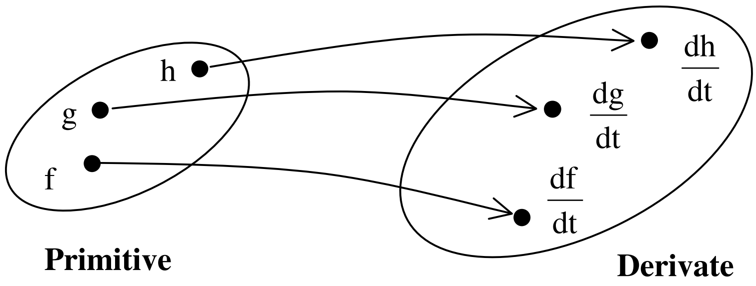
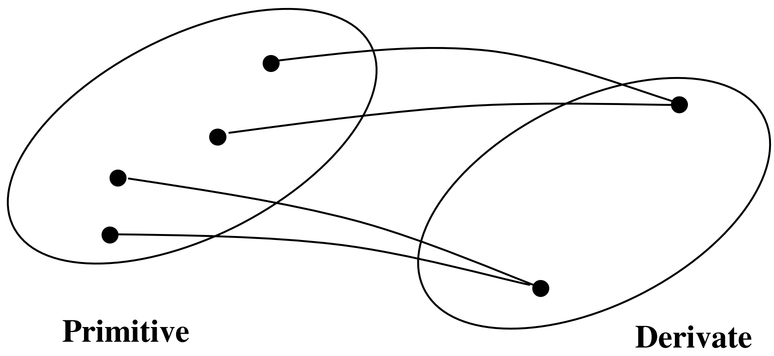
Nozioni elementari di Analisi Matematica applicate alla Fisica Generale

Nozione di integrale indefinito

La derivazione può essere interpretata come una regola che, per ogni funzione assegnata (primitiva), ci permette di determinarne un'altra (la sua derivata). Da questo punto di vista si può considerare la derivata come un'applicazione, definita nell'insieme delle funzioni, a valori nell'insieme delle funzioni.



Nasce allora la questione, se sia possibile trovare l'applicazione inversa, che ad ogni derivata associa la sua primitiva. In realtà ciò non è strettamente possibile, perché molte diverse funzioni hanno la stessa derivata. Precisamente, in base alle regole di derivazione, tutte le funzioni del tipo $f(t) + C$, con C costante arbitraria, hanno derivata uguale.



L'insieme delle funzioni che hanno la stessa derivata prende il nome di *integrale indefinito* della funzione, e si scrive:

$g = \frac{df}{dt}$ — g è la *derivata* di f

$f = \int g \, dt$ — f è *l'integrale indefinito* di g

Esempio

Data la funzione $x = 3\,t^2$, la funzione $v = 6\,t$ è la *derivata*.
La funzione x è una *primitiva* di v; ma esistono molte altre primitive, come ad esempio la funzione $x = 3\,t^2 + 2$.
L'insieme delle primitive di v è *l'integrale indefinito*:

$$x = \int v\,dt = 3\,t^2 + C$$

L'integrale indefinito si ottiene quindi aggiungendo ad una delle primitive di v una costante arbitraria C.

Algoritmi di integrazione indefinita

Nel Corso di Fisica Generale risultano fondamentali poche nozioni elementari relative al calcolo di integrali indefiniti, riassunte nella tabella seguente.

Primitiva	**Integrale indefinito**	
$f + g$	$\int (f + g)\,dt = \int f\,dt + \int g\,dt$	L'integrale della somma di due funzioni è uguale alla somma degli integrali.
$A\,f$	$\int (Af)\,dt = A \int f\,dt$	La costante A "esce dal segno di integrale".
$k\,t^n$	$\int \left(k\,t^n\right) dt = \frac{k\,t^{n+1}}{n+1} + C$	L'integrale di un monomio è un monomio di grado superiore. La formula vale $\forall\, n \in Z \mid n \neq -1$
$a\,\text{sen}(\omega\,t)$	$\int a\,\text{sen}\,(\omega\,t)\,dt = -\frac{a\cos(\omega\,t)}{\omega} + C$	
$a\cos(\omega\,t)$	$\int a\cos(\omega\,t)\,dt = \frac{a\,\text{sen}\,(\omega\,t)}{\omega} + C$	

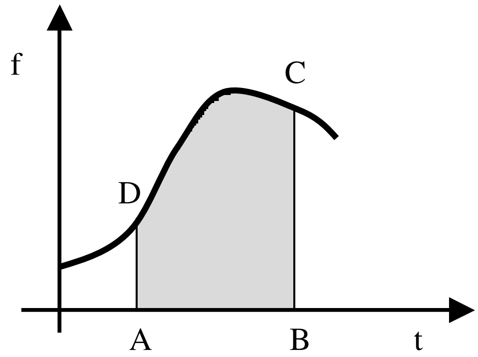
Esempio: Si calcoli l'integrale indefinito del polinomio $v = A\,t + B$

Usando la regola per l'integrale della somma di funzioni e quella per l'integrale dei monomi, troviamo:

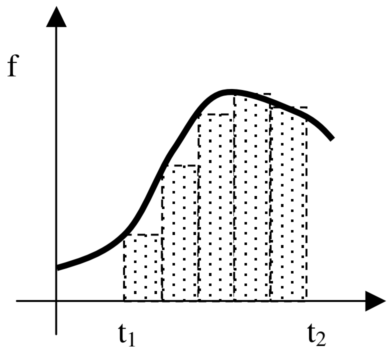
$$\int v\,dt = \frac{1}{2} A\,t^2 + B\,t + C$$

Nozione di integrale indefinito

Si consideri il seguente problema: come si determina l'area *A* della porzione di piano ABCD, cioè del rettangoloide compreso tra l'asse delle ascisse e una porzione del grafico di una certa funzione f(t)?



Procedendo per approssimazioni successive, si può innanzitutto sostituire al rettangoloide l'insieme di rettangoli rappresentati in figura.



La base del rettangolo i-mo è un segmento, il cui primo estremo è t_i, il secondo t_{i+1}. L'altezza è il valore della funzione f in t_i, cioè $f(t_i)$; la base è $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. L'area è allora $A_i = f(t_i)\,\Delta t_i$; e quindi l'insieme dei rettangoli ha area totale:

$$A_1 = \sum_1^n f(t_i)\,\Delta t_i$$

Qui il pedice 1 indica che A_1 è la prima stima dell'area *A*. In seconda approssimazione, si possono scegliere rettangoli con base più piccola. Se ad esempio nella prima approssimazione si fossero considerati n rettangoli di base pari a Δt, in seconda approssimazione si potrebbero prendere 2n rettangoli di base $\frac{\Delta t}{2}$, ottenendo la stima A_2; poi 4n rettangoli di base $\frac{\Delta t}{4}$; e così via.

Da un punto di vista formale, allora, l'area A può allora essere espressa sotto forma di limite:

$$A = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{1}^{n} f(t_i)\,\Delta t$$

Questo particolare limite è indicato col simbolo

$$A = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$$

che prende il nome di *integrale definito* (e si legge: "A è l'integrale di f in *de t* tra t_1 e t_2").
I simboli t_1, t_2 indicano gli estremi della base del rettangoloide e prendono il nome di *estremi di integrazione*. La variabile t prende il nome di *variabile di integrazione* o *variabile muta*. Da un punto di vista formale, il simbolo t può essere sostituito (ad esempio, con t') senza che il risultato cambi.

Algoritmo di calcolo dell'integrale definito

L'integrale definito si valuta facilmente ricorrendo al teorema fondamentale del calcolo integrale, la cui dimostrazione è riportata in tutti i manuali elementari di analisi matematica.
Il procedimento è il seguente. Si debba calcolare l'integrale definito:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$$

In primo luogo si determina una qualunque primitiva F della funzione f. Poi si valuta F negli estremi di integrazione; si usa infine la relazione:

$$A = F(t_1) - F(t_2)$$

Esempio

Si voglia calcolare l'integrale definito:

$$A = \int_{2}^{3} t^2\,dt$$

Usando la tabella degli integrali indefiniti si trova la primitiva $F = \frac{t^3}{3}$

Si ha quindi:

$$A = F(3) - F(2) = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$$