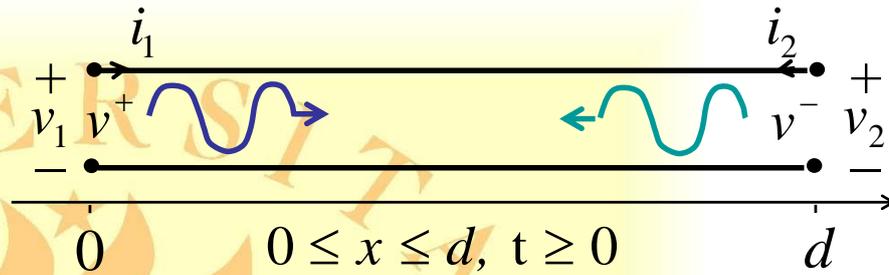


Tempo di transito $T = d/c$

$$\alpha^+ = T, \quad \alpha^- = 0$$

$$v(x, t) = v^+(t - x/c + T) + v^-(t + x/c)$$

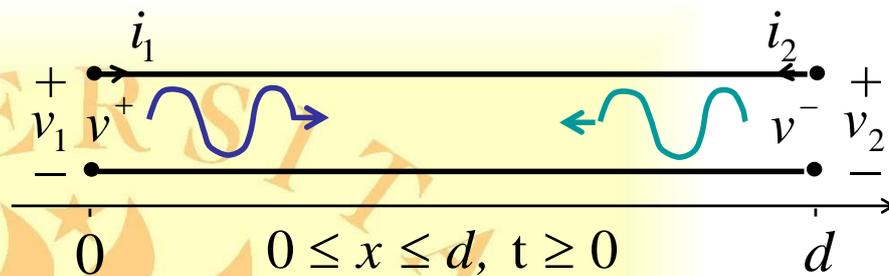
$$i(x, t) = \frac{1}{R_c} [v^+(t - x/c + T) - v^-(t + x/c)]$$



$v^+(t)$ e $v^-(t)$ sono definite per $0 \leq t < +\infty$
 $v^+(t)$ è l'onda progressiva a $x=d$;
 $v^-(t)$ è l'onda regressiva a $x=0$.

$$v(x, t) = v^+(t - x/c + T) + v^-(t + x/c)$$

$$i(x, t) = \frac{1}{R_c} [v^+(t - x/c + T) - v^-(t + x/c)]$$



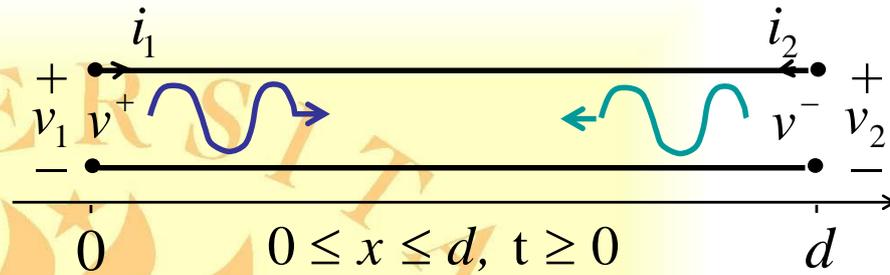
Le grandezze elettriche terminali sono esprimibili come:

$$v_1(t) = v^+(t + T) + v^-(t)$$

$$R_c i_1(t) = v^+(t + T) - v^-(t) \quad t \geq 0 \quad (\text{sinistra})$$

$$v(x, t) = v^+(t - x/c + T) + v^-(t + x/c)$$

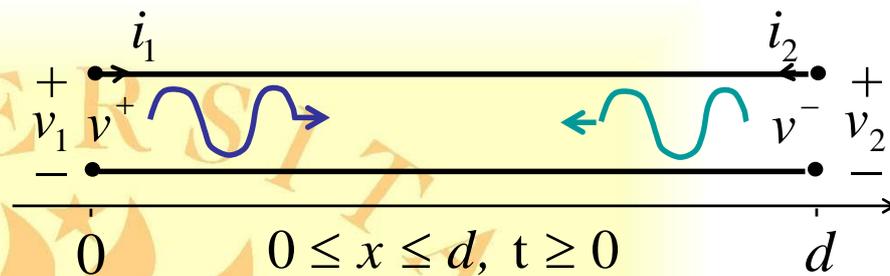
$$i(x, t) = \frac{1}{R_c} [v^+(t - x/c + T) - v^-(t + x/c)]$$



Le grandezze elettriche terminali sono esprimibili come:

$$\begin{aligned} v_2(t) &= v^+(t) + v^-(t+T) \\ -R_c i_2(t) &= v^+(t) - v^-(t+T) \quad t \geq 0 \quad (\text{destra}) \end{aligned}$$

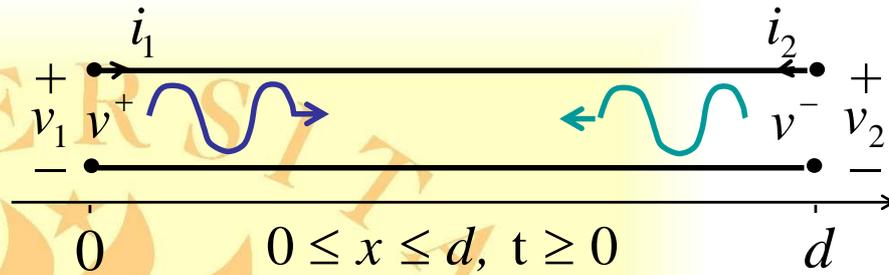
$$\begin{aligned} v(x,t) &= v^+(t - x/c + T) + v^-(t + x/c) \\ i(x,t) &= \frac{1}{R_c} [v^+(t - x/c + T) - v^-(t + x/c)] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} v_1(t) &= v^+(t+T) + v^-(t) \\ R_c i_1(t) &= v^+(t+T) - v^-(t) \quad t \geq 0 \quad (\text{sinistra}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2(t) &= v^+(t) + v^-(t+T) \\ -R_c i_2(t) &= v^+(t) - v^-(t+T) \quad t \geq 0 \quad (\text{destra}) \end{aligned}$$

$$v^+(t) = v^-(t) = 0 \quad \text{per } 0 \leq t \leq T$$



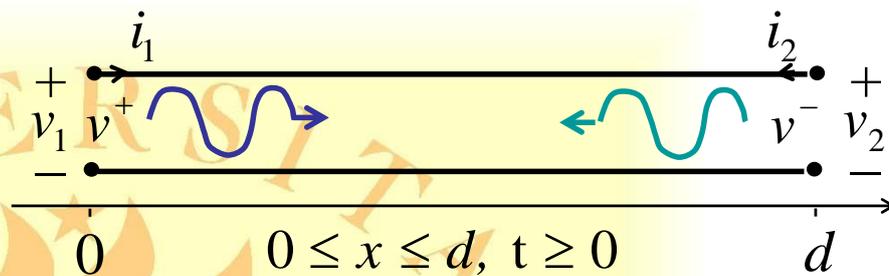
$$v_1(t) = v^+(t+T) + v^-(t) \quad t \geq 0 \quad (\text{sinistra})$$

$$v_1(t) = R_c i_1(t) + 2v^-(t)$$

(destra)

$$\begin{aligned} v_2(t) &= v^+(t) + v^-(t+T) \\ -R_c i_2(t) &= v^+(t) - v^-(t+T) \end{aligned} \quad t \geq 0$$

$$v^+(t) = v^-(t) = 0 \quad \text{per } 0 \leq t \leq T$$



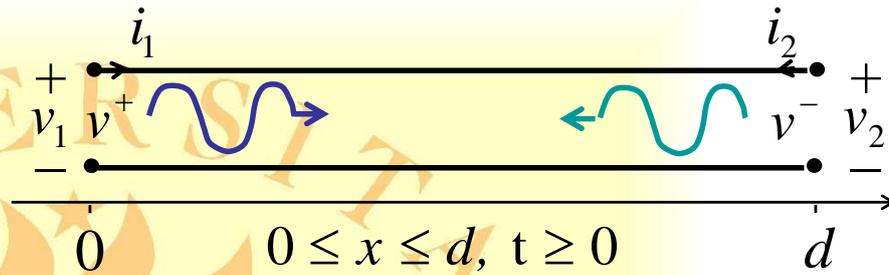
$$v_1(t) = v^+(t+T) + v^-(t) \quad t \geq 0 \quad (\text{sinistra})$$

$$v_1(t) = R_c i_1(t) + 2v^-(t)$$

(destra)

$$\begin{aligned} v_2(t) &= v^+(t) + v^-(t+T) \\ v_2(t) &= R_c i_2(t) + 2v^+(t) \end{aligned} \quad t \geq 0$$

$$v^+(t) = v^-(t) = 0 \quad \text{per } 0 \leq t \leq T$$



$$v^+(t+T) = v_1(t) - v^-(t) \quad t \geq 0 \quad (\text{sinistra})$$

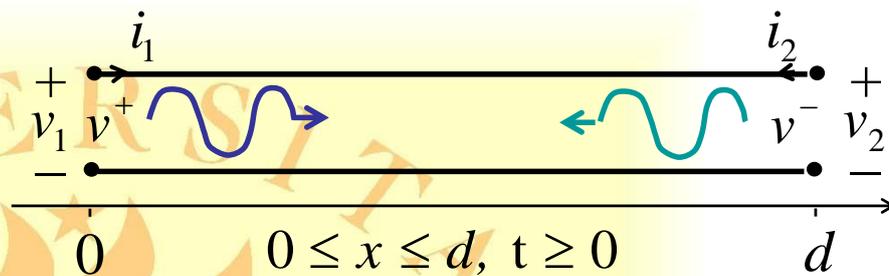
$$v_1(t) = R_c i_1(t) + 2v^-(t)$$

(destra)

$$v_2(t) = v^+(t) + v^-(t+T) \quad t \geq 0$$

$$v_2(t) = R_c i_2(t) + 2v^+(t)$$

$$v^+(t) = v^-(t) = 0 \quad \text{per } 0 \leq t \leq T$$



$$v^+(t+T) = v_1(t) - v^-(t) \quad t \geq 0 \quad (\text{sinistra})$$

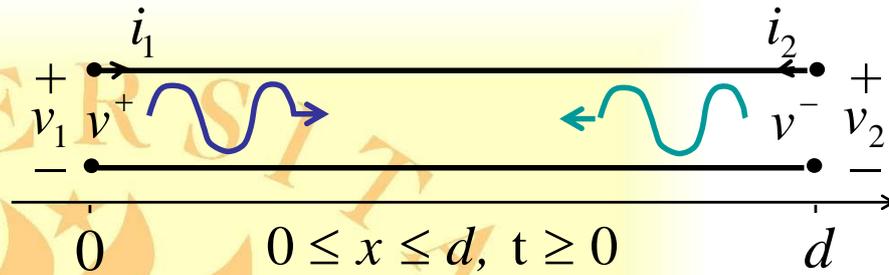
$$v_1(t) = R_c i_1(t) + 2v^-(t)$$

(destra)

$$v^-(t+T) = v_2(t) - v^+(t) \quad t \geq 0$$

$$v_2(t) = R_c i_2(t) + 2v^+(t)$$

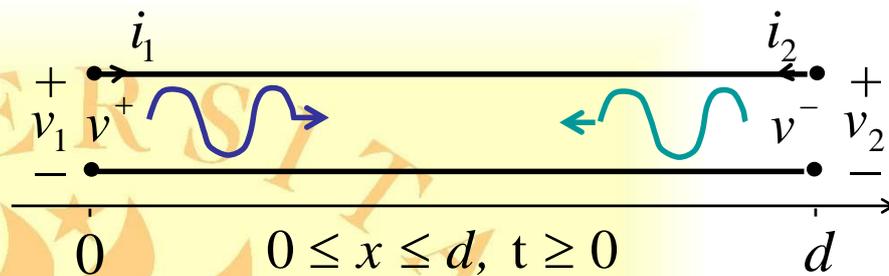
$$v^+(t) = v^-(t) = 0 \quad \text{per } 0 \leq t \leq T$$



$$\begin{aligned} v_1(t) &= R_c i_1(t) + 2v^-(t) \\ v_2(t) &= R_c i_2(t) + 2v^+(t) \end{aligned} \quad t \geq 0$$

$$\begin{aligned} v^+(t+T) &= v_1(t) - v^-(t) \\ v^-(t+T) &= v_2(t) - v^+(t) \end{aligned} \quad t \geq 0$$

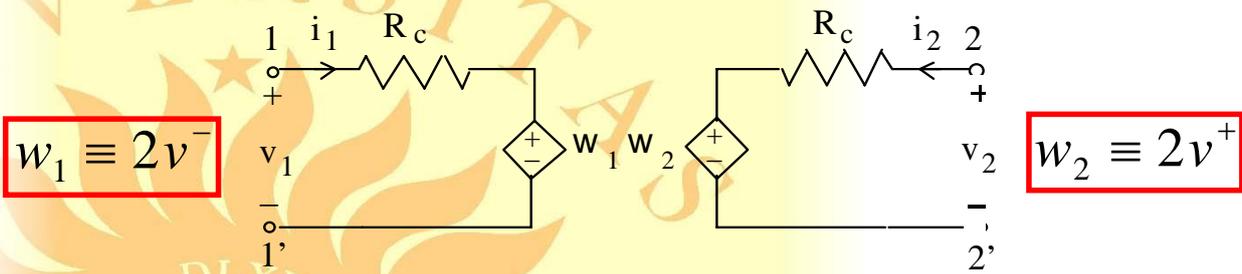
$$\begin{cases} v^+(t) = 0 \\ v^-(t) = 0 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T$$



$v^+(t)$ e $v^-(t)$ sono variabili di stato della linea, infatti:

$$\begin{aligned} w_{em}(x, t) &= \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} Cv^2 \\ &= C[v^+(t - x/c + T)]^2 + C[v^-(t + x/c)]^2 \end{aligned}$$

Linea di lunghezza finita: doppio-bipolo equivalente (Branin 1967)



legge di controllo dei generatori pilotati:

$$\begin{aligned}
 w_1(t+T) &= 2v_2(t) - w_2(t) \\
 w_2(t+T) &= 2v_1(t) - w_1(t) \quad t \geq 0 \\
 \begin{cases} w_1(t) = 0 \\ w_2(t) = 0 \end{cases} & \quad 0 \leq t \leq T
 \end{aligned}$$

Risoluzione iterativa

$$iT \leq t \leq (i+1)T$$

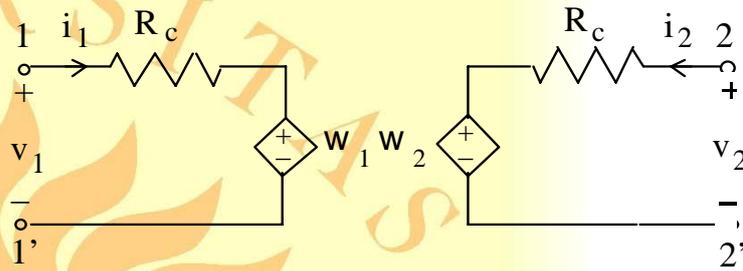
$w_1(t)$ dipende da $v_1(t-T)$ e $v_2(t-T)$

$w_2(t)$ dipende da $w_1(t-T)$ e $v_2(t-T)$

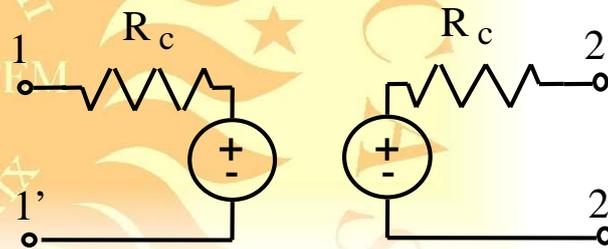
legge di controllo dei generatori pilotati:

$$\begin{aligned}
 w_1(t+T) &= 2v_2(t) - w_2(t) \\
 w_2(t+T) &= 2v_1(t) - w_1(t) \quad t \geq 0 \\
 \begin{cases} w_1(t) = 0 \\ w_2(t) = 0 \end{cases} & \quad 0 \leq t \leq T
 \end{aligned}$$

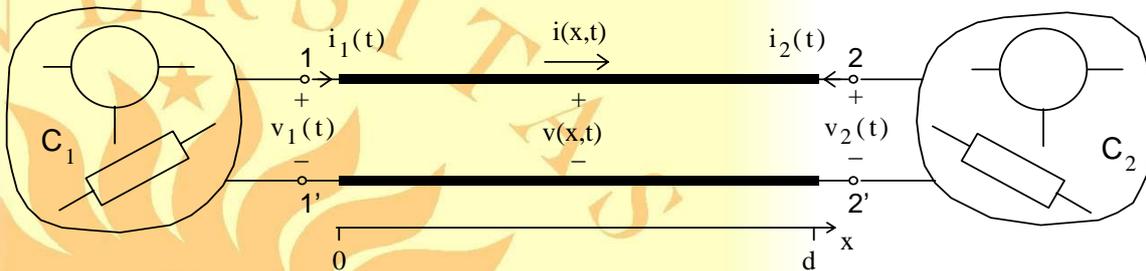
Risoluzione iterativa: approccio SPICE



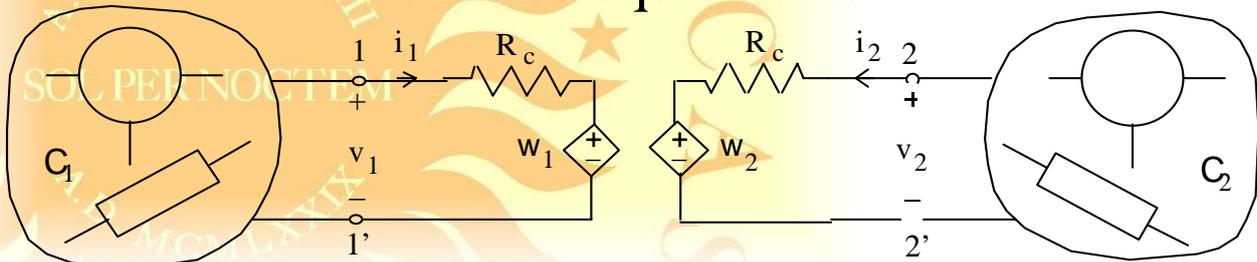
$$iT \leq t \leq (i+1)T \text{ per } i = 0, 1, 2, \dots$$



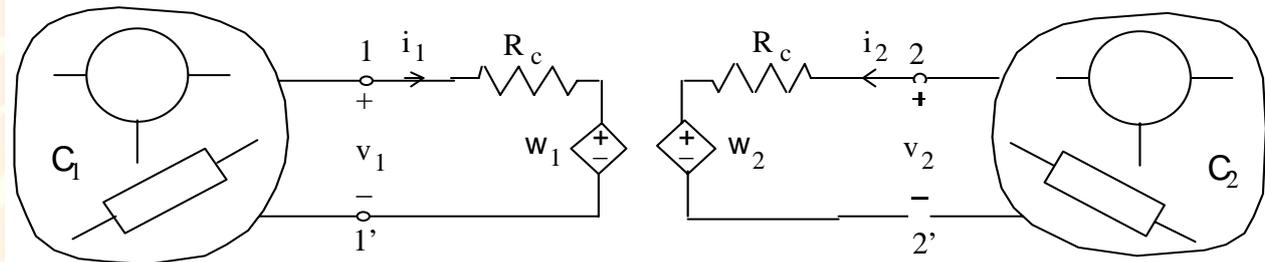
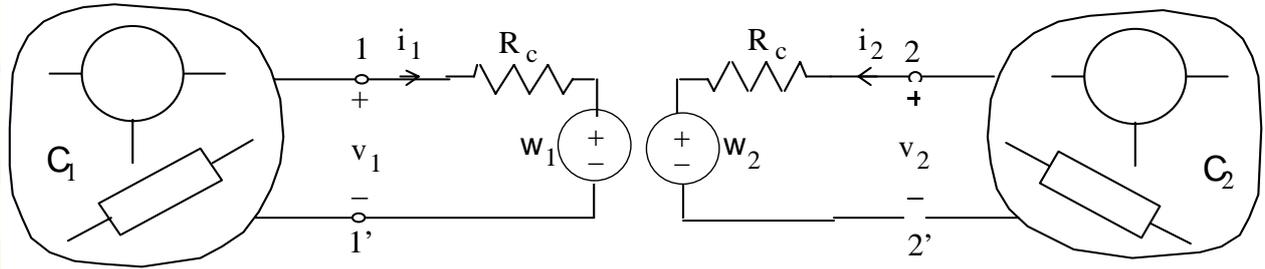
Reti composte da linee di trasmissione lineari e bipoli non lineari concentrati



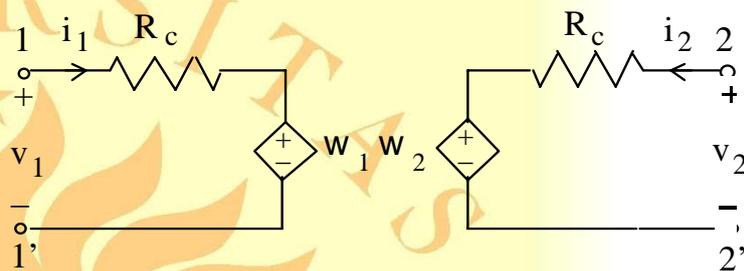
circuito equivalente



$$iT \leq t \leq (i+1)T \text{ per } i = 0, 1, 2, \dots$$



Funzionamento a regime



Questo circuito non è adatto a descrivere condizioni di regime (sinusoidale, periodico, ...)