

Nozione di spazio vettoriale

E' possibile definire varie operazioni algebriche che operino su vettori.

Le operazioni fondamentali sono le seguenti:

a) somma tra due vettori: $(\vec{a}, \vec{b}) \rightarrow \vec{c} \mid \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

La somma è un'operazione che a due vettori dati, associa un vettore.

b) prodotto di uno scalare per un vettore: $(A, \vec{a}) \rightarrow \vec{c} \mid A \vec{a} = \vec{c}$

Il prodotto di uno scalare per un vettore associa, ad uno scalare e ad un vettore dati, un vettore.

Nell'algebra ordinaria, siamo abituati a operare su oggetti tutti appartenenti allo stesso insieme (i numeri).

Nell'algebra dei vettori, abbiamo invece due insiemi di oggetti distinti: gli *scalari* (cioè i numeri) e i *vettori* (segmenti orientati). Quindi c'è più libertà nel definire particolari operazioni algebriche.

L'operazione di prodotto di uno *scalare* per un *vettore* ci dà un *vettore*. Ma è possibile definire altri tipi di prodotti:

il *prodotto scalare*, che a *due vettori* dati associa uno *scalare*;

il *prodotto vettoriale*, che a *due vettori* dati associa un *vettore*.

Attenzione a non fare confusione!

Somma tra due vettori

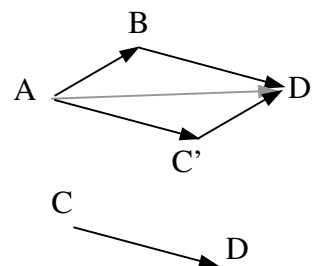
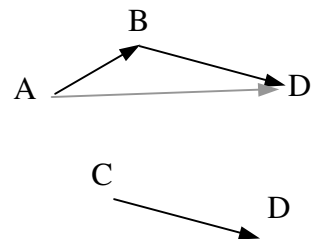
Siano dati due segmenti orientati AB e CD.

Si costruisce il segmento orientato BD', equipollente a CD, e applicato nel punto terminale di AB. Resta così individuato il segmento orientato AD'.

Per definizione, il vettore $\overrightarrow{AD'}$ è la somma dei vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$:

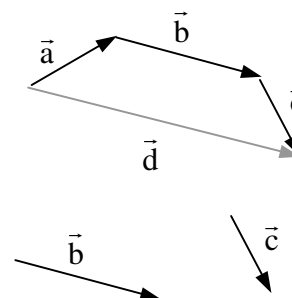
$$\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$$

Questa regola è equivalente alla *regola del parallelogrammo* (vedi figura).



E' facile estendere la regola alla somma di più vettori (vedi figura):

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$$



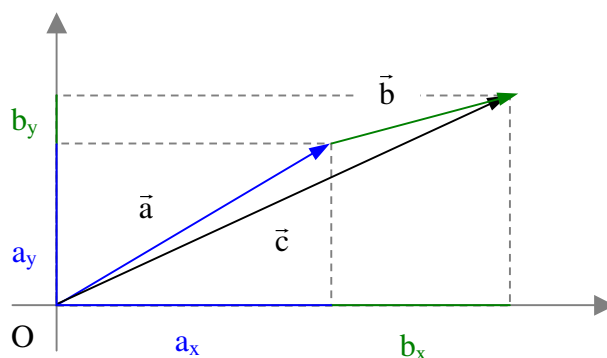
Componenti cartesiane del vettore somma

Supponiamo che $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

Siano (a_x, a_y) , (b_x, b_y) , (c_x, c_y) le componenti dei vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

Si dimostra facilmente (vedi figura) che:

$$\begin{cases} a_x + b_x = c_x \\ a_y + b_y = c_y \end{cases}$$



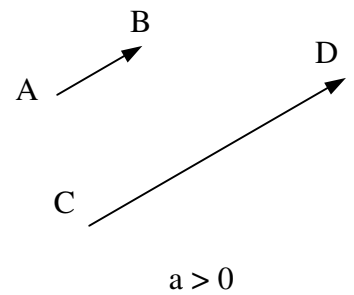
Prodotto di uno scalare per un vettore

Siano dati uno scalare A e un segmento orientato $\overrightarrow{AB}$.

Se lo scalare a è positivo, il vettore $\overrightarrow{CD} = a \overrightarrow{AB}$ è, per definizione, parallelo e concorde ad $\overrightarrow{AB}$, e di modulo dato da:

$$|\overrightarrow{CD}| = a |\overrightarrow{AB}|$$

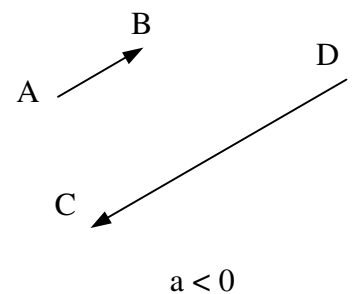
Ad esempio, in figura, $\overrightarrow{CD} = 3 \overrightarrow{AB}$



Se lo scalare a è negativo, il vettore $\overrightarrow{CD} = a \overrightarrow{AB}$ è, per definizione, parallelo e discorde ad $\overrightarrow{AB}$, e di modulo dato da:

$$|\overrightarrow{CD}| = a |\overrightarrow{AB}|$$

Ad esempio, in figura, $\overrightarrow{CD} = -3 \overrightarrow{AB}$



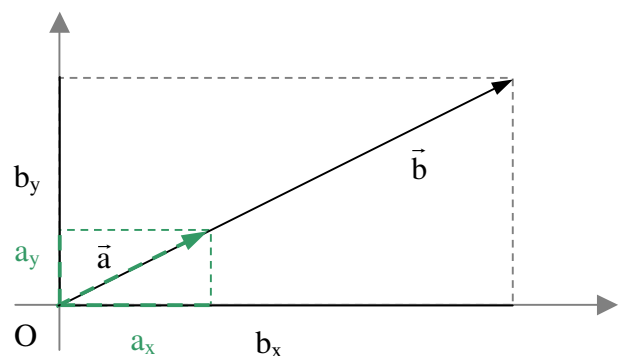
Componenti cartesiane del prodotto di uno scalare per un vettore

Supponiamo che $A \vec{a} = \vec{b}$.

Siano (a_x, a_y) , (b_x, b_y) le componenti dei vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$

Si dimostra facilmente (vedi figura) che:

$$\begin{cases} A a_x = b_x \\ A a_y = b_y \end{cases}$$



Componenti cartesiane di una combinazione lineare tra vettori

Il vettore $\vec{c} = A \vec{a} + B \vec{b}$ si dice *combinazione lineare* dei vettori $\vec{a}, \vec{b}$.

In base alle precedenti considerazioni si ha:

$$\begin{cases} c_x = A a_x + B b_x \\ c_y = A a_y + B b_y \end{cases}$$

Vediamo dunque che un'equazione vettoriale ($\vec{c} = A \vec{a} + B \vec{b}$) corrisponde a due equazioni scalari, cioè un'equazione per ciascuna componente.

Proprietà formali della somma tra vettori

- | | |
|---|-------------------------------|
| 1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ | Proprietà commutativa |
| 2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ | Proprietà associativa |
| 3. $\exists \vec{0} \mid \vec{0} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ | Esistenza del vettore nullo |
| 4. $\forall \vec{a} \exists -\vec{a} \mid \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ | Esistenza del vettore opposto |

Proprietà formali del prodotto di uno scalare per un vettore

- | | |
|---|--------------------------------|
| 1. $(A + B)\vec{a} = A\vec{a} + B\vec{a}$ | I proprietà distributiva |
| 2. $A(\vec{a} + \vec{b}) = A\vec{a} + A\vec{b}$ | II proprietà distributiva |
| 3. $(AB)\vec{a} = A(B\vec{a})$ | Proprietà associativa mista |
| 4. $1\vec{a} = \vec{a} \quad \forall \vec{a}$ | Elemento neutro moltiplicativo |

L'insieme dei vettori, dotato delle operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare che godono delle proprietà sopra elencate, si dice *spazio vettoriale*.