GLI EVENTI

- Nel calcolo delle probabilità con la parola evento si intende ogni fatto che in seguito ad una prova può accadere oppure no. Qualche esempio:
  - - l'apparizione di testa quando si lancia una moneta
  - - l'apparizione di un asso quando si estrae una carta da un mazzo
  - - la rivelazione di una data particella in un acceleratore
- Ad ogni evento è associato un numero reale che è tanto maggiore quanto più è elevata la possibilità che si verifichi l'evento stesso: chiamiamo tale numero probabilità dell'evento.

Probabilità di un evento P(A)

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- Definiamo **evento certo** quell'evento che in seguito ad un esperimento deve obbligatoriamente verificarsi. P(A)=1
- L'evento contrario all'evento certo è detto **impossibile**, ossia un evento che non può accadere nella prova in questione. P(A)=0

VARIABILI ALEATORIE

- Si dicono **variabili aleatorie** quelle grandezze che posso assumere nel corso di una prova un valore sconosciuto a priori.
- Si distinguono in variabili aleatorie *discrete* e variabili aleatorie *continue*.
- Le variabili discrete possono assumere solo un insieme di valori numerabile, mentre i valori possibili di quelle continue non possono essere enumerati in anticipo e riempiono "densamente" un intervallo.
- Esistono anche variabili aleatorie che assumono sia valori continui che valori discreti: tali variabili sono dette *variabili aleatorie miste*.

Considerando le distribuzioni di probabilità per variabili aleatorie continue, accade che in un qualsiasi intervallo finito cadano un'infinità di valori della variabile stessa:

non si può attribuire a ciascun valore una probabilità finita.

Funzione di distribuzione cumulativa

- La *funzione di distribuzione cumulativa* per una variabile aleatoria *X* è definita come la probabilità che la variabile *X* assuma un qualsiasi valore minore di un valore x_0:

$$F(x_0)=P(x \text{ E } X \mid x \leq x_0)$$

- La funzione di distribuzione cumulativa è una caratteristica di una variabile aleatoria. Essa esiste per tutte le variabili aleatorie, siano esse discrete o continue.

Alcune *proprietà fondamentali*:

1) La funzione cumulativa *F(x)* è una funzione **non decrescente**, vale a dire che per $x1 > x2$ si ha $F(x1) \geq F(x2)$.

2) Quando l'argomento *x* della funzione tende a $-\infty$ la funzione di distribuzione tende a zero: $\mathbf{F(-\infty) = 0}$ $[P(x \leq -\infty)]$

3) Quando invece l'argomento *x* tende a $+\infty$ la funzione di distribuzione tende a uno: $\mathbf{F(+\infty) = 1}$ $[P(x \leq +\infty)]$

Funzione di distribuzione cumulativa

- La probabilità che la variabile aleatoria di contenuta in un intervallo di estremi x1 e x2 si può ricavare a partire dalla funzione di distribuzione cumulativa :

$$P(x \text{ E } X \mid x1 \leq x < x2)=F(x2)-F(x1)$$

Funzione densità di probabilità // Distribuzione // *pdf*

La *funzione di densità di probabilità* per una variabile aleatoria *X* è definita come la derivata della funzione di distribuzione cumulativa:

$$p(x) = \frac{dF(x)}{d(x)} \quad \Rightarrow \quad P(x \in X \mid x \le x0) = F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} p(x)dx$$

Alcune *proprietà fondamentali*:

1) p*(x)* è una funzione **non negativa**, $p(x) \geq 0$

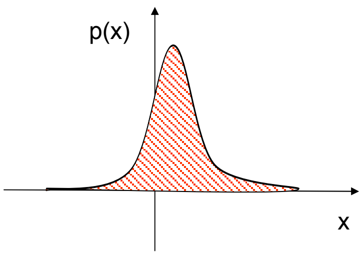
2) l'integrale della funzione in R è 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$

3) La probabilità che la variabile aleatoria di contenuta in un intervallo di estremi x1 e x2 si può ricavare a partire dalla funzione di densità di probabilità:

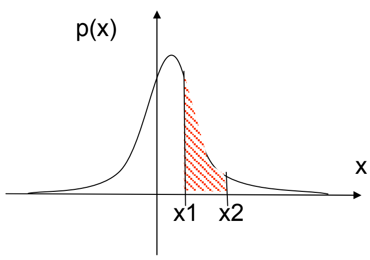
$$P(x \in X \mid x1 \le x < x2) = \int_{x1}^{x2} p(x)dx$$

Funzione densità di probabilità // *Distribuzione*



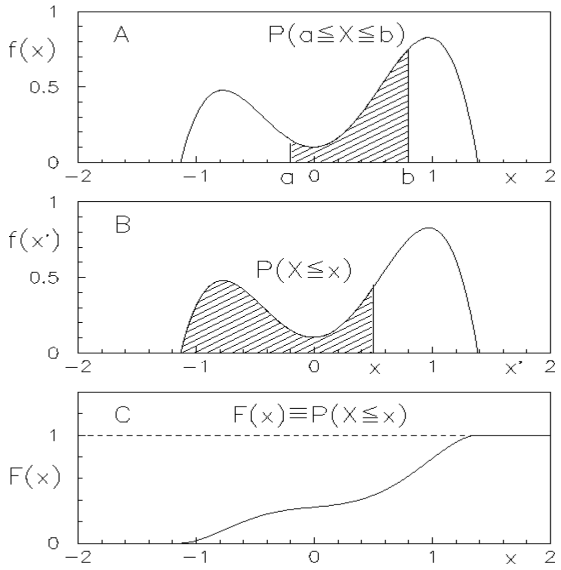
p(x) è sempre **non negativa**;

Area sottesa alla curva è unitaria



$$P(x \in X \mid x1 \le x < x2) = \int_{x1}^{x2} p(x)dx$$

Funzione densità di probabilità &
Funzione di distribuzione cumulativa



Parametri sintetici

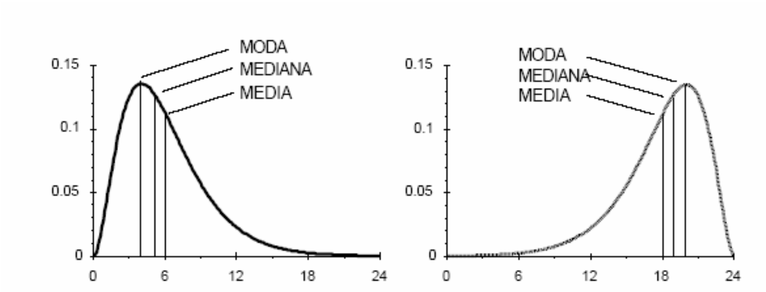
Parametri di tendenza centrale

- Moda = il valore più probabile max(p(x))

Mediana x_M $\qquad x_M \mid \int_{-\infty}^{x_M} p(x)dx = \int_{x_M}^{+\infty} p(x)dx = 0.5$

Media μ $\qquad \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x)dx$

Parametri sintetici



Parametri sintetici

Parametri di dispersione

- Varianza σ^2

$$\boxed{\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot p(x)dx}$$

- Deviazione standard, scarto quadratico medio, scarto tipo σ

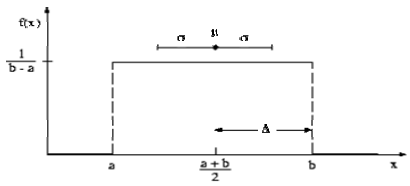
$$\boxed{\sigma = \sqrt{\sigma^2}}$$

- Fattore di dispersione c.v.=σ/μ

Esempi di distribuzioni- Distribuzione rettangolare// uniforme

Variabili aleatorie continue di cui è noto a priori che i loro valori possibili appartengono ad un dato intervallo e all'interno di questo intervallo tutti i valori sono equiprobabili, si dicono *distribuite uniformemente* o che seguono la *distribuzione uniforme*.

$$p(x) = \begin{cases} 0 \quad x < a \\ \text{cost} \quad a \le x \le b \\ 0 \quad x > b \end{cases}$$

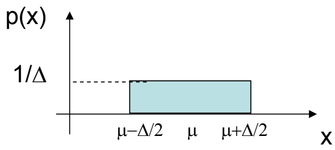


Poiché l'area sottesa ad una *pdf* è unitaria: A=base*altezza ; altezza=A/base
cost =1/(b-a)

Distribuzione rettangolare// uniforme

Caratteristiche numeriche fondamentali della variabile aleatoria *X* soggetta alla legge di distribuzione uniforme.
La media vale: $\mu=(b+a)/2=x_0$

$a = x_0-\Delta/2$; $b = x_0+\Delta/2$; dove Δ è l'ampiezza della distribuzione (Δ=b-a)



In virtù della simmetria della distribuzione il valore della mediana coincide con quello del valor medio.
La distribuzione uniforme non ha moda.

Varianza σ^2

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot p(x)dx = \int_{\mu-\Delta/2}^{\mu+\Delta/2} (x-\mu)^2 \cdot \frac{1}{\Delta}dx = \frac{1}{\Delta}\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} z^2 dz = \frac{(\Delta/2)^2}{3}$$

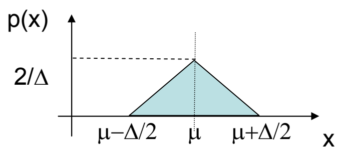
Deviazione standard

$$\sigma = \frac{(\Delta/2)}{\sqrt{3}}$$

Esempi di distribuzioni- Distribuzione triangolare

Quando la variabile casuale è definita in un certo intervallo, ma ci sono delle ragioni per ritenere che i gradi di fiducia decrescano linearmente dal centro

verso gli estremi si ha la cosiddetta *distribuzione triangolare* (o di *Simpson*). Anch'essa è molto utile per il calcolo delle incertezza di misura, in quanto in molte circostanze, questo tipo di modello può essere più realistico di quello uniforme.



La media coincide con la mediana e la moda

$$\sigma^2 = \frac{\left(\Delta/2\right)^2}{6}; \qquad \sigma = \frac{\left(\Delta/2\right)}{\sqrt{6}}$$

Esempi di distribuzioni- Distribuzione normale- gaussiana

Questa funzione, opportunamente normalizzata, è nota come *funzione di Gauss*, o *gaussiana*. Essa deve il nome a Karl Friederick Gauss, che la propose per la descrizione delle deviazioni delle misure astronomiche rispetto al loro andamento medio.

$$\boxed{p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

Le sue proprietà principali:

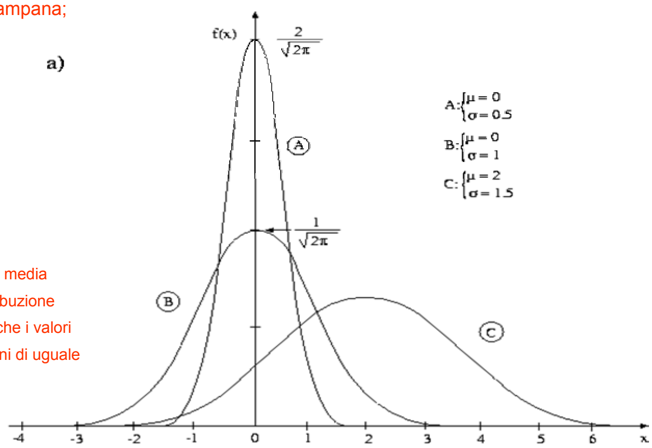
- ha due parametri μ e σ , che corrispondono al valore atteso e alla deviazione standard;
- presenta una tipica forma a campana;
- è simmetrica intorno alla **media**, la media coincide con il massimo della distribuzione (ricordiamo, **moda**) e con il punto che i valori della variabile casuale in due regioni di uguale probabilità (ricordiamo, **mediana**).
- il valore massimo della distribuzione (nel punto μ) è inversamente proporzionale alla deviazione standard.

$$\boxed{f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma};}$$

Distribuzione gaussiana

- presenta una tipica forma a campana;

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



- è simmetrica intorno alla **media**, la media coincide con il massimo della distribuzione (ricordiamo, **moda**) e con il punto che i valori della variabile casuale in due regioni di uguale probabilità (ricordiamo, **mediana**).

- il valore massimo della distribuzione (nel punto μ) è inversamente proporzionale alla deviazione standard

Distribuzione gaussiana

- Nella teoria delle probabilità la legge di distribuzione di Gauss riveste un ruolo abbastanza importante: essa costituisce una legge limite, cui tende la maggior parte delle altre distribuzioni sotto condizioni che si verificano abbastanza di frequente.

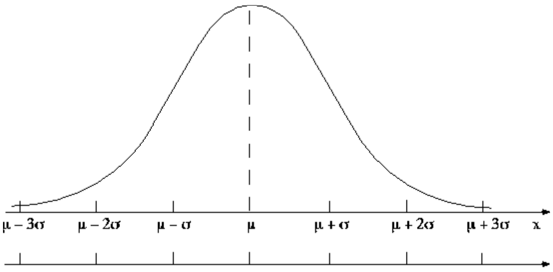
- Essa si manifesta ogni volta che la grandezza aleatoria osservata è il risultato della somma di un numero sufficientemente grande di variabili aleatorie indipendenti (o al limite debolmente indipendenti) che obbediscono a leggi di distribuzione diverse (sotto deboli restrizioni).

- La grandezza osservata si distribuisce seguendo la legge di distribuzione normale in un modo tanto più preciso, quanto è maggiore il numero variabili da sommare

Distribuzione gaussiana standardizzata

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$$

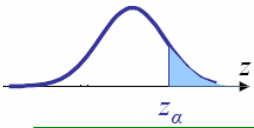
$$z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$$



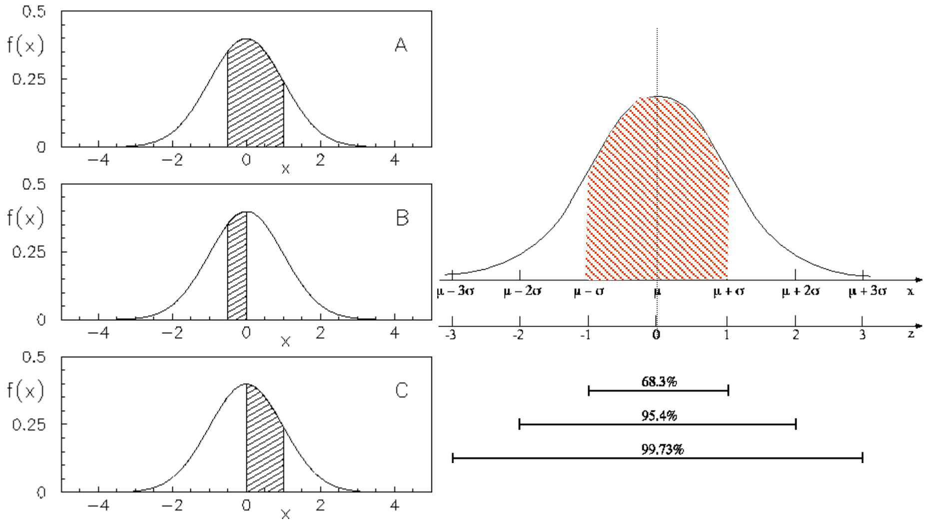
Media μ_z=0

Deviazione standard σ_z=1

Distribuzione gaussiana standardizzata



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.496011	0.492022	0.488034	0.484047	0.480061	0.476078	0.472097	0.468119	0.464144
0.1	0.460172	0.456205	0.452242	0.448283	0.44433	0.440382	0.436441	0.432505	0.428576	0.424655
0.2	0.42074	0.416834	0.412936	0.409046	0.405165	0.401294	0.397432	0.39358	0.389739	0.385908
0.3	0.382089	0.37828	0.374484	0.3707	0.366928	0.363169	0.359424	0.355691	0.351973	0.348268
0.4	0.344578	0.340903	0.337243	0.333598	0.329969	0.326355	0.322758	0.319178	0.315614	0.312067
0.5	0.308538	0.305026	0.301532	0.298056	0.294599	0.29116	0.28774	0.284339	0.280957	0.277595
0.6	0.274253	0.270931	0.267629	0.264347	0.261086	0.257846	0.254627	0.251429	0.248252	0.245097
0.7	0.241964	0.238852	0.235762	0.232695	0.22965	0.226627	0.223627	0.22065	0.217695	0.214764
0.8	0.211855	0.20897	0.206108	0.203269	0.200454	0.197663	0.194895	0.19215	0.18943	0.186733
0.9	0.18406	0.181411	0.178786	0.176186	0.173609	0.171056	0.168528	0.166023	0.163543	0.161087
1.0	0.158655	0.156248	0.153864	0.151505	0.14917	0.146859	0.144572	0.14231	0.140071	0.137857
1.1	0.135666	0.1335	0.131357	0.129238	0.127143	0.125072	0.123024	0.121	0.119	0.117023
1.2	0.11507	0.113139	0.111232	0.109349	0.107488	0.10565	0.103835	0.102042	0.100273	0.0985253
1.3	0.0968005	0.0950979	0.0934175	0.0917591	0.0901227	0.088508	0.086915	0.0853435	0.0837933	0.0822644
1.4	0.0807567	0.0792698	0.0778038	0.0763585	0.0749337	0.0735293	0.072145	0.0707809	0.0694366	0.0681121
1.5	0.0668072	0.0655217	0.0642555	0.0630084	0.0617802	0.0605708	0.0593799	0.0582076	0.0570534	0.0559174
1.6	0.0547993	0.0536989	0.0526161	0.0515507	0.0505026	0.0494715	0.0484572	0.0474597	0.0464787	0.045514
1.7	0.0445655	0.0436329	0.0427162	0.0418151	0.0409295	0.0400592	0.0392039	0.0383636	0.037538	0.036727
1.8	0.0359303	0.0351479	0.0343795	0.033625	0.0328841	0.0321568	0.0314428	0.0307419	0.030054	0.029379
1.9	0.0287166	0.0280666	0.0274289	0.0268034	0.0261898	0.0255881	0.0249979	0.0244192	0.0238518	0.0232955
2.0	0.0227501	0.0222156	0.0216917	0.0211783	0.0206752	0.0201822	0.0196993	0.0192262	0.0187628	0.0183089
2.1	0.0178644	0.0174292	0.017003	0.0165858	0.0161774	0.0157776	0.0153863	0.0150034	0.0146287	0.0142621
2.2	0.0139034	0.0135526	0.0132094	0.0128737	0.0125455	0.0122245	0.0119106	0.0116038	0.0113038	0.0110107
2.3	0.0107241	0.0104441	0.0101704	0.0099030	0.0096418	0.0093867	0.009137	0.0088940	0.00865632	0.00842419
2.4	0.0081975	0.0079762	0.0077602	0.0075494	0.0073436	0.0071428	0.006946	0.0067556	0.00656912	0.00638715
2.5	0.0062096	0.0060365	0.0058677	0.0057031	0.0055426	0.0053861	0.0052336	0.0050849	0.00494002	0.0047988
2.6	0.0046611	0.0045271	0.0043964	0.0042692	0.0041453	0.0040245	0.0039070	0.0037925	0.00368111	0.0035726
2.7	0.0034669	0.0033641	0.0032641	0.0031667	0.0030719	0.0029797	0.0028900	0.0028028	0.00271794	0.0026354
2.8	0.0025551	0.0024770	0.0024011	0.0023274	0.0022556	0.0021859	0.0021182	0.0020523	0.00198838	0.00192621
2.9	0.0018658	0.0018071	0.0017501	0.0016948	0.0016410	0.0015888	0.0015382	0.001489	0.00144124	0.00139489



Trattamento statistico dei dati

Trattamento statistico dei dati

Come stima della **probabilità di un evento sperimentale** può essere la **frequenza** del presentarsi dell'evento *in una serie di esperienze fatte nelle stesse condizioni*.

La ***probabilità di un evento è il limite a cui la frequenza tende al crescere del numero delle osservazioni.***

Se ***f*** è la frequenza relativa di un evento in una popolazione, generalmente si può osservare che all'aumentare del numero di osservazioni **N** del campione la frequenza calcolata tende a diventare sempre più simile a quella della popolazione.

Si parla di **probabilità frequentista** o **frequentistica** oppure di p**robabilità a posteriori** ed anche di **legge empirica del caso** o di **probabilità statistica**.

Trattamento statistico dei dati

- "A priori" nelle misure non sono noti gli eventi né le probabilità degli eventi
- Si segue un approccio "a posteriori" eseguendo N osservazioni dello stesso evento

$$\text{frequenza di un evento} \xrightarrow[N \to \infty]{} \text{probabilità}$$

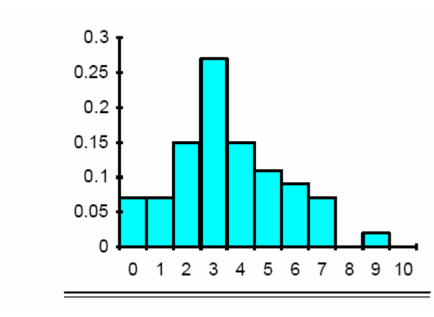
Esempio lancio di una moneta o di un dado

Istogramma

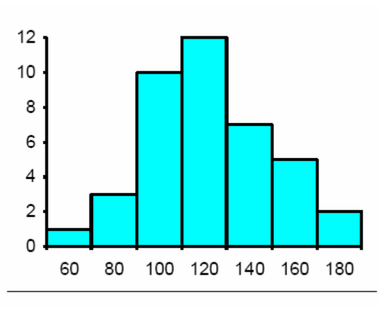
- Gli istogrammi sono grafici a barre verticali (per questo detti anche diagrammi a rettangoli accostati).
- Le misure della variabile casuale sono riportate lungo l'asse orizzontale, mentre l'asse verticale rappresenta la frequenza assoluta, f_i, oppure la frequenza relativa valori di ogni classe, fr_i.
- I lati dei rettangoli sono costruiti in corrispondenza degli estremi di ciascuna **classe**.

Istogramma

Frequenze assolute Mi



Frequenze relative Mi/N



Un istogramma deve essere inteso come una **rappresentazione areale**: sono le superfici dei vari rettangoli che devono essere proporzionali alle frequenze corrispondenti.

Quando le classi hanno la stessa ampiezza, le base dei rettangoli sono uguali; di conseguenza, le loro altezze risultano proporzionali alle frequenze che rappresentano è indifferente ragionare in termini di altezze o di aree di ogni rettangolo

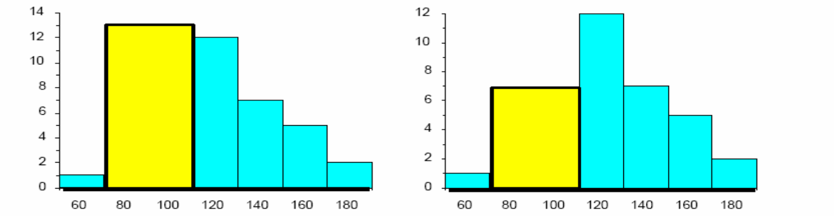
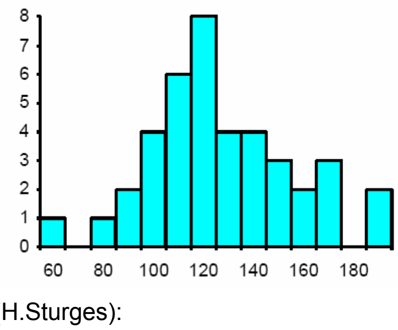


Figura 3. Istogrammi dei dati di Tab. 4

Somma errata di due classi : 2ª e 3ª   Somma corretta di due classi : 2ª e 3ª

Se le ampiezze delle classi sono diverse, bisogna ricordare il concetto generale che le frequenze sono rappresentate dalle superfici e quindi è necessario normalizzare l'istogramma, $fn_i=fr_i/\Delta_i$.

La rappresentazione grafica deve essere in grado di non alterare od interrompere la regolarità della distribuzione, come può avvenire in particolare quando il numero di classi è troppo alto rispetto al numero di dati.



Numero di classi (H.Sturges):

$$M = 1 + 3,3 \log_{10}(N)$$

Istogramma e *pdf*

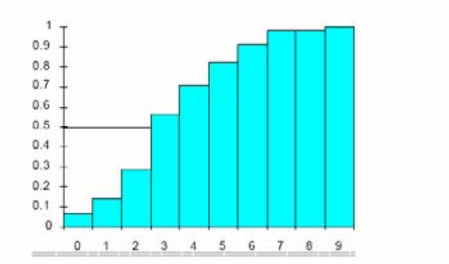
Istogramma delle frequenze normalizzate

Funzione di densità di probabilità :

- N $\longrightarrow \infty$
- $\Delta_i \longrightarrow 0$

Istogramma delle frequenze cumulate

$$g(i) = \sum_{k=1}^{i} fr(k)$$



Funzione di distribuzione cumulativa.

Istogramma

Campione	Campione ordinato
7.80779	7.79991 (x_{min})
7.81669	7.80226
7.81600	7.80466
7.80868	7.80506
7.81530	7.80597
7.81236	7.80757
7.81589	7.80779
7.80597	7.80843
7.81394	7.80850
7.81703	7.80868
7.81419	7.80909
7.80757	7.80929
7.80929	7.80934
7.80466	7.80959
7.80226	7.81164
7.81596	7.81228
7.81571	7.81236
7.81288	7.81273
7.80959	7.81288
7.80850	7.81378
7.79991	7.81394
7.81228	7.81419
7.80934	7.81530
7.80843	7.81540
7.81164	7.81571
7.81273	7.81589
7.80909	7.81596
7.80506	7.81600
7.81540	7.81669
7.81378	7.81703 (x_{max})

Numero di classi (H.Sturges):

$$M = 1 + 3{,}3 \log_{10}(N) = $$
$$= 1 + 3{,}3 \log_{10}(30) = 5{,}87 \rightarrow 6$$

Ampiezza delle classi:

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{M} =$$
$$= \frac{7{,}81703 - 7{,}79991}{6} = 0{,}0028533$$

Soglie tra le classi:

$$T_i = x_{min} + i \cdot \Delta, \quad i = 1,\ldots, M-1$$

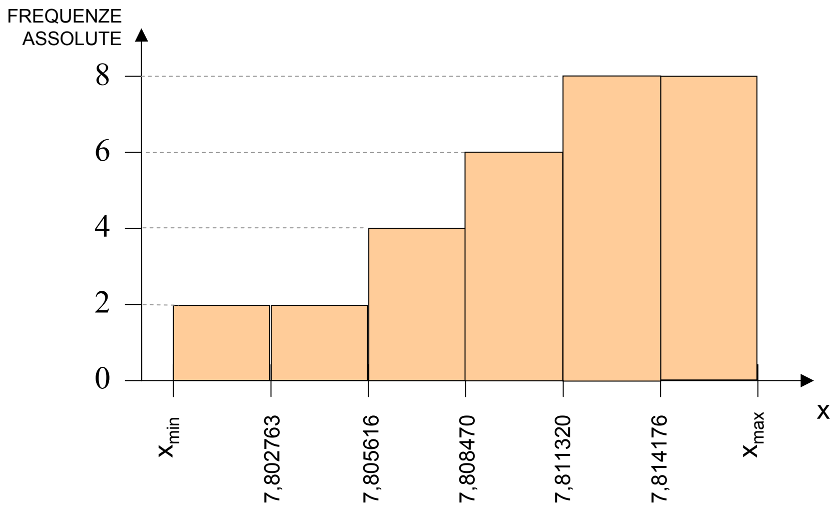
Campione ordinato

7.79991
7.80226
7.80466
7.80506
7.80597
7.80757
7.80779
7.80843
7.80850
7.80868
7.80909
7.80929
7.80934
7.80959
7.81164
7.81228
7.81236
7.81273
7.81288
7.81378
7.81394
7.81419
7.81530
7.81540
7.81571
7.81589
7.81596
7.81600
7.81669
7.81703

x	Frequenze assolute	Frequenze relative
x_{min} – 7,802763 (Δ)	2	0,0666
7,802763 – 7,805616	2	0,0666
7,805616 – 7,808470	4	0,1333
7,808470 – 7,811320	6	0,2
7,811320 – 7,814176	8	0,266
7,814176 – x_{max}	8	0,266

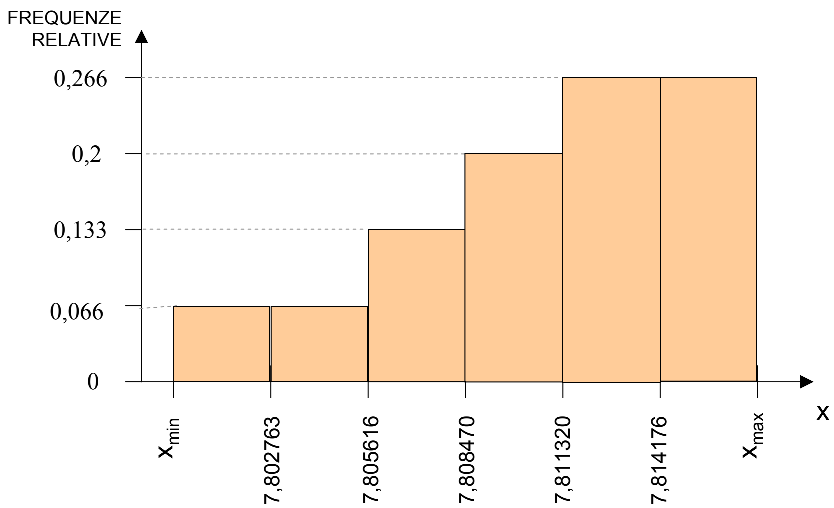
($f_{relativa} = f_{assoluta} / N$)

Istogramma delle frequenze assolute



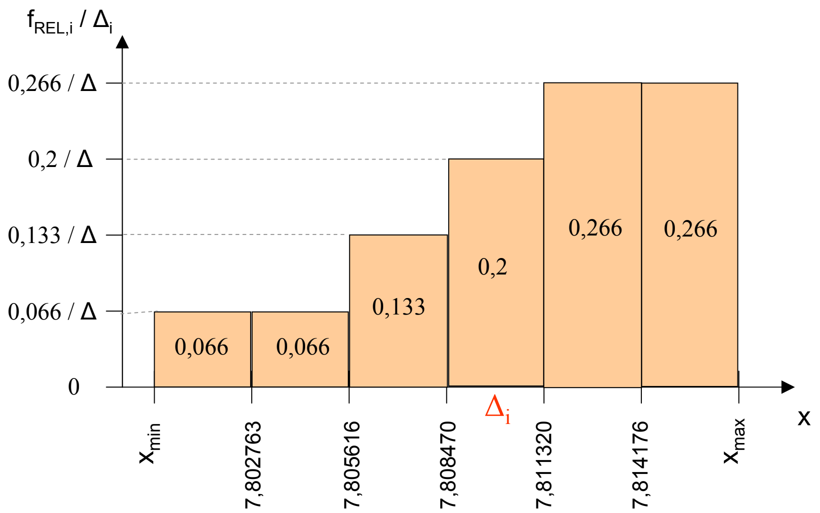
Proprietà: la somma delle frequenze assolute è uguale al numero N di osservazioni

Istogramma delle frequenze relative



Proprietà: la somma delle frequenze relative è uguale a 1

Istogramma normalizzato delle frequenze relative



Proprietà: la somma delle aree è uguale a 1 (come per una PDF)

Parametri sintetici

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) dx$$

Media, si intende la media aritmetica semplice.

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum x_i \longrightarrow \mu$$

Se i dati sono raggruppati in classi:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_k f_k}{\sum f_k}$$

La **media aritmetica di distribuzioni di frequenza** raggruppate in classi, detta **media aritmetica ponderata**, è calcolata più rapidamente con

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

dove:

$\overline{x}$ = media della distribuzione in classi,

$\mathbf{x_i}$ = valore medio di una classe di intervallo,

$\mathbf{f_i}$ = numero di osservazioni della classe i-esima classe,

n = numero di classi,

$\sum$ = sommatoria di tutte le classi.

ESEMPIO. Da un gruppo di 25 dati, raggruppati nella seguente distribuzione in classi

Classe	$\mathbf{x_i}$	150-159	160-169	170-179	180-189	190-199
Frequenza	$\mathbf{f_i}$	3	5	8	6	3

calcolare la media.

Parametri sintetici -Varianza $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot p(x)dx$

Varianza sperimentale $$s_x^2 = \frac{1}{N}\sum (x_i - \overline{x})^2$$

$$s_x^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2 \cdot f_i}{\sum f_i}$$

Varianza sperimentale corretta $$s_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum (x_i - \overline{x})^2$$

Varianza sperimentale della media $$s^2(\overline{x}) = \frac{s_x^2}{N}$$

Parametri sintetici –deviazione standard σ

Scarto tipo sperimentale

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

Deviazione standard della media

$$s(\bar{x}) = \sqrt{\frac{s_x^2}{N}} = \sqrt{\frac{\left(x - \bar{x}\right)^2}{N \cdot (N-1)}}$$

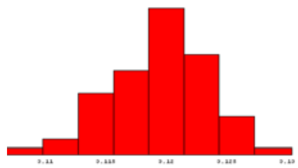
Test del χ^2

Obbiettivo del Test del χ^2

Verificare se esiste accordo tra una distribuzione osservata e una corrispondente distribuzione attesa o teorica.

Osservazione sperimentale

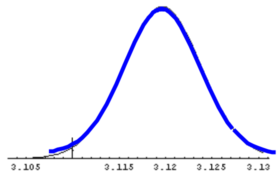
{3.11798, 3.12344, 3.12157, 3.11504, 3.12435, 3.11963, 3.12322, 3.12374, 3.11533, 3.12128, 3.12245, 3.11426, 3.12101, 3.11762, 3.12512, 3.1212, 3.115, 3.11663, 3.11556, 3.116, 3.11959, 3.12061, 3.12278, 3.12499, 3.12686, 3.12044, 3.11886, 3.12121, 3.12386, 3.12058, 3.12065, 3.12618, 3.11163, 3.11629, 3.10687, 3.1273, 3.12012, 3.1128, 3.11607, 3.12357, 3.12129, 3.12199, 3.121, 3.11006, 3.12087, 3.11793, 3.1165, 3.11756, 3.12157, 3.1155, 3.12055, 3.12373, 3.12041, 3.11781, 3.1268, 3.11972, 3.12077, 3.12326, 3.11389, 3.11693}



?

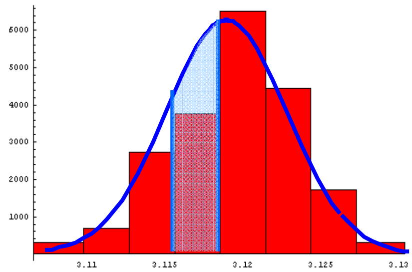
Modello atteso

$$f(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Passi del test

1. Si raggruppano le osservazioni sperimentali in **classi.**
2. Si costruisce l'**istogramma** delle osservazioni sperimentali.
3. Si confronta classe per classe l'istogramma osservato con la distribuzione teorica attesa.
4. Si determina un **indice numerico**, chiamato χ^2_{stat}, che aumenta all'aumentare degli scostamenti tra distribuzione osservata e distribuzione attesa.



Passi del test (…segue)

5. Si confronta l'indice χ^2_{stat} con un valore di soglia χ^2_{tab} ottenuto dalla tabella del χ^2.
6. Se $\chi^2_{stat} < \chi^2_{tab}$ allora il test è superato, e si può ritenere che c'è accordo tra osservazioni e modello: il campione è stato estratto da una popolazione che ammette il modello teorico scelto.

Si ricordi che il χ^2_{stat} ha la proprietà di aumentare all'aumentare dello scostamento tra distribuzione osservata e modello.

$$\boxed{\chi^2_{stat} = \sum_{k=1}^{M} \frac{\left(f_{oss,k} - f_{att,k}\right)^2}{f_{att,k}}}$$

Osservazioni

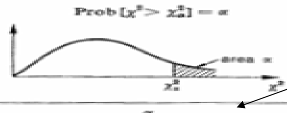
- Esiste sempre uno scostamento tra dati sperimentali (N osservazioni) e distribuzione attesa (lim N→∞). Il test consente di capire se tali differenze sono da attribuire esclusivamente a fattori casuali, o se il modello ipotizzato è inadeguato.
- Il test del χ^2, come tutti test statistici, trae conclusioni generali dal singolo esperimento, condotto su un numero finito di osservazioni.
- Il risultato di un test statistico è, perciò, valido a meno di un certo dubbio, quantificato attraverso un **fattore di rischio** α.
- Il fattore di rischio α è la probabilità **che sia abbia un risultato negativo (→"il modello è inadeguato")** nel caso in cui, invece, il modello ipotizzato è corretto.

Osservazioni

- La distribuzione della densità di probabilità del X^2 dipende dai suoi gradi di libertà (g. d. l.), il numero di g.d.l. viene riportato tra parentesi, ai piedi del simbolo.
- I gradi di libertà sono il numero osservazioni indipendenti.
- Nel nostro caso ν=M-1, in quanto i valori attesi di ogni gruppo sono liberi di assumere qualsiasi valore; ma fa eccezione il valore atteso dell'ultimo gruppo, la cui frequenza è totalmente determinata dalla differenza tra la somma di tutti i gruppi precedenti, già definiti, ed il totale sempre uguale a 1.

Tabella 8-4. *Distribuzione di chi-quadrato*

Prob$[\chi^2 > \chi^2_\alpha] = \alpha$



α

	α									
ν	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,10	0,05	0,025	0,010	0,005
1	0,000039	0,00016	0,00098	0,0039	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80

ν

α= Fattore di rischio di rifiutare una distribuzione del tipo ipotizzato.

$1-\alpha$= Livello di confidenza del test.

Esempio se il test è condotto con un fattore di rischio relativamente basso (es. 5%) ed il test non è superato la probabilità di trarre conclusioni sbagliate è pari al fattore di rischio (5%). Se il test è stato superato, si accetta una probabilità relativamente alta di trarre conclusioni sbagliate, cioè vi è una probabilità relativamente alta che la popolazione da cui proviene il campione non sia del tipo ipotizzato ($1-\alpha$).

Viceversa se il fattore di rischio è alto ed il test non è superato si ha un elevata probabilità di rifiutare una distribuzione che poteva essere del tipo ipotizzato, se il test è superato, invece la probabilità di trarre conclusioni sbagliate è basso ($>=1-\alpha$).

La scelta del fattore a più adatto dipende da cosa vogliamo dimostrare e da quale errore costa di più.

Test del χ^2: *Esercizio*

Verificare se il campione osservato (N = 60) può essere considerato proveniente da una popolazione descrivibile con un modello aleatorio gaussiano.

Si conduca il test con un fattore di rischio $\alpha = 0{,}05$

```
{3.11798, 3.12344, 3.12157, 3.11504, 3.12435,
 3.11963, 3.12322, 3.12374, 3.11533, 3.12128,
 3.12245, 3.11426, 3.12101, 3.11762, 3.12512,
 3.1212, 3.115, 3.11663, 3.11556, 3.116,
 3.11959, 3.12061, 3.12278, 3.12499, 3.12686,
 3.12044, 3.11886, 3.12121, 3.12386, 3.12058,
 3.12065, 3.12618, 3.11163, 3.11629, 3.10687,
 3.1273, 3.12012, 3.1128, 3.11607, 3.12357,
 3.12129, 3.12199, 3.121, 3.11006, 3.12087,
 3.11793, 3.1165, 3.11756, 3.12157, 3.1155,
 3.12055, 3.12373, 3.12041, 3.11781, 3.1268,
 3.11972, 3.12077, 3.12326, 3.11389, 3.11693}
```

Campione ordinato in modo crescente

```
{3.10687, 3.11006, 3.11163, 3.1128, 3.11389,
 3.11426, 3.115, 3.11504, 3.11533, 3.1155,
 3.11556, 3.116, 3.11607, 3.11629, 3.1165,
 3.11663, 3.11693, 3.11756, 3.11762, 3.11781,
 3.11793, 3.11798, 3.11886, 3.11959, 3.11963,
 3.11972, 3.12012, 3.12041, 3.12044, 3.12055,
 3.12058, 3.12061, 3.12065, 3.12077, 3.12087,
 3.121, 3.12101, 3.1212, 3.12121, 3.12128,
 3.12129, 3.12157, 3.12157, 3.12199, 3.12245,
 3.12278, 3.12322, 3.12326, 3.12344, 3.12357,
 3.12373, 3.12374, 3.12386, 3.12435, 3.12499,
 3.12512, 3.12618, 3.1268, 3.12686, 3.1273}
```

Calcoli preliminari

Numero di classi (H.Sturges):

$$N_{Classi} = 1 + 3{,}3\log_{10}(N) = 1 + 3{,}3\log_{10}(60) = 6{,}867 \rightarrow 7$$

(*Si approssima all'intero immediatamente superiore*)

Ampiezza delle classi:

$$\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{N_{Classi}} = \frac{3{,}1273 - 3{,}10687}{7} = 0{,}002918571$$

Media del campione: $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = 3{,}11966$

Scarto tipo del campione: $s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} = 0{,}00421809$

Conteggio delle frequenze osservate

Soglie tra le classi: $T_i = x_{\min} + i \cdot \Delta, \quad i = 1, \dots, N_{Classi} - 1$

Soglie
3,10687
3,109788
3,112707
3,115626
3,118544
3,121463
3,124381
3,1273

Campione ordinato

{3.10687, 3.11006, 3.11163, 3.1128, 3.11389,
3.11426, 3.115, 3.11504, 3.11533, 3.1155,
3.11556, 3.116, 3.11607, 3.11629, 3.1165,
3.11663, 3.11693, 3.11756, 3.11762, 3.11781,
3.11793, 3.11798, 3.11886, 3.11959, 3.11963,
3.11972, 3.12012, 3.12041, 3.12044, 3.12055,
3.12058, 3.12061, 3.12065, 3.12077, 3.12087,
3.121, 3.12101, 3.1212, 3.12121, 3.12128,
3.12129, 3.12157, 3.12157, 3.12199, 3.12245,
3.12278, 3.12322, 3.12326, 3.12344, 3.12357,
3.12373, 3.12374, 3.12386, 3.12435, 3.12499,
3.12512, 3.12618, 3.1268, 3.12686, 3.1273}

Classi	f_{oss}
1	1
2	2
3	8
4	11
5	19
6	13
7	9

Accorpamento delle classi

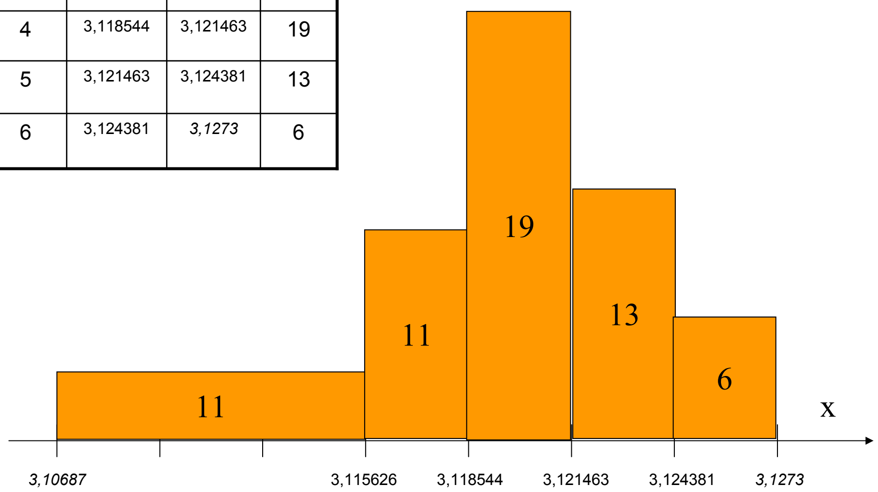
- Affinché il test sia valido, tutte le classi devono avere f_{oss} >= 5
- Il test è valido anche nel caso in cui le classi abbiano ampiezza diversa tra loro

Classe	Da	A	f_{OSS}
1	*3,10687*	3,109788	1
2	3,109788	3,112707	2
3	3,112707	3,115626	8
4	3,115626	3,118544	11
5	3,118544	3,121463	19
6	3,121463	3,124381	13
7	3,124381	*3,1273*	6

Classe	Da	A	f_{OSS}
1	*3,10687*	3,115626	11
2	3,115626	3,118544	11
3	3,118544	3,121463	19
4	3,121463	3,124381	13
5	3,124381	*3,1273*	6

Classe	Da	A	f_{OSS}
1	*3,10687*	3,115626	11
3	3,115626	3,118544	11
4	3,118544	3,121463	19
5	3,121463	3,124381	13
6	3,124381	*3,1273*	6

L'istogramma



Il parametro da calcolare

L'indice numerico da calcolare è dato da:

$$\chi^2_{stat} = \sum_{i=1}^{N_{Classi}} \frac{\left(f_{oss,i} - f_{att,i}\right)^2}{f_{att,i}}$$

dove $f_{att,i}$ sono le frequenze attese in base al modello, cioè le frequenze che si dovrebbero osservare se il campione seguisse rigorosamente un comportamento gaussiano.

- Tutte le frequenze sono assolute
- Il χ^2_{stat} aumenta all'aumentare delle differenze tra frequenze attese e frequenze osservate per tutte le classi, indipendentemente dal loro segno.

Numero di gradi di libertà del test: $\nu = N_{Classi} - 1 = 4$

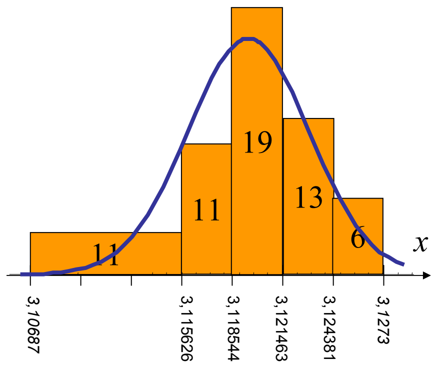
Il calcolo delle frequenze attese

Classe	Da	A	f_{oss}	$f_{att,rel}$	f_{att}	$\frac{\left(f_{oss,i} - f_{att,i}\right)^2}{f_{att,i}}$
1	*3,10687*	3,115626	11			
2	3,115626	3,118544	11			
3	3,118544	3,121463	19	?		
4	3,121463	3,124381	13			
5	3,124381	*3,1273*	6			

La scelta della gaussiana

Obbiettivo del test: verificare l'accordo tra la distribuzione osservata e una distribuzione attesa gaussiana, **con media pari alla media del campione e scarto tipo pari allo scarto tipo del campione**.

Il confronto deve essere effettuato con una distribuzione gaussiana N(m,s), con media e deviazione standard stimate tramite il campione stesso:



$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = 3{,}11966$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} = 0{,}00421809$$

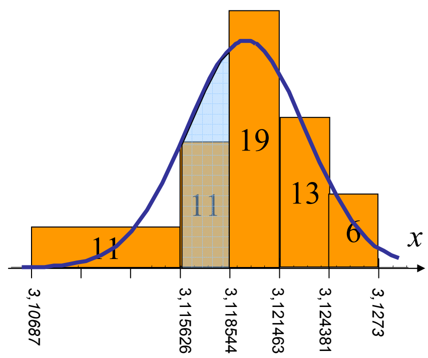
PDF gaussiana:

$$f(x,\bar{x},s) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2s^2}}$$

Problemi

1) Le frequenze attese (aree azzurre) non sono direttamente confrontabili con le frequenze osservate, perché una PDF sottende un'area totale = 1.

Si moltiplicano le frequenze relative osservate per N, in modo da effettuare il confronto tra **frequenze assolute**.



2) Si ha a disposizione la tabella dei valori della gaussiana normale *N(0,1)*, non di una generica gaussiana $N(\bar{x},s)$.

Si trasformano i valori x_i delle soglie in z_i con la relazione:

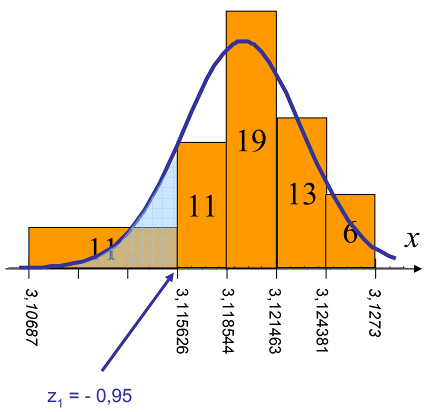
$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

Il calcolo delle *z*

$$z_1 = \frac{x_1 - \bar{x}}{s} = \frac{3{,}115626 - 3{,}11966}{0{,}00421809} = -0{,}9563$$

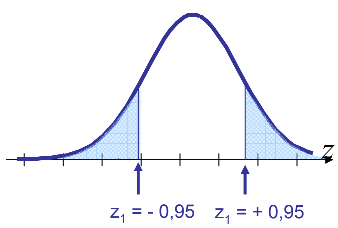
Classe	Da	A	f_{oss}	$f_{att,rel}$	f_{att}	
1	*3,10687*	x_1 = 3,115626 z_1 = - 0,95	11			
2	x_1 = 3,115626 z_1 = - 0,95	x_2 = 3,118544 z_2 = - 0,26	11			
3	x_2 = 3,118544 z_2 = - 0,26	x_3 = 3,121463 z_3 = 0,43	19			
4	x_3 = 3,121463 z_3 = 0,43	x_4 = 3,124381 z_4 = 1,12	13			
5	x_4 = 3,124381 z_4 = 1,13	*3,1273*	6			

Calcolo della f_{att} per la prima classe

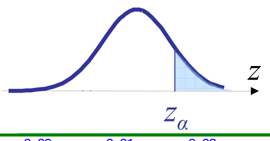


• Le frequenze attese della prima (dell'ultima) classe devono essere calcolate estendendo l'area fino a meno (più) infinito.

• La gaussiana è simmetrica:



Classe	Da	A	f_{oss}
1	*3,10687*	x_1 = 3,115626 z_1 = - 0,95	11



La tabella delle z

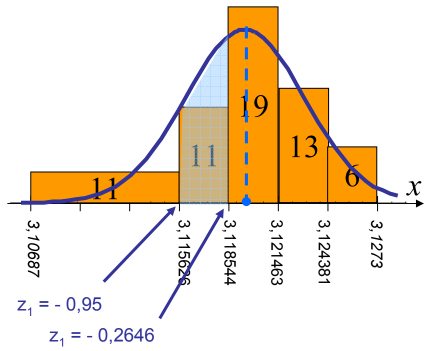
$f_{att,rel} = 0.17106$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.496011	0.492022	0.488034	0.484047	0.480061	0.476078	0.472097	0.468119	0.464144
0.1	0.460172	0.456205	0.452242	0.448283	0.44433	0.440382	0.436441	0.432505	0.428576	0.424655
0.2	0.42074	0.416834	0.412936	0.409046	0.405165	0.401294	0.397432	0.39358	0.389739	0.385908
0.3	0.382089	0.37828	0.374484	0.3707	0.366928	0.363169	0.359424	0.355691	0.351973	0.348268
0.4	0.344578	0.340903	0.337243	0.333598	0.329969	0.326355	0.322758	0.319178	0.315614	0.312067
0.5	0.308538	0.305026	0.301532	0.298056	0.294599	0.29116	0.28774	0.284339	0.280957	0.277595
0.6	0.274253	0.270931	0.267629	0.264347	0.261086	0.257846	0.254627	0.251429	0.248252	0.245097
0.7	0.241964	0.238852	0.235762	0.232695	0.22965	0.226627	0.223627	0.22065	0.217695	0.214764
0.8	0.211855	0.20897	0.206108	0.203269	0.200454	0.197663	0.194895	0.19215	0.18943	0.186733
0.9	0.18406	0.181411	0.178786	0.176186	0.173609	0.171056	0.168528	0.166023	0.163543	0.161087
1.0	0.158655	0.156248	0.153864	0.151505	0.14917	0.146859	0.144572	0.14231	0.140071	0.137857
1.1	0.135666	0.1335	0.131357	0.129238	0.127143	0.125072	0.123024	0.121	0.119	0.117023
1.2	0.11507	0.113139	0.111232	0.109349	0.107488	0.10565	0.103835	0.102042	0.100273	0.0985253
1.3	0.0968005	0.0950979	0.0934175	0.0917591	0.0901227	0.088508	0.086915	0.0853435	0.0837933	0.0822644
1.4	0.0807567	0.0792698	0.0778038	0.0763585	0.0749337	0.0735293	0.072145	0.0707809	0.0694366	0.0681121
1.5	0.0668072	0.0655217	0.0642555	0.0630084	0.0617802	0.0605708	0.0593799	0.0582076	0.0570534	0.0559174
1.6	0.0547993	0.0536989	0.0526161	0.0515507	0.0505026	0.0494715	0.0484572	0.0474597	0.0464787	0.045514
1.7	0.0445655	0.0436329	0.0427162	0.0418151	0.0409295	0.0400592	0.0392039	0.0383636	0.037538	0.036727
1.8	0.0359303	0.0351479	0.0343795	0.033625	0.0328841	0.0321568	0.0314428	0.0307419	0.030054	0.029379
1.9	0.0287166	0.0280666	0.0274289	0.0268034	0.0261898	0.0255881	0.0249979	0.0244192	0.0238518	0.0232955
2.0	0.0227501	0.0222156	0.0216917	0.0211783	0.0206752	0.0201822	0.0196993	0.0192262	0.0187628	0.0183089
2.1	0.0178644	0.0174292	0.017003	0.0165858	0.0161774	0.0157776	0.0153863	0.0150034	0.0146287	0.0142621
2.2	0.0139034	0.0135526	0.0132094	0.0128737	0.0125455	0.0122245	0.0119106	0.0116038	0.0113038	0.0110107
2.3	0.0107241	0.0104441	0.0101704	0.0099030	0.0096418	0.0093867	0.009137	0.0088940	0.00865632	0.00842419
2.4	0.0081975	0.0079762	0.0077602	0.0075494	0.0073436	0.0071428	0.006946	0.0067556	0.00656912	0.00638715
2.5	0.0062096	0.0060365	0.0058677	0.0057031	0.0055426	0.0053861	0.0052336	0.0050849	0.00494002	0.0047988
2.6	0.0046611	0.0045271	0.0043964	0.0042692	0.0041453	0.0040245	0.0039070	0.0037925	0.00368111	0.0035726
2.7	0.0034669	0.0033641	0.0032641	0.0031667	0.0030719	0.0029797	0.0028900	0.0028028	0.00271794	0.0026354
2.8	0.0025551	0.0024770	0.0024011	0.0023274	0.0022556	0.0021859	0.0021182	0.0020523	0.00198838	0.00192621
2.9	0.0018658	0.0018071	0.0017501	0.0016948	0.0016410	0.0015888	0.0015382	0.001489	0.00144124	0.00139489

Classe	Da	A	f_{oss}	$f_{att,rel}$	f_{att}	
1	*3,10687*	x_1 = 3,115626 z_1 = - 0,95	11	0.1711	10,266 (= 0.1711 x 60)	
2	x_1 = 3,115626 z_1 = - 0,95	x_2 = 3,118544 z_2 = - 0,26	11			
3	x_2 = 3,118544 z_2 = - 0,26	x_3 = 3,121463 z_3 = 0,43	19			
4	x_3 = 3,121463 z_3 = 0,43	x_4 = 3,124381 z_4 = 1,12	13			
5	x_4 = 3,124381 z_4 = 1,13	*3,1273*	6			

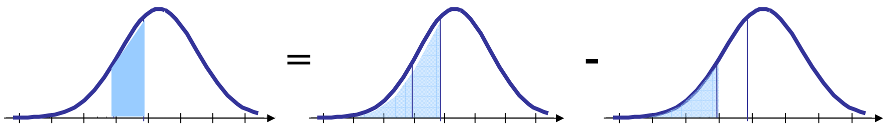
Le frequenze attese assolute $f_{att,i}$ si ottengono moltiplicando le frequenze attese relative per il numero di elementi del campione (N = 60, nell'esercizio).

Frequenza attesa per la seconda classe



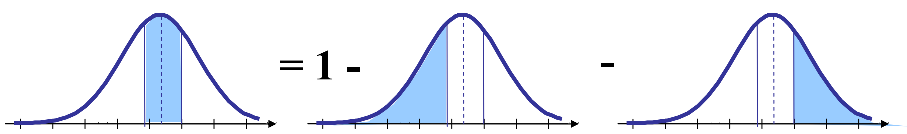
Questo è il caso in cui la classe ha due valori di soglia che sono entrambi o maggiori o minori della media.

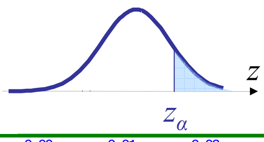
La frequenza attesa si ottiene per differenza di aree, come illustrato graficamente in basso.



Altro caso per il calcolo della frequenza attesa

Se le due soglie della classe sono, rispettivamente, una maggiore e l'altra minore della media, allora si procede sottraendo all'area totale sottesa dalla PDF (pari a 1) le aree della coda superiore e della coda inferiore.





La tabella delle z

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.496011	0.492022	0.488034	0.484047	0.480061	0.476078	0.472097	0.468119	0.464144
0.1	0.460172	0.456205	0.452242	0.448283	0.44433	0.440382	0.436441	0.432505	0.428576	0.424655
0.2	0.42074	0.416834	0.412936	0.409046	0.405165	0.401294	0.397432	0.39358	0.389739	0.385908
0.3	0.382089	0.37828	0.374484	0.3707	0.366928	0.363169	0.359424	0.355691	0.351973	0.348268
0.4	0.344578	0.340903	0.337243	0.333598	0.329969	0.326355	0.322758	0.319178	0.315614	0.312067
0.5	0.308538	0.305026	0.301532	0.298056	0.294599	0.29116	0.28774	0.284339	0.280957	0.277595
0.6	0.274253	0.270931	0.267629	0.264347	0.261086	0.257846	0.254627	0.251429	0.248252	0.245097
0.7	0.241964	0.238852	0.235762	0.232695	0.22965	0.226627	0.223627	0.22065	0.217695	0.214764
0.8	0.211855	0.20897	0.206108	0.203269	0.200454	0.197663	0.194895	0.19215	0.18943	0.186733
0.9	0.18406	0.181411	0.178786	0.176186	0.173609	0.171056	0.168528	0.166023	0.163543	0.161087
1.0	0.158655	0.156248	0.153864	0.151505	0.14917	0.146859	0.144572	0.14231	0.140071	0.137857
1.1	0.135666	0.1335	0.131357	0.129238	0.127143	0.125072	0.123024	0.121	0.119	0.117023
1.2	0.11507	0.113139	0.111232	0.109349	0.107488	0.10565	0.103835	0.102042	0.100273	0.0985253
1.3	0.0968005	0.0950979	0.0934175	0.0917591	0.0901227	0.088508	0.086915	0.0853435	0.0837933	0.0822644
1.4	0.0807567	0.0792698	0.0778038	0.0763585	0.0749337	0.0735293	0.072145	0.0707809	0.0694366	0.0681121
1.5	0.0668072	0.0655217	0.0642555	0.0630084	0.0617802	0.0605708	0.0593799	0.0582076	0.0570534	0.0559174
1.6	0.0547993	0.0536989	0.0526161	0.0515507	0.0505026	0.0494715	0.0484572	0.0474597	0.0464787	0.045514
1.7	0.0445655	0.0436329	0.0427162	0.0418151	0.0409295	0.0400592	0.0392039	0.0383636	0.037538	0.036727
1.8	0.0359303	0.0351479	0.0343795	0.033625	0.0328841	0.0321568	0.0314428	0.0307419	0.030054	0.029379
1.9	0.0287166	0.0280666	0.0274289	0.0268034	0.0261898	0.0255881	0.0249979	0.0244192	0.0238518	0.0232955
2.0	0.0227501	0.0222156	0.0216917	0.0211783	0.0206752	0.0201822	0.0196993	0.0192262	0.0187628	0.0183089
2.1	0.0178644	0.0174292	0.017003	0.0165858	0.0161774	0.0157776	0.0153863	0.0150034	0.0146287	0.0142621
2.2	0.0139034	0.0135526	0.0132094	0.0128737	0.0125455	0.0122245	0.0119106	0.0116038	0.0113038	0.0110107
2.3	0.0107241	0.0104441	0.0101704	0.0099030	0.0096418	0.0093867	0.009137	0.0088940	0.00865632	0.00842419
2.4	0.0081975	0.0079762	0.0077602	0.0075494	0.0073436	0.0071428	0.006946	0.0067556	0.00656912	0.00638715
2.5	0.0062096	0.0060365	0.0058677	0.0057031	0.0055426	0.0053861	0.0052336	0.0050849	0.00494002	0.0047988
2.6	0.0046611	0.0045271	0.0043964	0.0042692	0.0041453	0.0040245	0.0039070	0.0037925	0.00368111	0.0035726
2.7	0.0034669	0.0033641	0.0032641	0.0031667	0.0030719	0.0029797	0.0028900	0.0028028	0.00271794	0.0026354
2.8	0.0025551	0.0024770	0.0024011	0.0023274	0.0022556	0.0021859	0.0021182	0.0020523	0.00198838	0.00192621
2.9	0.0018658	0.0018071	0.0017501	0.0016948	0.0016410	0.0015888	0.0015382	0.001489	0.00144124	0.00139489

Risultati completi

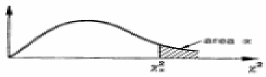
Classe	Da	A	f_{oss}	$f_{att,rel}$	f_{att}	$\frac{(f_{oss,i}-f_{att,i})^2}{f_{att,i}}$
1	*3,10687*	x_1 = 3,115626 z_1 = - 0,96	11	0,1711	10,266	0,0524
2	x_1 = 3,115626 z_1 = - 0,96	x_2 = 3,118544 z_2 = - 0,26	11	0,2263	13,578	0,4895
3	x_2 = 3,118544 z_2 = - 0,26	x_3 = 3,121463 z_3 = 0,43	19	0,2654	15,924	0,1932
4	x_3 = 3,121463 z_3 = 0,43	x_4 = 3,124381 z_4 = 1,12	13	0,2037	12,222	0,0495
5	x_4 = 3,124381 z_4 = 1,13	*3,1273*	6	0,1335	8,010	0,5044
				0,9996	60	1,289

E' consigliabile calcolare i totali per verifica. Sono accettabili piccoli errori dovuti ai troncamenti effettuati nei calcoli.

χ^2_{stat}

Tabella 8-4. *Distribuzione di chi-quadrato*

Prob $[\chi^2 > \chi^2_\alpha] = \alpha$



ν	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,10	0,05	0,025	0,010	0,005
1	0,000039	0,00016	0,00098	0,0039	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,08	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	8,03	8,90	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	8,64	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	9,26	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93
26	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,88	41,92	45,64	48,29
27	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	49,64
28	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99
29	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
60	35,53	37,48	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
120	83,85	86,92	91,58	95,70	100,62	140,23	146,57	152,21	158,95	163,65

Esito del test

ν	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,10	0,05	0,025	0,010	0,005
1	0,000039	0,00016	0,00098	0,0039	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86

χ^2_{stat} = **1,289**