Proprietà fondamentali dei vettori

1. Grandezze scalari e vettoriali

Alcune grandezze fisiche sono completamente descritte da un singolo valore numerico (la loro misura). Tali grandezze sono dette *scalari*.
Esempi:
a) la massa;
b) l'intervallo di tempo tra due eventi.

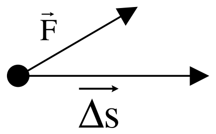
Altre grandezze fisiche richiedono, per una descrizione completa, che siano specificati anche una direzione e un verso. Tali grandezze sono dette *vettoriali*.
Esempi:
a) lo spostamento di un punto materiale;
b) la forza.

Le grandezze vettoriali possono essere rappresentare da un segmento orientato.
La lunghezza del segmento è rappresentativa del valore numerico che dà la misura della grandezza (detta ampiezza, modulo o intensità): a segmenti di lunghezza doppia associamo un'ampiezza doppia, ecc.
La direzione e il verso del segmento rappresentano ovviamente la direzione e il verso della grandezza fisica.

Simboli utilizzati nel corso:

$\mathbf{a}$, $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$	Vettori
a, $\lvert\vec{a}\rvert$, $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	Moduli
A	Grandezze scalari

Attenzione!
La lunghezza del segmento che rappresenta un dato vettore è determinata in relazione ad un'unità di misura preassegnata. Se in una rappresentazione grafica coesistono grandezze fisiche diverse (come forza e spostamento) le lunghezze dei segmenti orientati sono determinate in base a diverse unità di misura (anche se di solito ciò non viene menzionato esplicitamente).

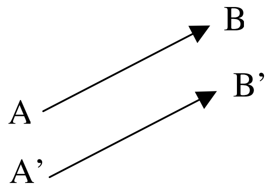


Quindi, con riferimento alla figura, non possiamo confrontare i due vettori concludendo che la forza ha modulo maggiore dello spostamento!
Anche per i vettori, i confronti si possono fare esclusivamente tra grandezze omogenee.

2. Segmenti orientati come vettori

Nozione geometrica di vettore

Due segmenti orientati si dicono *equipollenti* se hanno uguale lunghezza, e sono paralleli e concordi.
Per completare la definizione, affermeremo che i segmenti con estremi coincidenti sono tra loro equipollenti.



Segmenti equipollenti

L'equipollenza gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva; dunque è una *relazione di equivalenza*.

Ogni relazione di equivalenza divide l'insieme di definizione in sottoinsiemi disgiunti, detti *classi di equivalenza*. Ad ogni classe di equivalenza appartengono elementi equivalenti tra loro.

Nel caso della relazione di equipollenza, ad ogni classe apparterranno tutti i segmenti di uguale lunghezza, paralleli e concordi. Diremo che ciascuna classe è un vettore.

In sintesi:
un vettore è rappresentato da un segmento orientato;
due segmenti orientati che abbiano la stessa lunghezza, e siano paralleli e concordi individuano lo stesso vettore.

L'origine di un segmento orientato è detta *punto di applicazione* (in figura, A e A' sono i punti di applicazione dei segmenti AB e A'B' rispettivamente).
In base a quanto detto, due segmenti equipollenti che abbiano diversi punti di applicazione individuano lo stesso vettore. Diremo perciò che *un vettore è individuato dalla lunghezza del segmento (modulo), dalla direzione e dal verso, ma non dal punto di applicazione*.

Nota: il fatto che più segmenti distinti corrispondano allo stesso vettore non deve sorprendere. In modo analogo, frazioni distinte come $\frac{5}{3}; \frac{10}{6}; \frac{15}{9}$ ecc. corrispondono allo stesso numero razionale.

Modulo di un vettore

Si dice modulo di un vettore $\overrightarrow{AB}$ (e si indica con $\left|\overrightarrow{AB}\right|$) la misura della lunghezza del segmento AB rispetto ad una prefissata unità di misura.
Poiché il modulo è una misura di lunghezza, si ha sempre $\left|\overrightarrow{AB}\right| \geq 0$

Il vettore nullo

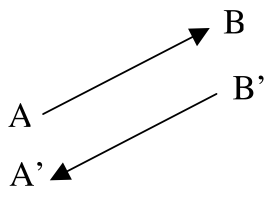
Il modulo è nullo solo nel caso in cui il segmento abbia estremi coincidenti. Il vettore corrispondente viene detto vettore nullo e indicato con il simbolo 0 oppure **0**.

Il vettore opposto

Dato un vettore $\overrightarrow{AB}$, chiamiamo vettore opposto il vettore $\overrightarrow{BA}$.

Si scrive: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Dunque il vettore opposto ha lo stesso modulo, la stessa direzione e verso opposto del vettore dato.

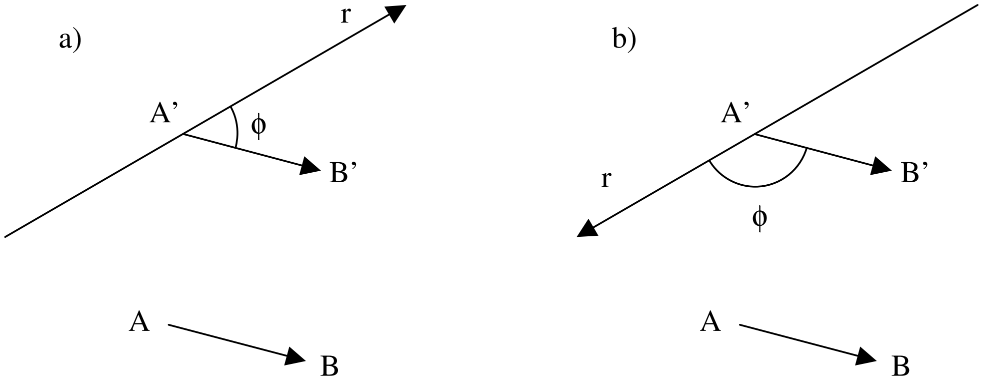


Vettori opposti

Angolo (non orientato) tra un vettore e una retta orientata.

Si considerino il segmento AB, rappresentativo del vettore $\overrightarrow{AB}$, e la retta orientata r.
Si costruisce il segmento A'B', equipollente ad AB, con A' giacente su r. Si individua così l'angolo convesso ϕ (cioè minore di 180°) racchiuso tra il segmento A'B' e la semiretta A'r.
Per definizione, ϕ è l'angolo (non orientato) tra il vettore $\overrightarrow{AB}$ e la retta r .

Attenzione ai versi della retta e del vettore!
a) $\phi < 90°$ (acuto)
b) $\phi > 90°$ (ottuso)



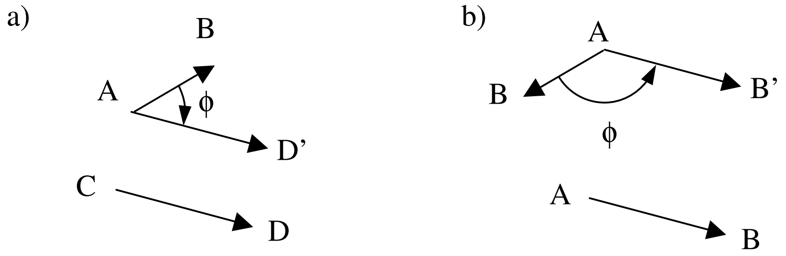
Angolo (orientato) tra due vettori.

Si considerino il segmento AB, rappresentativo del vettore $\overrightarrow{AB}$, e il segmento CD, rappresentativo del vettore $\overrightarrow{CD}$.
Si costruisce il segmento AD', equipollente a CD, e avente il primo estremo coincidente con il primo estremo di AB. Si individua così l'angolo convesso ϕ racchiuso tra AB (*primo lato*) e AD' (*secondo lato*).

Per definizione, ϕ è l'angolo orientato tra il vettore $\overrightarrow{AB}$ e il vettore $\overrightarrow{CD}$.

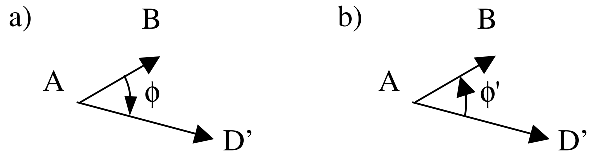
Attenzione al segno dell'angolo! Nella definizione di angolo orientato, si ruota il *primo* lato fino a sovrapporlo al *secondo*. Se la rotazione avviene in senso antiorario, l'angolo è positivo; altrimenti, è negativo. Poiché nel nostro caso il primo lato dell'angolo è $\overrightarrow{AB}$, si ha:

a) $\phi < 0$
b) $\phi > 0$



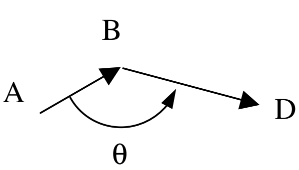
Notiamo dunque che l'angolo tra il vettore $\overrightarrow{AB}$ e il vettore $\overrightarrow{CD}$ è opposto all'angolo tra il vettore $\overrightarrow{CD}$ e il vettore $\overrightarrow{AB}$:

a) ϕ è l'angolo tra vettore $\overrightarrow{AB}$ e il vettore $\overrightarrow{CD}$; $\phi > 0$.
b) ϕ' è l'angolo tra vettore $\overrightarrow{AB}$ e il vettore $\overrightarrow{CD}$; $\phi' < 0$; $\phi' = - \phi$.

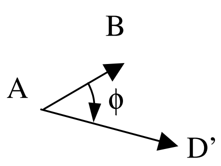


Attenzione alla situazione nella figura accanto!

L'angolo tra i vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BD}$ non è θ ma ϕ . Non si deve mai dimenticare di traslare il segmento BD e portarne l'origine nel punto di applicazione da AB per individuare l'angolo tra i vettori!



Sbagliato!



Corretto!

Componente di un vettore secondo una retta orientata.

Si considerino il segmento AB, rappresentativo del vettore $\overrightarrow{AB}$, e la retta orientata r.
Si costruisce il segmento A'B', equipollente ad AB, con A' giacente su r. Si proietta ortogonalmente il punto B' sulla retta r, individuando così il punto C'.

Il vettore $\overrightarrow{A'C'}$ è detto *vettore componente di* $\overrightarrow{AB}$ *secondo la retta r* . Si dice anche:

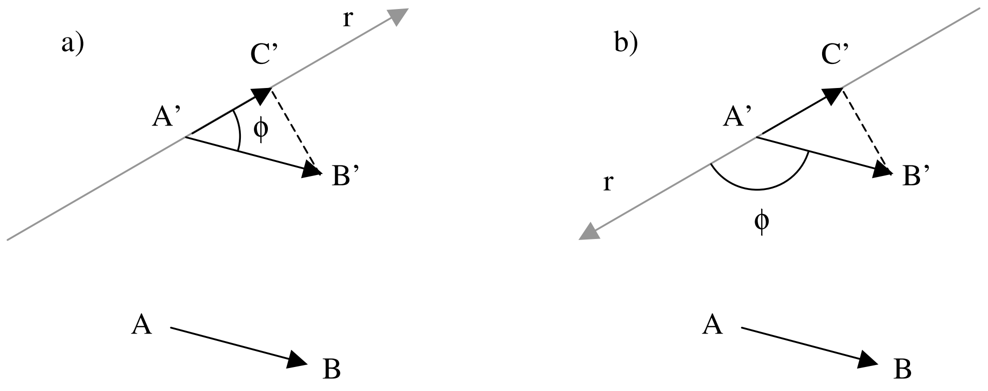
$\overrightarrow{A'C'}$ è *il vettore componente* (o semplicemente *il componente*) di $\overrightarrow{AB}$ su r.

La componente di $\overrightarrow{AB}$ su r per definizione è pari a:

$\left|\overrightarrow{A'C'}\right|$, se l'angolo ϕ è acuto;

$-\left|\overrightarrow{A'C'}\right|$, se l'angolo ϕ è ottuso.

Attenzione a non confondere i termini:
il componente è un vettore;
la componente è un numero (scalare).



Sia $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Detta v_r la componente di $\vec{v}$ su r, si ha, osservando che il triangolo A'B'C' è rettangolo in C' (figura a):

$v_r = |\vec{v}| \cos\phi = v \cos\phi$

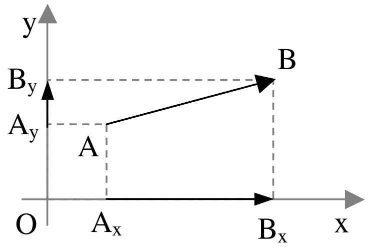
Questa relazione è corretta anche nel caso b). Infatti, essa tiene conto del segno negativo di v_r per il fatto che $\cos\phi < 0$ se ϕ è un angolo ottuso.

La relazione prevede correttamente che $v_r = 0$ quando il vettore $\vec{v}$ è perpendicolare alla retta r.

Componenti cartesiane di un vettore

Supponiamo che sia fissato nel piano un riferimento cartesiano ortogonale Oxy.

Sia dato il vettore $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. E' possibile determinare, secondo la definizione appena data, *i componenti* di $\vec{v}$ sulla retta Ox e sulla retta Oy rispettivamente.



Tali vettori prendono il nome di:

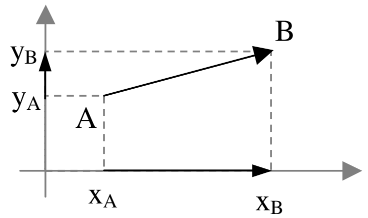
$\overrightarrow{A_xB_x}$ *componente di* $\vec{v}$ *sull'asse x*, o semplicemente *componente x di* $\vec{v}$

$\overrightarrow{A_yB_y}$ *componente di* $\vec{v}$ *sull'asse y*, o semplicemente *componente y di* $\vec{v}$

Nel caso in figura, *le componenti* del vettore $\vec{v}$ sugli assi x e y rispettivamente sono pari alle lunghezze di $\overrightarrow{A_xB_x}$ e $\overrightarrow{A_yB_y}$.

Siano (x_A, y_A) e (x_B, y_B) le coordinate degli estremi A e B del vettore. In base alla definizione, si vede facilmente che le componenti di $\vec{v}$ sono date da:

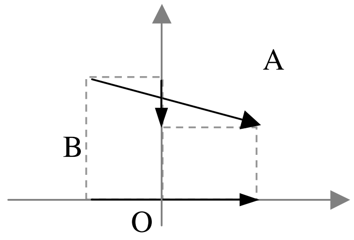
$$\begin{cases} v_x = x_B - x_A \\ v_y = y_B - y_A \end{cases}$$



Si noti che le relazioni algebriche sopra riportate hanno validità generale; sono cioè corrette anche quando una o entrambe le componenti siano negative.

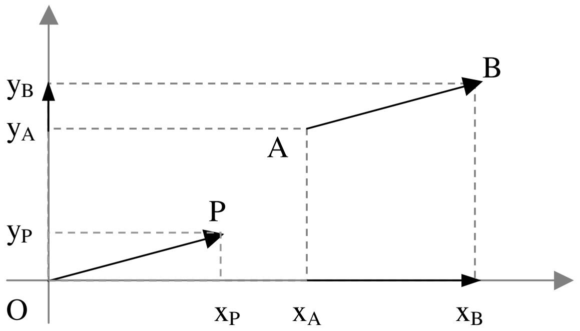
Nel caso in figura, ad esempio, si ha:

$$\begin{cases} v_x = x_B - x_A > 0 \\ v_y = y_B - y_A < 0 \end{cases}$$



Corrispondenza biunivoca tra vettori e componenti cartesiane

Dalla definizione, segue che dato un vettore è possibile determinare le sue componenti cartesiane in modo univoco (cioè, tutti i segmenti orientati equipollenti hanno le stesse componenti).



Una costruzione che talvolta risulta utile per determinare le componenti di un vettore è la seguente: dato il segmento orientato AB, si individua il segmento orientato OP ad esso equipollente, e con il punto di applicazione coincidente con l'origine O. Le componenti del vettore $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ sono allora uguali alle coordinate cartesiane del punto P:

$$\begin{cases} v_x = x_P \\ v_y = y_P \end{cases}$$

E' vero anche il viceversa: assegnata una coppia di numeri (a, b), si individua uno e un solo vettore le cui componenti siano:

$$\begin{cases} v_x = a \\ v_y = b \end{cases}$$

In conclusione, la relazione che ad ogni vettore associa le sue coordinate cartesiane in un riferimento assegnato è *biunivoca*:

$$\vec{v} \leftrightarrow (v_x, v_y)$$

In pratica, diremo che è assegnato un vettore se è assegnato un segmento orientato che lo rappresenta, o anche se sono assegnate le sue componenti cartesiane in un dato riferimento. Ad esempio, se in un problema è chiesto di determinare un vettore forza, possiamo dire di aver risolto il problema se sappiamo disegnare un segmento orientato che rappresenti la forza (cioè, conosciamo *modulo*, *direzione* e *verso* della forza); oppure conosciamo le *componenti* del vettore in un dato riferimento.

Dare il solo valore del modulo non è sufficiente!

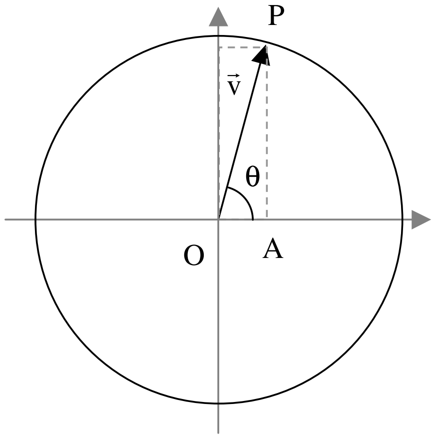
Visto che un vettore è identificato in modo univoco dalle sue coordinate cartesiane in un riferimento assegnato, si scrive talvolta:

$$\vec{v} = (v_x, v_y)$$

identificando il vettore con la coppia delle sue componenti.

Relazioni tra modulo e direzione di un vettore, e componenti cartesiane

Sia $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, e siano (v_x, v_y) le componenti cartesiane in un riferimento.



Il modulo di $\vec{v}$ è pari alla lunghezza del segmento OP ; inoltre la componente v_x è la lunghezza del segmento OA, la componente v_y la lunghezza del segmento AP.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OAP si ha allora:

$$v = \left| \overrightarrow{OP} \right| = \sqrt{\left(v_x^2 + v_y^2\right)}$$

Inoltre, si ha:

$$\begin{cases} v_x = v \cos\theta \\ v_y = v \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Si noti che queste relazioni sono corrette anche nel caso in cui una o entrambe le componenti siano negative.