

PONTE DI WHEATSTONE

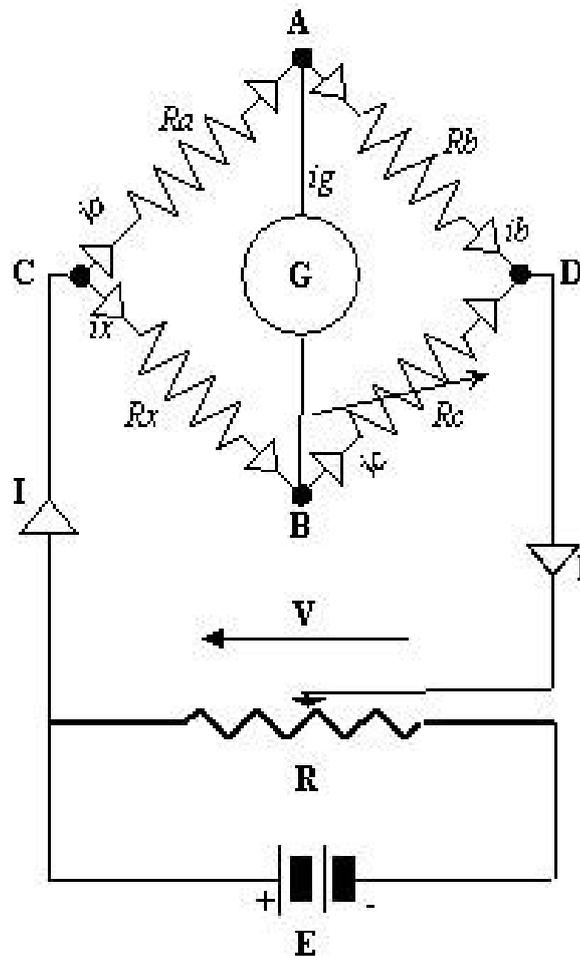


Fig. 1. Schema elettrico del Ponte di Wheatstone

1. Generalità

Un metodo classico per la misura di resistenze di ordine medio è il *ponte di Wheatstone*. Una schematizzazione di tale ponte è riportata in Fig. 1. Come si può vedere dallo schema elettrico, il ponte di Wheatstone risulta formato da quattro resistenze connesse in modo da realizzare una maglia con quattro lati e quattro vertici. Tra due vertici opposti viene collegata una sorgente di alimentazione in corrente continua, mentre tra gli altri due viene inserito un galvanometro. In base alla configurazione, è possibile definire le parti costituenti il ponte come:

- *lati* del ponte, corrispondenti ai quattro rami costituiti dai resistori;
- *diagonali* del ponte, corrispondenti ai rami che contengono la sorgente di alimentazione o il galvanometro; in particolare, è detta *diagonale di alimentazione* quella che è riferita alla sorgente di alimentazione, e *diagonale di rilevazione* quella in cui è inserito il galvanometro.

Uno qualsiasi dei quattro lati è costituito dal resistore di resistenza incognita R_x , mentre gli altri tre lati sono costituiti da resistori le cui resistenze assumono valori noti. Almeno una

delle resistenze note deve essere anche variabile, ed in particolare nell'esempio di sopra riportato avrà un resistore variabile R_c a decadi. Il rilevatore di zero, posto tra i nodi A e B, è sensibile al passaggio di corrente nel lato stesso, o alla differenza di potenziale tra i nodi A e B.

Il ponte è in equilibrio quando è nulla la corrente che attraversa la diagonale di rivelazione, condizione che può essere individuata dall'indice del galvanometro nella posizione di zero. In condizione di funzionamento, il generatore di tensione continua E fa scorrere una corrente che si ripartisce tra i due rami in cui sono inserite R_a ed R_x comprendenti rispettivamente il nodo A e il nodo B. Applicando i principi di Kirchhoff al ponte, quando è verificata la condizione di equilibrio, si ha:

$$\text{equazione al nodo A} \quad I_a = I_b \quad (1)$$

$$\text{equazione al nodo B} \quad I_x = I_c \quad (2)$$

$$\text{equazione alla maglia ABC} \quad R_x \cdot I_x = R_a \cdot I_a \quad (3)$$

$$\text{equazione alla maglia ABD} \quad R_c \cdot I_c = R_b \cdot I_b \quad (4)$$

Sostituendo (1) e (2) in (4), si ottiene:

$$R_x \cdot I_x = R_a \cdot I_a \quad (5)$$

$$R_c \cdot I_x = R_b \cdot I_a \quad (6)$$

Dividendo membro a membro, si ricava:

$$\frac{R_x}{R_c} = \frac{R_a}{R_b}$$

da cui:

$$R_b \cdot R_x = R_a \cdot R_c \quad (7)$$

E' stata così trovata la relazione che lega le quattro resistenze del ponte, in condizioni di equilibrio: *il prodotto delle resistenze dei due lati opposti eguaglia il prodotto delle altre due.*

E' quindi possibile calcolare il valore della resistenza incognita:

$$R_x = \frac{R_a}{R_b} \cdot R_c \quad (8)$$

Per raggiungere la condizione di equilibrio è possibile operare sul rapporto $\frac{R_a}{R_b}$ (ponti *a filo*)

o sulla resistenza R_c . Nel seguito si farà riferimento a questa seconda soluzione.

2. Procedura di misura

Poiché inizialmente il valore di R_c potrebbe anche essere molto diversa da quello che soddisfa la (8), la corrente nel ramo AB potrebbe essere elevata e quindi danneggiare il galvanometro. Di conseguenza si preferisce alimentare il circuito con valori di tensione via via crescenti fino al valore nominale, incrementando contemporaneamente la sensibilità del galvanometro. Normalmente all'aumentare della tensione di alimentazione e della sensibilità del galvanometro, occorre operare sulle decadi più piccole della resistenza campione R_c .

Anche con una sensibilità del ponte elevata ed in condizioni di tensione di alimentazione nominale, a causa del numero finito di decadi della resistenza R_c a disposizione, può accadere di non riuscire ad ottenere un perfetto azzeramento del galvanometro: in tal caso, è necessario procedere alla **interpolazione lineare**, procedimento valido in quanto sia il circuito sia lo strumento (galvanometro) hanno comportamento lineare nell'intorno dello zero.

Per esempio, ponendo $R_a = R_b = 1000 \Omega$, ipotizzando $R_x = 8715,4 \Omega$ ed avendo a disposizione una R_c con decade più piccola pari ad 1Ω , non si riuscirà a portare a zero l'indice del galvanometro né con $R_c = 8715 \Omega$ né con $R_c = 8716 \Omega$. E' necessario quindi effettuare l'interpolazione del valore di R_x col seguente procedimento. Supponendo che con $R_c = 8715 \Omega$ l'indice devia da un lato (per esempio a sinistra dello zero), di δ_1 divisioni e con $R_c = 8716 \Omega$ devia, invece, dall'altro lato di δ_2 divisioni, e detto x il valore di resistenza da sommare al valore più piccolo di R_c per ottenere l'azzeramento del galvanometro, è possibile costruire la seguente figura:

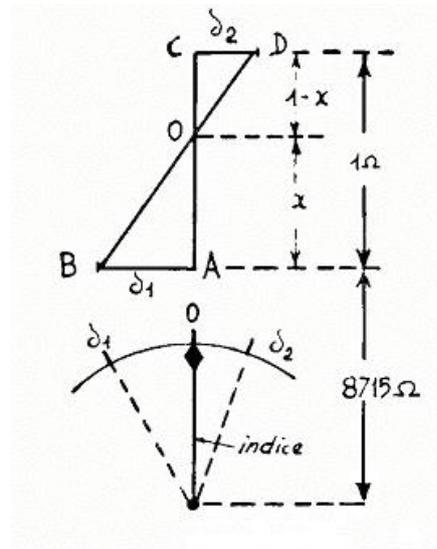


Fig. 2. Rappresentazione grafica dell'interpolazione

dove il segmento AC rappresenta la differenza fra i due valori di R_c (ovvero 1Ω) ed i segmenti AB e CD rappresentano rispettivamente le due deviazioni δ_1 e δ_2 , riportate in senso opposto rispetto al segmento AC. Congiungendo gli estremi B e D, si ottengono due triangoli rettangoli ABO e OCD che risultano essere simili (essendo AB parallelo a CD ed

entrambi perpendicolari ad AC, e gli angoli BOA e COD eguali perché opposti al vertice). Si ha, quindi: $\frac{AO}{OC} = \frac{\delta_1}{\delta_2}$, e dato che $AO = \mathbf{x}$ ed $OC = (1-\mathbf{x})$, sarà ancora :

$$\frac{\mathbf{x}}{1-\mathbf{x}} = \frac{\delta_1}{\delta_2}$$

da cui:

$$\mathbf{x} = \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2}$$

Se ad esempio è $\delta_1 = 14$ divisioni e $\delta_2 = 21$ divisioni, sarà

$$\mathbf{x} = \frac{14}{21+14} = \frac{14}{35} = 0,4 \Omega$$

e quindi

$$\mathbf{R}_c = 8715,4 \Omega$$

che è il valore di \mathbf{R}_c da considerare nella (8).

3. Valutazione dell'incertezza

L'incertezza sulla misura di \mathbf{R}_x può essere valutata applicando la legge di propagazione dell'incertezza suggerita dalle Norma UNICEI 9 alla relazione (8).

Bisogna però tenere presente che la sensibilità del galvanometro non è infinita, e che quindi può dare una indicazione di zero anche quando in realtà circola una corrente non nulla. Detta I_{\min} la corrente limite al di sotto della quale il galvanometro è insensibile (ovvero fornisce comunque una indicazione di zero), la relazione (8) va riscritta per tener conto che il ponte non è sensibile a variazioni della resistenza \mathbf{R}_x che determinano il passaggio di una corrente inferiore a I_{\min} :

$$\mathbf{R}_x = \frac{\mathbf{R}_a}{\mathbf{R}_b} \cdot \mathbf{R}_c + \mathbf{R}_s$$

dove \mathbf{R}_s è il valore di resistenza corrispondente alla corrente limite I_{\min} . Considerando la natura della resistenza \mathbf{R}_s (che può esserci o meno, e può assumere qualsiasi valore fino ad un valore massimo pari proprio ad \mathbf{R}_s), essa può essere considerata come una grandezza aleatoria a valore medio nullo ma con una incertezza \mathbf{u}_{R_s} diversa da zero, da valutare. Di conseguenza:

$$\mathbf{u}_{R_x}^2 = \mathbf{u}_{\left(\frac{R_a \cdot R_b}{R_c}\right)}^2 + \mathbf{u}_{R_s}^2$$

L'incertezza $\mathbf{u}_{\left(\frac{R_a \cdot R_b}{R_c}\right)}$ si ottiene applicando la legge di propagazione delle incertezze nel caso di un prodotto o di un rapporto:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{\left(\frac{R_a \cdot R_b}{R_c}\right)}^2 &= \dot{\mathbf{u}}_{R_a}^2 + \dot{\mathbf{u}}_{R_b}^2 + \dot{\mathbf{u}}_{R_c}^2 \\ \mathbf{u}_{\left(\frac{R_a \cdot R_b}{R_c}\right)}^2 &= \left(\frac{\mathbf{R}_a \cdot \mathbf{R}_b}{\mathbf{R}_c}\right)^2 \cdot \dot{\mathbf{u}}_{\left(\frac{R_a \cdot R_b}{R_c}\right)}^2 = \mathbf{R}_x^2 \cdot (\dot{\mathbf{u}}_{R_a}^2 + \dot{\mathbf{u}}_{R_b}^2 + \dot{\mathbf{u}}_{R_c}^2). \end{aligned}$$

L'incertezza sulle singole resistenze $\mathbf{R}_a, \mathbf{R}_b, \mathbf{R}_c$ può essere rilevata con metodi di valutazione di categoria A, cioè eseguendo misure ripetute, o di tipo B, utilizzando i dati forniti dal costruttore.

Per valutare \mathbf{u}_{R_s} bisogna ragionare come segue. Per come è stata definita, la resistenza \mathbf{R}_s rappresenta il valore limite di variazione della resistenza incognita che dà luogo ad uno spostamento dell'ago del galvanometro della minima quantità apprezzabile. Per la valutazione di \mathbf{R}_s si può procedere in due modi distinti: approccio *a posteriori* (sperimentale) o approccio *a priori* (teorico). Una volta determinata la \mathbf{R}_s , è possibile adottare un metodo di valutazione dell'incertezza di tipo B, ipotizzando una distribuzione rettangolare a media nulla e di ampiezza $\pm \mathbf{R}_s/2$; si ha quindi:

$$\mathbf{u}_{R_s} = \frac{\mathbf{R}_s}{2\sqrt{3}} = \frac{\mathbf{R}_s}{\sqrt{12}}.$$

Nel seguito vengono presentati entrambi gli approcci per la valutazione di \mathbf{R}_s .

3.1. Approccio a posteriori

Ipotizzando un comportamento lineare del galvanometro intorno allo zero, è possibile scrivere:

$$d\mathbf{R}_x : d\lambda = \Delta\mathbf{R}_x : \Delta\lambda$$

Ovvero:

$$\mathbf{R}_s : d\lambda = \Delta\mathbf{R}_x : \Delta\lambda \quad (9)$$

dove si è indicato con:

- \mathbf{R}_s = il valore della minima variazione $d\mathbf{R}_x$ della \mathbf{R}_x a cui il ponte è sensibile;
- $d\lambda$ = minima deviazione apprezzabile dello strumento;
- $\Delta\mathbf{R}_x$ = variazione finita di \mathbf{R}_x ;
- $\Delta\lambda$ = il numero di deviazioni corrispondenti alla variazione finita $\Delta\mathbf{R}_x$.

Dalla relazione (9) si ha:

$$\mathbf{R}_s = \frac{\Delta\mathbf{R}_x}{\Delta\lambda} \cdot d\lambda \quad (10)$$

per cui è possibile valutare \mathbf{R}_s imponendo una variazione significativa a \mathbf{R}_x . Tuttavia, nelle usuali applicazioni, tale variazione non si può fisicamente imporre in quanto \mathbf{R}_x è la resistenza incognita e normalmente non è variabile. Dalla relazione(8), si ha:

$$\Delta\mathbf{R}_x = \Delta \left(\frac{\mathbf{R}_a}{\mathbf{R}_b} \cdot \mathbf{R}_c \right) = \frac{\mathbf{R}_a}{\mathbf{R}_b} \cdot \Delta\mathbf{R}_c$$

in quanto l'unica resistenza variabile è la \mathbf{R}_c . Dividendo per \mathbf{R}_x e ricordando sempre la (8), si ha:

$$\frac{\Delta\mathbf{R}_x}{\mathbf{R}_x} = \frac{\mathbf{R}_a}{\mathbf{R}_b} \cdot \frac{\Delta\mathbf{R}_c}{\mathbf{R}_x} = \frac{\mathbf{R}_a}{\mathbf{R}_b} \cdot \frac{\Delta\mathbf{R}_c}{\frac{\mathbf{R}_a}{\mathbf{R}_b} \cdot \mathbf{R}_c} = \frac{\Delta\mathbf{R}_c}{\mathbf{R}_c}$$

di conseguenza, essendo $\mathbf{R}_x \cong \mathbf{R}_c$, la (10) diviene:

$$\mathbf{R}_s = \Delta\mathbf{R}_c \cdot \frac{d\lambda}{\Delta\lambda} \cdot \frac{\mathbf{R}_x}{\mathbf{R}_c} \cong \Delta\mathbf{R}_c \cdot \frac{d\lambda}{\Delta\lambda}$$

Quindi la \mathbf{R}_s si può valutare imponendo una variazione significativa alla resistenza campione \mathbf{R}_c e valutando la corrispondente deviazione $\Delta\lambda$ del galvanometro. Con riferimento all'esempio numerico precedentemente riportato ($\mathbf{R}_x = 8715,4 \Omega$; $\mathbf{R}_a = \mathbf{R}_b$; $\mathbf{R}'_c = 8715 \Omega$ e $\mathbf{R}''_c = 8716 \Omega$, e quindi per una variazione $\Delta\mathbf{R}_c = 1 \Omega$) con le rispettive deviazioni ($\delta_1 = 14$ divisioni a sinistra e $\delta_2 = 21$ a destra, per un totale di $\Delta\lambda = 35$ divisioni), e considerando di poter apprezzare sul galvanometro la mezza divisione ($d\lambda = 0,5$), si ha:

$$\mathbf{R}_s = \Delta\mathbf{R}_c \cdot \frac{d\lambda}{\Delta\lambda} = 1 \cdot \frac{0,5}{35} = 0.014 \Omega$$

3.2. Approccio a priori

L'approccio a priori si basa sul teorema di Thevenin, ovvero sull'analisi del circuito equivalente del ponte visto ai capi del galvanometro:

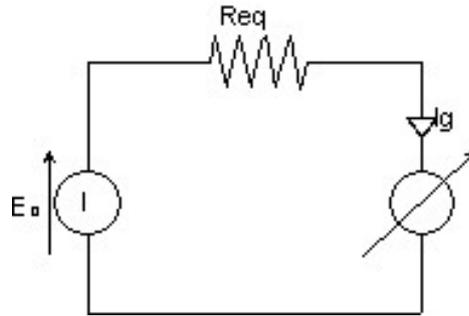


Fig. 3. Circuito equivalente di Thevenin

Per definire i valori di R_{eq} e di E_0 si procede come segue.

Con riferimento allo schema elettrico del ponte di Fig. 4, si consideri il circuito equivalente visto dai vertici di rilevazione A e B ottenuto cortocircuitando il generatore (Fig. 5):

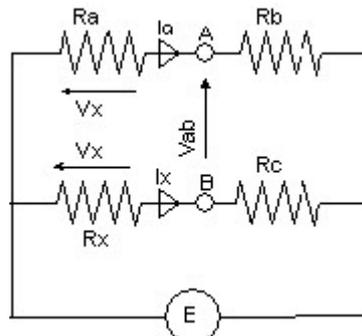


Fig. 4. Schema elettrico del ponte

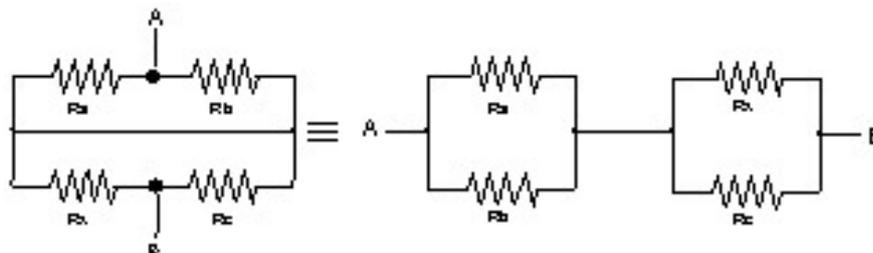


Fig. 5. Circuito equivalente visto ai capi del galvanometro

da cui:

$$R_{eq} = \frac{R_a \cdot R_b}{R_a + R_b} + \frac{R_x \cdot R_c}{R_x + R_c}$$

Con riferimento sempre allo schema di Fig. 4, è possibile ricavare:

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{R}_a}{\mathbf{R}_a + \mathbf{R}_b} \quad ; \quad \mathbf{V}_B = \mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{R}_x}{\mathbf{R}_x + \mathbf{R}_c}$$

$$\mathbf{E}_o = \mathbf{V}_B - \mathbf{V}_A = \mathbf{E} \cdot \left(\frac{\mathbf{R}_x}{\mathbf{R}_x + \mathbf{R}_c} - \frac{\mathbf{R}_a}{\mathbf{R}_a + \mathbf{R}_b} \right) \quad (11)$$

In condizione di equilibrio $\mathbf{I}_g = 0$ e quindi $\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{E}_o = 0$. Per risalire al valore di \mathbf{R}_s si ricordi che essa è definita come la variazione di resistenza \mathbf{R}_x alla quale corrisponde un passaggio di corrente \mathbf{I}_g nel galvanometro pari alla minima corrente alla quale il galvanometro è sensibile.

Analizzando il circuito di Fig. 3 si ha:

$$\mathbf{I}_g = \frac{\Delta \mathbf{E}_o}{\mathbf{R}_{eq} + \mathbf{R}_g} \quad (12)$$

dove $\Delta \mathbf{E}_o$ è la variazione di tensione dovuta alla \mathbf{R}_s ed \mathbf{R}_g è la resistenza interna del galvanometro. Per ricavare $\Delta \mathbf{E}_o$ si può sviluppare la relazione (11) in serie di Taylor nell'intorno di \mathbf{R}_x a cui corrisponde $\mathbf{E}_o = 0$, arrestandosi al primo ordine (tale approssimazione è valida poiché la variazione di \mathbf{R}_x sono piccole); si ha:

$$\Delta \mathbf{E}_o = \frac{\partial \mathbf{E}_o}{\partial \mathbf{R}_x} \cdot d\mathbf{R}_x = \frac{\partial \mathbf{E}_o}{\partial \mathbf{R}_x} \cdot \mathbf{R}_s \quad (13)$$

Dalle (12) e (13) si ha:

$$\Delta \mathbf{E}_o = (\mathbf{R}_{eq} + \mathbf{R}_g) \cdot \mathbf{I}_g = \frac{\partial \mathbf{E}_o}{\partial \mathbf{R}_x} \cdot \mathbf{R}_s$$

cioè

$$\mathbf{R}_s = \frac{(\mathbf{R}_{eq} + \mathbf{R}_g) \cdot \mathbf{I}_g}{\frac{\partial \mathbf{E}_o}{\partial \mathbf{R}_x}} \quad (14)$$

La corrente \mathbf{I}_g si può esprimere come:

$$\mathbf{I}_g = K_g \cdot \Delta \lambda \quad (15)$$

dove K_g è la costante strumentale del galvanometro, espressa in A/div. Questa costante è legata in maniera inversa alla sensibilità dello strumento, in quanto tanto più piccola è K_g tanto migliore è la sensibilità dello strumento.

Dalla (11) si ha:

$$\frac{\partial \mathbf{E}_o}{\partial \mathbf{R}_x} = \mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{R}_x + \mathbf{R}_c - \mathbf{R}_x}{(\mathbf{R}_x + \mathbf{R}_c)^2} = \mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{R}_c}{(\mathbf{R}_x + \mathbf{R}_c)^2} = \mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{R}_c}{\mathbf{R}_x^2 \cdot \left(1 + \frac{\mathbf{R}_c}{\mathbf{R}_x}\right)^2} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{R}_x} \cdot \frac{\frac{\mathbf{R}_c}{\mathbf{R}_x}}{\left(1 + \frac{\mathbf{R}_c}{\mathbf{R}_x}\right)^2} \quad (16)$$

per cui la (14) diventa:

$$\mathbf{R}_s = \frac{(\mathbf{R}_{eq} + \mathbf{R}_g) \cdot \left(1 + \frac{\mathbf{R}_c}{\mathbf{R}_x}\right)^2}{\mathbf{E}} \cdot \frac{\mathbf{R}_x^2}{\mathbf{R}_c} \cdot K_g \cdot \Delta\lambda$$

Poiché nella relazione (14) il termine $\frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial \mathbf{R}_x}$ compare al denominatore, è interessante andare a valutare, onde dimensionare al meglio il circuito, quando esso assume il valore massimo per poter così ottenere il minimo valore di \mathbf{R}_s e quindi la condizione di massima sensibilità.

Ponendo $\frac{\mathbf{R}_c}{\mathbf{R}_x} = m$ nella (16), si ha:

$$\frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial \mathbf{R}_x} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{R}_x} \cdot \frac{m}{(1+m)^2}$$

Per individuare il massimo in funzione di m si deve porre $\frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial m} = 0$, cioè:

$$\frac{(1+m)^2 - 2 \cdot (1+m) \cdot m}{(1+m)^4} = \frac{1 + 2m + m^2 - 2m - 2m^2}{(1+m)^4} = \frac{-m^2 + 1}{(1+m)^4} = 0$$

che è verificata per $m = \pm 1$, ovvero la condizione di massima sensibilità del ponte è ottenuta per $\mathbf{R}_x = \mathbf{R}_c$; in tal caso, ovviamente, anche $\mathbf{R}_a = \mathbf{R}_b$. E' possibile inoltre dimostrare che la migliore condizione in assoluto è quella per la quale $\mathbf{R}_x = \mathbf{R}_c = \mathbf{R}_a = \mathbf{R}_b$.

Considerando solo la soluzione positiva ($\frac{\mathbf{R}_c}{\mathbf{R}_x} = 1$) e sostituendo tale valore nella (16), si ha:

$$\frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial \mathbf{R}_x} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{R}_x} \cdot \frac{1}{(2)^2} = \frac{\mathbf{E}}{4\mathbf{R}_x}$$

per cui la (14) diventa:

$$\mathbf{R}_s = \frac{(\mathbf{R}_{eq} + \mathbf{R}_g) \cdot 4\mathbf{R}_x}{\mathbf{E}} \cdot K_g \cdot \Delta\lambda$$

Si può, quindi, affermare che:

- uno strumento con un K_g più piccolo riduce l'errore di sensibilità;
- quanto più è elevata la tensione \mathbf{E} tanto più basso è l'errore di sensibilità; tuttavia, il valore massimo di \mathbf{E} dipende dalla corrente massima ammissibile per i componenti;
- quanto più piccolo è il termine $(\mathbf{R}_{eq} + \mathbf{R}_g)$ tanto più bassa è \mathbf{R}_s ; quindi l'errore di sensibilità non dipende solo dallo strumento utilizzato, ma anche dalle caratteristiche del circuito;
- il metodo presenta un limite al crescere di \mathbf{R}_x , in quanto aumenta la \mathbf{R}_s sia per dipendenza diretta sia perché aumenta la \mathbf{R}_{eq} , e di conseguenza diminuisce la sensibilità.

4. Miglioramento della precisione del metodo del ponte di Wheatstone

Il ponte di Wheatstone viene utilizzato per misure di resistenza di valore medio, assicurando precisioni dell'ordine di una parte su diecimila. Sarebbe quindi che, trattandosi di precisioni non particolarmente elevate, esso possa essere sostituito da un buon multimetro numerico.

In realtà attraverso le due tecniche:

- doppia pesata
- sostituzione

si ha un miglioramento delle prestazioni tale da giustificare l'utilizzo del ponte anche per misure di precisione.

4.1. Tecnica della doppia pesata

Come detto risulta sempre conveniente utilizzare due resistori R_a ed R_b , caratterizzate dagli stessi valori nominali. Effettuando due misure su R_x e scambiando di posto R_a ed R_b si ha:

$$R_x = \frac{R_a}{R_b} \cdot R_{c_1} \quad (17)$$

$$R_x = \frac{R_b}{R_a} \cdot R_{c_2} \quad (18)$$

A causa della incertezza su R_a e R_b , pur avendo nominalmente $R_a = R_b$, si avrà $R_{c_1} \neq R_{c_2}$. Moltiplicando i due membri delle relazioni (17) e (18) si ha:

$$R_x^2 = \frac{R_a}{R_b} \cdot R_{c_1} \cdot \frac{R_b}{R_a} \cdot R_{c_2} = R_{c_1} \cdot R_{c_2} \quad (19)$$

da cui:

$$R_x = \sqrt{R_{c_1} \cdot R_{c_2}} \quad (20)$$

con $R_{c_1} \cong R_{c_2}$ in quanto la differenza fra i due valori è dovuta solamente all'incertezza su R_a e R_b . Utilizzando per R_c una resistenza a decadi, è possibile considerare:

$$R_{c_1} = R_0 + r_1 \quad (21)$$

$$R_{c_2} = R_0 + r_2$$

in cui R_0 è la parte comune della R_c nelle due misure ed ovviamente $R_0 \gg r_1$ ed $R_0 \gg r_2$. La (20) diviene quindi:

$$\begin{aligned} R_x &= \sqrt{(R_0 + r_1) \cdot (R_0 + r_2)} = \sqrt{R_0^2 + R_0 \cdot (r_1 + r_2) + r_1 \cdot r_2} \\ &= R_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{r_1 + r_2}{R_0} + \frac{r_1 \cdot r_2}{R_0^2}} \cong R_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{r_1 + r_2}{R_0}} \end{aligned} \quad (22)$$

in quanto il termine $\frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{\mathbf{R}_0^2}$ risulta trascurabile. Ricordando inoltre che $(1 + \alpha)^n$ con $\alpha \ll 1$ può essere approssimato come $(1 + \alpha)^n \cong 1 + n\alpha$, ed essendo sempre \mathbf{r}_1 ed $\mathbf{r}_2 \ll \mathbf{R}_0$ per cui $\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{\mathbf{R}_0} \ll 1$, la (22) diviene

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{R}_0 \cdot \left(1 + \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2\mathbf{R}_0} \right) = \left(\frac{2\mathbf{R}_0 + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \right) = \frac{\mathbf{R}_{c_1} + \mathbf{R}_{c_2}}{2}$$

e cioè il valore di \mathbf{R}_x si ottiene come media delle due misure.

Valutazione dell'incertezza

Per valutare l'incertezza bisogna tener conto anche dell'incertezza legata alla sensibilità del ponte. A tal fine le equazioni (17) e (18), conformemente a quanto visto in precedenza, vanno così riscritte:

$$\mathbf{R}_x = \frac{\mathbf{R}_a}{\mathbf{R}_b} \cdot \mathbf{R}_{c_1} + \mathbf{R}_{s_1}$$

$$\mathbf{R}_x = \frac{\mathbf{R}_b}{\mathbf{R}_a} \cdot \mathbf{R}_{c_2} + \mathbf{R}_{s_2}$$

quindi, moltiplicando membro a membro:

$$\mathbf{R}_x = \sqrt{\mathbf{R}_{c_1} \cdot \mathbf{R}_{c_2} + \mathbf{R}_{s_1} \cdot \left(\frac{\mathbf{R}_b}{\mathbf{R}_a} \cdot \mathbf{R}_{c_2} \right) + \mathbf{R}_{s_2} \cdot \left(\frac{\mathbf{R}_a}{\mathbf{R}_b} \cdot \mathbf{R}_{c_1} \right) + \mathbf{R}_{s_1} \cdot \mathbf{R}_{s_2}} \cong$$

dato che $(\mathbf{R}_{s_1} \cdot \mathbf{R}_{s_2}) \cong 0$ e ponendo come prima $\mathbf{R}_{c_1} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}_1$ e $\mathbf{R}_{c_2} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}_2$, si ha:

$$\begin{aligned} &\cong \sqrt{\mathbf{R}_0^2 + \mathbf{R}_0 \cdot (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) + \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 + \frac{\mathbf{R}_{s_1} \cdot \mathbf{R}_b}{\mathbf{R}_a} \cdot (\mathbf{R}_0 + \mathbf{r}_2) + \frac{\mathbf{R}_{s_2} \cdot \mathbf{R}_a}{\mathbf{R}_b} \cdot (\mathbf{R}_0 + \mathbf{r}_1)} = \\ &= \mathbf{R}_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{\mathbf{R}_0} + \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{\mathbf{R}_0^2} + \frac{\mathbf{R}_{s_1} \cdot \mathbf{R}_b}{\mathbf{R}_a} \cdot \left(\frac{1}{\mathbf{R}_0} + \frac{\mathbf{r}_2}{\mathbf{R}_0^2} \right) + \frac{\mathbf{R}_{s_2} \cdot \mathbf{R}_a}{\mathbf{R}_b} \cdot \left(\frac{1}{\mathbf{R}_0} + \frac{\mathbf{r}_1}{\mathbf{R}_0^2} \right)} \cong \end{aligned}$$

essendo $\left(\frac{\mathbf{r}_2}{\mathbf{R}_0^2} \ll \frac{1}{\mathbf{R}_0} \right)$ e $\left(\frac{\mathbf{r}_1}{\mathbf{R}_0^2} \ll \frac{1}{\mathbf{R}_0} \right)$ e potendo trascurare il termine $\left(\frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{\mathbf{R}_0^2} \right)$, si ha:

$$\cong \mathbf{R}_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{\mathbf{R}_0} + \frac{1}{\mathbf{R}_0} \cdot \left(\frac{\mathbf{R}_{s_1} \cdot \mathbf{R}_b}{\mathbf{R}_a} + \frac{\mathbf{R}_{s_2} \cdot \mathbf{R}_a}{\mathbf{R}_b} \right)} \cong$$

essendo il termine $\left[\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{\mathbf{R}_0} + \frac{1}{\mathbf{R}_0} \cdot \left(\frac{\mathbf{R}_{s_1} \cdot \mathbf{R}_b}{\mathbf{R}_a} + \frac{\mathbf{R}_{s_2} \cdot \mathbf{R}_a}{\mathbf{R}_b} \right) \right] \ll 1$, è possibile applicare

l'approssimazione $(1 + \alpha)^n \cong 1 + n\alpha$, per cui:

$$\cong \mathbf{R}_0 \cdot \left[1 + \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2\mathbf{R}_0} + \frac{1}{2\mathbf{R}_0} \cdot \left(\frac{\mathbf{R}_{s_1} \cdot \mathbf{R}_b}{\mathbf{R}_a} + \frac{\mathbf{R}_{s_2} \cdot \mathbf{R}_a}{\mathbf{R}_b} \right) \right] =$$

$$= \mathbf{R}_0 + \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\mathbf{R}_{s_1} \cdot \frac{\mathbf{R}_b}{\mathbf{R}_a} + \mathbf{R}_{s_2} \cdot \frac{\mathbf{R}_a}{\mathbf{R}_b} \right) \cong$$

essendo $\mathbf{R}_a = \mathbf{R}_b$:

$$\cong \mathbf{R}_0 + \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} + \frac{\mathbf{R}_{s_1} + \mathbf{R}_{s_2}}{2}$$

e quindi:

$$\mathbf{u}_{\mathbf{R}_x}^2 = \mathbf{u}_{\mathbf{R}_0}^2 + \frac{1}{4} \mathbf{u}_{\mathbf{r}_1}^2 + \frac{1}{4} \mathbf{u}_{\mathbf{r}_2}^2 + \frac{1}{4} \mathbf{u}_{\mathbf{R}_{s_1}}^2 + \frac{1}{4} \mathbf{u}_{\mathbf{R}_{s_2}}^2$$

4.2. Tecnica della sostituzione

Tale metodo consente di ottenere un'incertezza ridotta nella misura del rapporto tra due resistenze che differiscono fra loro di una quantità piccola. Questa situazione è anche quella che si ha nelle applicazioni con resistenze incognite variabili in cui si è interessati a misurare la variazione relativa della resistenza incognita rispetto ad una condizione di riferimento.

Si procede nel seguente modo. Si pone una delle due resistenze incognite \mathbf{R}_{x_1} nel ponte e si raggiunge l'equilibrio:

$$\mathbf{R}_{x_1} = \frac{\mathbf{R}_a}{\mathbf{R}_b} \cdot \mathbf{R}_{c_1}$$

Quindi si sostituisce la \mathbf{R}_{x_1} con l'altra resistenza incognita \mathbf{R}_{x_2} e si ricava una nuova condizione di equilibrio:

$$\mathbf{R}_{x_2} = \frac{\mathbf{R}_a}{\mathbf{R}_b} \cdot \mathbf{R}_{c_2}$$

Quindi dividendo membro a membro:

$$\alpha = \frac{\mathbf{R}_{x_1}}{\mathbf{R}_{x_2}} = \frac{\mathbf{R}_{c_1}}{\mathbf{R}_{c_2}}$$

Per valutare l'incertezza sul rapporto bisogna tener conto dell'incertezza sulle due condizioni di equilibrio; si ha:

$$\alpha = \frac{\mathbf{R}_{c_1} + \mathbf{R}_{s_1}}{\mathbf{R}_{c_2} + \mathbf{R}_{s_2}} \quad (23)$$

Dato che \mathbf{R}_{c_1} e \mathbf{R}_{c_2} sono due valori diversi dello stesso resistore a decadi, è possibile porre:

$$\mathbf{R}_{c_1} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}_1$$

$$\mathbf{R}_{c_2} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}_2$$

dove \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 sono piccole rispetto a \mathbf{R}_{x_1} e \mathbf{R}_{x_2} e sono molto prossime tra loro.

L'espressione (23) diventa quindi:

$$\alpha = \frac{\mathbf{R}_0 + \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_{s_1}}{\mathbf{R}_0 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{R}_{s_2}} = \frac{1 + \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_{s_1}}{\mathbf{R}_0}}{1 + \frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{R}_{s_2}}{\mathbf{R}_0}}$$

se $\mathbf{R}_0 \gg \mathbf{r}_2 + \mathbf{R}_{s_2}$, applicando l'approssimazione $(1 + \alpha)^n \cong 1 + n\alpha$, l'espressione diventa:

$$\alpha \cong \left(1 + \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_{s_1}}{\mathbf{R}_0}\right) \cdot \left(1 - \frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{R}_{s_2}}{\mathbf{R}_0}\right) = 1 + \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + (\mathbf{R}_{s_1} - \mathbf{R}_{s_2})}{\mathbf{R}_0} - \frac{(\mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_{s_1})^2 \cdot (\mathbf{r}_2 + \mathbf{R}_{s_2})^2}{\mathbf{R}_0^2}$$

poiché \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 così come \mathbf{R}_{s_1} e \mathbf{R}_{s_2} sono molto minori di \mathbf{R}_0 , è possibile trascurare l'ultimo termine, per cui si ha:

$$\alpha = 1 + \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + (\mathbf{R}_{s_1} - \mathbf{R}_{s_2})}{\mathbf{R}_0}$$

quindi l'incertezza assoluta diventa:

$$\mathbf{u}_\alpha^2 = \left(\frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\mathbf{R}_0}\right)^2 \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{R}_0}^2 + \frac{1}{\mathbf{R}_0^2} \cdot (\mathbf{u}_{\mathbf{r}_1}^2 + \mathbf{u}_{\mathbf{r}_2}^2) + \frac{1}{\mathbf{R}_0^2} \cdot (\mathbf{u}_{\mathbf{R}_{s_1}}^2 + \mathbf{u}_{\mathbf{R}_{s_2}}^2)$$

A volte il metodo di sostituzione viene utilizzato per misurare una resistenza incognita con una incertezza più bassa di quella raggiungibile col metodo tradizionale, ma richiede l'impiego di due resistori campioni variabili. Si posiziona la resistenza incognita nel ponte e si raggiunge una prima condizione di equilibrio:

$$\mathbf{R}_x = \frac{\mathbf{R}_a}{\mathbf{R}_b} \cdot \mathbf{R}_{c_1}$$

Si sostituisce la resistenza incognita \mathbf{R}_x con un'altra resistenza campione variabile \mathbf{R}_{c_2} e si agisce solo su quest'ultima mantenendo fisso \mathbf{R}_{c_1} fino a raggiungere una nuova condizione d'equilibrio:

$$\mathbf{R}_{c_2} = \frac{\mathbf{R}_a}{\mathbf{R}_b} \cdot \mathbf{R}_{c_1}$$

Confrontando i due equilibri, si deduce che:

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{R}_{c_2}$$

Dal punto di vista della valutazione dell'incertezza, la relazione precedente può essere scritta come:

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{R}_{c_2} + 2\mathbf{R}_s$$

in quanto essa è scaturita da due condizioni di equilibrio. Ne segue che l'incertezza assoluta è data da:

$$\mathbf{u}_{\mathbf{R}_x}^2 = \mathbf{u}_{\mathbf{R}_{c_2}}^2 + 4\mathbf{u}_{\mathbf{R}_s}^2$$

per cui l'incertezza su \mathbf{R}_a e su \mathbf{R}_b non rientra in questa relazione e quindi la misura è caratterizzata da un'incertezza minore rispetto al ponte tradizionale.