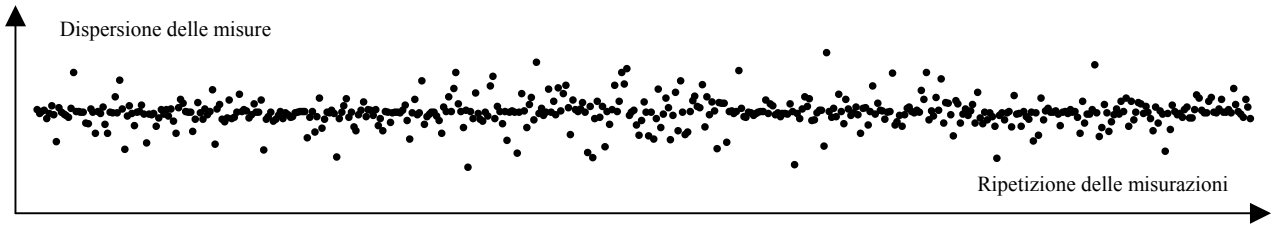
L'INCERTEZZA DI MISURA

Generalità

Come si è appreso nel capitolo precedente, il termine *misura* esprimere il rapporto tra i valori di due grandezze della stessa natura, di cui la seconda è assunta come riferimento (*unità di misura*). Per come è definito, il valore numerico ricavato da tale rapporto fornisce in modo univoco ed inequivocabile il valore assunto dalla misura stessa. Tuttavia, passando dalla definizione teorica del termine *misura* alla sua *misurazione* ossia all'esecuzione pratica di un procedimento sperimentale atto a fornire la valutazione della misura, si può verificare che, ripetendo più volte la stessa misurazione, non si ottengano sempre gli stessi risultati. Però, osservando con più attenzione i risultati di misura ottenuti, si può riscontrare che essi sono compresi all'interno di una fascia di valori (vedi figura che segue).



Dispersione delle misure ottenute ripetendo più volte la stessa procedura di misurazione

Questa osservazione di carattere puramente empirico porta ad ipotizzare che il valore della misura è, con buona probabilità, compreso all'interno della distribuzione individuata da questa fascia di valori e inoltre che, maggiore è il numero di misurazioni che ha fornito lo stesso risultato di misura, maggiore è la attendibilità di quel risultato. Se, poi, la dispersione delle misure è giustificata dall'esistenza di fattori di influenza variabili in modo casuale, aleatorio, è lecito supporre che gli effetti sulle diverse misurazioni siano a loro volta aleatori, indipendenti, statisticamente scorrelati e, come tali, a valor medio nullo. Poiché le cause che producono questo tipo di dispersione nelle misure non sono in genere prevedibili in modo sistematico, non è possibile eliminarle; però si può pensare di attenuarne gli effetti prodotti sulla misura. A tale scopo, i risultati di misura sono interpretati come derivanti dalla misurazione di un misurando su cui è sovrapposto un segnale di rumore a valore medio nullo. Allora, se i risultati ottenuti nelle varie misurazioni vengono mediati, il valore della media risulta praticamente insensibile alla presenza di rumore. Si ottiene, in tal modo una sorta di filtraggio del rumore ed è, per questo motivo, che solitamente si indica come migliore stima della misura il valore medio della distribuzione ottenuta come risultato di misurazioni ripetute. Riassumendo: per ottenere il risultato di una misurazione, si può ripetere un certo numero di volte la procedura di misura ed associare al valore medio della distribuzione ottenuta il significato di migliore stima della misura.

Prima di procedere, si deve tenere conto che, accanto alle cause a cui si è fatto finora cenno, che influenzano la misura in modo *aleatorio*, ve ne sono altre che la influenzano in modo *sistematico*. Queste ultime, anche ripetendo più volte il procedimento di misurazione, influenzano la misura sempre allo stesso modo e quindi non si evidenziano, come quelle di natura aleatoria, con una dispersione dei risultati di misurazione. Si può concludere che i fattori di influenza di tipo aleatorio derivano da fenomeni casuali e non controllabili e producono sulla misura effetti non prevedibili e diversi ogni volta che si ripete la stessa misurazione. I fattori di influenza di tipo sistematico derivano da cause conosciute e, come tali, hanno sempre lo stesso effetto sulla misura anche se questa è ripetuta un gran numero di volte. Queste due categorie di fattori di influenza sono di natura completamente diversa e risulta impossibile studiare gli effetti che essi producono sulla misura usando una metodologia comune. Pertanto, per valutare correttamente l'incertezza di misura, è necessario innanzitutto separare gli effetti prodotti dai fattori di influenza sistematici da quelli aleatori.

La valutazione degli effetti sistematici va eseguita analizzando teoricamente i diversi fattori di influenza e prevedendo gli effetti che essi possono avere sul risultato finale di misura. Un simile approccio consente, quindi, anche di apportare la dovuta correzione al risultato di misura che rimane quindi influenzato dai soli effetti aleatori.

La valutazione degli effetti aleatori viene eseguita facendo ricorso ai principi della teoria della probabilità e della statistica. Le incertezze corrispondenti sono descritte in termini di valore medio (nullo per definizione, dato che gli effetti sistematici sono stati tutti corretti) e di scarto quadratico medio che viene usato per quantificare l'incertezza di misura. Per quanto concerne la valutazione dello scarto quadratico medio (*incertezza*), si possono seguire due procedimenti di valutazione: *valutazione di categoria A* e *valutazione di categoria B*: La valutazione delle incertezze, sia di categoria A che B, è sempre fatta in termini statistici in modo da consentire una indicazione dell'incertezza che prescinda dal metodo usato per pervenire alla sua valutazione. Nel caso di valutazione di categoria A, la caratterizzazione statistica deriva dall'analisi della dispersione dei risultati di misura in misurazioni ripetute e, pertanto, sulla stima della frequenza di ripetizione dei risultati di misura; viceversa, nel caso di valutazione di categoria B, la caratterizzazione statistica si fonda sulla fiducia nelle informazioni disponibili.

IMPORTANTE!!! Bisogna stare attenti nel compensare gli effetti sistematici che agiscono nelle misurazioni perché i fattori di influenza di tipo sistematico spesso possono indurre anche effetti secondari di tipo aleatorio. In particolare,

dopo aver eseguito la correzione del risultato di misura, a cui si è fatto precedentemente cenno, bisogna ancora considerare gli eventuali effetti secondari, il cui effetto sulla misura resta comunque imprevedibile, che vanno trattati insieme alle incertezze di natura aleatoria. A titolo di esempio, si faccia riferimento all'effetto di carico introdotto dall'inserimento di uno strumento nel circuito di misura. Tale effetto tiene conto del fatto che lo strumento, per come è realizzato e per poter fornire l'indicazione della misura, assorbe una certa aliquota di energia dal circuito nel quale è inserito. Dalla conoscenza delle caratteristiche dello strumento e dalla conoscenza del misurando, le leggi della fisica consentono di stimare teoricamente l'effetto di carico strumentale e quindi di prevedere la correzione da apportare alla misura. Evidentemente, questo è un esempio di fattore di influenza di tipo sistematico. Si badi però che la correzione da apportare alla misura non tiene conto delle incertezze di natura aleatoria che affiggono le caratteristiche di funzionamento dello strumento e la definizione del misurando. Queste contribuiscono a indurre effetti secondari di tipo aleatorio sulla misura e quindi devono essere trattate come tali.

Definizione incertezza

Parametro associato al risultato di una misurazione che caratterizza la dispersione dei valori ragionevolmente attribuibili al misurando.

Valutazione delle incertezze di categoria A

Poiché la valutazione dell'incertezza di categoria A si basa su elaborazioni statistiche condotte sui risultati di misurazioni ripetute, prima di procedere, è sembrato opportuno riportare definizioni e formule richieste per condurre tali elaborazioni.
Dato un insieme di n misure ripetute q_k di una grandezza q, la stima $\overline{q}$ della media della popolazione è definita come:

$$\overline{q} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k \tag{1}$$

La varianza sperimentale $s^2(q_k)$ della stessa popolazione è definita come:

$$s^2(q_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(q_k - \overline{q})^2 \tag{2}$$

Lo scarto quadratico medio (o scarto tipo) sperimentale $s(q_k)$ è definito come la radice quadrata positiva della varianza sperimentale:

$$s(q_k) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(q_k - \overline{q})^2} \tag{3}$$

Pertanto, lo scarto tipo di ogni singola osservazione è data dall'espressione (3). La migliore stima della misura in un procedimento basato su osservazioni ripetute è fornita dalla media calcolata con l'espressione (1). L'incertezza tipo della media $u(\overline{q})$ risulta essere:

$$u(\overline{q}) = \frac{s(q_k)}{\sqrt{n}} \tag{4}$$

Da quanto detto si evince che, eseguendo misurazioni ripetute ed assumendo come risultato di misura la stima della media secondo la (1), è possibile ridurre lo scarto tipo e, quindi, l'incertezza della misura di un fattore pari alla radice quadrata del numero di misurazioni eseguite.

ATTENZIONE!!! Un aspetto al quale non sempre si presta sufficiente attenzione è che: ***perché siano valide le espressioni su riportate, è necessario che le osservazioni effettuate siano statisticamente indipendenti***. Se le osservazioni non sono indipendenti, gli stimatori espressi dalle equazioni (2) e (3) non sono validi. Si tenga presente che non è semplice garantire l'indipendenza di un insieme di osservazioni. Pertanto, ritenere che un aumento indefinito del numero di osservazioni comporta una corrispondente diminuzione dell'incertezza tipo, come farebbe intendere la (4), è un'utopia. Inoltre, si tenga presente che, aumentando il numero di osservazioni, aumenta corrispondentemente il tempo di osservazione, pertanto, perché i risultati mediati siano significativi è necessario che, durante il tempo di misura, sia comunque verificata la stazionarietà di tutte le grandezze coinvolte nelle misurazioni stesse.

Esempio

Un operatore effettua le 20 osservazioni sotto riportate q_k di un parametro fisico Q. L'unità di misura è quella propria dello strumento utilizzato ed è qui designata genericamente con il simbolo u.

q_1=20.000015 u	q_{11}=19.999965 u
q_2=19.999990 u	q_{12}=19.999995 u
q_3=19.999985 u	q_{13}=19.999990 u
q_4=19.999990 u	q_{14}=20.000005 u
q_5=20.000005 u	q_{15}=20.000000 u
q_6=19.999995 u	q_{16}=20.000005 u
q_7=19.999995 u	q_{17}=19.999965 u
q_8=19.999980 u	q_{18}=19.999965 u
q_9=19.999985 u	q_{19}=19.999970 u
q_{10}=19.999995 u	q_{20}=19.999995 u

La miglior stima del parametro Q è la media delle 20 osservazioni q_k valutata secondo l'equazione (1):

$$\overline{q} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k = \frac{399.999790}{20} = 19.999990u$$

Lo scarto tipo di un'osservazione è, dall'equazione (3):

$$s(q_k) = \sqrt{\frac{1}{19}\sum_{k=1}^{20}(q_k - \overline{q})^2} = 0.000014u$$

e pertanto l'incertezza tipo di $\overline{q}$, $u(\overline{q})$, è:

$$u(\overline{q}) = \frac{s(q_k)}{\sqrt{20}} = 0.000003u$$

Valutazione delle incertezze di categoria B

Qualora siano disponibili informazioni relative all'incertezza del sistema di misura (o di una sua parte), è possibile descrivere il comportamento dello stesso usando un procedimento di valutazione della incertezza noto come *Valutazione dell'incertezza di categoria B*: l'operatore, in questo caso, utilizza le informazioni disponibili per descrivere l'incertezza del sistema di misura (o di una sua parte) senza ricorrere a misurazioni ripetute. Le informazioni disponibili possono essere della natura più disparata. Esse possono provenire da dati acquisiti in misurazioni precedenti, da caratteristiche metrologiche dichiarate dal costruttore degli strumenti di misura utilizzati, da proprietà dei materiali, dall'esperienza dell'operatore, e così via.

A titolo di esempio si voglia valutare l'incertezza introdotta nell'impiego di un multimetro facendo uso di una valutazione di categoria B basata sulla conoscenza delle specifiche del multimetro stesso fornite dal costruttore nel manuale d'uso. Facendo ad esempio riferimento al multimetro HP 34401A della Hewlett&Packard, il manuale d'uso riporta delle tabelle denominate Accuracy Specifications. Il multimetro, strumento di misura di grandezze di varia natura (tensioni e correnti DC, tensioni e correnti AC, resistenze, periodo e frequenza di segnali periodici) presenta un'incertezza di misura dipendente dal tipo di misurando. Pertanto, il costruttore deve dichiarare il comportamento del multimetro in tutte le condizioni operative di ciascuna. Nel manuale di utente, esistono quindi tante tabelle di Accuracy Specifications per quante sono le grandezze che lo strumento è in grado di misurare. Volendo, per esempio, effettuare la misura del valore efficace di una tensione alternata sinusoidale, si farà riferimento alla tabella seguente che, come dichiarato nella prima colonna, riguarda la Function **True RMS AC Voltage**.

Accuracy Specifications: ±(% of reading + % of range)

Function	Range	Frequency	24 Hour 23°C ± 5°C	90 day 23°C ± 5°C	1 Year 23°C ± 5°C	Temperature Coefficient/°C 0°C – 18°C 28°C – 55°C
True RMS AC Voltage	100.0000 mV	3 Hz 5 Hz	1.00 + 0.03	1.00 + 0.04	1.00 + 0.04	0.100 + 0.004
		5 Hz 10 Hz	0.35 + 0.03	0.35 + 0.04	0.35 + 0.04	0.035 + 0.004
		10 Hz 20 kHz	0.04 + 0.03	0.05 + 0.04	0.06 + 0.04	0.005 + 0.004
		20 kHz 50 kHz	0.10 + 0.05	0.11 + 0.05	0.12 + 0.05	0.011 + 0.005
		50 kHz 100 kHz	0.55 + 0.08	0.60 + 0.08	0.60 + 0.08	0.060 + 0.008
		100 kHz 300 kHz	4.00 + 0.50	4.00 + 0.50	4.00 + 0.50	0.200 + 0.020
	1.000000 V to 750.000 V	3 Hz 5 Hz	1.00 + 0.02	1.00 + 0.03	1.00 + 0.03	0.100 + 0.003
		5 Hz 10 Hz	0.35 + 0.02	0.35 + 0.03	0.35 + 0.03	0.035 + 0.003
		10 Hz 20 kHz	0.04 + 0.02	0.05 + 0.03	0.06 + 0.03	0.005 + 0.003
		20 kHz 50 kHz	0.10 + 0.04	0.11 + 0.05	0.12 + 0.05	0.011 + 0.005
		50 kHz 100 kHz	0.55 + 0.08	0.60 + 0.08	0.60 + 0.08	0.060 + 0.008
		100 kHz 300 kHz	4.00 + 0.50	4.00 + 0.50	4.00 + 0.50	0.200 + 0.020

Per valutare l'incertezza di categoria B, bisogna imparare a leggere correttamente questa tabella. Per prima cosa, si individuano le condizioni in cui opera il multimetro: la portata (Range), la frequenza del segnale su cui si esegue la misura (Frequency), il tempo trascorso dall'ultima calibrazione del multimetro (24 Hour, 90 day, 1 Year). Si verifica infine se la temperatura a cui si esegue la misura sia interna o esterna alla fascia 23°C ± 5°C. Le condizioni operative dello strumento individuano in tabella una cella in cui sono contenuti due coefficienti che definiscono l'incertezza come somma di due aliquote percentuali:

- Percentuale della lettura **(% of reading)**;
- Percentuale del fondo scala **(% of range)**.

La lettura dello strumento, il fondo scala utilizzato e i due coefficienti individuati in tabella consentono di calcolare le due aliquote che, sommate tra loro, forniscono un valore che ci consentirà di stimare la fascia di incertezza del multimetro espressa nell'unità di misura del misurando (in questo caso Volt). Tale fascia di incertezza non solo descrive la dispersione delle misure del multimetro qualora si andassero a ripetere più misurazioni dello stesso misurando ma tiene anche conto della dispersione delle misure ottenibili da tutta la popolazione di multimetri HP 34401A usati nelle stesse condizioni operative.

Per chiarire meglio quanto sopra detto, segue un esercizio numerico: Si voglia valutare l'incertezza intrinseca introdotta da un multimetro nella misurazione di una tensione alternativa di 5 V_{RMS}, frequenza 30 kHz, alla temperatura di 25 °C, con un multimetro HP 34401A calibrato da meno di 90 giorni. Si individua la cella definita dalla colonna 90 day e dalla riga Range (1.000000 V to 750.000 V), Frequency (20 kHz - 50 kHz). I coefficienti ricavati dalla tabella sono 0.11+0.05 pertanto l'accuracy risulta essere:

$$\text{accuracy} = \pm(5 \times 0.11\% + 10 \times 0.05\%) = \pm(0.0055 + 0.0050) \cong \pm 0.011[\text{V}] \tag{5}$$

Per poter passare dal valore dell'accuracy così calcolata all'incertezza intrinseca dello strumento è quindi necessario ipotizzare una distribuzione di probabilità. In assenza di informazioni da parte del costruttore è necessario porsi nelle condizioni più restrittive ipotizzando una distribuzione uniforme di cui l'accuracy rappresenta il valore massimo. In questo caso, come meglio dettagliato nel seguito, l'incertezza *u* si ottiene dividendo per l'accuracy per √3 (la deviazione standard di una distribuzione uniforme è pari alla semiampiezza della distribuzione diviso per √3) ed in particolare

$$u = 0.0063[\text{V}]$$

Qualora la temperatura a cui si effettua la prova sia esterna all'intervallo 23°C ± 5°C, le aliquote percentuali ricavate dalla tabella vanno corrette con i coefficienti di temperatura che, nell'ultima colonna, sono espressi in (coefficiente di correzione)/°C.

La correzione dei coefficienti 0.11 e 0.05 sarà ottenuta moltiplicando i coefficienti di correzione (0.011 e 0.005) per la differenza di temperatura ΔT valutata come:

- temperatura a cui si effettua la prova meno 28 (se la temperatura di prova è maggiore di 28°C);
- 18 meno temperatura a cui si effettua la prova (se la temperatura di prova è minore di 18 °C).

Se per esempio la temperatura di prova fosse 15 °C, le aliquote percentuali 0.11 e 0.05 devono essere corrette usando i coefficienti di temperatura 0.011 e 0.005 moltiplicati per ΔT=(18-15)=3.

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.11 + 0.011 \times 3 = 0.11 + 0.033 = 0.143 \\ x_2 &= 0.05 + 0.005 \times 3 = 0.05 + 0.015 = 0.065 \end{aligned} \tag{6}$$

e quindi l'accuracy risulta:

$$\text{accuracy} = \pm(5 \times 0.143\% + 10 \times 0.065\%) = \pm(0.0072 + 0.0065) \cong \pm 0.014[\text{V}] \tag{7}$$

e l'incertezza

$$u = \text{accuracy} / \sqrt{3} = 0.0081 \ [\text{V}]$$

ATTENZIONE !!! È bene notare che, poiché la valutazione dell'incertezza di categoria B non si basa su misurazioni ripetute, con una misurazione singola non si ha alcuna informazione in merito alla esistenza di eventi esterni di natura casuale che possano indurre nella misura un contributo aggiuntivo all'incertezza. Pertanto, l'incertezza valutata nell'esercizio precedente, tiene conto solo del contributo introdotto dal multimetro.

Incertezza globale.

Le cause di incertezza in un sistema di misura possono essere svariate e possono essere valutate in modo differente a seconda che si eseguano misure ripetute (categoria A) o che ci si affidi a conoscenze acquisite in vario modo (categoria B). In una misurazione, è anche possibile valutare alcuni contributi di incertezza con misure ripetute ed altri con valutazioni di categoria B. L'esprimere, in ogni caso, le incertezze in forma omogenea di scarto tipo consente di poter combinare i vari contributi, indipendentemente dalle modalità impiegate per valutarli. A tal riguardo, la Norma prescrive di combinare quadraticamente le incertezze delle varie categorie con una relazione del tipo:

$$u = \sqrt{\left(u_A^2 + u_{1B}^2 + u_{2B}^2 + \qquad + u_{nB}^2\right)} \tag{8}$$

in cui u_A^2 è la varianza di categoria A ed i termini u_{iB}^2 sono le varianze di categoria B. A tale espressione la Norma da il nome di incertezza globale.

Espressione dell'incertezza in valore assoluto o relativo

L'incertezza associata ad una misura, sia essa di categoria A, di categoria B o incertezza globale, è una quantità che può essere dichiarata

- in valore **assoluto**: in tal caso corrisponde alla semiampiezza della fascia ed ha le stesse dimensioni del misurando;
- in valore **relativo**: in tal caso esprime il rapporto tra l'incertezza assoluta e il valore centrale della fascia e quindi è dimensionale. Esso può anche essere espresso in valore percentuale o in parti per milione.

Effetti sistematici

Se sono presenti degli effetti sistematici significativi nel processo di misura essi vanno corretti, però la correzione a sua volta sarà affetta da incertezza che si andrà a cumulare con l'incertezza dovuta ad altri effetti casuali:

$$xc = x + c$$

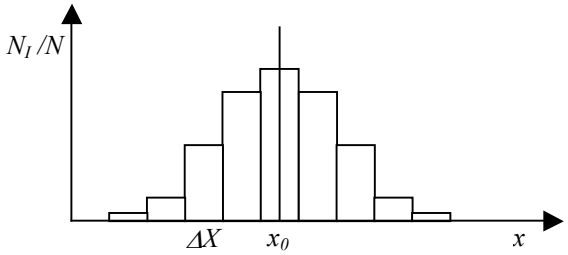
$$u_{xc} = \sqrt{u_x^2 + u_c^2}$$

Incertezza estesa U.

A volte l'incertezza non basta perché si è interessati ad un intervallo [x-U, x+U] (dove U è l'incertezza estesa) che ci si aspetta comprendere una frazione rilevante della distribuzione dei valori ragionevolmente attribuibili al misurando. Tale frazione può essere interpretata come probabilità di copertura o livello di fiducia o di confidenza.

Si è detto che ogni risultato di misura, per la presenza dell'incertezza, non può essere espresso da un unico numero ma deve essere espresso da una fascia di valori dispersi intorno ad un *valore centrale* x_0. Questo significa che, con una certa probabilità, il misurando ha un valore contenuto all'interno di tale fascia. Effettuare misure ripetute per valutare la fascia di incertezza consente di verificare sperimentalmente come sono distribuiti i risultati di misura intorno al *valore centrale* x_0, se si usano la stessa strumentazione e lo stesso metodo, e si riproducono le stesse condizioni operative.

L'incertezza estesa si ottiene moltiplicando l'incertezza tipo u per un fattore di copertura k che assume tipicamente i valori 1.95, 2, 3, 4. Il fattore di copertura, detto anche grado di fiducia, indica indirettamente quale percentuale di valori cade all'interno dell'incertezza estesa. Per capire meglio questo importante concetto è utile dare un'interpretazione probabilistica della fascia di incertezza.



Istogramma delle frequenze relative di *x*

Sia N_I il numero di misure che cadono all'interno di un intervallo di valori di ampiezza Δx definito dagli estremi $x_I \div x_{I+\Delta x}$.. Possiamo allora affermare che, detto N il numero totale delle misure, la probabilità che una misura cada all'interno dell'intervallo Δx è N_I/N. Tale probabilità va sotto il nome di *frequenza relativa*. In figura si riporta un tipico istogramma delle frequenze relative. La distribuzione è simmetrica rispetto ad un valore centrale x_0, intorno al quale si addensa il maggior numero di risultati; più ci si allontana dal valore centrale, più si riduce la probabilità di ottenere risultati di misura.

Se la distribuzione delle probabilità é di tipo **gaussiano**, riducendo l'ampiezza Δx facendola tendere a zero, l'istogramma degenera in una curva continua con un tipico andamento a campana nota come curva di Gauss. L'espressione analitica della curva di Gauss è:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \tag{9}$$

Tale espressione è caratterizzata dallo scarto tipo σ. Quanto minore è lo scarto tipo tanto minore è la dispersione dei risultati intorno al valore centrale x_0. Per tale distribuzione si può dimostrare che la probabilità che una generica misura cada nella fascia $x_0 \pm \sigma$ è del 68.4%. Pertanto, assumendo σ (o la sua valutazione sperimentale *u* eseguita su un numero limitato di misurazioni) come ampiezza della fascia di incertezza (incertezza tipo), si attribuisce un grado di fiducia (probabilità) del 68.4% al fatto che il valore del misurando cada all'interno della fascia $x_0 \pm \sigma$. Se, per la specifica applicazione a cui è destinata la misura, tale grado di fiducia sembra inappropriato, occorre aumentare l'ampiezza della fascia ricorrendo ad un fattore di copertura maggiore di 1. In tal caso si può dimostrare che, per una distribuzione gaussiana, valgono le proprietà espresse nella seguente tabella:

fattore di copertura k	**grado di fiducia**	**misurando esterno a** $x_0 \pm k\sigma$
2	95.4%	4.6%
3	99.7%	0.3%
4	99.994%	0.006%

ATTENZIONE !!! L'incertezza, definita in termini di scarto tipo, descrive la probabilità che ha una misura di cadere all'interno di una determinata fascia. Esiste un approccio alternativo di definizione dell'incertezza che mira a definire la fascia di incertezza non in termini probabilistici ma in termini deterministici. Esso, facendo riferimento per motivi di natura prudenziale al caso più sfavorevole (*worst case*), vuole identificare quale sia la fascia a cui appartiene la misura nel caso in cui tutti i fattori di influenza giochino combinandosi tra loro nel modo più sfavorevole. Tale approccio vuole quindi definire la fascia di ampiezza massima a cui può appartenere la misura. Per questo motivo spesso i costruttori riportano i dati dell'incertezza in termini di una fascia $m \pm a$ in cui, con probabilità del 100% e distribuzione uniforme, giace la misura m. In tal caso, alla fascia $\pm a$ viene attribuito il nome di tolleranza o accuracy. Essa può essere espressa in termini assoluti ($\pm a$), può essere espressa anche in termini relativi e relativi percentuali. Dalla tolleranza/accuracy ($\pm a$) è possibile risalire allo scarto tipo (σ) usando l'espressione:

$$\sigma = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

Non ha, invece, senso parlare di fattore di copertura, secondo quanto definito precedentemente.

Propagazione delle incertezze nelle misure indirette ed incertezza tipo composta.

Nei paragrafi precedenti ci siamo occupati di definire e di valutare l'incertezza nel caso di misurazioni di tipo diretto. Nelle misure indirette, invece, il misurando viene valutato indirettamente in base alle indicazioni fornite da un certo numero di strumenti ed alla relazione funzionale dettata da una legge fisica nota. La legge di propagazione delle

incertezze nelle misure indirette vuole determinare l'incertezza di una misura indiretta in funzione delle singole incertezze delle stime di ingresso e del legame funzionale che lega l'uscita agli ingressi.

Indichiamo con $x_1, x_2, .., x_n$ le grandezze di ingresso, con $u_{x1}, u_{x2}, .., u_{xm}$ le corrispondenti incertezze tipo e con $f(x_1, x_2, .., x_n)$ il legame funzionale che lega la grandezza di uscita y agli ingressi. Si supponga poi che le grandezze di ingresso siano statisticamente scorrelate. In tali ipotesi l'incertezza tipo dell'uscita u_y risulta:

$$u_y^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \times u_{xi}^2 \quad \Rightarrow \quad u_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \times u_{xi}^2} \tag{10}$$

In tale espressione, le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ rappresentano coefficienti di sensibilità e u_y l'incertezza tipo composta.

Per alcuni legami funzionali si ricava quanto portato in tabella.

Legame funzionale	Incertezza composta
$y = \sum_{i=1}^{n} a_i \times x_i$	$u_y^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \times u_{x_i}^2$
$y = \prod_{i=1}^{n} (x_i)^{a_i}$	$\left(\frac{u_y}{y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \times \left(\frac{u_{x_i}}{x_i}\right)^2$

Esempi di applicazione della teoria delle incertezze.

1. ***In un circuito elettrico, sono posti in serie i resistori R_1 ed R_2 le cui specifiche, in termini di valore nominale e tolleranza, sono:***

   $R_1 = 10\ k\Omega$, $\Delta R_1\% = 1\%$
   $R_2 = 20\ k\Omega$, $\Delta R_2\% = 0.5\%$

   Calcolare il valore della resistenza equivalente e dell'incertezza espressa in valore assoluto, relativo e relativo percentuale. Si assuma che le tolleranze esprimano, in valore percentuale, i valori entro cui può essere contenuto il valore di ciascuna resistenza con distribuzione di probabilità di tipo uniforme.

   Soluzione:

   La resistenza equivalente R_{EQ} di due resistori posti in serie è data dalla somma dei valori delle resistenze:

   $$R_{EQ} = (10 + 20) = 30\ k\Omega$$

   Per calcolare l'incertezza assoluta u_y tramite la (10), bisogna innanzitutto valutare gli scarti tipo u_{R1} ed u_{r2} dei due resistori dalle tolleranze percentuali $\Delta R_1\%$ e $\Delta R_2\%$: .

   $$u_{R1} = \frac{R_1 \times \Delta R_1\%}{100\sqrt{3}} = \frac{10000 \times 1}{100\sqrt{3}} = 57.73[\Omega]; \qquad u_{R2} = \frac{R_2 \times \Delta R_2\%}{100\sqrt{3}} = \frac{20000 \times 0.5}{100\sqrt{3}} = 57.73[\Omega]$$

   $$u_y = \sqrt{\left[\frac{\partial(R_1 + R_2)}{\partial R_1}\right]^2 \times u_{R1}^2 + \left[\frac{\partial(R_1 + R_2)}{\partial R_2}\right]^2 \times u_{R2}^2} = \sqrt{u_{R1}^2 + u_{R2}^2} = \sqrt{(57.73)^2 + (57.73)^2} = 81.65[\Omega]$$

   L'incertezza u_{yr} (espressa in valore relativo) è data da:

   $$u_{yr} = \frac{u_y}{R_{EQ}} = \frac{81.65}{30000} = 0.0027$$

   L'incertezza $u_{y\%}$ (espressa in valore relativo percentuale) è data da:

   $$u_{r\%} = u_{ry} \times 100 = 0.27\%$$

2. ***In un circuito elettrico sono posti in parallelo i resistori R_1 ed R_2 le cui specifiche sono:***

$$R_1 = 10\ k\Omega,\ \Delta R_1\% = 1\%$$
$$R_2 = 20\ k\Omega,\ \Delta R_2\% = 0.5\%$$

Calcolare il valore della resistenza equivalente e dell'incertezza espressa in valore assoluto, relativo e relativo percentuale. Si assuma che le tolleranze esprimano, in valore percentuale, i valori entro cui può essere contenuto il valore di ciascuna resistenza con distribuzione di probabilità di tipo uniforme.

Metodo probabilistico - Soluzione:

La resistenza equivalente R_{EQ} di due resistori posti in parallelo è data dalla relazione:

$$R_{EQ} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10000 \times 20000}{10000 + 20000} = 6666.\overline{6}\Omega$$

Per calcolare l'incertezza u_y (espressa in valore assoluto) tramite la (10), bisogna innanzitutto valutare gli scarti tipo u_{R1} ed u_{r2} dalle tolleranze $\Delta R_1\%$ e $\Delta R_2\%$:

$$u_{R1} = \frac{R_1 \times \Delta R_1\%}{100\sqrt{3}} = \frac{10000 \times 1}{100\sqrt{3}} = 57.73[\Omega]; \qquad u_{R2} = \frac{R_2 \times \Delta R_2\%}{100\sqrt{3}} = \frac{20000 \times 0.5}{100\sqrt{3}} = 57.73[\Omega]$$

L'incertezza u_y (espressa in valore assoluto) si valuta applicando la (10):

$$u_y = \sqrt{\left[\frac{\partial\left(\frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}\right)}{\partial R_1}\right]^2 \times u_{R1}^2 + \left[\frac{\partial\left(\frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}\right)}{\partial R_2}\right]^2 \times u_{R2}^2} = \sqrt{\left[\frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}\right]^2 \times u_{R1}^2 + \left[\frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}\right]^2 \times u_{R2}^2} = 26.45[\Omega]$$

L'incertezza u_{yr} (espressa in valore relativo) è data da:

$$u_{yr} = \frac{u_y}{R_{EQ}} = \frac{26.45}{6666.\overline{6}} = 0.0039$$

L'incertezza $u_{y\%}$ (espressa in valore relativo percentuale) è data da:

$$u_{r\%} = u_{ry} \times 100 = 0.39\%$$

GRANDEZZE CORRELATE

Se alcune delle grandezza sono correlate (es. nella stima del loro valore interviene lo stesso strumento, o lo stesso campione di misura, o lo stesso dato di riderimento), per tener conto delle correlazioni l'equazione (10) si modifica nel seguente modo:

$$u_y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \times \frac{\partial f}{\partial x_j} \times u(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \times u_{xi}^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \times \frac{\partial f}{\partial x_j} \times u(x_i, x_j) \qquad (11)$$

dove $u(x_i,x_j) = u(x_j,x_i)$ è la covarianza stimata associata a x_i e x_j, e le u_{xi} sono incertezze tipo.

Il grado di correlazione tra x_i e x_j è caratterizzato dal coefficiente di correlazione $r(x_i, x_j)$:

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)}.$$

Il coefficiente di correlazione è compreso tra 0 e 1: $0 \le r(x_i, x_j) \le 1$. In particolare se le stime sono indipendenti allora il coefficiente è pari a 0, mentre se sono completamente correlate è pari a 1, i valori intermedi indicano una parziale correlazione.

Covarianza

La covarianza tra due variabili casuali z, v, può essere valutata per via sperimentale o per via analitica.

La stima per via sperimentale della covarianza s(z,v) é ottenuta attraverso M coppie indipendenti di osservazioni simultanee delle due grandezze:

$$s(z,v) = \frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{M}(z_i - \bar{z}) \times (v_i - \bar{v}) \tag{12}$$

dove $\bar{z}$ e $\bar{v}$ rappresentano le medie delle due variabili aleatorie.

Se le due variabili dipendono entrambe da un insieme di P variabili tra loro scorrelate q_k:

$$z = g(\ldots, q_1, q_2, \ldots, q_P),$$

$$v = h(\ldots, q_1, q_2, \ldots, q_P)$$

detto $u(q_i)$ l'incertezza associata alla stima di q_i si ha:

$$u(z,v) = \sum_{k=1}^{P}\frac{\partial g}{\partial q_i} \times \frac{\partial h}{\partial q_i} \times u^2(q_i)\,. \tag{13}$$

ATTENZIONE!!! Poiché alla sommatoria di (13) contribuiscono solo quei termini per cui $\frac{\partial g}{\partial q_i} \neq 0$ e $\frac{\partial h}{\partial q_i} \neq 0$ la covarianza è nulla se non vi sono variabili comuni a g( )e h( ).