

METODO DELLA CADUTA DI POTENZIALE

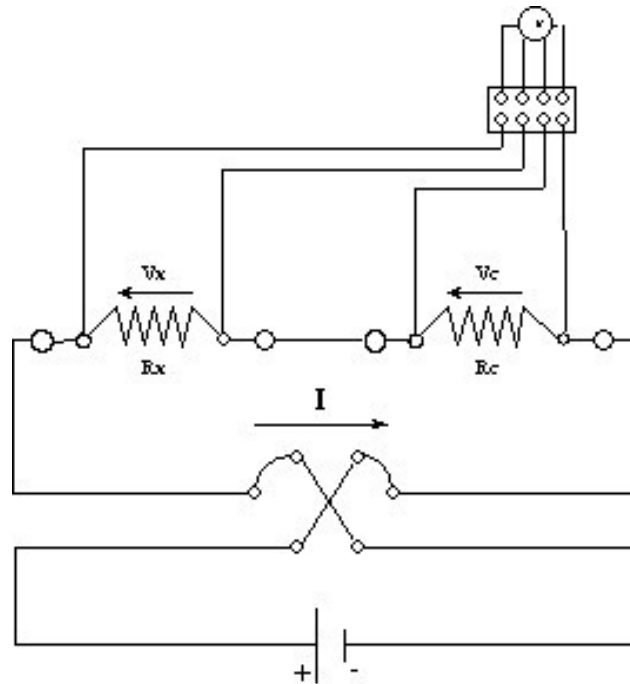


Fig. 1. Schema elettrico del metodo della caduta di potenziale

1. Principio

Il metodo della caduta di potenziale, viene utilizzato per la misura di resistenze di piccolo valore, in quanto consente di eliminare gli effetti delle forze elettromotrici di contatto e della resistenza di contatto. Il metodo è di tipo voltamperometrico, ma invece di utilizzare un amperometro si eseguono due misure voltmetriche al fine di ridurre l'incertezza di misura.

Con riferimento alla Fig. 1, si ha:

$$R_x = \frac{V_x}{I}$$

Per ottenere il valore della corrente I , si misura la caduta di potenziale ai capi della resistenza campione:

$$V_c = R_c \cdot I$$

da cui:

$$I = \frac{V_c}{R_c}$$

quindi:

$$R_x = \frac{V_x}{V_c} \cdot R_c$$

La resistenza campione viene scelta dello stesso ordine di grandezza della resistenza incognita al fine di ridurre l'incertezza sul risultato finale.

Resistori a 4 morsetti

Quando in un circuito è richiesta una resistenza campione di piccolo valore, si utilizzano particolari resistori a quattro morsetti:



Fig. 2. Resistore a 4 morsetti

dove:

- A e A' vengono definiti *morsetti amperometrici*;
- V e V' vengono definiti *morsetti voltmetrici*.

I morsetti voltmetrici devono essere sufficientemente distanti da quelli amperometrici in modo da non distorcere la distribuzione della corrente nei rami amperometrici.

Si faccia riferimento alla definizione di resistenza in base alle caratteristiche fisiche e geometriche del conduttore (ρ : resistività, l : lunghezza, S : sezione):

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

I morsetti amperometrici A-A' sono posti all'esterno di quelli voltmetrici e sono realizzati con una sezione di grande dimensione, in modo da ridurre la corrispondente resistenza di contatto. Tuttavia, utilizzando unicamente i morsetti amperometrici, risulta difficile definire il valore esatto della resistenza in quanto la lunghezza effettiva del resistore è determinata con una elevata incertezza dovuta alle dimensioni dei morsetti stessi. Per ovviare a tale inconveniente, vengono introdotti i morsetti voltmetrici V-V', interni a quelli amperometrici e caratterizzati da una piccola sezione (a coltello), in modo da definire con precisione la lunghezza del resistore. A causa della loro dimensione, però, i morsetti voltmetrici presentano una resistenza di contatto più grande rispetto a quella dei morsetti amperometrici; tuttavia, ai fini della misura, ciò non crea problemi in quanto tale resistenza di contatto risulterà in serie all'impedenza interna dello strumento di misura (normalmente elevata) e quindi verrà attraversata da una corrente trascurabile che provocherà una caduta di tensione altrettanto trascurabile.

Considerando il circuito equivalente a doppio bipolo del resistore a quattro morsetti:

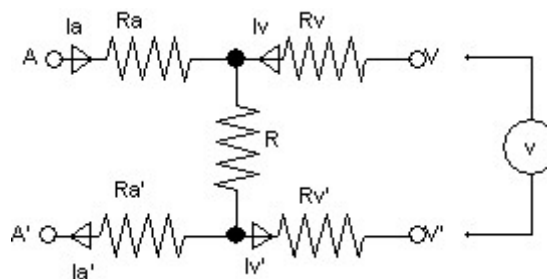


Fig. 3. Schema equivalente a doppio bipolo del resistore a 4 morsetti

è possibile definire la resistenza R come:

$$R = \left. \frac{V_{V-V'}}{I_{A-A'}} \right|_{I_V=0}$$

Forze elettromotrici di contatto

La connessione di due materiali diversi fa sorgere forze elettromotrici di contatto il cui valore dipende dalla natura dei materiali e dalla temperatura alla quale si trova la giunzione.

Consideriamo il circuito volumetrico:

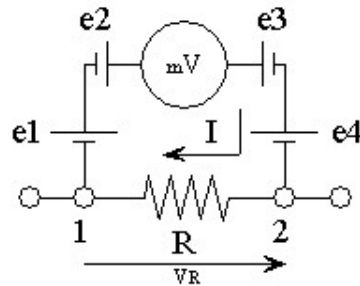


Fig. 4. Schematizzazione delle f.e.m di contatto

In corrispondenza di ogni contatto tra materiali diversi nasce una f.e.m. La somma delle f.e.m. nella maglia potrebbe essere diversa da zero perché le diverse giunzioni potrebbero assumere temperature diverse (ad esempio, a causa di un possibile serraggio differente dei contatti amperometrici, e quindi di un differente riscaldamento dei contatti).

La somma delle tensioni nella maglia è:

$$V_m = V_x + \sum e_i$$

Per eliminare tale effetto sistematico nella misura della tensione ai morsetti volumetrici si possono effettuare due diverse misure invertendo il verso della corrente nel circuito amperometrico. Poiché le forze elettromotrici non dipendono dal verso della corrente, si ha:

$$V_m = R \cdot I + \sum e_i$$

$$V'_m = -R \cdot I + \sum e_i$$

Sottraendo membro a membro, si ha:

$$V_m - V'_m = 2 \cdot R \cdot I$$

da cui:

$$V_R = R \cdot I = \frac{V_m - V'_m}{2}$$

2. Procedura di misura

La tensione presente ai capi della resistenza campione ed incognita viene misurata con lo stesso multimetro, per ridurre l'incertezza come sarà dimostrato nel prossimo paragrafo. Inoltre, per eliminare gli effetti delle forze elettromotrici di contatto, si eseguono più misure invertendo la corrente che circola nel circuito amperometrico.

Di conseguenza, la procedura di misura risulta piuttosto articolata. Sono necessarie infatti quattro misurazioni successive con lo stesso voltmetro, facendo attenzione a mantenere costante la corrente nel circuito in modo da poter applicare le relazioni risolutive. A tale fine viene normalmente utilizzato un alimentatore stabilizzato in corrente.

La corrente imposta è di solito di valore elevato per ridurre l'incertezza nelle misure di tensione, essendo le resistenze di valore basso. La resistenza campione R_c viene quindi scelta in modo da sopportare correnti elevate senza alterare le proprie caratteristiche. Invece, il valore della resistenza incognita R_x può variare per effetto termico, ed è quindi necessario eseguire le misurazioni in un breve intervallo di tempo.

Per tutte tali ragioni e per ridurre i tempi di misura, vengono eseguite quattro misure nel seguente ordine:

1) V_x

2) V_c

3) $-V_c$

4) $-V_x$

In questo modo sono ridotte le operazioni da eseguire in ogni misura: infatti, per passare dalla misura 1) alla misura 2) basta spostare i morsetti del voltmetro; per passare dalla misura 2) alla misura 3) basta invertire il verso della corrente; infine, per passare dalla misura 3) alla misura 4) basta spostare di nuovo i morsetti del voltmetro.

Nonostante tali modalità operative che consentono di eseguire le misure in un tempo limitato, occorre comunque verificare che non ci siano stati effetti termici su R_x che abbiano comportato una variazione della corrente I nel circuito amperometrico. A tale scopo si esegue una quinta misura di V_x reinvertendo il verso della corrente e confrontando il risultato con quello della prima misura.

Poiché all'aumentare della corrente gli effetti termici aumentano ma l'incertezza diminuisce, è possibile ricercare il valore limite di corrente per la quale gli effetti termici sono trascurabili; a tale scopo possono essere realizzate misure preliminari, sempre con le stesse modalità, onde fissare il valore di corrente di prova che assicuri la massima precisione e non induca effetti termici indesiderati.

3. Stima del misurando

La procedura di misura precedentemente descritta consente di ottenere quattro misure di tensione (V'_x, V''_x, V'_c , e V''_c) dalle quali si ha:

$$V_{x_m} = \frac{V'_x - V''_x}{2}$$

$$V_{c_m} = \frac{V'_c - V''_c}{2}$$

e quindi:

$$R_x = R_c \cdot \frac{V_{x_m}}{V_{c_m}}.$$

4. Valutazione dell'incertezza

Nel seguito, per non appesantire la trattazione, si farà riferimento ai valori V_x e V_c considerandoli risultato di una singola misura e non come risultato di una operazione di media fra due misure distinte. Si avrà, quindi:

$$R_x = \frac{V_x}{V_c} \cdot R_c$$

Applicando la legge di propagazione dell'incertezza per prodotti e rapporti fra grandezze, si ha:

$$\dot{u}_{R_x}^2 = \dot{u}_{R_c}^2 + \dot{u}_{\left(\frac{V_x}{V_c}\right)}^2$$

La $\dot{u}_{R_c}$ può essere ottenuta dalle informazioni fornite dal costruttore; ad esempio, considerando l'accuracy ed ipotizzando una distribuzione rettangolare, si ha:

$$\dot{u}_{R_c} = \frac{u_{R_c}}{R_c} = \frac{\text{Accuracy}_{(R_c)}}{\sqrt{3} \cdot R_c}.$$

Viceversa, per ottenere $u_{\left(\frac{V_x}{V_c}\right)}$ bisogna tener conto del fatto che le misure sono correlate in

quanto è stato utilizzato lo stesso voltmetro. Tale correlazione può essere evidenziata e rimossa nell'ipotesi che le due resistenze abbiano valori molto vicini tra loro. Di conseguenza, le tensioni misurate sono molto prossime e si può affermare che il voltmetro è utilizzato per le due misure (V_x e V_c) nelle stesse condizioni operative.

Detta Δ la correzione da apportare per tener conto della correlazione, si ha:

$$V_x = \hat{V}_x + \Delta$$

$$V_c = \hat{V}_c + \Delta$$

dove $\hat{V}_x$ e $\hat{V}_c$ rappresentano le misure corrette di V_x e V_c .

Il rapporto $\frac{\mathbf{V}_x}{\mathbf{V}_c}$ può essere quindi riscritto come:

$$\frac{\mathbf{V}_x}{\mathbf{V}_c} = \frac{\hat{\mathbf{V}}_x + \Delta}{\hat{\mathbf{V}}_c + \Delta}$$

ne segue che:

$$\mathbf{u}_{\left(\frac{\mathbf{V}_x}{\mathbf{V}_c}\right)} = \mathbf{u}_{\left(\frac{\hat{\mathbf{V}}_x + \Delta}{\hat{\mathbf{V}}_c + \Delta}\right)}$$

In questo caso, le misure di $\hat{\mathbf{V}}_x$, $\hat{\mathbf{V}}_c$ e Δ sono scorrelate ed affette solo da componenti di incertezza di tipo aleatorio. Si può quindi applicare la legge di propagazione dell'incertezza per grandezze scorrelate:

$$\mathbf{u}_{\left(\frac{\hat{\mathbf{V}}_x + \Delta}{\hat{\mathbf{V}}_c + \Delta}\right)}^2 = \frac{1}{(\hat{\mathbf{V}}_c + \Delta)^2} \cdot \mathbf{u}_{\hat{\mathbf{V}}_x}^2 + \left(\frac{\hat{\mathbf{V}}_x + \Delta}{(\hat{\mathbf{V}}_c + \Delta)^2}\right)^2 \cdot \mathbf{u}_{\hat{\mathbf{V}}_c}^2 + \left(\frac{\hat{\mathbf{V}}_x + \Delta - \hat{\mathbf{V}}_c - \Delta}{(\hat{\mathbf{V}}_c + \Delta)^2}\right)^2 \cdot \mathbf{u}_{\Delta}^2$$

Ricordando che:

$$\hat{\mathbf{V}}_x + \Delta = \mathbf{V}_x$$

e:

$$\hat{\mathbf{V}}_c + \Delta = \mathbf{V}_c$$

si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\left(\frac{\hat{\mathbf{V}}_x + \Delta}{\hat{\mathbf{V}}_c + \Delta}\right)}^2 &= \frac{1}{\mathbf{V}_c^2} \cdot \mathbf{u}_{\hat{\mathbf{V}}_x}^2 + \frac{\mathbf{V}_x^2}{\mathbf{V}_c^4} \cdot \mathbf{u}_{\hat{\mathbf{V}}_c}^2 + \frac{(\mathbf{V}_x - \mathbf{V}_c)^2}{\mathbf{V}_c^4} \cdot \mathbf{u}_{\Delta}^2 = \\ &= \left(\frac{\mathbf{V}_x}{\mathbf{V}_c}\right)^2 \cdot \left[\frac{\mathbf{u}_{\hat{\mathbf{V}}_x}^2}{\mathbf{V}_x^2} + \frac{\mathbf{u}_{\hat{\mathbf{V}}_c}^2}{\mathbf{V}_c^2} + \frac{(\mathbf{V}_x - \mathbf{V}_c)^2}{\mathbf{V}_c^2 \cdot \mathbf{V}_x^2} \cdot \mathbf{u}_{\Delta}^2 \right] \cong \left(\frac{\mathbf{V}_x}{\mathbf{V}_c}\right)^2 \cdot \left[\frac{\mathbf{u}_{\hat{\mathbf{V}}_x}^2}{\mathbf{V}_x^2} + \frac{\mathbf{u}_{\hat{\mathbf{V}}_c}^2}{\mathbf{V}_c^2} \right] \end{aligned}$$

Questa approssimazione è lecita in quanto $\mathbf{R}_x \cong \mathbf{R}_c$ e quindi $\mathbf{V}_x \cong \mathbf{V}_c$; inoltre $\mathbf{u}_{\Delta}^2 \ll \mathbf{u}_{\mathbf{V}_x}^2$ in quanto è l'incertezza della correzione. Si ha, quindi:

$$\dot{\mathbf{u}}_{\left(\frac{\mathbf{V}_x}{\mathbf{V}_c}\right)}^2 = \frac{\mathbf{u}_{\hat{\mathbf{V}}_x}^2}{\mathbf{V}_x^2} + \frac{\mathbf{u}_{\hat{\mathbf{V}}_c}^2}{\mathbf{V}_c^2}$$

dove $\mathbf{u}_{\hat{\mathbf{V}}_c} = \mathbf{u}_{\hat{\mathbf{V}}_x}$ può essere valutato per via sperimentale a partire da misure ripetute effettuate su $\mathbf{R}_c$:

$$\mathbf{u}_{\hat{\mathbf{V}}_c} = \mathbf{u}_{\hat{\mathbf{V}}_x} = \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_i (\mathbf{V}_{c_i} - \bar{\mathbf{V}}_c)^2}$$

Quindi, in conclusione, si può scrivere:

$$\mathbf{u}_{\mathbf{R}_x}^2 = \mathbf{R}_x^2 \cdot \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{R}_x}^2 = \mathbf{R}_x^2 \cdot \left[\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{R}_c}^2 + \frac{\mathbf{u}_{\hat{\mathbf{V}}_x}^2}{\mathbf{V}_x^2} + \frac{\mathbf{u}_{\hat{\mathbf{V}}_c}^2}{\mathbf{V}_c^2} \right].$$