Modello del sistema di conversione a ponte trifase in condizioni Ideali

1. Generalità **2**

2. Modello in assenza di commutazione **2**

-Ritardo all'accensione nullo 3
- Ritardo all'accensione non nullo 4
- La presenza del trasformatore 7

3. Modello in presenza di commutazione **8**

- Potenze caratteristiche assorbite dal sistema in corrente alternata 13

Appendice 1 ..... **24**

Appendice 2 ..... **26**

Appendice 3 ..... **33**

1. Generalità

L'introduzione del modello ideale del convertitore a ponte trifase si impone per creare un riferimento con il quale confrontare il funzionamento reale dello stesso nelle varie condizioni di esercizio.

Il modello ideale del convertitore a ponte si basa sulle seguenti ipotesi:

1. valvole ideali, cioè aventi una caduta di tensione in fase di conduzione nulla ed una corrente inversa parimenti nulla;
2. sorgente di alimentazione (fig. 1) costituita da tre generatori ideali di tensione[1] con in serie di induttanze uguali per le tre fasi (l'induttanza è quella di dispersione del trasformatore di alimentazione del convertitore);
3. carico in corrente continua con induttanza infinita: ciò implica che la corrente continua I_d è costante;
4. accensioni delle valvole equidistanziate di intervalli pari ad 1/6 di ciclo (60 gradi) della tensione alternata di alimentazione.

2. Modello in assenza di commutazione

Si considerino le tensioni di fase rappresentate nella Fig. 2 per le quali valgono le seguenti espressioni:

$$e_a = E_m \cos(wt + \pi/3) \quad (1a)$$

$$e_b = E_m \cos(wt - \pi/3) \quad (1b)$$

$$e_c = E_m \cos(wt - \pi) \quad (1c)$$

[1] Le tensioni risultano sinusoidali, simmetriche e con ampiezze e frequenze costanti.

Le corrispondenti tensioni concatenate risultano:

$$e_{ac} = e_a - e_c = \sqrt{3}E_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \tag{2a}$$

$$e_{ba} = e_b - e_a = \sqrt{3}E_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}E_m \,\mathrm{sen}(\omega t) \tag{2b}$$

$$e_{cb} = e_c - e_b = \sqrt{3}\cos\left(\omega t + \frac{5}{6}\pi\right) \tag{2c}$$

Si assuma inizialmente $L_C = 0$ su tutte o tre le fasi; in questo caso ci sono solo due dispositivi che conducono simultaneamente e la commutazione, cioè il trasferimento di corrente da una valvola ad un'altra dallo stesso lato del ponte, è istantanea: questa situazione, ovviamente, è impossibile in presenza di induttanza.

-Ritardo all'accensione nullo

Come ben noto, ciascun tiristore presente nei ponte è in grado di condurre se e solo se sono verificate, contemporaneamente, due condizioni: esso deve essere direttamente polarizzato (cioè la tensione anodica deve essere positiva rispetto a quella catodica) e deve essergli inviato un adeguato impulso di accensione alla griglia di controllo.

Si consideri, inizia1mente, il caso in cui gli impulsi ai singoli tiristori siano inviati proprio nell'istante in cui le tensioni di alimentazione li polarizzano direttamente (funzionamento da ponte trifase non controllato): per esempio per il tiristore 1 quando (fig.2b) e_a risulta più positiva di e_c e di e_b, e per il tiristore 6 quando e_c diventa più negativa di e_a e di e_b questa situazione è quella riportata nella fig. 3.

Risulta:

$$i_a = -i_c = I_d \tag{3}$$

$$v_d = e_a - e_c = \sqrt{3}E_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \tag{4}$$

$$v_{d0} = \frac{1}{\pi/3}\int_{-\pi/3}^{0} \sqrt{3}E_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) d\omega t = \frac{3\sqrt{3}E_m}{\pi}\left|\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)\right|_{-\pi/3}^{0} = \frac{3\sqrt{3}E_m}{\pi} \tag{5}$$

essendo V_{d0} il valore medio della tensione raddrizzata. La tensione continua vd, contiene, ovviamente, anche componenti a frequenza superiore alla continua. Nell'Appendice 3 è riportato lo sviluppo in serie di vd ed alcuni valori tipici delle sue armoniche.

La condizione mostrata in fig. 3 perdura solo per 1/6 di ciclo ed è seguita da altre in cui conducono prima i dispositivi 6 e 3, poi le 3 e 2, successivamente la 2 e la 5, la 5 e la 4**,** la 4 e la 1 e così di nuovo la 1 e la 6. In ciascuno di questi intervalli la tensione continua coincide con una tensione concatenata.

Da quanto detto risulta che ogni qualvolta un SCR comincia o cessa la conduzione, il circuito da analizzare cambia. Nella soluzione dei vari circuiti la condizione di continuità si ottiene facendo in modo che i valori finali delle correnti per una certa configurazione del circuito durante il funzionamento determinano i valori iniziali delle correnti per la successiva configurazione del circuito.

- Ritardo all'accensione non nullo

I tiristori, per la presenza della griglia di controllo possono ritardare l'accensione. Sia α l'angolo di ritardo all'accensione; ad esso corrisponde un tempo di ritardo pari ad α/ω sec. Se i dispositivi sono ritardati all'accensione per questo intervallo di tempo, il dispositivo 3 conduce a partire da $\omega t = \alpha$, il dispositivo 2 da $\omega t = \alpha+\pi/3$, il dispositivo 5 da $\omega t = \alpha+ 5\pi/6$ e così via. Il ritardo α non può essere maggiore di 180^o; in particolare esso può variare nell'intervallo in cui il dispositivo è direttamente polarizzato.

Ad esempio (fig.2b), il punto T, che si trova 180^o dopo R, indica la fine dell'intervallo in cui il dispositivo 3 può andare in conduzione, proprio perché solo fino al punto T e_b risulta maggiore di e_a.

Per un angolo di ritardo $\alpha \neq 0$ (fig. 4b – 4g) il valore medio della tensione continua si ottiene variando di α gli estremi di integrazione presenti nella (5); posto $\theta = \omega t$ si ha:

$$\begin{aligned} V_d &= \frac{3}{\pi}\sqrt{3}E_m \int_{\alpha-\pi/3}^{\alpha} \cos(\vartheta + \pi/6) = \\ &= V_{do}\left[\operatorname{sen}(\vartheta + \pi/6)\right]_{\alpha-\pi/3}^{\alpha} = \\ &= V_{do}\left[\operatorname{sen}(\alpha + \pi/6) - \operatorname{sen}\alpha - \pi/6\right] = \\ &= V_{do}(2\operatorname{sen}\pi/6)\cos\alpha = V_{do}\cos\alpha \end{aligned} \qquad (6)$$

Un effetto dell'accensione ritardata è, pertanto, quello di ridurre la tensione media continua tramite il fattore $\cos\alpha$. Poiché α può variare da 0^o a 180^o, $\cos\alpha$ può variare da 1 a –1, per cui V_d può assumere valori da V_{d0} a $-V_{d0}$. Poiché la corrente continua I_d non può invertirsi per la proprietà unidirezionale dei tiristori, un valore negativo di V_d congiunto alla corrente positiva I_d rappresenta un flusso di energia invertito. In poche parole, rappresenta l'inversione in contrapposizione al raddrizzamento.

Per quanto riguarda le forme d'onda delle correnti di linea, nel caso in esame esse sono costituite (fig. 5) da una serie di impulsi rettangolari, alternativamente positivi e negativi, equidistanziati.

L'analisi di Fourier delle suddette forme d'onda permette di ricavare tutte le caratteristiche di interesse delle stesse. A tal fine si ricorda che la forma trigonometrica della serie di Fourier è:

$$F(\vartheta) = A_o + \sum_{h=1}^{\infty}\left(A_h \cosh\vartheta + B_h \sinh\vartheta\right) \qquad (7)$$

essendo:

$$A_o = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\vartheta)d(\vartheta)$$
$$A_h = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\vartheta)\cosh\vartheta d\vartheta \qquad (8)$$
$$B_h = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\vartheta)\sinh\vartheta d\vartheta$$

Come ben noto:

$$A_h - jB_h = C_h e^{j\phi_h} \qquad (9)$$

con

$$C_h = \sqrt{A_h^2 + B_h^2}$$
$$\phi_h = \tan^{-1}\left(-\frac{B_h}{A_h}\right)$$

inoltre i limiti di integrazione nelle equazioni precedenti possono essere arbitrariamente scelti tra σ e $(\sigma+2\pi)$ con σ angolo qualunque.

Se allora si fa riferimento all'analisi di Fourier della forma d'onda a tratto continuo della corrente i_a nella fig.5, si ha (App. l):

$$i_a(t) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} I_d\left(\cos\vartheta - \frac{1}{5}\cos 5\vartheta + \frac{1}{7}\cos 7\vartheta - 11\cos 11\vartheta + \frac{1}{13}\cos 13\vartheta - \ldots\right); \qquad (10)$$

le armoniche di corrente presenti sono cioè sono quelle di ordine $h = 6q \pm 1$ con $q = 1,2,\ldots$ In particolare, il valore efficace della fondamentale è:

$$I_{10} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}\pi} I_d = \frac{\sqrt{6}}{\pi} I_d = 0{,}78 I_d, \qquad (11)$$

mentre il valore efficace della h-ma armonica è:

$$I_{ho} = \frac{I_{10}}{h} \qquad (12)$$

- La presenza del trasformatore

Si ricordi, adesso, che il convertitore è alimentato da un trasformatore, per cui le correnti di linea assorbite dalla rete di alimentazione a monte dello stesso devono rispettare il suo rapporto di trasformazione ed il tipo di collegamento degli avvolgimenti.

Se il trasformatore è del tipo YY o ΔΔ, le correnti di linea lato rete restano inalterate.

Se, invece, il trasformatore è dei tipo YΔ o ΔY, le forme d'onda suddette non risultano inalterate.

Infatti, si supponga, per fissare le idee, che il trasformatore sia collegato a stella dal lato del convertitore e a triangolo dal lato della rete; si assuma inoltre, unitario il rapporto tra le spire primarie e secondarie.

Nel caso in esame le correnti negli avvolgimenti a triangolo risultano identiche a quelle negli avvolgimenti a stella, mentre ciascuna corrente di linea lato rete risulta dalla differenza delle correnti di due avvolgimenti dei triangolo, ad esempio (fig. 5):

$i_A = i_b - i_c$

Se si assume come asse di riferimento quello i_A della fig. 5 e si impone che il rapporto tra le spire primarie e secondarie sia pari a $\sqrt{3}$ [2] lo sviluppo in serie porge (Appendice 2):

$$i_A(t) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} I_d \left(\cos\vartheta - \frac{1}{5}\cos 5\vartheta + \frac{1}{7}\cos 7\vartheta - 11\cos 11\vartheta + \frac{1}{13}\cos 13\vartheta - \ldots \right) \qquad (13)$$

In pratica, le armoniche avranno la stessa ampiezza del caso YY o ΔΔ, ma non sempre la stessa fase (cfr 5, 7, etc.).

L'ispezione delle (10) e (13) fa intuire che, se si pongono insieme due convertitori,

[2] Ciò per avere armoniche delle correnti di linea della stessa ampiezza di quelle del caso YY o ΔΔ.

uno alimentato con un trasformatore YY e l'altro con un trasformatore ΔY, è possibile cancellare tra loro alcune armoniche, con il vantaggio di avere una corrente dì linea lato rete meno distorta (fig. 6). Ciò è quanto si realizza nei così detti convertitori a 12 impulsi. in cui si riesce, in condizioni ideali, ad eliminare le armoniche di ordine 5, 7, etc.

3. Modello in presenza di commutazione

Si consideri adesso $L_c \neq 0$ su tutte e tre le fasi, cioè il caso in cui la sorgente a.c. presenta una certa induttanza; quest'ultima, come già detto, è principalmente quella di dispersione del trasformatore.

Nel caso in esame il trasferimento della corrente da una tiristore all'altro dello stesso lato non è istantaneo, ma richiede un tempo finito, chiamato tempo di commutazione o di sovrapposizione $t_s = \mu/\omega$, dove μ è l'angolo di sovrapposizione. Normalmente l'angolo di sovrapposizione è minore di 60°; valori tipici a pieno carico sono compresi tra 20° e 25°.

Per $\mu < 60°$ durante la commutazione conducono simultaneamente tre tiristori: due da un lato del ponte (quelle tra cui avviene il trasferimento di corrente) ed una dall'altro lato; tra due commutazioni conducono, invece, solo due tiristori. Poiché una nuova commutazione comincia ogni 60° e dura per l'angolo μ, l'intervallo angolare in cui conducono due tiristori vale $60° - \mu$.

La sequenza dei tiristori che conducono è 16, 163, 63, 632, 32, 325, 25, 254, 54, 541, 41, 416.

Se in particolare $\mu = 60^{\circ}$ una nuova commutazione incomincia nello stesso istante in cui una vecchia finisce, per cui una serie di tre SCR conduce sempre. In tal caso la sequenza

dei tiristori che conducono è 163, 632, 325, 254, 541, 416.

Se 60° <μ < 120° alternativamente conducono tre e quattro tiristori. Si verifica la doppia sovrapposizione, cioè vi sono degli intervalli in cui le commutazioni stanno avendo luogo in entrambi i mezzi ponti, con due tiristori di ognuno che conducono.

In seguito si analizza il funzionamento più usuale, che è quello in cui 0° < μ < 60° e quindi due o tre tiristori conducono alternativamente.

L'intervallo in cui i dispositivi 1 e 6 conducono (fig.1) termina quando il dispositivo 3 si accende e questo capita per $\omega t = \alpha$.

Nell'intervallo successivo il circuito effettivo è quello in fig. 7 con i dispositivi 1, 6 e 3 che conducono contemporaneamente: in questo intervallo la corrente continua è "trasferita" dalla valvola 1 a quella 3.

Si analizzi, adesso, il processo di commutazione (fig. 7); le condizioni al contorno sono:

per $\omega t = \alpha$ $\quad i_1 = I_d \quad$ e $\quad i_3 = 0$

per $\omega t = \alpha + \mu = \delta$ $\quad i_1 = 0 \quad$ e $\quad i_3 = I_d$.

L'angolo $\gamma = \alpha + \mu$ è detto di estinzione.

Per il circuito N31N risulta:

$$e_b - e_a = L_c \frac{d}{dt} i_3 - L_c \frac{d}{dt} i_1 = \sqrt{3} E_m \operatorname{sen} \Omega t \,, \tag{14}$$

e poiché

$$i_1 = I_d - i_3 \tag{15}$$

allora

$$\frac{d}{dt}i_1 = -\frac{d}{dt}i_3 \qquad (16)$$

Sostituendo la (16) nella (14) si ottiene:

$$\frac{d}{dt}i_3 = \sqrt{3}E_m / 2L_c \operatorname{sen}\omega t$$

(17)

Integrando la (17) fra α/ω e t si ottiene i_3:

$$i_3 = \int_0^{i_3} di_3 = \sqrt{3}\,\frac{E_m}{2L_c}\int_{\alpha/\varpi}^{t} sin\,\omega t = I_{2s}\left(\cos\alpha - \cos\omega t\right) = I_d - i_1 \qquad (18)$$

dove

$$I_{ds} = \sqrt{3}E_m /(2\omega L_c) \qquad (19)$$

L'equazione (18) evidenzia che la corrente i_3 è costituita da un termine costante (I_{2s}. cos α = costante) che dipende da α e fa in modo che all'inizio della commutazione i_3=0, e da un termine cosinusoidale I_{2s} cos ωt), ritardato rispetto alla tensione di commutazione di $\pi/2$ in quanto il circuito è puramente induttivo, che presenta un valore di cresta I_{2c} pari a quello della corrente di corto circuito bifase.

Alla luce dei risultati forniti dalla (l8) e dalla (15) si trae che la corrente i_1 nel tiristore 1 uscente ha un termine sinusoidale uguale in ampiezza ma in opposizione di fase rispetto a quello di i_3 ed un termine costante tale che $i_1 = I_d$ all'inizio della commutazione.

Inoltre, alla fine della commutazione si ha $i_1 = 0$ e, quindi, dalla (18):

$I_d = I_{2s}\left[\cos\alpha - \cos(\alpha + \mu)\right]$,

per cui

$$I_d = I_{2s}\left[\cos\alpha - \cos(\alpha+\mu)\right]$$
$$\mu = \left\{\cos^{-1}\left[\cos\alpha - \frac{I_d}{I_{2s}}\right]\right\} - \alpha \qquad (20)$$

Per quanto riguarda le tensioni, durante la commutazione la tensione concatenata v_a-v_b delle fasi in corto circuito è nulla e le corrispondenti tensioni di fase, pertanto, risultano uguali tra di loro e pari alla media delle tensioni a circuito aperto e_a ed e_b: si ha cioè:

$$v_a = v_b = \frac{e_a + e_b}{2}. \qquad (21)$$

La tensione istantanea lato corrente continua sarà pertanto non più $v_d = e_a - e_c$ ma

$$v_d = \frac{e_a + e_b}{2} - e_c.$$

La fig.8 evidenzia che, in pratica, l'effetto della sovrapposizione è di sottrarre un'area A dall'area A_o ogni sesto di ciclo ($\pi/3$ rad). Si osservi allora che risulta:

$$V_{do} = \frac{A_o}{\pi/3} \qquad (22)$$

per cui, ricordando la (5), si ha che:

$$A_o = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}E_m}{\pi} = \sqrt{3}E_m \qquad (23)$$

L'integrazione fra α e γ di $\left[e_b - \frac{e_a + e_b}{2}\right]$ fornisce l'area A.

$$A = \int_\alpha^\gamma \left[e_b - \frac{e_a + e_b}{2}\right]\delta\vartheta = \int_\alpha^\gamma \frac{e_b - e_a}{2}\,\delta\theta = \int_\alpha^\gamma \frac{e_{ba}}{2}\,\delta\theta =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}E_m\int_\alpha^\gamma \operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta = \frac{\sqrt{3}}{2}E_m\left[-\cos\vartheta\right]_\alpha^\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}E_m\left(\cos\alpha - \cos\gamma\right) \qquad (24)$$

La caduta dì tensione D dovuta alla presenza della sovrapposizione è fornita. in

analogia a questo fatto per $V_{do} = A_o / (\pi/3)$, da:

$$D = \frac{A}{\pi/3} = \frac{3\sqrt{3}\,E_m}{2\pi}(\cos\alpha - \cos\gamma) \tag{25}$$

Se, adesso, si ricorda che senza sovrapposizione la tensione continua è:

$$V_d = V_{do}\cos\alpha \tag{26}$$

con la sovrapposizione, invece, sarà [3]:

$$V_d = V_{do}\cos\alpha - D = V_{do}\cos\alpha - [V_{do}(\cos\alpha - \cos\gamma)] = \frac{V_{do}}{2}(\cos\alpha + \cos\gamma) = \frac{3\sqrt{2}}{2\pi}E_{LL}(\cos\alpha + \cos\gamma) \tag{27}$$

Per quanto riguarda le forme d'onda delle correnti di linea, esse assumono le forme d'onda a tratto discontinuo riportate nella fig. 5. Esse differiscono da quelle costituite da impulsi rettangolari,. in quanto negli intervalli di commutazione la corrente di fase si porta o dal valore zero ad I_d oppure da I_d a zero. Più in particolare si faccia riferimento, per fissare le idee, alla corrente di linea i_b (fig. 7); fin quando i dispositivi 1 e 6 conducono, essa è ovviamente nulla; quando il dispositivo 3 viene abilitato alla conduzione per quanto detto in precedenza, la corrente $i_b = i_3$ è data dalla (18) che si ripete di seguito per chiarezza:

$$i_b(t) = i_3(t) = I_{2s}(\cos\alpha - \cos\omega t) \tag{18}$$

Alla fine della commutazione, cioè per $\omega t = \alpha+\mu$ la $i_b(t)$ raggiunge il valore:

$$I_d = I_{2s}[\cos\alpha - \cos(\alpha+\mu)], \tag{20}$$

che perdura per 120° - μ cioè per $\alpha+\mu < \omega t < \alpha + 2/3\pi$; per $\omega t = \alpha+2/3\pi$ inizia il passaggio di conduzione dal tiristore 3 al 5, e risulta pertanto:

[3] E_{LL} è il valore efficace della tensione concatenata.

$$i_b(t) = I_d - I_{2s}\left[\cos\left(\alpha + \frac{2}{3}\pi\right) - \cos\omega t\right] \tag{28}$$

tale condizione perdura per $\alpha + \frac{2}{3}\pi < \omega t < \alpha + \frac{2}{3}\pi + \mu$.

In modo analogo può individuarsi la forma d'onda dell'impulso negativo.

L'analisi di Fourier della suddetta forma d'onda permette, anche in questo caso, di ricavare tutte le caratteristiche della stessa. Si potrebbe dimostrare che risulta:

$$I_{L1} = k\frac{\sqrt{6}}{\pi} I_d \tag{29}$$

con:

$$k = \frac{\sqrt{[\cos 2\alpha - \cos 2(\alpha+\mu)]^2 + [2\mu + \sin 2\alpha - \sin 2(\alpha+\mu)]^2}}{4[\cos\alpha - \cos(\alpha+\mu)]}$$

mentre per le armoniche si hanno espressioni altrettanto complesse.

Per tale motivo nella pratica si fa riferimento a grafici, del tipo di quelli riportati nella fig. 9 in cui le armoniche, espresse in valore percentuale della fondamentale, sono riportate in funzione degli angoli α e μ..

- *Potenze caratteristiche assorbite dal sistema in corrente alternata*

Per concludere, risulta particolarmente importante analizzare, in vista degli studi che si effettueranno, anche le relazioni che definiscono il cosφ e le potenze, attive P_a e reattive Q_a assorbite dal convertitore.

Nell'ipotesi di trascurare le perdite, le potenze attive in ac e dc risultano uguali e cioè:

$P_a = P_d$
Essendo:

$$\begin{aligned} P_a &= \sqrt{3}\, E_{LL} I_{L1} \cos\varphi \\ P_d &= V_d I_d \end{aligned},$$

con I_{L1} valore efficace della fondamentale di corrente di linea e φ sfasamento tra le fondamentali di corrente di linea e di tensione.

Risulta, ricordando l'espressione di V_d:

$$I_{L1} \cos\varphi = \frac{\sqrt{6} I_d}{\pi} \left(\frac{\cos\alpha + \cos\delta}{2} \right). \tag{30}$$

Se si assume (con un errore che è del 4.3% se $\mu = 60°$ ed è di circa l'1% per $\mu \leq 30^o$ cfr. (29)) che:

$$I_{L1} \cong \frac{\sqrt{6} I_d}{\pi}, \tag{31}$$

ne consegue la relazione approssimata, ma di uso corrente:

$$\cos\varphi \cong \frac{\cos\alpha + \cos\delta}{2}. \tag{32}$$

In conclusione, in prima approssimazione, risulta:

$$\begin{cases} P_a \cong \dfrac{\sqrt{3} E_{LL} \sqrt{6} I_d}{\pi} \dfrac{\cos\alpha + \cos\delta}{2} \\ Q_a = P_a \tan\varphi \end{cases} \tag{33}$$

Appendice 1

Si faccia riferimento alla fig. A1. 1; con riferimento agli impulsi positivi, stante l'asse di riferimento assunto, risulta:

f(x) = f(-x),

quindi lo sviluppo in serie presenta solo termini in coseno.

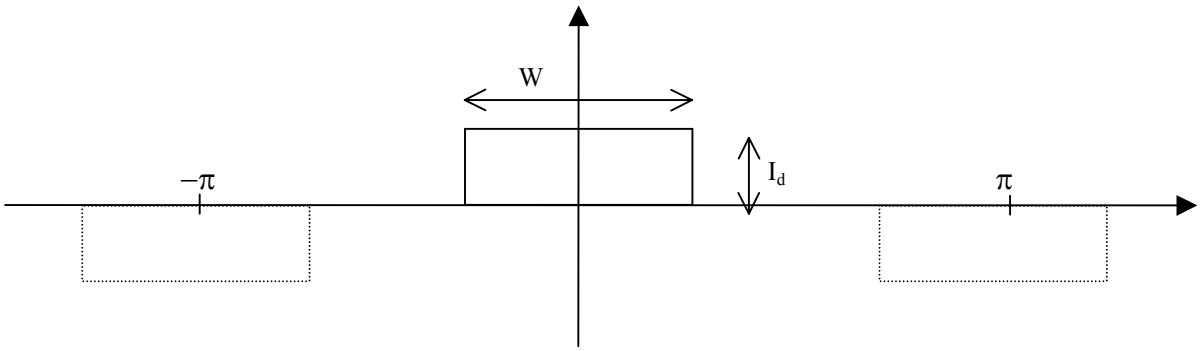

Fig. A. 1.

Risulta pertanto:

$$A_o = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t)\,d\omega t = \frac{1}{2\pi}\int_{-W/2}^{W/2} I_d\,d\omega t = \frac{I_d}{2\pi}W$$

$$A_h = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t)\cos h\omega t\,d\omega t = \frac{1}{\pi}\int_{-W/2}^{W/2} I_d\cos h\omega t\,d\omega t = \frac{I_d}{\pi}\frac{1}{h}\left|\sin(h\omega t)\right|_{-W/2}^{W/2} =$$

$$A_h = \frac{I_d}{h\pi}\left(\sin h\frac{W}{2} + \sin h\frac{W}{2}\right) = \frac{2I_d}{h\pi}\sin h\frac{W}{2}$$

In conclusione:

$$F_p = \frac{I_d}{2\pi} W + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{2I_d}{h\pi} \sin\left(h\frac{W}{2}\right) \cos h\omega t =$$

$$= \frac{I_d}{2\pi} W + \frac{2I_d}{\pi}\left(\sin\frac{W}{2}\cos\omega t + \frac{1}{2}\sin W \cos 2\omega t + \frac{1}{3}\sin\frac{3W}{2}\cos 3\omega t + ...\right) =$$

$$= \frac{2I_d}{\pi}\left(\frac{W}{4} + \sin\frac{W}{2}\cos\omega t + \frac{1}{2}\sin W \cos 2\omega t + \frac{1}{3}\sin\frac{3W}{2}\cos 3\omega t + ...\right)$$

Con riferimento agli impulsi negativi:

$$F_n = \frac{2I_d}{\pi}(-\frac{W}{4} + \sin\frac{W}{2}\cos\omega t - \frac{1}{2}\sin W \cos 2\omega t + \frac{1}{3}\sin\frac{3W}{2}\cos 3\omega t - .....).$$

La forma d'onda risultante è pertanto:

$$F = F_p + F_n = \frac{4I_d}{\pi}(\sin\frac{W}{2}\cos\omega t + \frac{1}{3}\sin\frac{3W}{2}\cos 3\omega t + \frac{1}{5}\sin\frac{5W}{2}\cos 5\omega t + ...).$$

Nel caso in esame ogni impulso dura $2/3\pi$, quindi, posto $W = 2/3\pi$, risulta infine:

$$F = \frac{4I_d}{\pi}(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega t - \frac{1}{5}\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5\omega t.....) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} I_d (\cos\omega t - \frac{1}{5}\cos 5\omega t + \frac{1}{7}\cos 7\omega t.....)$$

Appendice 2

In questa Appendice si effettua lo sviluppo in serie di Fourier di alcune forme d'onda tipiche di corrente assorbite dai sistemi di conversione a ponte trifase. Per completezza si richiama anche lo sviluppo in serie di Fourier già effettuato nell'Appendice 1

Si consideri l'andamento di $i_a(\omega t)$ mostrato in Fig.A2.1

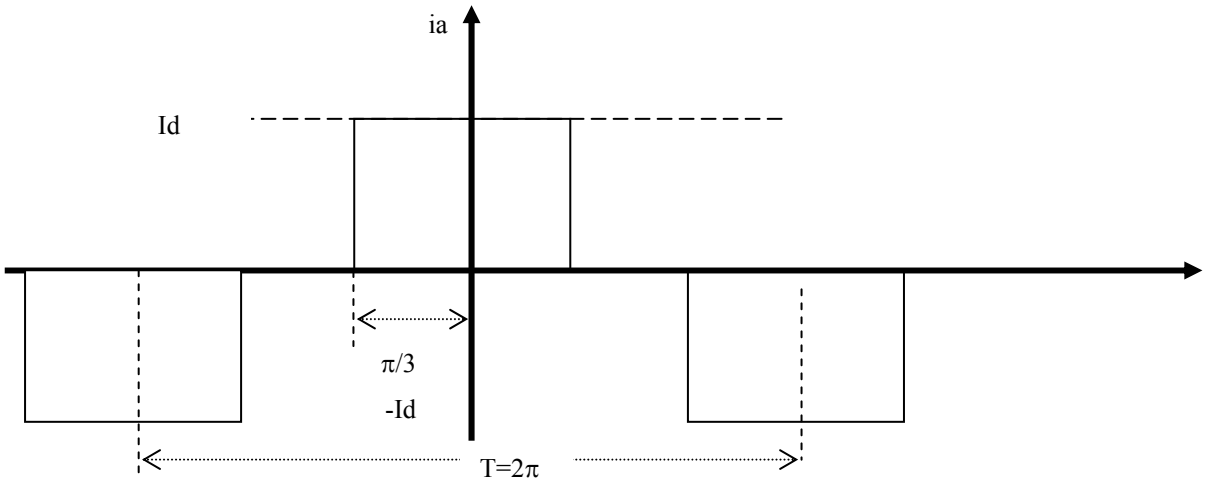

Fig.A2.1

La funzione da sviluppare in serie di Fourier è una funzione pari, per cui i soli termini non nulli sono i termini in coseno, Bh ,dati per definizione dalla relazione:

$$Bh \therefore \frac{2}{T}\int_{Tvd} ia(\omega t)\cos(h\omega t)d\omega t$$

Essi sono pari a:

$$Bh = \frac{2\sqrt{3}Id}{\pi} \sum_{h} \frac{\cos(h\omega t)}{h} \quad \text{con h} = k6 \pm 1 \quad \text{e } k \in N \qquad (1)$$

Esplicitando la sommatoria in (1) si ha.

$$ia(\omega t) = \frac{2\sqrt{3}Id}{\pi}\left[\cos(\omega t) - \frac{\cos(5\omega t)}{5} + \frac{\cos(7\omega t)}{7} - .....\right]$$

Si consideri l'andamento di $i'_a(\omega t)$ mostrato in Fig.A2.2

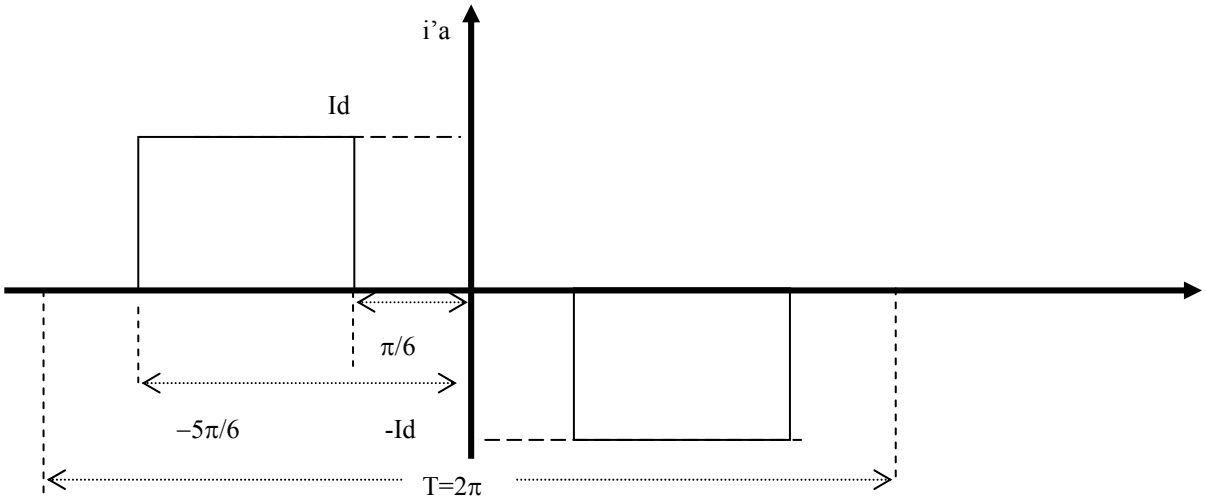

Fig.A2.2

La funzione da sviluppare in serie di Fourier è una funzione dispari, per cui i soli termini non nulli sono i termini in seno, Ah ,dati per definizione dalla relazione:

$$Ah \therefore \frac{2}{T}\int_{Tvd} i'a(\omega t)\,\mathrm{sen}(h\omega t)d\omega t$$

Essi sono pari a:

$$Ah = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\frac{5\pi}{6}}^{-\frac{5\pi}{6}} i'a(\omega t)\,\mathrm{sen}(h\omega t)d\omega t + \int_{+\frac{\pi}{6}}^{+\frac{5\pi}{6}} i'a(\omega t)\,\mathrm{sen}(h\omega t)d\omega t\right] \quad =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\frac{5\pi}{6}}^{-\frac{5\pi}{6}} Id\,\mathrm{sen}(h\omega t)d\omega t + \int_{+\frac{\pi}{6}}^{+\frac{5\pi}{6}} (-Id)\mathrm{sen}(h\omega t)d\omega t\right] =$$

$$= \frac{Id}{h\pi}\left[-\cos(h\omega t)\right]_{-\frac{5\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}} + \left[\cos(h\omega t)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}$$

$$= \frac{Id}{h\pi}\left[-\cos(h\frac{\pi}{6}) + \cos(h\frac{5\pi}{6})\right] + \frac{Id}{h\pi}\left[\cos(h\frac{5\pi}{6}) - \cos(h\frac{\pi}{6})\right] =$$

$$Ah = \frac{2Id}{h\pi}\left[\cos(h\frac{5\pi}{6}) - \cos(h\frac{\pi}{6})\right]$$

I coefficienti così ricavati sono pari a:

$$h = 1; A1 = \frac{2Id}{\pi}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = -\frac{2Id\sqrt{3}}{\pi}$$
$$h = 2; A2 = \frac{2Id}{2\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] = 0$$
$$h = 3; A3 = \frac{2Id}{3\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] = 0$$
…….
$$h = 5; A5 = \frac{2Id}{5\pi}\left[\cos(\frac{25\pi}{6}) - \cos(\frac{5\pi}{6})\right] = -\frac{2Id\sqrt{3}}{5\pi}$$
$$h = 7; A7 = \frac{2Id}{7\pi}\left[\cos(\frac{35\pi}{6}) - \cos(\frac{7\pi}{6})\right] = -\frac{2Id\sqrt{3}}{7\pi}$$

In conclusione, lo sviluppo in serie di i'a(ωt) è pari a:

$$i'a(\omega t) = \frac{2\sqrt{3}Id}{\pi}\left[-\mathrm{sen}(\omega t) + \frac{\mathrm{sen}(5\omega t)}{5} + \frac{\mathrm{sen}(7\omega t)}{7} - \frac{\mathrm{sen}(11\omega t)}{11} - .....\right]$$

Si consideri l'andamento di $i''_a(\omega t)$ mostrato in Fig.A2.3

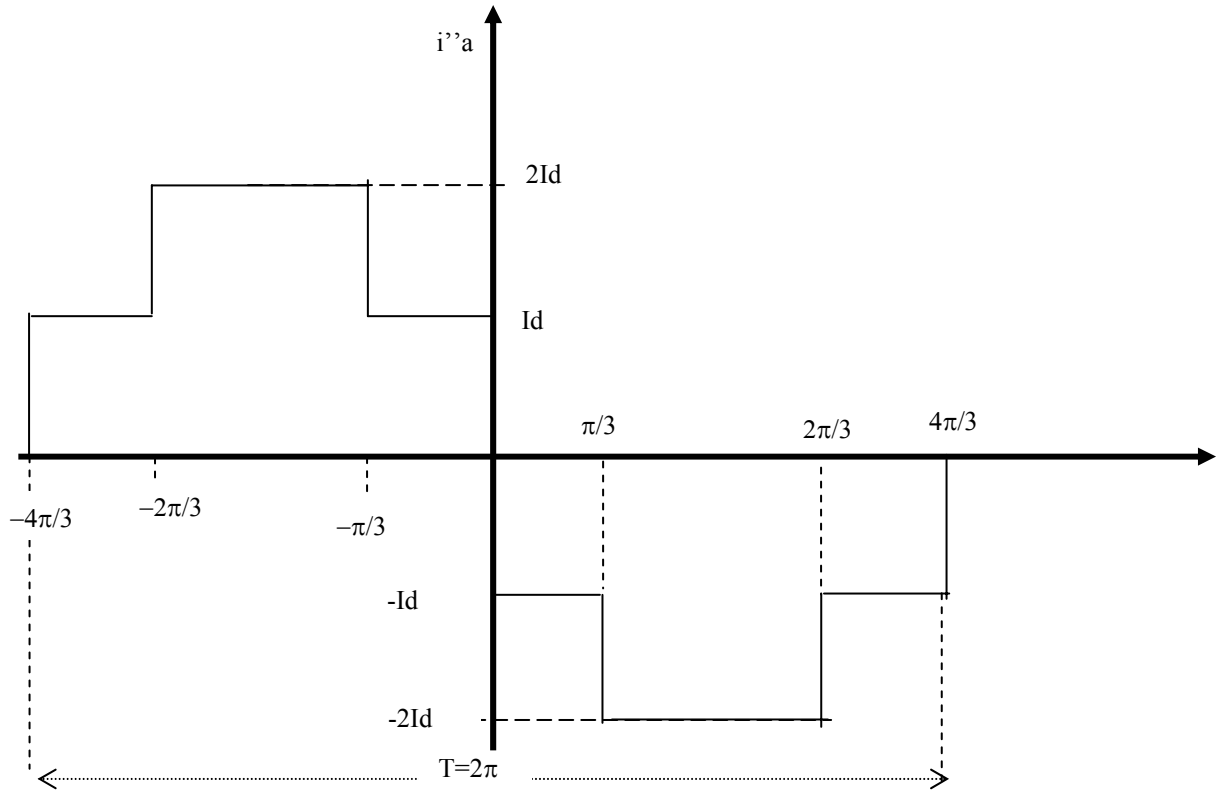

Fig.A2.3

La funzione da sviluppare in serie di Fourier è una funzione dispari, per cui i soli termini non nulli sono i termini in seno, Ah ,dati per definizione dalla relazione:

$$Ah \therefore \frac{2}{T}\int_{Tvd} i''a(\omega t)\,\mathrm{sen}(h\omega t)\,d\omega t$$

Essi sono pari a:

$$Ah = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\frac{2\pi}{3}} i''a(\omega t)\,\mathrm{sen}(h\omega t)d\omega t + \int_{-\frac{2\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}} i''a(\omega t)\,\mathrm{sen}(h\omega t)d\omega t + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} i''a(\omega t)\,\mathrm{sen}(h\omega t)d\omega t + \right.$$
$$\left. + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} i''a(\omega t)\,\mathrm{sen}(h\omega t)d\omega t + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} i''a(\omega t)\,\mathrm{sen}(h\omega t)d\omega t + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} i''a(\omega t)\,\mathrm{sen}(h\omega t)d\omega t\right]$$

$$Ah = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\frac{2\pi}{3}} Id\,\mathrm{sen}(h\omega t)d\omega t + \int_{-\frac{2\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}} 2Id\,\mathrm{sen}(h\omega t)d\omega t + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} Id\,\mathrm{sen}(h\omega t)d\omega t + \right.$$
$$\left. + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (-Id)\,\mathrm{sen}(h\omega t)d\omega t + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (-2Id)\,\mathrm{sen}(h\omega t)d\omega t + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} (-Id)\,\mathrm{sen}(h\omega t)d\omega t\right]$$

$$Ah = \frac{1}{h\pi}\left[Id(-\cos(h\omega t))\right]_{-\pi}^{-\frac{2\pi}{3}} + \left[2Id(-\cos(h\omega t))\right]_{-\frac{2\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}} + \left[Id(-\cos(h\omega t))\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{0}$$
$$+ \left[Id\cos(h\omega t)\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}} + \left[2Id\cos(h\omega t)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} + \left[Id\cos(h\omega t))\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} =$$

$$Ah = -\frac{Id}{h\pi}\left[\cos\left(\frac{2h\pi}{3}\right) - \cos(h\pi)\right] - \frac{2Id}{h\pi} + \left[\cos\left(\frac{h\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2h\pi}{3}\right)\right] - \frac{Id}{h\pi} + \left[1 - \cos\left(\frac{h\pi}{3}\right)\right] +$$
$$+ \frac{Id}{h\pi}\left[\cos\left(\frac{h\pi}{3}\right) - 1\right] + \frac{2Id}{h\pi} + \left[\cos\left(\frac{2h\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{h\pi}{3}\right)\right] + \frac{Id}{h\pi} + \left[\cos(h\pi) - \cos\left(\frac{2h\pi}{3}\right)\right] =$$

$$Ah = \frac{2Id}{h\pi}\cos\left(\frac{2h\pi}{3}\right) + \frac{2Id}{h\pi}\cos(h\pi) - \frac{2Id}{h\pi} + \cos\left(\frac{h\pi}{3}\right) - \frac{2Id}{h\pi}$$

$$Ah = \frac{2Id}{h\pi}\left[\cos\left(\frac{2h\pi}{3}\right) + \cos(h\pi) - \cos\left(\frac{h\pi}{3}\right) - 1\right]$$

I coefficienti così ricavati sono pari a:

$$h=1;\ A1=\frac{2Id}{\pi}\left[\cos(2\pi/3)-\cos(\pi/3)+\cos(\pi)-1\right]=\frac{2Id3}{\pi}$$
$$h=2;\ A2=\frac{2Id}{2\pi}\left[\cos(4\pi/3)-\cos(2\pi/3)+\cos(2\pi)-1\right]=0$$
…….
…….
$$h=5;\ A5=\frac{2Id}{5\pi}\left[\cos(\frac{10\pi}{3})-\cos(\frac{5\pi}{3})+\cos(5\pi)-1\right]=-\frac{2Id3}{5\pi}$$
$$h=7;\ A7=\frac{2Id}{7\pi}\left[\cos(\frac{14\pi}{3})-\cos(\frac{7\pi}{3})+\cos(7\pi)-1\right]=-\frac{2Id3}{7\pi}$$

$$h=11;\ A11=\frac{2Id}{11\pi}\left[\cos(\frac{22\pi}{3})-\cos(\frac{11\pi}{3})+\cos(11\pi)-1\right]=-\frac{2Id3}{11\pi}$$

In conclusione, lo sviluppo in serie di i''a(ωt) è pari a:

$$i''a(\omega t)=\frac{2Id3}{\pi}\left[-\text{sen}(\omega t)-\frac{\text{sen}(5\omega t)}{5}-\frac{\text{sen}(7\omega t)}{7}-\frac{\text{sen}(11\omega t)}{11}-.....\right]$$

Riassumendo si è ottenuto:

$$ia(\omega t)=\frac{2\sqrt{3}Id}{\pi}\left[\cos(\omega t)-\frac{\cos(5\omega t)}{5}+\frac{\cos(7\omega t)}{7}-.....\right]$$ cfr Fig.A2.1

cfr Fig.1

$$i'a(\omega t)=\frac{2\sqrt{3}Id}{\pi}\left[-\text{sen}(\omega t)+\frac{\text{sen}(5\omega t)}{5}+\frac{\text{sen}(7\omega t)}{7}-\frac{\text{sen}(11\omega t)}{11}-.....\right]$$ cfr Fig.A2.2

$$i''a(\omega t)=\frac{2Id3}{\pi}\left[-\text{sen}(\omega t)-\frac{\text{sen}(5\omega t)}{5}-\frac{\text{sen}(7\omega t)}{7}-\frac{\text{sen}(11\omega t)}{11}-.....\right]$$ cfr Fig.A2.3

Appendice 3

Si consideri l'andamento di $v_d(\omega t)$ mostrato in Fig.A3.1

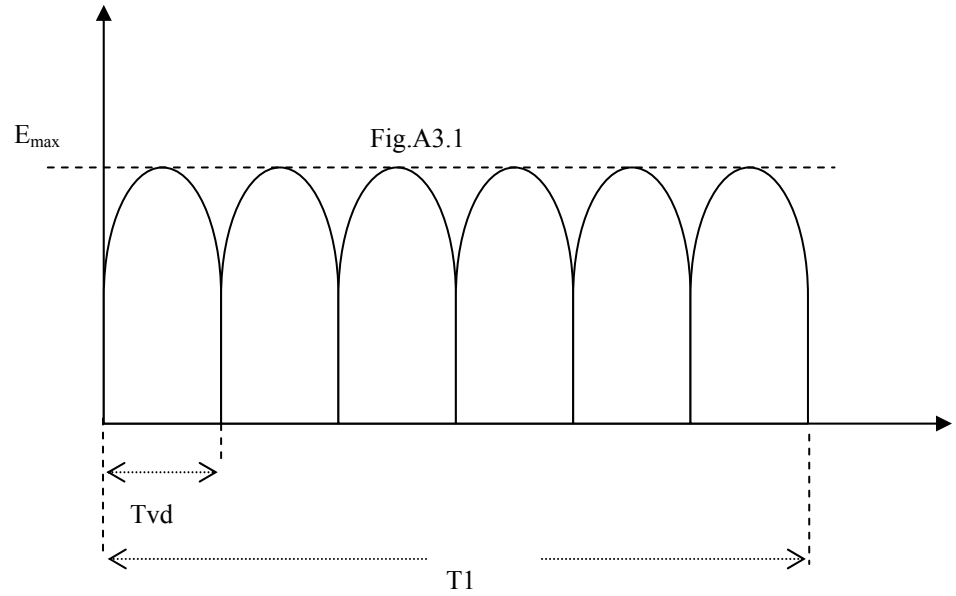

Fig.A3.1

La funzione da sviluppare in serie di Fourier è una funzione pari, per cui i soli termini non nulli sono i termini

Bh dati, per definizione, dalla relazione:

$$Bh \therefore \frac{2}{Tvd}\int_{Tvd} vd(\omega t)\cos(h\omega t)d\omega t$$

E' conveniente sviluppare in serie la funzione rispetto ad un asse traslato di π/q rispetto all'asse mostrato in Fig.A3.1, come indicato in Fig.A3.2.

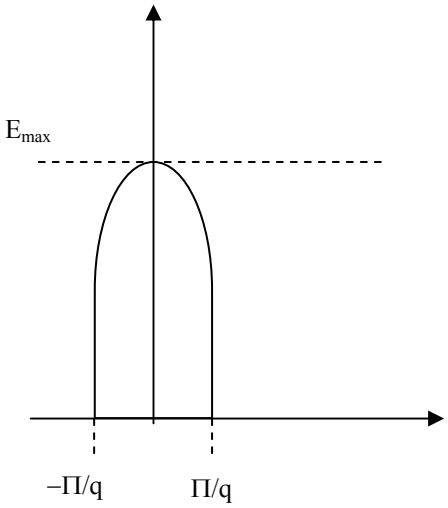

Fig.A3.2

Con il riferimento assunto si ha:

vd(ωt) = Emax cos(ωt)

I termini Bh da calcolare sono:

$$Bh \therefore \frac{2}{\frac{2\pi}{q}} \int E\max\cos(\omega t)\cos(h\omega t)d\omega t = \frac{2q}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{q}} E\max\cos(\omega t)\cos(h\omega t)d\omega t \qquad (1)$$

Per il calcolo dei coefficienti Bh della 81), è opportuno risolvere dapprima l'integrale

$$\int \cos(\omega t)\cos(h\omega t)d\omega t$$

indefinito mediante l'integrazione per parti applicata due volte, come segue.

$$\int \cos(\omega t)\cos(h\omega t)d\omega t = \text{sen}(\omega t)\cos(h\omega t) + h\int \text{sen}(\omega t)\,\text{sen}(h\omega t)d\omega t =$$

$$\int \cos(\omega t)\cos(h\omega t)d\omega t = \text{sen}(\omega t)\cos(h\omega t) + h\left[-\cos(\omega t)\,\text{sen}(h\omega t) + h\int \cos(\omega t)\cos(h\omega t)d\omega t\right]$$

$$\int \cos(\omega t)\cos(h\omega t)d\omega t = \frac{1}{1-h^2}\left[\text{sen}(\omega t)\cos(h\omega t) - h\cos(\omega t)\,\text{sen}(h\omega t)\right]$$

Sostituendo il risultato dell'integrale indefinito nella relazione (1) si ottiene:

$$Bh = \frac{2q}{\pi}\frac{E\max}{1-h^2}\left[\text{sen}(\omega t)\cos(h\omega t) - h\cos(\omega t)\,\text{sen}(h\omega t)\right]_0^{\frac{\pi}{q}}$$

$$Bh = \frac{2q}{\pi}\frac{E\max}{1-h^2}\left[\text{sen}(\pi/q)\cos(h\pi/q) - h\cos(\pi/q)\,\text{sen}(h\pi/q)\right] \qquad (2).$$

Per valutare il risultato espresso dalla relazione (2), è utile fare alcune considerazioni sul periodo di integrazione scelto per effettuare l'integrale di Fourier di vd, indicato con Tvd nella Fig.1.Tale periodo è pari a:

Tvd=T1/q,

se con T1 si è indicato il periodo relativo alla fondamentale delle grandezze elettriche del lato A.C. del convertitore.

La prima armonica dello sviluppo in serie di Fourer di vd, effettuato sul periodo Tvd, sarà, allora, a frequenza pari a:

f_{1vd}=qf1 per h=1;
f_{2vd}=2qf1 per h=2;
……
……

Generalizzando per la k-ma armonica di vd si ha:

f_{kvd}=kq f1 per h=k; (3).

Considerando la relazione (3), il termine "sen(hπ/q)" presente nella relazione di Bh (2), è \identicamente nullo per ogni k, infatti si ha:

sen(hπ/q)= sen(kqπ/q)= sen(kπ)=0 , per ogni k.

L'espressione (2) di Bh può essere dunque riscritta come segue:

$Bh=2q/\pi \; Emax \; sen(\pi/q) \; cos(h\pi/q) \; 1/(1-h^2)$

Poiché
$q/\pi \; Emax \; sen(\pi/q) = Edo$

si ottiene:

$Bh= Edo \; 2/(h^2-1) \; [-cos(h\pi/q)]$ (4) .

Considerata la relazione (3), nella espressione (4) si ha che:

$cos(h\pi/q)= cos(kq\pi/q)= cos(k\pi)= \pm 1$

Nella Tab.A3.I che segue sono indicati alcuni valori delle ampiezze e delle frequenze tipiche per convertitori, al variare del numero di pulsazioni.

Tab.A3.I: Ampiezze delle armoniche della tensione raddrizzata in % della Edo (α=0, μ=0)

	q		
h	**2**	**6**	**12**
1	-	-	-
2	66.7	-	-
3	-	-	-
4	13.3	-	-
5	-	-	-
6	5.71	5.71	-
7	-	-	-
8	3.17	-	-
9	-	-	-
10	2.02	-	-
11	-	-	-
12	1.40	1.40	1.40
13	-	-	-
14	1.03	-	-
15	-	-	-
16	0.78	-	-
17	-	-	-
18	0.62	0.62	-
19	-	-	-
20	0.50	-	-
21	-	-	-
22	0.41	-	-
23	-	-	-
	0.35	0.35	0.35