

Prodotto scalare tra due vettori

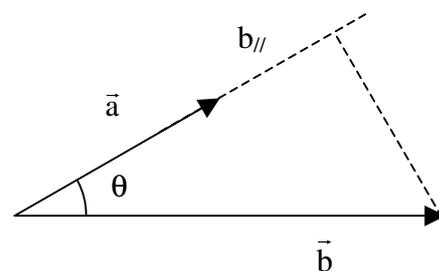
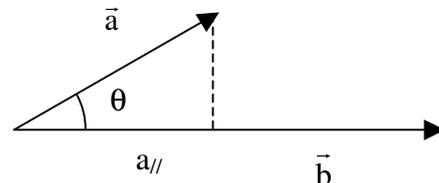
Consideriamo due vettori \vec{a} , \vec{b} .

Si definisce prodotto scalare e si indica con il simbolo $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (si legge *a scalar b*) lo scalare ottenuto come segue.

1. Si determina la componente $a_{//}$ del vettore \vec{a} nella direzione di \vec{b}
2. Si moltiplica $a_{//}$ per il modulo di \vec{b} :
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_{//} b$

In termini dell'angolo θ tra i vettori \vec{a} , \vec{b} , si ha:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_{//} b = a \cos\theta b = a b \cos\theta$$



Proprietà formali del prodotto scalare

Dati i vettori \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} e lo scalare A, si ha:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \text{Proprietà commutativa}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \quad \text{Proprietà distributiva}$$

$$(A \vec{a}) \cdot \vec{b} = A (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Prodotti scalari dei versori degli assi coordinati

In base alle definizioni dei versori \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} , e notando in particolare che essi sono a due a due perpendicolari tra loro, seguono le relazioni:

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$$

Prodotto scalare in termini delle componenti dei vettori

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

Infatti, usando i versori degli assi coordinati si ha:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \hat{i} + a_y \hat{j}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j}) = \\ &= a_x b_x (\hat{i} \cdot \hat{i}) + a_x b_y (\hat{i} \cdot \hat{j}) + a_y b_x (\hat{j} \cdot \hat{i}) + a_y b_y (\hat{j} \cdot \hat{j}) = a_x b_x + a_y b_y\end{aligned}$$

Relazioni utili

In base alla definizione di prodotto scalare, valgono le relazioni:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \quad \text{Il modulo quadro di ogni vettore è pari al prodotto scalare del vettore per se stesso.}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a b} \quad \text{Il coseno dell'angolo tra due vettori è pari al rapporto tra il prodotto scalare e il prodotto dei moduli.}$$