

Capitolo 3

DEFORMAZIONE A TAGLIO (prof. Elio Sacco)

3.1 Formula di Jourawsky

Si considera inizialmente il caso di una sezione soggetta ad una sollecitazione di taglio V . Si definisce tensione tangenziale media sulla corda AB di lunghezza b , la quantità:

$$\bar{\tau}_n = \frac{1}{b} \int_A^B \boldsymbol{\tau} \bullet \mathbf{n} \, ds \quad (3.1)$$

essendo $\mathbf{n}$ la normale uscente da A^* , con A^* la parte della sezione delimitata dalla corda AB . Scegliendo un sistema di riferimento principale d'inerzia, la tensione tangenziale media si valuta attraverso la formula di Jourawsky:

$$\bar{\tau}_n = -\frac{1}{b} \left(\frac{V_2}{I_{11}} s_1^* + \frac{V_1}{I_{22}} s_2^* \right) \quad (3.2)$$

dove

- s_1^* e s_2^* sono rispettivamente i momenti statici di A^* rispetto all'asse x_1 ed x_2 ,
- I_{11} e I_{22} sono rispettivamente i momenti d'inerzia della sezione rispetto all'asse x_1 ed x_2 .

La formula di

3.2 Deformazione a taglio di una trave

Per la determinazione della deformazione indotta nella trave a causa solo della sua deformabilità a taglio, si può applicare il principio dei lavori virtuali.

Il sistema delle forze è costituito da una forza $\mathbf{F}$ applicata, di modulo unitario, ove è necessario calcolare lo spostamento, per esempio all'estremità della trave, comunque diretta nel piano della sezione retta della trave. Il sistema degli spostamenti consiste nella trave soggetta alla forza tagliante $\mathbf{V}$.

Si considera inizialmente il caso di una trave di lunghezza L con sezione rettangolare di dimensioni $b \times h$. Gli assi del sistema di riferimento coincidono con gli assi di simmetria della sezione. Si assume che la forza tagliante abbia componente non nulla solo lungo la direzione x_2 , e che si intende determinare lo spostamento lungo la direzione x_2 .

La tensione tangenziale media sulla generica corda parallela all'asse x_1 , valutata nel sistema delle forze, $\tau^*(x_2)$, e quella valutata nel sistema degli spostamenti, $\tau(x_2)$, valgono rispettivamente:

$$\begin{aligned}\tau^*(x_2) &= -\frac{1}{2 I_{11}} \left(x_2^2 - \frac{h^2}{4} \right) \\ \tau(x_2) &= -\frac{V_2}{2 I_{11}} \left(x_2^2 - \frac{h^2}{4} \right)\end{aligned}\tag{3.3}$$

Per il principio dei lavori virtuali, lavoro virtuale esterno uguale lavoro virtuale interno, si ha:

$$\begin{aligned}1 \ u_2 &= \int_V \tau^*(x_2) \gamma(x_2) \, dV = L \int_{-h/2}^{h/2} \tau^*(x_2) \frac{\tau(x_2)}{G} b \, dx_2 \\ &= \frac{V_2}{4GI_{11}^2} \int_{-h/2}^{h/2} \left(x_2^2 - \frac{h^2}{4} \right) \left(x_2^2 - \frac{h^2}{4} \right) b \, dx_2 \\ &= \frac{6 V_2}{5 G A} = \frac{V_2}{G A_s}\end{aligned}\tag{3.4}$$

essendo $A_s = 5/6 A$ l'area efficace a taglio. Il fattore di riduzione dell'area, che nel caso esaminato della sezione rettangolare vale $5/6$, è detto fattore di correzione a taglio.

La formula di Jourawsky risulta particolarmente soddisfacente per la valutazione delle tensioni tangenziali, nel caso di sezioni in parete sottili. Si consideri allora il caso di una trave soggetto ad una forza di taglio $\mathbf{V}$, con sezione in parete sottile, per la quale si intende determinare lo spostamento lungo la direzione $\mathbf{F}$, con $\|\mathbf{F}\| = 1$, dovuto esclusivamente alla deformazione a taglio. Si introduca un'ascissa curvilinea ζ lungo la linea media delle parete sottile e si scelga un sistema di riferimento principale d'inerzia. La tensione tangenziale media valutata sulla generica corda individuata dall'ascissa curvilinea ζ , valutata nel sistema delle forze, $\tau^*(\zeta)$, e quella valutata nel

sistema degli spostamenti, $\tau(\zeta)$, valgono rispettivamente:

$$\begin{aligned}\tau^*(\zeta) &= -\frac{1}{b(\zeta)} \left(\frac{F_2}{I_{11}} s_1^*(\zeta) + \frac{F_1}{I_{22}} s_2^*(\zeta) \right) = -\frac{1}{b(\zeta)} \mathbf{K} \bullet \mathbf{F} \\ \tau(\zeta) &= -\frac{1}{b(\zeta)} \left(\frac{V_2}{I_{11}} s_1^*(\zeta) + \frac{V_1}{I_{22}} s_2^*(\zeta) \right) = -\frac{1}{b(\zeta)} \mathbf{K} \bullet \mathbf{V}\end{aligned}\quad (3.5)$$

con

$$\mathbf{K} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{s_2^*(\zeta)}{I_{22}} \\ \frac{s_1^*(\zeta)}{I_{11}} \end{array} \right\}$$

Si ricava allora:

$$\mathbf{F} \bullet \mathbf{u} = \int_V \tau^*(\zeta) \gamma(\zeta) dV = L \int_a \tau^*(\zeta) \frac{\tau(\zeta)}{G} b d\zeta \quad (3.6)$$

essendo a la linea media della sezione. Tenendo conto delle (3.5), la (3.6) fornisce:

$$\mathbf{F} \bullet \mathbf{u} = \frac{L}{G} \left[\int_a \frac{1}{b(\zeta)} (\mathbf{K} \bullet \mathbf{V}) \mathbf{K} d\zeta \right] \bullet \mathbf{F}$$

da cui si deduce:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \frac{L}{G} \int_a \frac{1}{b(\zeta)} (\mathbf{K} \bullet \mathbf{V}) \mathbf{K} d\zeta \\ &= \frac{L}{G} \int_a \frac{1}{b(\zeta)} \left\{ \begin{array}{c} K_1^2 V_1 + K_1 K_2 V_2 \\ K_1 K_2 V_1 + K_2^2 V_2 \end{array} \right\} d\zeta \\ &= \frac{L}{G} \left[\int_a \frac{1}{b(\zeta)} \hat{\mathbf{K}} d\zeta \right] \mathbf{V}\end{aligned}\quad (3.7)$$

con

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} K_1^2 & K_1 K_2 \\ K_1 K_2 & K_2^2 \end{bmatrix}$$

Introducendo il tensore simmetrico dei fattori di correzione a taglio come:

$$\boldsymbol{\chi} = \frac{1}{A} \left[\int_a \frac{1}{b(\zeta)} \hat{\mathbf{K}} d\zeta \right]^{-1} \quad (3.8)$$

la (3.7) si riscrive:

$$\mathbf{u} = \frac{L}{G A} \boldsymbol{\chi}^{-1} \mathbf{V} \quad (3.9)$$

E' necessario notare che le direzioni principali di $\boldsymbol{\chi}$ in generale non coincidono con le direzioni principali del tensore d'inerzia. Ciò significa che anche se la flessione associata al taglio è retta, si possono avere spostamenti da taglio con componente anche lungo la direzione ortogonale all'azione tagliante. Ciò non si verifica evidentemente nelle sezioni che ammettono un asse di simmetria, sollecitate lungo tale asse.

3.3 Modello di trave di Timoshenko

Timoshenko¹ ha proposto una teoria tecnica della trave capace di tener in conto in modo semplice, ma generalmente molto soddisfacente, la deformazione a taglio che avviene nelle travi.

3.3.1 Cinematica

La cinematica della trave è definita dalla deformazione dell'asse e dalle rotazioni delle sezioni. Nel seguito viene trattato esclusivamente il problema piano della trave; infatti, posto il cartesiano sistema di riferimento illustrato in figura 3.1, si considera il caso in cui la trave si infletta nel piano yz .

Si assume che la sezione retta all'ascissa z , inizialmente piana ed ortogonale alla linea d'asse della trave, a deformazione avvenuta, sia ancora piana ma non necessariamente ortogonale alla deformata dell'asse della trave.

In figura 3.1 è riportata schematicamente la cinematica della trave, sovrapponendo gli effetti della sola flessione e del taglio. Per la flessione la sezione retta a deformazione avvenuta resta ortogonale alla deformata della linea d'asse. Per effetto del taglio si ha uno spostamento verticale della sezione senza ulteriore rotazione della sezione stessa. Ne consegue che la rotazione non risulta più uguale alla derivata dell'inflessione totale della trave, ottenuta tenendo conto anche della deformazione a taglio. In definitiva, in figura 3.1 è evidenziata la deformazione della tipica sezione della trave: la sezione all'ascissa generica z ha uno spostamento w_0 lungo l'asse z , non riportato in figura, uno spostamento v lungo l'asse y ed inoltre presenta una rotazione φ intorno all'asse x , ortogonale al piano yz . I parametri cinematici sono quindi lo spostamento assiale w , l'inflessione v e la rotazione φ ; tali quantità sono funzioni esclusivamente dell'ascissa z , i.e. $w_0 = w_0(z)$, $v = v(z)$, $\varphi = \varphi(z)$.

Riguardando la trave come un solido tridimensionale, è possibile calcolare lo spostamento di un generico punto della sezione retta della trave. La sezione retta subisce uno spostamento u_1 nullo lungo l'asse x , uno spostamento u_2 pari a v lungo l'asse y ed uno spostamento u_3 lungo l'asse z che si ottiene come somma dell'effetto di w_0 , spostamento lungo z in corrispondenza dell'asse della trave, e di φ rotazione della sezione:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= v \\ u_3 &= w_0 + y\varphi \end{aligned} \tag{3.10}$$

¹Timoshenko, Stephen (Špotovka 1878-Wuppertal 1972), ingegnere russo naturalizzato statunitense. Professore al Politecnico di Kijev (1907-11), alla Scuola di ponti e strade di Pietroburgo (1912-18), si recò successivamente negli USA dove insegnò meccanica teorica e applicata nelle università

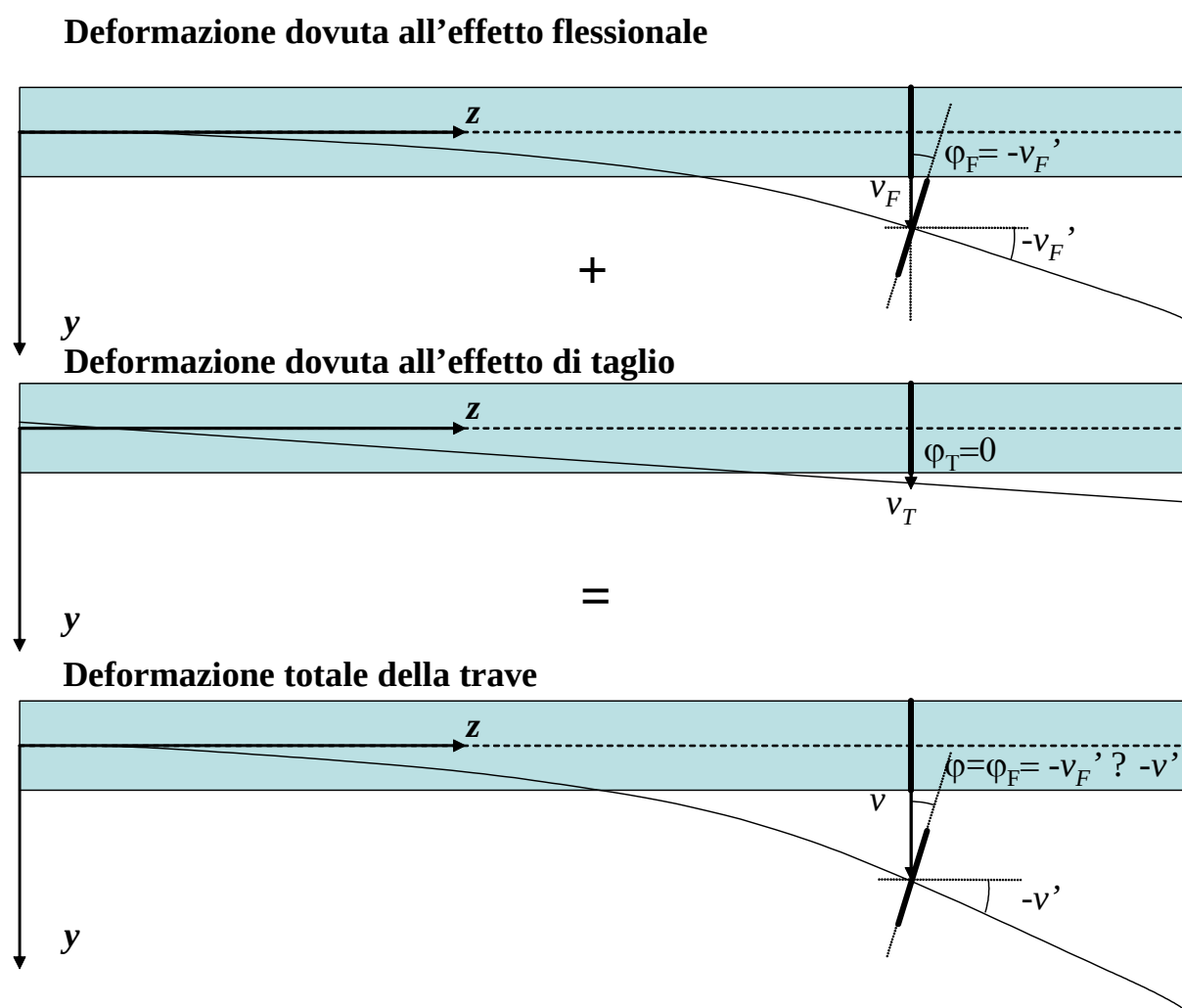


Figura 3.1: Cinematica della trave.

Le funzioni che definiscono la cinematica della trave dipendono dall'ascissa z , i.e. $w_0 = w_0(z)$, $v = v(z)$, $\varphi = \varphi(z)$.

Sulla base della cinematica introdotta tramite le espressioni (3.10), è possibile determinare lo stato deformativo della trave. Infatti, le componenti non nulle del tensore di deformazione valgono:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_z = \frac{\partial u_3}{\partial z} = w'_0 + y\varphi' = \varepsilon_0 + y c \\ \gamma &= 2 \varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} = v' + \varphi\end{aligned}\tag{3.11}$$

dove l'apice $'$ indica la derivazione rispetto a z , ε_0 è la dilatazione lineare dell'asse della trave e c è la curvatura flessionale della trave.

3.3.2 Equazioni di equilibrio

Si assume che la trave $\mathcal{T}$ sia soggetta ad un sistema piano di sollecitazioni: forze agenti nel piano yz , coppie lungo l'asse x . Le equazioni di equilibrio della trave sono:

- traslazione lungo l'asse z

$$N' = -f\tag{3.12}$$

- traslazione lungo l'asse y

$$T' = -q\tag{3.13}$$

- rotazione intorno all'asse x

$$M' = T\tag{3.14}$$

Le equazioni (3.12), (3.13) e (3.14) sono le equazioni di equilibrio locale della trave, dette anche equazioni indefinite di equilibrio della trave.

3.3.3 Legame costitutivo

Note che siano le deformazioni del solido trave, è possibile determinare le tensioni presenti in esso utilizzando le equazioni del legame costitutivo. Infatti, si ottiene:

$$\begin{aligned}\sigma &= E \varepsilon \\ \tau &= G \gamma\end{aligned}\tag{3.15}$$

dove E è il modulo elastico longitudinale, modulo di Young, e G è il modulo a taglio.

Una volta definite le tensioni nel generico punto della sezione retta della trave tramite le relazioni (3.15), è possibile determinare le equazioni costitutive della trave. Infatti, lo sforzo normale ed il momento flettente si calcolano come la risultante ed il momento risultante delle tensioni normali sulla sezione, mentre il taglio si calcola come la risultante delle tensioni tangenziali.

$$N = \int_A \sigma \, dA \quad M = \int_A y \sigma \, dA \quad T = \int_A \tau \, dA \quad (3.16)$$

Sostituendo nelle due equazioni (3.16) la relazione costitutiva (3.15), si ottiene:

$$N = \int_A E \, \varepsilon \, dA \quad M = \int_A y \, E \, \varepsilon \, dA \quad T = \int_A G \, \gamma \, dA \quad (3.17)$$

Ricordando poi la relazione (??), si ha:

$$N = \int_A E (\varepsilon_0 + y \, c) \, dA = \int_A (E \, \varepsilon_0 + E y \, c) \, dA = EA \, \varepsilon_0 + ES \, c = EA \, \varepsilon_0 \quad (3.18)$$

$$M = \int_A y E (\varepsilon_0 + y \, c) \, dA = \int_A (E y \, \varepsilon_0 + E y^2 \, c) \, dA = ES \, \varepsilon_0 e + EI \, c = EI \, c \quad (3.19)$$

$$T = \int_A G \, \gamma \, dA = GA_s \, \gamma \, dA \quad (3.20)$$

essendo S il momemnto statico rispetto all'asse x , che risulta nullo poichè x baricentrico, I il momento d'inerzia rispetto all'asse x ed inoltre ε_0 e c la deformazione assiale e la curvatura della trave. Si evidennzia che nell'equazione (3.20) sia G che γ sono costanti nella sezione retta della trave, per cui integrando dovrebbe comparire l'area A della sezione al posto della quantità A_s . In realtà, come si chiarirà successivamente, il modello proposto da Timoshenko non fornisce un profilo delle tensioni tangenziali accurato tramite la seconda delle formule (3.15), per cui è necessario introdurre un coefficiente χ di correzione a taglio nell'espressione della risultante. Ciò equivale a considerare un'area a taglio $A_s = \chi A$.

Le equazioni (3.18), (3.19) e (3.20) rappresentano le relazioni costitutive globali della trave che legano gli enti cinematici deformazione elastica assiale ε_0 , curvatura c e scorrimento angolare γ agli enti statici sforzo normale N , momento flettente M e taglio T .

3.3.4 Equazione della linea elastica

In definitiva, le equazioni che governano il problema della trave sono le seguenti:

- congruenza

$$\varepsilon_0 = w'_0 \quad (3.21)$$

$$c = \varphi' \quad (3.22)$$

$$\gamma = v' + \varphi \quad (3.23)$$

- equilibrio

$$N' = -f \quad (3.24)$$

$$M'' = -q \quad (3.25)$$

$$M' = T \quad (3.26)$$

- legame costitutivo

$$N = EA \varepsilon_0 \quad (3.27)$$

$$M = EI c \quad (3.28)$$

$$T = GA_s \gamma \quad (3.29)$$

Tenendo conto delle equazioni (3.21) e (3.27), la (3.24) fornisce:

$$[EA w'_0]' = -f \quad (3.30)$$

Analogamente, tenendo conto delle equazioni (3.22), (3.23) e (3.28), (3.25), le equazioni di equilibrio (3.25) e (3.26) forniscono:

$$[EI \varphi']'' = -q \quad (3.31)$$

$$[EI \varphi']' = GA_s (v' + \varphi) \quad (3.32)$$

Le equazioni differenziali (3.30), (3.31) e (3.32) rappresentano le equazioni del problema dell'equilibrio elastico della trave soggetta a sforzo normale ed a momento flettente, dette anche equazioni della linea elastica. Si evidenzia che tali equazioni sono completamente disaccoppiate; infatti il problema assiale si può risolvere tramite la (3.30) ignorando completamente il problema flessionale; analogamente, il problema flessionale si può risolvere tramite la (3.31) ignorando completamente il problema assiale.

Problema assiale

Assumendo EA costante, il comportamento assiale della trave è governato dall'equazione:

$$EA w''_0 = -f \quad (3.33)$$

la cui soluzione, nel caso di carico assiale uniformemente distribuito f costante, è:

$$\begin{aligned} w_0 &= -\frac{f}{2EA} z^2 + a_1 z + a_2 \\ \varepsilon_0 &= w'_0 = -\frac{f}{EA} z + a_1 \\ N &= EA \varepsilon_0 = -f z + EA a_1 \end{aligned} \quad (3.34)$$

dove a_1 ed a_2 sono costanti di integrazione che si determinano tramite opportune condizioni al contorno.

Problema flessionale

Assumendo EA ed EA_s costanti, il comportamento flessionale della trave è governato dalle equazioni:

$$EI \varphi''' = -q \quad (3.35)$$

$$EI \varphi'' = GA_s (v' + \varphi) \quad (3.36)$$

Nel caso di carico uniformemente distribuito q costante, integrando la (3.35) si ottiene:

$$\varphi = -\frac{q}{6EI} z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3 \quad (3.37)$$

che sostituita nella (3.36) fornisce:

$$\begin{aligned} v' &= \frac{EI}{GA_s} \varphi'' - \varphi \\ &= \frac{EI}{GA_s} \left(-\frac{q}{EI} z + b_1 \right) - \left(-\frac{q}{6EI} z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3 \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Integrando l'equazione differenziale (3.38) si ottiene:

$$v = \frac{EI}{GA_s} \left(-\frac{q}{2EI} z^2 + b_1 z \right) - \left(-\frac{q}{24EI} z^4 + \frac{1}{3} b_1 z^3 + \frac{1}{2} b_2 z^2 + b_3 z \right) + b_4 \quad (3.39)$$

Ne consegue che:

$$\begin{aligned} c &= \varphi' = -\frac{q}{3EI} z^2 + b_1 z + b_2 \\ M &= EI c = -\frac{1}{3} q z^2 + EI (b_1 z + b_2) \\ \gamma &= (v' + \varphi) = \frac{EI}{GA_s} \varphi'' = \frac{EI}{GA_s} \left(-\frac{q}{EI} z + b_1 \right) \\ T &= GA_s \gamma = -q z + EI b_1 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Le quantità b_1 , b_2 , b_3 , e b_4 sono costanti di integrazione che si determinano tramite opportune condizioni al contorno.

3.3.5 Fattore di correzione a taglio

Sulla base della seconda delle (3.15), tenendo conto dell'equazione (3.11), le tensioni tangenziali presentano un andamento costante nella sezione retta della trave. Ne consegue che, per la simmetria delle tensioni tangenziali, si hanno irrealisticamente tensioni τ diverse da zero sull'estradosso e sull'intradosso della trave. Al contrario le tensioni tangenziali derivate tramite la formula di Jourawsky, ovvero tramite una condizione di equilibrio, sono nulle all'intradosso ed all'estradosso della trave, presentando un profilo certamente più accurato. In definitiva, le tensioni tangenziali possono essere valutate in due modi differenti:

- dalla cinematica applicando il legame costitutivo:

$$\tau = G \gamma \quad (3.41)$$

- dalla formula di Jourawsky

$$\tau_J = -\frac{T}{I} \frac{s^*}{b} \quad (3.42)$$

con la (3.42) che fornisce un profilo delle tensioni tangenziali molto più soddisfacente di quanto ottenuto tramite la (3.41).

Valutando il lavoro virtuale interno di sezione tramite la formula (3.41) e la formula (3.42), si ha:

$$\begin{aligned} L_{vi} &= \int_A \tau^* \gamma dA = \int_A \frac{1}{A} \gamma dA = \gamma \\ L_{vi}^J &= \int_A \frac{s^*}{I b} \frac{T}{G} \frac{s^*}{I b} dA = \frac{T}{G I^2} \int_A \left(\frac{s^*}{b} \right)^2 dA \end{aligned} \quad (3.43)$$

Eguagliando i lavori virtuali ottenuti si ha:

$$\gamma = \frac{T}{G I^2} \int_A \left(\frac{s^*}{b} \right)^2 dA \quad (3.44)$$

ovvero

$$G \gamma = \frac{T}{I^2} \int_A \left(\frac{s^*}{b} \right)^2 dA \quad (3.45)$$

e quindi, per la (3.29), si ha:

$$\frac{T}{A_s} = \frac{T}{I^2} \int_A \left(\frac{s^*}{b} \right)^2 dA \quad (3.46)$$

Ricordando che $A_s = \chi A$, si ottiene:

$$\chi = \frac{I^2}{A \int_A \left(\frac{s^*}{b} \right)^2 dA}$$

Figura 3.2: Mensola caricata con una forza F sull'estremo libero

3.3.6 Esercizio 1

Si consideri la trave isostatica riportata in figura 3.2. In particolare, si affronta esclusivamente il problema flessionale, trascurando l'aspetto assiale.

La soluzione generale è fornita dalle espressioni:

$$\begin{aligned}\varphi &= b_1 z^2 + b_2 z + b_3 \\ v &= \frac{EI}{GA_s} b_1 z - \left(\frac{1}{3} b_1 z^3 + \frac{1}{2} b_2 z^2 + b_3 z \right) + b_4\end{aligned}$$

ed inoltre:

$$\begin{aligned}M &= EI (b_1 z + b_2) \\ T &= EI b_1\end{aligned}$$

Le costanti di integrazione si determinano imponendo condizioni al contorno di tipo sia statico che cinamatico. In particolare si ha:

- Nodo A: sono nulli i valori dello spostamento trasversale e della rotazione,

$$\begin{aligned}v(0) = 0 &\Rightarrow b_4 = 0 \\ \varphi(0) = 0 &\Rightarrow b_3 = 0\end{aligned}$$

- Nodo B: sono noti entrambi gli enti statici

$$\begin{aligned}M(l) = 0 &\Rightarrow EI (b_1 l + b_2) = 0 \\ T(l) = F &\Rightarrow EI b_1 = F\end{aligned}$$

Risolvendo si ottiene:

$$b_1 = \frac{F}{EI} \quad C_2 = -\frac{Fl}{EI} \quad C_3 = 0 \quad C_4 = 0$$

e quindi

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{F}{EI} (z^2 - lz) \\ v &= \frac{F}{GA_s} z - \frac{F}{EI} \left(\frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{2} lz^2 \right) \\ M &= F (z - l) \\ T &= F\end{aligned}$$

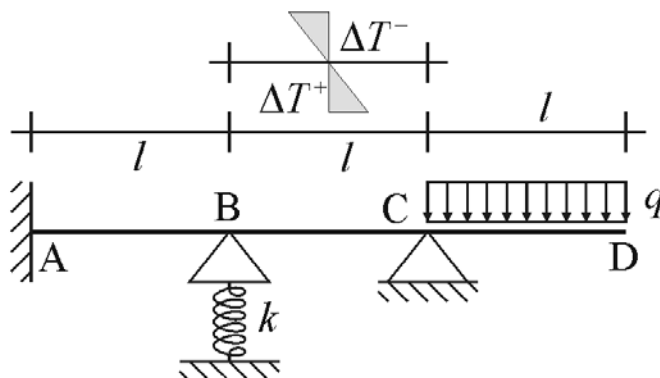


Figura 3.3: Schema della struttura dell'esercizio 2.

3.3.7 Esercizio 2

Si determini la soluzione della struttura in figura 3.3 utilizzando l'equazione della linea elastica.

La struttura si compone di 3 tratti, per ognuno di questi tratti si scrivono le equazioni differenziali della linea elastica. Si noti che nel secondo tratto è presente una distorsione termica a farfalla, per cui la curvatura flessionale totale si ottiene come somma della curvatura elastica e di quella termica:

$$c = \varphi' = c_e + c_t$$

dove

$$c_e = \frac{M}{EI} \quad c_t = \frac{2\alpha \Delta T}{h}$$

con α coefficiente di variazione termica ed h altezza della sezione della trave.

La soluzione per ogni tratto assume la forma:

- primo tratto da A a B, sistema di riferimento z_1 con origine in A

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= b_1 z_1^2 + b_2 z_1 + b_3 \\ v_1 &= \frac{EI}{GA_s} b_1 z_1 - \left(\frac{1}{3} b_1 z_1^3 + \frac{1}{2} b_2 z_1^2 + b_3 z_1 \right) + b_4 \\ M_1 &= EI (b_1 z_1 + b_2) \\ T_1 &= EI b_1 \end{aligned}$$

- secondo tratto da B a C, sistema di riferimento z_2 con origine in B

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= c_1 z_2^2 + c_2 z_2 + c_3 \\ v_2 &= \frac{EI}{GA_s} c_1 z_2 - \left(\frac{1}{3} c_1 z_2^3 + \frac{1}{2} c_2 z_2^2 + c_3 z_2 \right) + c_4 \\ M_2 &= EI (c_1 z_2 + c_2) - EI \frac{2\alpha \Delta T}{h} \\ T_2 &= EI c_1\end{aligned}$$

- terzo tratto da C a D, sistema di riferimento z_3 con origine in C

$$\begin{aligned}\varphi_3 &= -\frac{q}{6EI} z_3^3 + d_1 z_3^2 + d_2 z_3 + d_3 \\ v_3 &= \frac{EI}{GA_s} \left(-\frac{q}{2EI} z_3^2 + d_1 z_3 \right) - \left(-\frac{q}{24EI} z_3^4 + \frac{1}{3} d_1 z_3^3 + \frac{1}{2} d_2 z_3^2 + d_3 z_3 \right) + d_4 \\ M_3 &= -\frac{1}{3} q z_3^2 + EI (d_1 z_3 + d_2) \\ T_3 &= -q z_3 + EI d_1\end{aligned}$$

Le costanti di integrazione $b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3, c_4, d_1, d_2, d_3, d_4$ si determinano imponendo le opportune condizioni al contorno.

- Nodo A- nell'incastro si devono scrivere 2 condizioni di tipo cinematico, la prima sugli spostamenti verticali, la seconda condizione sulle rotazioni:

$$\begin{aligned}v_1(0) &= 0 \\ \varphi_1(0) &= 0\end{aligned}$$

- Nodo B- in corrispondenza del carrello elastico in B si devono scrivere 4 condizioni al contorno, una sugli abbassamenti, una sulle rotazioni, una sul momento flettente ed una sul taglio:

$$\begin{aligned}v_1(l) &= v_2(0) \\ \varphi_1(l) &= \varphi_2(0) \\ M_1(l) &= M_2(0) \\ T_1(l) + kv_1(l) &= T_2(0)\end{aligned}$$

dove k è la rigidezza del vincolo elastico in B.

- Nodo C- per il vincolo in C devono essere scritte 4 equazioni:

$$\begin{aligned}v_2(l) &= 0 \\ v_3(0) &= 0 \\ \varphi_2(l) &= \varphi_3(0) \\ M_2(l) &= M_3(0)\end{aligned}$$

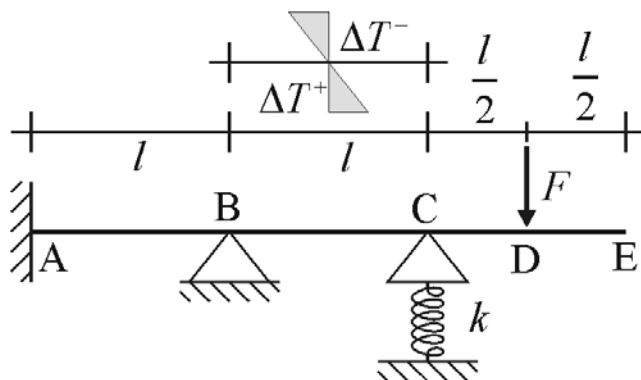


Figura 3.4: Schema della struttura dell'esercizio 3.

- Nodo D- in corrispondenza dell'estremo libero si scrivono 2 equazioni:

$$M_3(l) = 0$$

$$T_3(l) = 0$$

In definitiva si ottiene il seguente un sistema di 12 equazioni in 12 incognite. L'esercizio può essere svolto anche per via numerica considerando i seguenti dati:

$$\begin{array}{llll} E = 3000 \text{ MPa} & G = 12500 \text{ MPa} & k = 1500 \text{ N/mm} & c_t = 0.00001 \text{ 1/mm} \\ b = 100 \text{ mm} & h = 200 \text{ mm} & l = 3000 \text{ mm} & A_s = 5/6 A \end{array}$$

Nelle ultime pagine del capitolo è riportato un programma in MAPLE per la risoluzione dell'esercizio proposto.

3.3.8 Esercizio 3

Si determini la soluzione della struttura in figura 3.4 utilizzando l'equazione della linea elastica.

La struttura si compone di 4 tratti, per ognuno di questi tratti.

- primo tratto da A a B, sistema di riferimento z_1 con origine in A

$$\varphi_1 = b_1 z_1^2 + b_2 z_1 + b_3$$

$$v_1 = \frac{EI}{GA_s} b_1 z_1 - \left(\frac{1}{3} b_1 z_1^3 + \frac{1}{2} b_2 z_1^2 + b_3 z_1 \right) + b_4$$

$$M_1 = EI (b_1 z_1 + b_2)$$

$$T_1 = EI b_1$$

- secondo tratto da B a C, sistema di riferimento z_2 con origine in B

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= c_1 z_2^2 + c_2 z_2 + c_3 \\ v_2 &= \frac{EI}{GA_s} c_1 z_2 - \left(\frac{1}{3} c_1 z_2^3 + \frac{1}{2} c_2 z_2^2 + c_3 z_2 \right) + c_4 \\ M_2 &= EI (c_1 z_2 + c_2) - EI \frac{2\alpha \Delta T}{h} \\ T_2 &= EI c_1\end{aligned}$$

- terzo tratto da C a D, sistema di riferimento z_3 con origine in C

$$\begin{aligned}\varphi_3 &= d_1 z_3^2 + d_2 z_3 + d_3 \\ v_3 &= \frac{EI}{GA_s} d_1 z_3 - \left(\frac{1}{3} d_1 z_3^3 + \frac{1}{2} d_2 z_3^2 + d_3 z_3 \right) + d_4 \\ M_3 &= EI (d_1 z_3 + d_2) \\ T_3 &= EI d_1\end{aligned}$$

- quarto tratto da D a E, sistema di riferimento z_4 con origine in D

$$\begin{aligned}\varphi_4 &= e_1 z_4^2 + e_2 z_4 + e_3 \\ v_4 &= \frac{EI}{GA_s} e_1 z_4 - \left(\frac{1}{3} e_1 z_4^3 + \frac{1}{2} e_2 z_4^2 + e_3 z_4 \right) + e_4 \\ M_4 &= EI (e_1 z_4 + e_2) \\ T_4 &= EI e_1\end{aligned}$$

Le costanti di integrazione $b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3, c_4, d_1, d_2, d_3, d_4, e_1, e_2, e_3, e_4$ si determinano imponendo le opportune condizioni al contorno.

- Nodo A:

$$\begin{aligned}v_1(0) &= 0 \\ \varphi_1(0) &= 0\end{aligned}$$

- Nodo B:

$$\begin{aligned}v_1(l) &= 0 \\ v_2(0) &= 0 \\ \varphi_1(l) &= \varphi_2(0) \\ M_1(l) &= M_2(0)\end{aligned}$$

- Nodo C:

$$\begin{aligned}v_2(l) &= v_3(0) \\ \varphi_2(l) &= \varphi_3(0) \\ M_2(l) &= M_3(0) \\ T_2(l) + kv_2(l) &= T_3(0)\end{aligned}$$

dove k è la rigidezza del vincolo elastico in C.

- Nodo D:

$$\begin{aligned}v_3(l) &= v_4(0) \\ \varphi_3(l) &= \varphi_4(0) \\ M_3(l) &= M_4(0) \\ T_3(l) &= T_4(0) + F\end{aligned}$$

- Nodo E:

$$\begin{aligned}M_4(l) &= 0 \\ T_4(l) &= 0\end{aligned}$$

In definitiva, esprimendo le rotazioni, i momenti flettenti ed i tagli in funzione delle derivate dell'inflexione dei singoli tratti, si ottiene un sistema di 16 equazioni che permette di determinare le 16 costanti di integrazione.


```
> restart:
> with (linalg):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected
```

```
> GAs:=eta*EI:
> eqd1a:=EI*(diff(phi1(z), z$3))=0;
eqd1b:=EI*(diff(phi1(z), z$2))=GAs*(diff(v1(z), z)+phi1(z));
disol1:=dsolve({eqd1a, eqd1b}, {phi1(z), v1(z)});
```

$$eqd1a := EI \left(\frac{\partial^3}{\partial z^3} \phi 1(z) \right) = 0$$

$$eqd1b := EI \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi 1(z) \right) = \eta EI \left(\left(\frac{\partial}{\partial z} v1(z) \right) + \phi 1(z) \right)$$

```
disol1 := {
```

$$\phi 1(z) = \frac{1}{2} _C2 z^2 + _C3 z + _C4, v1(z) = \frac{_C2 z}{\eta} - \frac{1}{6} _C2 z^3 - \frac{1}{2} _C3 z^2 - _C4 z + _C1$$

```
}
```

```
> eqd2a:=EI*(diff(phi2(z), z$3))=0;
eqd2b:=EI*(diff(phi2(z), z$2))=GAs*(diff(v2(z), z)+phi2(z));
disol2:=dsolve({eqd2a, eqd2b}, {phi2(z), v2(z)});
```

$$eqd2a := EI \left(\frac{\partial^3}{\partial z^3} \phi 2(z) \right) = 0$$

$$eqd2b := EI \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi 2(z) \right) = \eta EI \left(\left(\frac{\partial}{\partial z} v2(z) \right) + \phi 2(z) \right)$$

```
disol2 := {
```

$$\phi 2(z) = \frac{1}{2} _C2 z^2 + _C3 z + _C4, v2(z) = \frac{_C2 z}{\eta} - \frac{1}{6} _C2 z^3 - \frac{1}{2} _C3 z^2 - _C4 z + _C1$$

```
}
```

```
> eqd3a:=EI*(diff(phi3(z), z$3))=-q;
eqd3b:=EI*(diff(phi3(z), z$2))=GAs*(diff(v3(z), z)+phi3(z));
disol3:=dsolve({eqd3a, eqd3b}, {phi3(z), v3(z)});
```

$$eqd3a := EI \left(\frac{\partial^3}{\partial z^3} \phi 3(z) \right) = -q$$

$$eqd3b := EI \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi 3(z) \right) = \eta EI \left(\left(\frac{\partial}{\partial z} v3(z) \right) + \phi 3(z) \right)$$

$$disol3 := \left\{ \phi 3(z) = -\frac{1}{6} \frac{q z^3}{EI} + \frac{1}{2} _C2 z^2 + _C3 z + _C4, \right.$$

$$v3(z) = -\frac{1}{2} \frac{q z^2}{\eta EI} + \frac{-C2 z}{\eta} + \frac{\frac{1}{24} q z^4}{EI} - \frac{1}{6} C2 z^3 - \frac{1}{2} C3 z^2 - C4 z + C1 \Bigg\}$$

>

```
disol:=dsolve({eqd1a,eqd1b,eqd2a,eqd2b,eqd3a,eqd3b},{phi1(z),v1(z),phi2(z),v2(z),phi3(z),v3(z)});
```

$$disol := \left\{ \begin{aligned} v1(z) &= \frac{-C4 z}{\eta} - \frac{1}{6} C4 z^3 - \frac{1}{2} C5 z^2 - C6 z + C1, \\ v2(z) &= \frac{-C10 z}{\eta} - \frac{1}{6} C10 z^3 - \frac{1}{2} C11 z^2 - C12 z + C2, \\ \phi2(z) &= \frac{1}{2} C10 z^2 + C11 z + C12, \\ v3(z) &= -\frac{1}{2} \frac{q z^2}{\eta EI} + \frac{-C7 z}{\eta} + \frac{\frac{1}{24} q z^4}{EI} - \frac{1}{6} C7 z^3 - \frac{1}{2} C8 z^2 - C9 z + C3, \\ \phi3(z) &= -\frac{1}{6} \frac{q z^3}{EI} + \frac{1}{2} C7 z^2 + C8 z + C9, \phi1(z) = \frac{1}{2} C4 z^2 + C5 z + C6 \end{aligned} \right\}$$

$$v2(z) = \frac{-C10 z}{\eta} - \frac{1}{6} C10 z^3 - \frac{1}{2} C11 z^2 - C12 z + C2,$$

$$\phi2(z) = \frac{1}{2} C10 z^2 + C11 z + C12,$$

$$v3(z) = -\frac{1}{2} \frac{q z^2}{\eta EI} + \frac{-C7 z}{\eta} + \frac{\frac{1}{24} q z^4}{EI} - \frac{1}{6} C7 z^3 - \frac{1}{2} C8 z^2 - C9 z + C3,$$

$$\phi3(z) = -\frac{1}{6} \frac{q z^3}{EI} + \frac{1}{2} C7 z^2 + C8 z + C9, \phi1(z) = \frac{1}{2} C4 z^2 + C5 z + C6 \Bigg\}$$

```
> vv1:=subs({_C1=c[1],_C2=c[2],_C3=c[3],_C4=c[4]},(subs(disol1,v1(z))));
ff1:=subs({_C1=c[1],_C2=c[2],_C3=c[3],_C4=c[4]},(subs(disol1,phi1(z))));
MM1:=EI*(diff(ff1,z));
TT1:=diff(MM1,z);
```

$$vv1 := \frac{c_2 z}{\eta} - \frac{1}{6} c_2 z^3 - \frac{1}{2} c_3 z^2 - c_4 z + c_1$$

$$ff1 := \frac{1}{2} c_2 z^2 + c_3 z + c_4$$

$$MM1 := EI (c_2 z + c_3)$$

$$TT1 := EI c_2$$

```
> vv2:=subs({_C1=c[5],_C2=c[6],_C3=c[7],_C4=c[8]},(subs(disol2,v2(z))));
ff2:=subs({_C1=c[5],_C2=c[6],_C3=c[7],_C4=c[8]},(subs(disol2,phi2(z))));
MM2:=EI*(diff(ff2,z))-EI*ct;
TT2:=diff(MM2,z);
```

$$vv2 := \frac{c_6 z}{\eta} - \frac{1}{6} c_6 z^3 - \frac{1}{2} c_7 z^2 - c_8 z + c_5$$

$$ff2 := \frac{1}{2} c_6 z^2 + c_7 z + c_8$$

$$MM2 := EI (c_6 z + c_7) - EI ct$$

$$TT2 := EI c_6$$

```
> vv3:=subs({_C1=c[9],_C2=c[10],_C3=c[11],_C4=c[12]},(subs(disol3,
v3(z))));
ff3:=subs({_C1=c[9],_C2=c[10],_C3=c[11],_C4=c[12]},(subs(disol3,ph
i3(z))));
MM3:=EI*(diff(ff3,z));
TT3:=diff(MM3,z);
```

$$vv3 := -\frac{1}{2} \frac{q z^2}{\eta EI} + \frac{c_{10} z}{\eta} + \frac{\frac{1}{24} q z^4}{EI} - \frac{1}{6} c_{10} z^3 - \frac{1}{2} c_{11} z^2 - c_{12} z + c_9$$

$$ff3 := -\frac{1}{6} \frac{q z^3}{EI} + \frac{1}{2} c_{10} z^2 + c_{11} z + c_{12}$$

$$MM3 := EI \left(-\frac{1}{2} \frac{q z^2}{EI} + c_{10} z + c_{11} \right)$$

$$TT3 := EI \left(-\frac{q z}{EI} + c_{10} \right)$$

```
> # sezione A
cc[1]:=subs(z=0,vv1)=0;
cc[2]:=subs(z=0,ff1)=0;
```

$$cc_1 := c_1 = 0$$

$$cc_2 := c_4 = 0$$

```
> # sezione B
cc[3]:=subs(z=l,vv1)-subs(z=l,vv2)=0;
cc[4]:=subs(z=l,ff1)-subs(z=l,ff2)=0;
cc[5]:=subs(z=l,MM1)-subs(z=l,MM2)=0;
cc[6]:=subs(z=l,TT1)+k*subs(z=l,vv1)-subs(z=l,TT2)=0;
```

$$cc_3 := \frac{c_2 l}{\eta} - \frac{1}{6} c_2 l^3 - \frac{1}{2} c_3 l^2 - c_4 l + c_1 - \frac{c_6 l}{\eta} + \frac{1}{6} c_6 l^3 + \frac{1}{2} c_7 l^2 + c_8 l - c_5 = 0$$

$$cc_4 := \frac{1}{2} c_2 l^2 + c_3 l + c_4 - \frac{1}{2} c_6 l^2 - c_7 l - c_8 = 0$$

$$cc_5 := EI (c_2 l + c_3) - EI (c_6 l + c_7) + EI ct = 0$$

$$cc_6 := EI c_2 + k \left(\frac{c_2 l}{\eta} - \frac{1}{6} c_2 l^3 - \frac{1}{2} c_3 l^2 - c_4 l + c_1 \right) - EI c_6 = 0$$

```
> # sezione C
cc[7]:=subs(z=2*l,vv2)=0;
cc[8]:=subs(z=2*l,vv3)=0;
```

```
cc[9]:=subs(z=2*l,ff2)-subs(z=2*l,ff3)=0;
cc[10]:=subs(z=2*l,MM2)-subs(z=2*l,MM3)=0;
```

$$cc_7 := 2 \frac{c_6 l}{\eta} - \frac{4}{3} c_6 l^3 - 2 c_7 l^2 - 2 c_8 l + c_5 = 0$$

$$cc_8 := -2 \frac{q l^2}{\eta EI} + \frac{2 c_{10} l}{\eta} + \frac{\frac{2}{3} q l^4}{EI} - \frac{4}{3} c_{10} l^3 - 2 c_{11} l^2 - 2 c_{12} l + c_9 = 0$$

$$cc_9 := 2 c_6 l^2 + 2 c_7 l + c_8 + \frac{\frac{4}{3} q l^3}{EI} - 2 c_{10} l^2 - 2 c_{11} l - c_{12} = 0$$

$$cc_{10} := EI(2 c_6 l + c_7) - EI ct - EI \left(-2 \frac{q l^2}{EI} + 2 c_{10} l + c_{11} \right) = 0$$

```
> # sezione D
```

```
cc[11]:=subs(z=3*l,MM3)=0;
```

```
cc[12]:=subs(z=3*l,TT3)=0;
```

$$cc_{11} := EI \left(-\frac{9}{2} \frac{q l^2}{EI} + 3 c_{10} l + c_{11} \right) = 0$$

$$cc_{12} := EI \left(-3 \frac{q l}{EI} + c_{10} \right) = 0$$

```
>
```

```
ris:=solve({cc[1],cc[2],cc[3],cc[4],cc[5],cc[6],cc[7],cc[8],cc[9],
cc[10],cc[11],cc[12]}),
```

```
{c[1],c[2],c[3],c[4],c[5],c[6],c[7],c[8],c[9],c[10],c[11],c[12]}):
```

```
> simplify(ris[1]);
```

```
simplify(ris[2]);
```

```
simplify(ris[3]);
```

```
simplify(ris[4]);
```

```
simplify(ris[5]);
```

```
simplify(ris[6]);
```

```
simplify(ris[7]);
```

```
simplify(ris[8]);
```

```
simplify(ris[9]);
```

```
simplify(ris[10]);
```

```
simplify(ris[11]);
```

```
simplify(ris[12]);
```

$$c_9 = l^2 (-144 q k l - 204 q k l^3 \eta + 122 q k l^5 \eta^2 - 288 q \eta EI - 312 q \eta^2 EI l^2 + 19 l^7 \eta^3 q k + 240 l^4 \eta^3 q EI + 5 l^5 \eta^3 EI k ct + 120 l^2 \eta^3 EI^2 ct + 66 l^3 EI k \eta^2 ct + 144 \eta^2 EI^2 ct + 72 \eta l EI k ct) / (\eta EI (36 k l + 60 k l^3 \eta + 7 k l^5 \eta^2 + 72 \eta EI + 96 \eta^2 EI l^2))$$

$$c_7 = \frac{1}{2} (11 l^7 \eta^2 k q + 48 l^4 \eta^2 EI q - 10 l^5 \eta^2 EI k ct + 48 k \eta q l^5 + 120 l^2 \eta^2 EI^2 ct + 48 l^3 EI k \eta ct + 72 l EI k ct + 144 \eta EI^2 ct - 36 l^3 k q - 72 l^2 \eta EI q) / (EI (36 k l + 60 k l^3 \eta + 7 k l^5 \eta^2 + 72 \eta EI + 96 \eta^2 EI l^2))$$

$$c_3 = -\frac{1}{2} l^2 (q k l^5 \eta^2 - 48 q \eta^2 EI l^2 - 6 l^3 EI k \eta^2 ct - 12 q k l^3 \eta + 72 \eta^2 EI^2 ct + 36 \eta l EI k ct + 36 q k l + 72 q \eta EI) / (EI (36 k l + 60 k l^3 \eta + 7 k l^5 \eta^2 + 72 \eta EI + 96 \eta^2 EI l^2))$$

$$c_2 = \frac{3 l \eta (-6 l^3 k q - 6 l^3 EI k \eta ct + k \eta q l^5 - 24 l^2 \eta EI q + 12 \eta EI^2 ct)}{2 EI (36 k l + 60 k l^3 \eta + 7 k l^5 \eta^2 + 72 \eta EI + 96 \eta^2 EI l^2)}$$

$$c_{11} = -\frac{9 q l^2}{2 EI}$$

$$c_{10} = 3 \frac{q l}{EI}$$

$$c_1 = 0$$

$$c_4 = 0$$

$$c_6 = \frac{3 l \eta (-3 k \eta q l^5 - 24 l^2 \eta EI q + 4 l^3 EI k \eta ct - 18 l^3 k q + 12 \eta EI^2 ct + 12 l EI k ct)}{2 EI (36 k l + 60 k l^3 \eta + 7 k l^5 \eta^2 + 72 \eta EI + 96 \eta^2 EI l^2)}$$

$$c_8 = -\frac{1}{2} (6 l^7 \eta^2 k q - l^5 \eta^2 EI k ct + 192 l^2 \eta^2 EI^2 ct + 18 k \eta q l^5 + 102 l^3 EI k \eta ct + 144 \eta EI^2 ct + 72 l EI k ct) l / (EI (36 k l + 60 k l^3 \eta + 7 k l^5 \eta^2 + 72 \eta EI + 96 \eta^2 EI l^2))$$

$$c_{12} = \frac{1}{6} l (176 l^7 \eta^2 k q + 2352 l^4 \eta^2 EI q + 15 l^5 \eta^2 EI k ct + 1470 k \eta q l^5 + 360 l^2 \eta^2 EI^2 ct + 198 l^3 EI k \eta ct + 432 \eta EI^2 ct + 216 l EI k ct + 720 l^3 k q + 1440 l^2 \eta EI q) / (EI (36 k l + 60 k l^3 \eta + 7 k l^5 \eta^2 + 72 \eta EI + 96 \eta^2 EI l^2))$$

$$c_5 = -l^2 (-3 k \eta q l^5 + 42 l^3 EI k \eta ct + 36 \eta EI^2 ct - 18 l^3 k q + 36 l EI k ct + l^7 \eta^2 k q + l^5 \eta^2 EI k ct + 48 l^2 \eta^2 EI^2 ct) / (EI (36 k l + 60 k l^3 \eta + 7 k l^5 \eta^2 + 72 \eta EI + 96 \eta^2 EI l^2))$$

