Università di Cassino

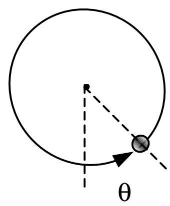
Temi di Fisica Generale per l'Ingegneria

Prof. U. Scotti di Uccio

a. Cinematica

Esercizio 1

Un piccolo oggetto si muove di moto circolare. La legge oraria è espressa dalla relazione $\theta = A \text{ sen}\left(\Omega\ t\right)$, con A, Ω costanti assegnate. Detto r il raggio della traiettoria circolare, si determini il valore delle seguenti variabili cinematiche all'istante t_o:



a) la velocità $v(t_o)$;
b) l'accelerazione centripeta $a_c(t_o)$;
c) l'accelerazione tangenziale $a_t(t_o)$.

A = 0.78 ; Ω = 0.32 s^{-1} ; r= 11 cm ; t_o = 1.0 s
(Suggerimento: si faccia attenzione che la calcolatrice sia impostata per il calcolo delle funzioni goniometriche di variabili espresse in *radianti*)

Soluzione

La velocità angolare si ottiene dalla relazione:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = A\ \Omega \cos\left(\Omega\ t\right) \text{ , da cui } \omega\left(t_o\right) = A\ \Omega \cos\left(\Omega\ t_o\right) = 0.24\ s^{-1}$$

La velocità $v(t_o)$ è allora data da:

$$v\left(t_o\right) = \omega\left(t_o\right)\ r = 0.026\ m\ s^{-1}$$

L'accelerazione centripeta vale:

$$a_c\left(t_o\right) = \frac{v^2\left(t_o\right)}{r} = 0.0061\ m\ s^{-2}$$

L'accelerazione angolare vale:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = -A\ \Omega^2 \text{ sen}\left(\Omega\ t\right)\text{, da cui } \alpha\left(t_o\right) = -A\ \Omega^2 \text{ sen}\left(\Omega\ t_o\right) = 0.025\ s^{-2}$$

L'accelerazione tangenziale vale infine:

$a_t(t_o) = \alpha(t_o)\ r = 0.0028\ m\ s^{-2}$

Esercizio 2

Una palla viene lasciata cadere (da ferma) dall'altezza h nell'istante t = 0, e rimbalza fino all'altezza h'. Determinare in che istante t tocca il suolo la seconda volta, trascurando la durata del primo urto. Si assuma un sistema di riferimento con l'origine al livello del suolo, e l'asse y orientato verso l'alto.

h = 1.5 m ; h' = 1.2 m

Soluzione

Il moto della palla può essere diviso in due fasi.
Nella prima fase, si ha una caduta libera dall'altezza h. Detto t_1 il tempo necessario a toccare il suolo, vale l'equazione:

$$0 = h - \frac{1}{2} g\, t_1^2 \text{ , da cui } t_1 = \sqrt{\frac{2\,h}{g}} = 0.55 \text{ s}$$

Della seconda fase, si sa che l'altezza massima raggiunta è h', e il moto ha inizio da un'altezza y = 0. Detto t_2 il tempo necessario per arrivare all'altezza h', valgono le equazioni:

$$\begin{cases} h' = v_o\, t_2 - \frac{1}{2} g\, t_2^2 \\ 0 = v_o - g\, t_2 \end{cases} \qquad \text{da cui } t_2 = \sqrt{\frac{2\,h'}{g}} = 0.49 \text{ s}$$

Infine, detto t_3 il tempo necessario per toccare nuovamente il suolo:

$$0 = h' - \frac{1}{2} g\, t_3^2 \text{ , da cui } t_3 = \sqrt{\frac{2\,h'}{g}} = 0.49 \text{ s}$$

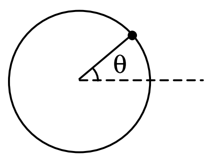
Il tempo totale vale dunque:
$t = t_1 + t_2 + t_3 = 1.54$ s

Esercizio 3

Una particella si muove su una circonferenza di raggio r. La legge oraria, espressa in termini dell'angolo θ formato dal vettore posizione con l'asse polare è:

$$\theta(t) = \theta_o \cos(\Omega\, t)$$

Determinare le componenti centripeta a_c e tangenziale a_t dell'accelerazione all'istante $t = t_o$.



$r = 1.2$ m , $\theta_o = 0.785$; $\Omega = 2.5\ s^{-1}$; $t_o = 0.314$ s

Soluzione

Derivando rispetto al tempo la legge oraria si ottiene prima la velocità angolare ω, poi l'accelerazione angolare α:

$$\omega(t) = -\Omega\, \theta_o \operatorname{sen}(\Omega\, t)$$

$$\alpha(t) = -\Omega^2\, \theta_o \cos(\Omega\, t)$$

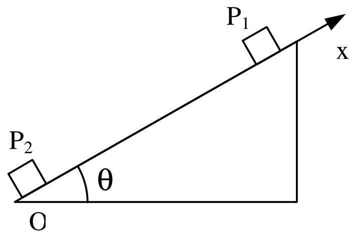
Quindi, ricordando che $a_t = r\,\alpha$; $a_c = r\,\omega^2$, segue che:

$$a_c(t_o) = r\,\Omega^2\,\theta_o^2 \operatorname{sen}^2(\Omega\, t_o) = 4.2 \text{ m s}^{-2}$$

$$a_t(t_o) = -r\,\Omega^2\,\theta_o \cos(\Omega\, t_o) = 2.3 \text{ m s}^{-2}$$

Esercizio 4

Un punto materiale P_1 si muove con velocità iniziale v_o rivolta verso l'alto su un piano inclinato liscio. Nel momento in cui raggiunge la massima altezza (istante t_o), un secondo punto materiale P_2 parte dalla stessa posizione O con la stessa velocità iniziale. In che istante t si incontreranno?



Si assuma O come origine del sistema di riferimento indicato in figura; si indichino con il pedice 1 (2) le variabili cinematiche di P_1 (P_2) .

$v_o = 3.8 \text{ m s}^{-1}$, $\theta = 30°$

Soluzione

I punti si muovono di moto uniformemente accelerato, con accelerazione $a_x = -g \operatorname{sen} \theta$. Le equazioni del moto di P_1 sono:

$$v_1 = v_o - g \operatorname{sen}\theta \; t$$

$$x_1 = v_o \; t - \frac{1}{2} g \operatorname{sen}\theta \, t^2$$

Alla quota massima, la velocità si annulla. Ponendo v = 0 nella prima equazione si trova quindi il tempo t_o:

$$t_o = \frac{v_o}{g \operatorname{sen}\theta} = 0.77 \text{ s}$$

Le equazioni del moto di P_2 sono allora:

$$v_2 = v_o - g \operatorname{sen}\theta \; (t - t_o)$$

$$x_2 = v_o \; (t - t_o) - \frac{1}{2} g \operatorname{sen}\theta \, (t - t_o)^2$$

I punti si incontrano nell'istante t che rende uguali i valori di x_1 e x_2; si ha quindi:

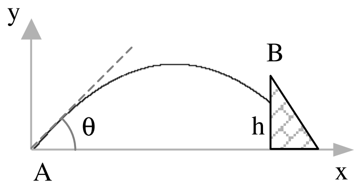
$$v_o \, t - \frac{1}{2} g \operatorname{sen}\theta \, t^2 = v_o \; (t - t_o) - \frac{1}{2} g \operatorname{sen}\theta \, (t - t_o)^2$$

da cui si ricava t. Dopo semplici passaggi si trova:

$$t = \frac{3}{2} t_o = 1.1 \text{ s}$$

Esercizio 5

Un calciatore, a distanza d dalla porta, tira frontalmente verso un punto della porta posto ad altezza h. Determinare la velocità iniziale v_o del pallone.



$\theta = 45°$, d = 15 m ; h = 2.2 m

Soluzione

Le equazioni del moto della sfera sono:

$$\begin{cases} x = v_{ox}\ t \\ y = v_{oy}\ t - \dfrac{1}{2} g\, t^2 \end{cases}$$

Eliminando t tra le due equazioni e ricordando che

$$\begin{cases} v_{ox} = v_o \cos\theta \\ v_{oy} = v_o \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

si ottiene l'equazione della traiettoria:

$$y = \operatorname{tg}\theta\ x - \frac{g}{2\, v_o^2 \cos^2\theta}\, x^2$$

Imponendo che la palla passi per il punto (d, h) si ha:

$$h = \operatorname{tg}\theta\ d - \frac{g}{2\, v_o^2 \cos^2\theta}\, d^2$$

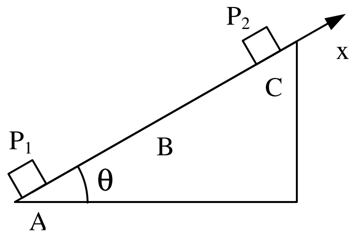
da cui si ricava v_o:

$$v_o = \frac{d}{\cos\theta}\sqrt{\frac{g}{2\left(d \operatorname{tg}\theta - h\right)}} = 13 \text{ m s}^{-1}$$

Esercizio 6

Un punto materiale P_1 si muove con velocità iniziale $v_1(0)$ rivolta verso l'alto su un piano inclinato liscio.

a) Determinare il tempo t impiegato per raggiunge il punto di massima altezza B, e la posizione x_B di tale punto.
b) Un secondo punto materiale P_2, inizialmente fermo, viene posto in un punto C. Determinare la posizione x_C del punto C se si desidera che P_1 e P_2 , nello stesso istante, si incontrino in B.



Si assuma A come origine del sistema di riferimento indicato in figura.

$v_o = 13$ m s^{-1} , $\theta = 30°$

Soluzione

I punti si muovono di moto uniformemente accelerato, con accelerazione $a_x = -g \text{ sen } \theta$. Le equazioni del moto di P_1 sono:

$$v = v_1(0) - g \text{ sen } \theta \ t$$

$$x = v_1(0) \ t - \frac{1}{2} g \text{ sen } \theta \ t^2$$

Alla quota massima, la velocità si annulla. Ponendo v = 0 nella prima equazione si trova quindi il tempo t:

$$t = \frac{v_1(0)}{g \text{ sen } \theta} = 2.65 \text{ s}$$

e dalla seconda equazione la posizione x_B:
$x_B = 17.2$ m

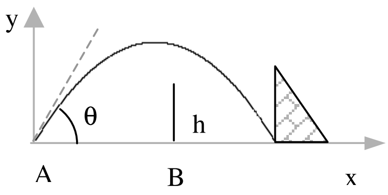
Infine, la coordinata iniziale del punto C si determina scrivendo la sua legge oraria e imponendo che nell'istante t esso si trovi in B:

$$x_B = x_C - \frac{1}{2} g \text{ sen } \theta \ t^2 \ ;$$

$$x_C = x_B + \frac{1}{2} g \text{ sen } \theta \ t^2 = 34.4 \text{ m}$$

Esercizio 7

Un calciatore, a distanza d dalla porta, tira frontalmente eseguendo un pallonetto per scavalcare il portiere. La palla, scagliata con velocità iniziale v_o , andrebbe a toccare terra esattamente sulla linea. Sapendo che il portiere si trova inizialmente in B, e che in quella situazione può afferrare il pallone fino ad un'altezza h, quanto deve arretrare verso la porta per parare il tiro? (si indichi con Δx tale valore)



d = 20 m ; AB = 15 m ; h = 2.7 m ; θ = 60°

Soluzione

Le equazioni del moto della sfera sono:

$$\begin{cases} x = v_{ox}\ t \\ y = v_{oy}\ t - \frac{1}{2} g\, t^2 \end{cases}$$

Eliminando t tra le due equazioni e ricordando che

$$\begin{cases} v_{ox} = v_o \cos\theta \\ v_{oy} = v_o \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

si ottiene l'equazione della traiettoria:

$$y = \operatorname{tg}\theta\ x - \frac{g}{2\, v_o^2 \cos^2\theta}\, x^2$$

Imponendo che la palla passi per il punto (d, 0) si ha:

$$0 = \operatorname{tg}\theta\ d - \frac{g}{2\, v_o^2 \cos^2\theta}\, d^2$$

da cui si ricava v_o:

$$v_o = \frac{d}{\cos\theta}\sqrt{\frac{g}{2\, d\, \operatorname{tg}\theta}} = 15 \text{ m s}^{-1}$$

I valori di x per cui y = h sono dati dall'equazione:

$$h = \operatorname{tg}\theta\ x - \frac{g}{2\, v_o^2 \cos^2\theta}\, x^2$$

Risolvendo l'equazione di II grado si trovano le soluzioni:

$$x = \begin{cases} 18 \text{ m} \\ 1.7 \text{ m} \end{cases}$$

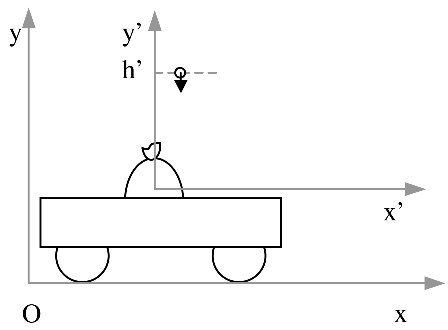
Delle due, la seconda non è consistente con i dati del problema. Il portiere in definitiva deve arretrare del tratto:

$$\Delta x = x - \overline{AB} = 3 \text{ m}$$

Esercizio 8

Un piccolo sasso cade dall'altezza h' e colpisce un sacco di sabbia che si trova sul pianale di un carro che procede in orizzontale con velocità costante v_o. Determinare:

a) l'accelerazione (a'_x, a'_y) del sasso nel sistema di riferimento O' x'y' solidale al carro;
b) la velocità (v'_x, v'_y) del sasso, in questo stesso sistema di riferimento, un momento prima dell'urto.



$h' = 8.3$ m ; $v_o = 35$ m s^{-1}

Soluzione

Il carro è un sistema di riferimento inerziale, sicché

$$\begin{cases} a_x' = a_x = 0 \\ a_y' = a_y = -g \end{cases}$$

In O, le relazioni cinematiche sono:

$$\begin{cases} x = 0 \\ v_x = 0 \\ y = h' - \frac{1}{2} g\, t^2 \\ v_y = -gt \end{cases}$$

L'istante t in cui il proiettile tocca il bersaglio si ottiene ponendo y = 0 :

$$0 = h' - \frac{1}{2} g\, t^2 \quad ; \quad h' = \frac{1}{2} g\, t^2 \quad ; \quad t = \sqrt{\frac{2h'}{g}} = 1.3\ \text{s}$$

e la velocità è:

$$\begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = -\sqrt{2h' g} = -12.7 \text{m s}^{-1} \end{cases}$$

Per passare al sistema O', si usa infine la relazione:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{O'}$$

da cui:

$$\begin{cases} v'_x = -v_o = -3.5\ \text{m s}^{-1} \\ v'_y = v_y = -12.7 \text{m s}^{-1} \end{cases}$$

Esercizio 9

Un punto materiale si muove sull'asse x. La legge oraria è espressa dalla relazione:

$x = A\,t^3 + B\,t^2 + C\,t + D$

Determinare il valore dell'accelerazione in tutti gli istanti (t_1, t_2, …) nei quali la velocità è nulla.

$A = 2.8$ m s^{-3} ; $B = 5.3$ m s^{-2} ; $C = 3.1$ m s^{-1} ; $D = 11$ m

Soluzione

La velocità è data in base alla definizione da:

$$v = \frac{dx}{dt} = 3\,A\,t^2 + 2\,B\,t + C$$

Gli istanti in cui v = 0 sono le soluzioni dell'equazione di II grado:

$$3\,A\,t^2 + 2\,B\,t + C = 0$$

$$t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 3\,A\,C}}{3\,A} = \begin{cases} -0.46 \text{ s} \\ -0.80 \text{ s} \end{cases}$$

L'accelerazione si calcola in base alla definizione:

$$a = \frac{dv}{dt} = 6\,A\,t + 2\,B$$

Sostituendo i due valori trovati per t si avrà:

$$a = \begin{cases} 2.9 \text{ m s}^{-2} \\ -2.9 \text{ m s}^{-2} \end{cases}$$

Esercizio 10

Un punto materiale si muove su una circonferenza con legge oraria $\theta = \theta_a + \omega_a\ t$. Un secondo punto materiale si muove, sulla stessa circonferenza, con legge oraria $\theta = \theta_b + \omega_b\ t$.
Determinare l'istante t_1 e la posizione θ_1 in cui i punti si incontrano la prima volta; determinare altresì in che istante e dove si incontrano la seconda volta.

$\theta_a = 0$; $\omega_a = 6.3\ s^{-1}$; $\theta_b = 3.1$; $\omega_b = 1.6\ s^{-1}$

Soluzione

La condizione che i punti si incontrino la prima volta è espressa dal sistema:

$$\begin{cases} \theta = \theta_a + \omega_a\ t \\ \theta = \theta_b + \omega_b\ t \end{cases}$$

Risolvendo, si trova:

$$t_1 = \frac{\theta_b - \theta_a}{\omega_a - \omega_b} = 0.66\ s \quad ; \quad \theta_1 = \theta_a + \omega_a\ t_1 = 4.15$$

I punti si incontrano di nuovo quando a ha percorso un giro in più di b. Quindi la nuova condizione da imporre è:

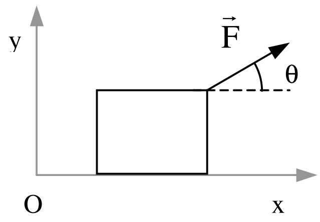
$$\begin{cases} \theta = \theta_a + \omega_a\ t \\ \theta = \theta_b + \omega_b\ t + 2\pi \end{cases}$$

per cui $t_2 = \dfrac{\theta_b - \theta_a + 2\pi}{\omega_a - \omega_b} = 2.0\ s$; $\theta_2 = \theta_a + \omega_a\ t_2 = 12.6$

b. Dinamica

Esercizio 1

Una cassa di massa m è poggiata su un piano. Una fune, tesa ad un angolo θ come mostrato in figura, applica una forza $\vec{F}$. Determinare il minimo valore di F, affinché la cassa inizi a scivolare vincendo l'attrito di stacco.

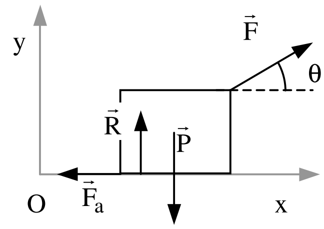


$m = 15$ Kg ; $\theta = 30°$; $\mu_s = 0.65$

Soluzione

Il diagramma di punto materiale è riportato in figura. Ne risulta l'equazione della statica:

$$\vec{F} + \vec{F}_a + \vec{R} + \vec{P} = 0$$



Proiettando sui due assi:

$$\begin{cases} -F_a + F\cos\theta = 0 \\ R + F\,\text{sen}\,\theta - P = 0 \end{cases}$$

Nella condizione di stacco, si ha inoltre:

$$F_a = \mu_s R$$

Sostituendo questa relazione nel sistema di equazioni della statica si ha:

$$\begin{cases} F\cos\theta = \mu_s R \\ R + F\,\text{sen}\,\theta - P = 0 \end{cases}$$

Questo è un sistema di 2 equazioni in 2 incognite (F, R). Risolvendo per F si ha:

$$F = \frac{P}{\left(\frac{\cos\theta}{\mu_s} + \text{sen}\,\theta\right)} = 80 \text{ N}$$

Esercizio 2

Un'auto porta un carico di massa m montato sul portapacchi sul tettuccio dell'abitacolo. Si supponga, per semplicità, che il carico sia trattenuto dalla sola forza di attrito, e che il coefficiente di attrito statico con il portapacchi sia μ_s. Determinare:

a) il massimo valore assunto dal modulo $|\vec{a}|$ dell'accelerazione in frenata, oltre il quale il carico è perduto;

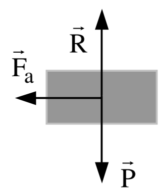
b) la massima velocità che l'auto può tenere in una curva di raggio r.

$m = 19$ Kg ; $\mu_s = 0.30$; $r = 24$ m

Soluzione

a) Un istante prima dello stacco, la II equazione di Newton applicata al carico è:

$$\vec{F}_a + \vec{P} + \vec{R} = m\,\vec{a}$$



$$\begin{cases} -F_a = m\,a \\ R - P = 0 \end{cases}$$

con la condizione $F_a = \mu_s R$. Risolvendo per a si trova:

$$a = -\frac{\mu_s\,P}{m} = -\mu_s\,g = -2.9\ \mathrm{m\,s^{-2}}\ ;\ |a| = 2.9\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

b) L'equazione di Newton ha ancora la forma:

$$\vec{F}_a + \vec{P} + \vec{R} = m\,\vec{a}$$

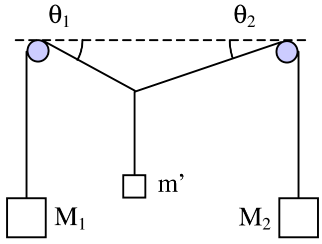
Questa volta, tuttavia, l'accelerazione è centripeta; proiettando dunque l'equazione in tale direzione, si ha:

$$F_a = \frac{m\,v^2}{r}$$

da cui:

$$v = \sqrt{\frac{r\,\mu_s\,P}{m}} = \sqrt{r\,\mu_s\,g} = 8.4\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

Esercizio 3



La massa m' è trattenuta da due funi. La prima, passando su una carrucola, è collegata alla massa M_1; la seconda, alla massa M_2. Noti gli angoli θ_1 e θ_2, assunti quando il sistema si trova in condizioni di statica, determinare il valore di M_1 e M_2.

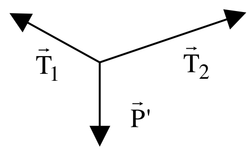
m' = 0.40 Kg ; $\theta_1 = 30°$, $\theta_2 = 20°$

Soluzione

Con riferimento al diagramma di corpo libero in figura, si ha:

$$\vec{P}' + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$$

$$\begin{cases} -T_1 \cos\theta_1 + T_2 \cos\theta_2 = 0 \\ T_1 \operatorname{sen}\theta_1 + T_2 \operatorname{sen}\theta_2 - P' = 0 \end{cases}$$



avendo proiettato l'equazione vettoriale su un asse orizzontale ed uno verticale.

Per la condizione di fune e carrucola ideali, $T_1 = P_1$ e $T_2 = P_2$; dunque:

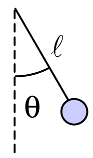
$$\begin{cases} -M_1 \cos\theta_1 + M_2 \cos\theta_2 = 0 \\ M_1 \operatorname{sen}\theta_1 + M_2 \operatorname{sen}\theta_2 - m' = 0 \end{cases}$$

Questo è un sistema di due equazioni nelle incognite M_1 ed M_2. Risolvendo si trova:

$$\begin{cases} M_1 = \dfrac{m'}{\cos\theta_1 \left(\operatorname{tg}\theta_1 + \operatorname{tg}\theta_2 \right)} = 0.49 \text{ Kg} \\ M_2 = \dfrac{m'}{\cos\theta_2 \left(\operatorname{tg}\theta_1 + \operatorname{tg}\theta_2 \right)} = 0.45 \text{ Kg} \end{cases}$$

Esercizio 4

In figura è mostrato un pendolo conico, che ruota formando un angolo di apertura θ con la verticale. Determinare le componenti del vettore accelerazione cui è soggetta la massa m. Si consideri a tale scopo il sistema di riferimento tangente, caratterizzato da un asse centripeto, uno tangenziale e un terzo diretto lungo la verticale (asse z).

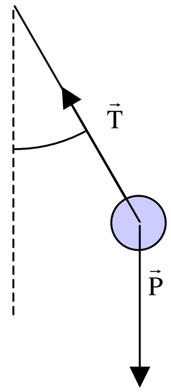


$\theta = 20°$

Soluzione

Con riferimento al diagramma di corpo libero nello schema a fianco, l'equazione della dinamica assume la forma:

$$\vec{T} + \vec{P} = m\,\vec{a}$$



Proiettando l'equazione nel sistema tangente, di cui si fa menzione nel testo, si ha:

$$\begin{cases} T \operatorname{sen}\theta = m\,a_c = m\,\omega^2\,\ell\,\operatorname{sen}\theta \\ 0 = m\,a_t \\ T\cos\theta - P = m\,a_z = 0 \end{cases}$$

Mettendo a sistema la prima e la terza equazione, ed eliminando così l'incognita T, si trova:

$$P\tan\theta = m\,\omega^2\,\ell\,\operatorname{sen}\theta$$

$$g\tan\theta = \omega^2\,\ell\,\operatorname{sen}\theta = a_c$$

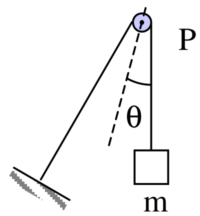
In conclusione: $a_t = 0$; $a_z = 0$; $a_c = g\tan\theta = 3.6\ \mathrm{m\,s^{-2}}$

Esercizio 5

La massa m è trattenuta da una fune, libera di scorrere attorno ad un piolo. L'altro capo della fune è fissato ad un blocco. Il piolo è ancorato ad un vincolo che può applicare una forza massima R_{max} prima di rompersi.

a. supponendo trascurabile l'attrito al contatto della fune con il piolo, determinare il valore della forza f che la fune esercita sul blocco;

b. determinare il massimo valore m_{max} che può assumere la massa, prima che il vincolo si rompa.



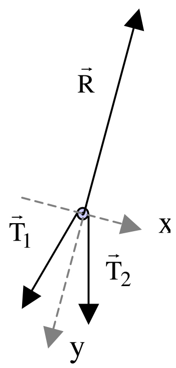
$m = 0.4$ Kg ; $\theta = 60°$; $R_{max} = 180$ N

Soluzione

a) In assenza di attrito nel piolo, le tensioni $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ che agiscono sui due rami della fune sono uguali in modulo: $T_1 = T_2 = T$. Pertanto, la fune esercita sul blocco una forza pari in modulo a T. D'altro canto, la tensione T_2 è pari in modulo al peso P = mg ; dunque, f = mg = 4 N

b) Con riferimento al diagramma di corpo libero nello schema a fianco, l'equazione della statica applicata al punto P nel quale si esplica il vincolo assume la forma:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{R} = 0$$



Assumendo per convenienza il riferimento Pxy indicato, e proiettando l'equazione sugli assi x e y, si ha:

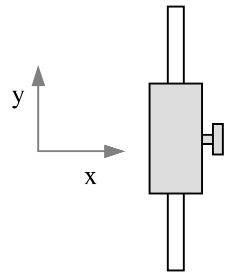
$$\begin{cases} R - 2\,T\cos\theta = 0 \\ T_2 \text{ sen } \theta - T_1 \text{ sen } \theta = 0 \end{cases}$$

Ricordando ancora che T = mg, si ricava dunque:

$$2\, m_{max}\, g \cos\theta = R_{max}\ ;\ m_{max} = \frac{R_{max}}{2\, g \cos\theta} = 9.5 \text{ Kg}$$

Esercizio 6

Una boccola di massa M scivola su un asse verticale in presenza di attrito, descritto dal coefficiente di attrito cinematica μ_d. La forza premente F può essere regolata agendo sulla vite laterale.
Determinare il valore di F, affinché la boccola scivoli a velocità costante.



$M = 2.2$ Kg ; $\mu_d = 0.10$

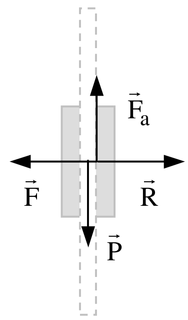
Soluzione

A velocità costante l'accelerazione è nulla, e l'equazione di Newton diventa:

$$\vec{F}a + \vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = 0$$

$$\begin{cases} R - F = 0 \\ F_a - P = 0 \end{cases}$$

$$F_a = \mu_d \; R$$

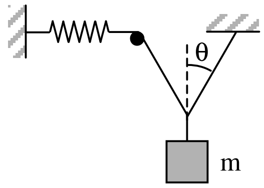


da cui:

$$F = \frac{P}{\mu_d} = \frac{m\,g}{\mu_d} = 216 \text{ N}$$

Esercizio 7

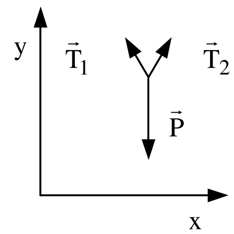
La massa m è sospesa come in figura. Nota la costante elastica k della molla, determinarne l'allungamento Δx in condizioni di equilibrio.



$m = 1.6$ Kg ; $\theta = 30°$; $k = 2 \times 10^2$ Nm^{-1}

Soluzione

Il diagramma di corpo libero del punto di intersezione delle funi è mostrato in figura. Applicando la condizione di statica del punto materiale si ha:



$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{P} = 0$$

$$\begin{cases} T_1 \text{ sen } \theta - T_2 \text{ sen } \theta = 0 \\ T_1 \cos\theta + T_2 \cos\theta - P = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava:

$$T_1 = T_2 = \frac{P}{2\cos\theta}$$

Per le proprietà delle funi ideali, la tensione sulla molla è pari in modulo a T_1. L'allungamento della molla è dato perciò dalla legge di Hook:

$$T_1 = k\,\Delta x \;;\; \Delta x = \frac{m\,g}{2\cos\theta\;k} = 4.5 \text{ cm}$$

Esercizio 8

Un corpo di massa m scivola su un piano orizzontale in presenza di attrito. Siano μ_s e μ_d i coefficienti di attrito statico e dinamico rispettivamente.

a) Se il corpo si muove inizialmente alla velocità v_o, determinare il tempo t che occorre perché esso si fermi.
b) Determinare la forza F che è necessario applicare per rimettere il corpo in movimento.

$m = 1.4$ Kg ; $\mu_s = 0.3$; $\mu_d = 0.2$; $v_o = 22 \text{ m s}^{-1}$

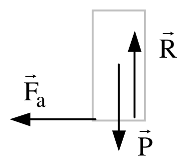
Soluzione

La II equazione di Newton è nella fase iniziale:

$$\vec{F}a + \vec{P} + \vec{R} = 0$$

$$\begin{cases} -F_a = m\,a \\ R - P = 0 \end{cases}$$

$$F_a = \mu_d\, R$$



da cui:

$$a = -\frac{\mu_d\, P}{m} = -2 \text{ m s}^{-2}$$

La legge del moto uniformemente accelerato dà quindi:

$$v = v_o + a\, t$$

da cui, imponendo v = 0 , si ricava:

$$t = -\frac{v_o}{a} = 11 \text{ s}$$

Per rimettere in movimento il corpo è necessario vincere l'attrito di stacco, ed applicare quindi una forza $F = \mu_s\, P = 4$ N

Esercizio 9

Un corpo di massa m scivola su un piano orizzontale in presenza di attrito. Siano μ_s e μ_d i coefficienti di attrito statico e dinamico rispettivamente.

a) Se il corpo è inizialmente fermo, si determini la minima forza F che permette di metterlo in movimento;
b) supponendo che tale forza continui a spingere il corpo, determinare la velocità v che esso acquisisce dopo un tempo t.

$m = 1.9$ Kg ; $\mu_s = 0.30$; $\mu_d = 0.15$; $t = 2.4$ s

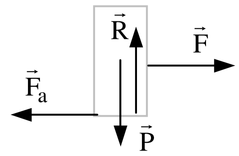
Soluzione

Un istante prima dello stacco, la II equazione di Newton è:

$$\vec{F} + \vec{F}a + \vec{P} + \vec{R} = 0$$

$$\begin{cases} F - F_a = 0 \\ R - P = 0 \end{cases}$$

$$F_a = \mu_s R$$



da cui:

$$F = \mu_s P = 5.6 \text{ N}$$

Immediatamente dopo lo stacco, invece:

$$\vec{F} + \vec{F}a + \vec{P} + \vec{R} = m \vec{a}$$

$$\begin{cases} F - F_a = m a \\ R - P = 0 \end{cases}$$

$$F_a = \mu_d R$$

da cui si ricava:

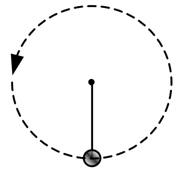
$$a = \frac{F - \mu_d P}{m} = 1.5 \text{ m s}^{-2}$$

La legge del moto uniformemente accelerato dà quindi:

$$v = a t = 3.5 \text{ m s}^{-1}$$

Esercizio 10

Una sferetta di massa m ruota con velocità angolare $\omega = \alpha\, t$ su una circonferenza di raggio r. La sferetta è trattenuta sulla traiettoria circolare da una fune di lunghezza ℓ . Determinare il modulo F della forza totale agente sulla sferetta all'istante t.



m = 120 g ; α = 0.034 s^{-2} ; ℓ = 12 cm ; t = 3.6 s

Soluzione

L'accelerazione ha componenti tangenziale e centripeta:

$$\begin{cases} a_t = \alpha\, \ell \\ a_c = \omega^2\, \ell \end{cases}$$

Dunque sono presenti due componenti della forza, che possono essere valutate all'istante t:

$$\begin{cases} F_t = m\, \alpha\, \ell = 0.49 \times 10^{-3}\ \mathrm{N} \\ F_c = m\, \omega^2\, \ell = m\, \alpha^2\, t^2\, \ell = 0.21 \times 10^{-3}\ \mathrm{N} \end{cases}$$

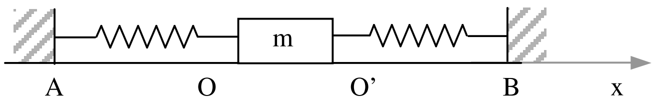
Il modulo di F sarà perciò:

$$F = \sqrt{F_t^2 + F_c^2} = 0.54 \times 10^{-3}\ \mathrm{N}$$

Esercizio 11

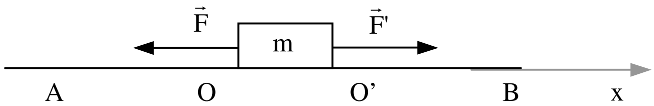
La massa m (supposta puntiforme) è collegata a due molle. La prima, vincolata in A, ha costante elastica k e il suo estremo, in condizioni di riposo, si trova in O. La seconda, vincolata in B, ha costante elastica k’ e il suo estremo, in condizioni di riposo, si trova in O’. Determinare la posizione di equilibrio x_C del punto materiale, e discutere se si tratta di equilibrio stabile o no. Si assuma il riferimento indicato in figura, con origine in A.

$k = 3.2 \times 10^3$ N m^{-1} ; $k' = 2.3 \times 10^3$ N m^{-1} ; $x_O = 14$ cm ; $x_{O'} = 19$ cm ; $x_B = 31$ cm



Soluzione

Il diagramma di corpo libero per il punto materiale è dato in figura.



L’equazione della statica ha la sola componente x utile. Si ha quindi:

$F_x + F'_x = 0$

$F_x = -k\,(x_C - x_o)$

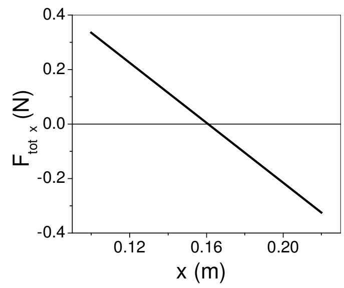
$F'_x = -k'\,(x_C - x_{o'})$

Quindi:

$-k\,(x_C - x_o) - k'\,(x_C - x_{o'}) = 0$

$-(k + k')\,x_C + k\,x_o + k'\,x_{o'} = 0$

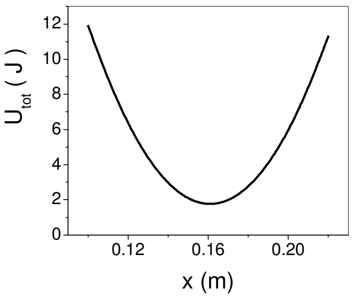
$$x_C = \frac{k'\,x_{o'} + k\,x_o}{k' + k} = 0.16 \text{ m}$$



Per discutere il tipo di equilibrio che si determina, si può considerare il grafico della forza totale $F_{tot\,x} = F_x + F'_x$ in funzione di x, nei punti che cadono in un intorno di x_C :

$F_{tot\,x} = -(k + k')\,x + k\,x_o + k'\,x_{o'}$

Poiché la forza totale è positiva a sinistra, negativa a destra del punto di equilibrio, è una forza di richiamo, e dunque l’equilibrio è stabile.



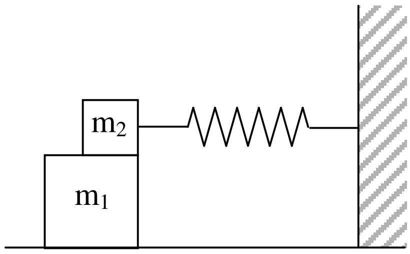
Alla stessa conclusione si arriva studiando il grafico dell’energia potenziale totale, U_{tot}:

$$U_{tot} = \frac{1}{2}\,k\,(x - x_o)^2 + \frac{1}{2}\,k'\,(x - x_{o'})^2$$

La funzione U_{tot} (x) presenta infatti un minimo in x_C.

Esercizio 12

La molla in figura è collegata al blocco di massa m_2; questo è a sua volta poggiato sul blocco di massa m_1. Entrambe le superfici di contatto sono scabre. Il coefficiente di attrito statico tra m_1 e il piano di appoggio è μ_1; quello tra i due blocchi è μ_2.
Qual è il massimo valore della forza esercitata dalla molla (F_{max}), che permette condizioni di attrito statico? Se la molla viene tesa un po' di più, cosa accade?

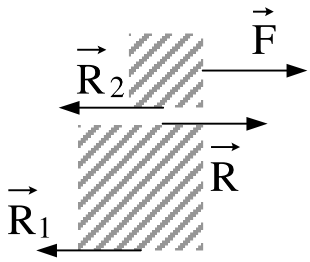


$m_1 = 15$ Kg ; $m_2 = 5$ Kg ; $\mu_1 = 0.08$; $\mu_2 = 0.4$

Soluzione

Si tratta di un problema di statica del punto materiale. Con riferimento allo schema di punto libero riportato a fianco, le equazioni da imporre sono le seguenti:

$$\begin{cases} F - R_2 = 0 \\ R - R_1 = 0 \end{cases}$$



cui vanno aggiunti i vincoli dinamici:

$R_2 = R$ (azione e reazione)
$R_2 \le \mu_2\, m_2\, g = 20$ N (massimo valore possibile per l'attrito statico tra i corpi)
$R_1 \le \mu_1\, (m_1 + m_2)\, g = 16$ N (massimo valore possibile per l'attrito statico col piano)

Dal sistema segue che in condizioni di statica $F = R = R_1 = R_2$, sicché deve valere il vincolo più restrittivo, da cui $F_{max} = 16$ N. Se F supera di poco questo valore, i corpi scivolano insieme sul piano, essendo stato superato il massimo valore per l'attrito statico sul piano, ma non tra i blocchi.

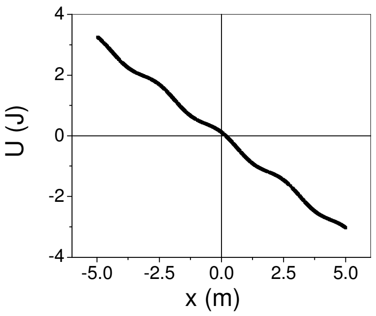
c. Lavoro ed energia

Esercizio 1

E' assegnata la funzione energia potenziale $U(x) = A \cos kx - B\,x$, con A, B, k costanti assegnate. Si consideri un punto materiale di massa m inizialmente fermo nell'origine (x = 0). Si determini:

a) la forza agente sul punto materiale;

b) la sua velocità, quando passa per il punto di ascissa $x_o = \dfrac{2\,\pi}{k}$



m = 22 g ; A = 0.12 J ; B = 0.63 N ; k = 2.5 m^{-1}

Soluzione

Il grafico di energia potenziale considerato nel problema prende il nome di *washboard*, cioè *asse della lavandaia*, per ovvi motivi. In pratica si può avere un'energia potenziale di questo tipo quando si sovrappongono una forza periodica del tipo $F_1 = -A\,k\,\text{sen}\,kx$, ad una costante F_2 = -B.

Tornando alla soluzione del problema, per trovare il valore della forza in x = 0, si osserva che:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -A\,k\,\text{sen}\,kx - B$$

e quindi:

F(0) = -B = -0.63 N

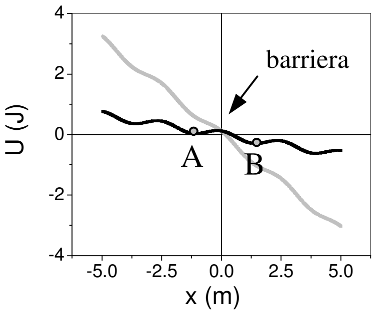
La velocità del punto materiale in x_o può essere determinata ricorrendo al teorema di conservazione dell'energia meccanica. Poiché il punto parte da fermo, si ha:

$$U(0) = U(x_o) + \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2\,(\,U(0) - U(x_o)\,)}{m}} = \sqrt{\frac{2\;B\,x_o}{m}} = 7.6\ m\,s^{-1}$$

Si noti che i dati del problema soddisfano la condizione:

$$\left|\frac{B}{k\,A}\right| > 1$$

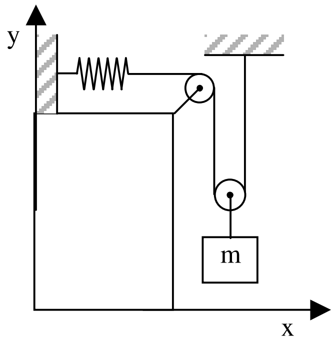


Se questo non accade, il grafico di U(x) presenterà minimi e massimi relativi (vedi figura). In questa condizione, lo studio del moto si complica perché si deve valutare l'effetto delle *barriere di potenziale.* Ad esempio, un punto materiale che partisse da fermo in A non potrebbe mai raggiungere B, sebbene l'energia potenziale in B sia minore. Tale situazione non si verifica per il caso proposto nel problema, perché tra x = 0 e x = x_o non sono presenti barriere di potenziale.

Esercizio 2

La massa m è agganciata ad una carrucola mobile. La fune che sostiene la carrucola è vincolata da un lato ad un punto fisso, dall'altro ad una molla. Nella condizione iniziale, la molla, di costante elastica k, si trova nella sua posizione di riposo, e la massa si trova all'altezza h dal suolo. Determinare:

a) l'energia potenziale totale U(y) (gravitazionale ed elastica), in funzione della generica altezza y cui può trovarsi m, e rappresentarne il grafico;
b) il lavoro compiuto dalla forza peso, se m si sposta dalla posizione iniziale alla posizione di equilibrio stabile.

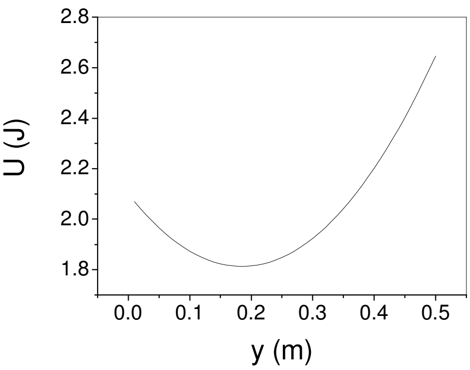


$m = 0.54$ Kg ; $k = 4.2\ \mathrm{N\ m^{-1}}$, $h = 50$ cm

Soluzione

a) U(y) è data dalla somma di due contributi: l'energia elastica U_1 e l'energia della forza peso, U_2. Sia Δx l'allungamento della molla rispetto alla posizione di riposo. Il corrispondente spostamento verticale di m è allora:

$$\Delta y = y - h = -\frac{1}{2}\Delta x$$



L'energia U_1 vale allora:

$$U_1 = \frac{1}{2} k\, \Delta x^2 = 2\, k\, (h - y)^2$$

e l'energia U_2:

$U_2 = mg\, y$

Si ha quindi:

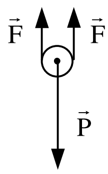
$$U(y) = U_1 + U_2 = 2\, k\, (h - y)^2 + mg\, y$$

b) La posizione di equilibrio può essere determinata in due modi: in base all'equazione della statica del punto materiale, o cercando la posizione di minimo di U(y).

Seguendo la prima strada, e facendo riferimento al diagramma di corpo libero relativo alla carrucola mobile in figura, si ha:

$2\,\vec{F} + \vec{P} = 0$, e proiettando sull'asse y:

$2\,F - P = 0$



Poiché $F = k\,\Delta x$, si ha:

$$\Delta x = \frac{mg}{2\,k} = 0.63 \text{ m e quindi } y = h - \frac{1}{2}\Delta x = 0.18 \text{ m}$$

In alternativa, si può cercare il minimo di U(y) ponendo pari a 0 la sua derivata:

$$\frac{d\,U}{dy} = -4\,k\,(h - y) + mg = 0 \ \ ;$$

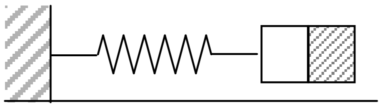
$$y = h - \frac{mg}{4\,k} = 0.18 \text{ m}$$

Infine, il lavoro della forza peso nel generico spostamento da A a B è dato da:

$L = mg\,(y_A - y_B)$. In questo caso $y_A = h$; $y_B = h - \dfrac{mg}{4\,k}$, e dunque:

$$L = mg\left(h - \left(h - \frac{mg}{4\,k}\right)\right) = \frac{(mg)^2}{4\,k} = 1.7 \text{ J}$$

Esercizio 3



Un oggetto, collegato ad una molla di costante elastica k, inizialmente in posizione di riposo, esplode dividendosi in due frammenti. Di questi, il primo, di massa m_1, viene proiettato in avanti con velocità v_1; il secondo, di massa m_2, resta vincolato alla molla, e dopo averla compressa, inizia ad oscillare. Determinare:

a) il valore Δx della massima compressione della molla;
b) l'energia meccanica totale del sistema dopo l'esplosione.

$v_1 = 12\ m\ s^{-1}$, $m_1 = 4$ Kg , $m_2 = 1$ Kg , $k = 4 \times 10^4\ N\ m^{-1}$

Soluzione

L'esplosione è un fenomeno impulsivo, durante il quale la forza elastica della molla può essere trascurata, sicché le conseguenze possono essere valutate considerando l'oggetto come un sistema isolato.

Applicando la legge di conservazione della quantità di moto, si ha:
$m_1\ v_1 - m_2\ v_2 = 0$

da cui si ricava la velocità v_2 della massa m_2 un istante dopo l'esplosione; da questa, l'energia cinetica K_2, che sommata a K_1 dà l'energia meccanica totale:

$$v_2 = \frac{m_1\ v_1}{m_2}\ ;\ K_2 = \frac{1}{2}\ m_2\ v_2^2 = \frac{1}{2}\ \frac{m_1^2\ v_1^2}{m_2}$$

$$E_{tot} = K_1 + K_2 = \frac{1}{2}\ m_1\ v_1^2 + \frac{1}{2}\ \frac{m_1^2\ v_1^2}{m_2} = \frac{1}{2}\ m_1\ v_1^2\ \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) = 1440\ J$$

La massima compressione della molla si ha quando, nella successiva fase di moto, la massa m_2 converte tutta la sua energia cinetica in energia elastica della molla:

$$\frac{1}{2}\ k\ \Delta x^2 = \frac{1}{2}\ \frac{m_1^2\ v_1^2}{m_2}$$

$$\Delta x = \sqrt{\frac{m_1^2\ v_1^2}{k\ m_2}} = 0.24\ m$$

Esercizio 4

La Luna ruota intorno alla Terra con un periodo T, alla distanza media d. Detta M_L la sua massa, se ne determini l'energia meccanica E.

$T = 27.3$ giorni ; $d = 3.84 \times 10^8$ m ; $M_L = 7.35 \times 10^{22}$ Kg

Soluzione

Si osservi innanzitutto che $T = 27.3$ giorni $= 236 \times 10^3$ s.

La Luna percorre un'orbita sostanzialmente circolare sotto l'azione della forza di gravitazione della Terra. L'equazione della dinamica del moto circolare si scrive:

$F = M_L\, a_c$

$$G \frac{M_T\, M_L}{d^2} = M_L\, \omega^2\, d$$

L'energia potenziale gravitazionale, ponendo come di consueto lo zero nel punto all'infinito, vale allora:

$$U = -G \frac{M_T\, M_L}{d} = -M_L\, \omega^2\, d^2$$

L'energia cinetica è data da:

$$K = \frac{1}{2} M_L\, \omega^2\, d^2$$

Si ha dunque:

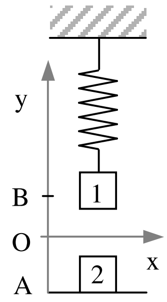
$$E = K + U = -\frac{1}{2} M_L\, \omega^2\, d^2 = -\frac{1}{2} M_L \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 d^2 = -340 \times 10^{28}\ \mathrm{J}$$

Esercizio 5

Inizialmente le masse m_1, m_2 sono sospese ad una molla di costante elastica k, ed il sistema è in equilibrio in A. Determinare la quota y_A.

Ad un certo istante una delle due masse si sgancia. Determinare l'altezza massima y_B a cui arriva la rimanente massa m_1 . (Sia O il punto di riposo della molla e l'origine del riferimento; si fissi in A lo 0 dell'energia potenziale della forza peso).

$m_1 = 0.2$ Kg ; $m_2 = 0.1$ Kg ; $k = 2 \times 10^2$ N m^{-1}



Soluzione

Per la legge di Hook, l'allungamento della molla è proporzionale alla forza applicata:
$-k\, y_A = P_1 + P_2$

da cui:

$$y_A = -\frac{(m_1 + m_2)\, g}{k} = -0.015 \text{ m}$$

Il sistema evolve poi sotto l'azione di forze conservative e si può ricorrere alla conservazione dell'energia meccanica. Fissato lo zero dell'energia potenziale della forza peso in A, e lo zero dell'energia elastica in O, si ha:

$$E_{IN} = \frac{1}{2} k\, y_A^2 + m_1\, g\, y_A \quad ; \quad E_{FIN} = \frac{1}{2} k\, y_B^2 + m_1\, g\, y_B$$

$$\frac{1}{2} k\, y_A^2 + m_1\, g\, y_A = \frac{1}{2} k\, y_B^2 + m_1\, g\, y_B$$

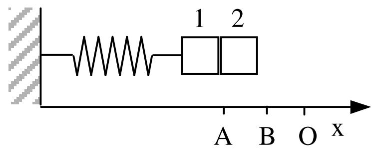
$$y_B = \frac{-m_1\, g \pm \sqrt{m_1^2\, g^2 + k^2\, y_A^2 + 2\, m_1\, g\, k\, y_A}}{k} = \frac{-m_1\, g \pm (m_1\, g + k\, y_A)}{k}$$

Al segno positivo corrisponde la soluzione banale $y_B = y_A$, che va scartata. La quota massima corrisponde quindi al segno negativo:

$$y_B = -y_A - \frac{2\, m_1\, g}{k} = -0.005 \text{ m}$$

Esercizio 6

La massa m_1 è agganciata in A ad una molla, inizialmente compressa. Nella fase di rilascio, m_1 spinge una seconda massa m_2 . Poiché questa non è vincolata, ma solo spinta da m_1, se ne allontana nel momento in cui in O, posizione di riposo della molla, ha raggiunto la massima velocità. Determinare la coordinata x_B corrispondente alla massima compressione Δx della molla nelle successive oscillazioni di m_1. Si scelga O come origine del riferimento.



$m_1 = 0.1$ Kg ; $m_2 = 0.2$ Kg ; $k = 4 \times 10^4$ N m^{-1} , $x_A = -1$ cm

Soluzione

Il sistema evolve sotto l'azione di forze conservative e si può ricorrere alla conservazione dell'energia meccanica. Nella prima fase si ha:

$$E_{IN} = \frac{1}{2} k\, x_A^2 \;;$$

$$E_{FIN} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2)\, v^2;$$

$$\frac{1}{2} k\, x_A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2)\, v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{k\, x_A^2}{m_1 + m_2}} = 3.6 \text{ m s}^{-1}$$

In O, m_2 si stacca e la sua energia cinetica non va più tenuta in conto. Quindi:

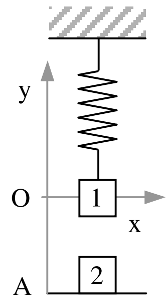
$$E_{IN} = \frac{1}{2} m_1\, v^2;$$

$$E_{FIN} = \frac{1}{2} k\, x_B^2$$

$$\frac{1}{2} m_1\, v^2 = \frac{1}{2} k\, x_B^2$$

$$x_B = \sqrt{\frac{m_1\, v^2}{k}} = 0.6 \text{ cm}$$

Esercizio 7



La massa m_1 è sospesa ad una molla di costante elastica k. Lasciata andare da ferma dalla posizione di equilibrio O, nel punto più basso della traiettoria A, grazie ad un piccolo magnete permanente, aggancia una seconda massa m_2. Determinare la coordinata y_A; determinare quindi a che altezza massima y_B si porterà il sistema costituito da m_1 ed m_2. (Si fissi in O lo 0 dell'energia potenziale della forza peso).

$m_1 = 0.3$ Kg ; $m_2 = 0.1$ Kg ; $k = 1 \times 10^2$ N m^{-1}

Soluzione

Il sistema evolve sotto l'azione di forze conservative e si può ricorrere alla conservazione dell'energia meccanica. Nella prima fase si ha:

$$E_{IN} = 0 \;\; ; \;\; E_{FIN} = \frac{1}{2} k\, y_A^2 + m_1\, g\, y_A$$

$$0 = \frac{1}{2} k\, y_A^2 + m_1\, g\, y_A$$

$$y_A = \begin{cases} 0 \\ -\dfrac{2\, m_1\, g}{k} = -6 \text{ cm} \end{cases}$$

La seconda soluzione è accettabile. Nella seconda fase, si deve aggiungere l'energia potenziale della massa m_2:

$$E_{IN} = \frac{1}{2} k\, y_A^2 + m_1\, g\, y_A + m_2\, g\, y_A = m_2\, g\, y_A \;\; ;$$

$$E_{FIN} = \frac{1}{2} k\, y_B^2 + m_1\, g\, y_B + m_2\, g\, y_B$$

$$m_2\, g\, y_A = \frac{1}{2} k\, y_B^2 + m_1\, g\, y_B + m_2\, g\, y_B$$

$$y_B = \frac{-(m_1 + m_2)\, g \pm \sqrt{(m_1 + m_2)^2\, g^2 + 2\, k\, m_2\, g\, y_A}}{k} =$$

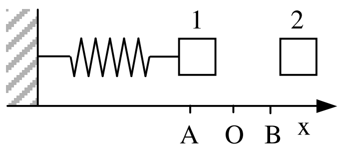
$$= \frac{-(m_1 + m_2)\, g \pm \sqrt{(m_1 + m_2)^2\, g^2 - 4\, m_1 m_2\, g}}{k} = \begin{cases} -\dfrac{2\, m_1\, g}{k} \\ -\dfrac{2\, m_2\, g}{k} \end{cases}$$

La quota massima corrisponde alla seconda soluzione. Quindi:

$$y_B = -\frac{2\, m_2\, g}{k} = -2 \text{ cm}$$

Esercizio 8

La massa m_1 è agganciata in A ad una molla, inizialmente compressa. E' data la velocità v_o, acquisita da m_1 quando passa nel punto di riposo della molla O. In B, il punto di massima estensione della molla, grazie ad un piccolo magnete permanente, ad m_1 si aggancia una seconda massa m_2. Determinare la coordinata x_B e la massima velocità v del sistema costituito da m_1 ed m_2 nel moto successivo.



$m_1 = 0.2$ Kg ; $m_2 = 0.4$ Kg ; $k = 6 \times 10^4$ N m^{-1} , $v_o = 5$ m s^{-1}

Soluzione

Il sistema evolve sotto l'azione di forze conservative e si può ricorrere alla conservazione dell'energia meccanica.
Nella prima fase si ha:

$$E_{IN} = \frac{1}{2} m_1 v_o^2 \ ;$$

$$E_{FIN} = \frac{1}{2} k x_B^2 ;$$

$$\frac{1}{2} k x_B^2 = \frac{1}{2} m_1 v_o^2$$

$$x_B = \sqrt{\frac{m_1 v_o^2}{k}} = 0.9 \text{ cm}$$

Nella fase successiva si ha poi:

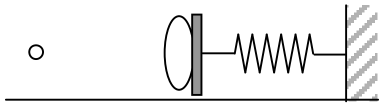
$$E_{IN} = \frac{1}{2} k x_B^2 \ ;$$

$$E_{FIN} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 \ ;$$

$$\frac{1}{2} k x_B^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{k x_B^2}{m_1 + m_2}} = 2.8 \text{ m s}^{-1}$$

Esercizio 9



Un proiettile di massa m_1 procede con velocità iniziale v_o. Il proiettile si conficca in un sacchetto di sabbia di massa m_2 montato su una molla di costante elastica k, inizialmente fermo nella posizione di equilibrio. Determinare l'ampiezza A delle oscillazioni che seguono l'impatto.

$m_1 = 125$ g ; $m_2 = 450$ g ; $v_o = 32$ m s^{-1} ; $k = 4.2 \times 10^4$ N m^{-1}

Soluzione

L'urto è completamente anelastico. L'equazione di conservazione della quantità di moto si scrive:

$$m_1\ v_o = (m_1 + m_2)\ v$$

da cui si ricava la velocità con cui il sacchetto, insieme al proiettile, iniziano il moto in presenza della forza elastica:

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_o = 7.0 \text{ m s}^{-1}$$

Nella seconda fase si ha la conservazione dell'energia meccanica:

$E_{in} = E_{fin}$

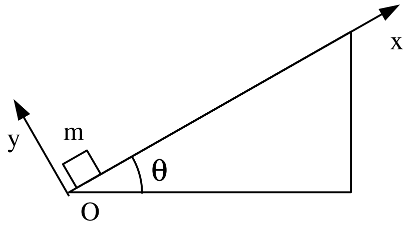
$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\ v^2 = \frac{1}{2} k\ A^2$$

Si ricava quindi A:

$$A = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} = 26 \text{ mm}$$

Esercizio 10

Una massa m procede salendo su un piano inclinato con velocità iniziale v_o, in presenza di attrito radente caratterizzato dal coefficiente μ_d. Determinare lo spazio di arresto ℓ. Sapendo che $\mu_s = 2\ \mu_d$, stabilire se la massa resterà ferma o scivolerà verso il basso.



$\theta = 30°$; $\mu_d = 0.1$; $v_o = 0.25\ m\ s^{-1}$

Soluzione

Il diagramma di corpo libero è rappresentato in figura. Sul punto materiale agiscono:

la forza peso $\vec{P}$ (conservativa);
la reazione normale del piano $\vec{R}$ (che non compie lavoro);
la forza di attrito radente $\vec{F}_a$ (non conservativa).

Il valore di F_a si trova utilizzando la relazione:

$$F_a = \mu_d\ R = \mu_d\ P \cos\theta$$

Detto A il punto iniziale, B il punto finale, si applichi quindi il teorema dell'energia meccanica:

$$E(B) - E(A) = L_{AB}$$

dove L_{AB} è il lavoro della forza non conservativa. Fissato lo zero dell'energia potenziale della forza peso in A, si ha dunque:

$$E(A) = \frac{1}{2}\ m\ v_o^2$$

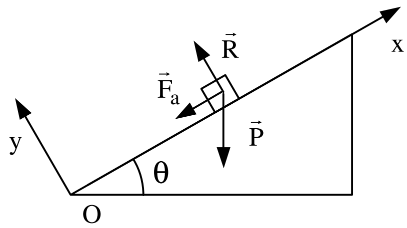
$$E(B) = m\ g\ \ell\ \ \text{sen}\ \theta$$

$$L_{AB} = -F_a\ \ell = -\mu_d\ m\ g \cos\theta\ \ell$$

$$m\ g\ \ell\ \ \text{sen}\ \theta - \frac{1}{2}\ m\ v_o^2 = -\mu_d\ m\ g \cos\theta\ \ell$$

$$g\left(\text{sen}\ \theta + \mu_d \cos\theta\right)\ell = \frac{1}{2}\ v_o^2$$

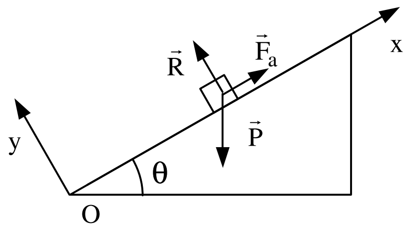
$$\ell = \frac{v_o^2}{2g\left(\text{sen}\ \theta + \mu_d \cos\theta\right)} = 5\ \text{mm}$$



Per stabilire se la massa rimarrà ferma nel punto più alto della traiettoria, si può ragionare come segue. Si ipotizza una condizione di statica; quindi si valuta se la forza di attrito F_a in tali condizioni supera o no la forza di stacco.
Le equazioni della statica danno:

$$\vec{F}_a + \vec{R} + \vec{P} = 0$$

$$\begin{cases} F_a - P\ \text{sen}\ \theta = 0 \\ R - P \cos\theta = 0 \end{cases}$$



Quindi:

$$F_a = P\ \text{sen}\ \theta = mg\ \text{sen}\ \theta$$

$$F_{max} = \mu_s\ R = \mu_s\ P \cos\theta$$

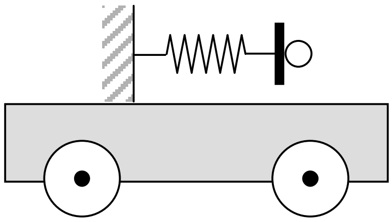
$$\frac{F_a}{F_{max}} = \frac{\text{tg}\ \theta}{\mu_s} = 2.9 > 1$$

Poiché $F_a > F_{max}$, evidentemente la condizione di statica non vale e il corpo scivola nuovamente verso il basso.

Esercizio 11

Su un carrello di massa m_1 è montato un cannoncino a molla, come schematizzato in figura. Nella condizione iniziale il carrello è fermo e la molla, di costante elastica k, è compressa di un tratto $\Delta \ell$. Determinare l'energia cinetica finale K_2 del proiettile, di massa m_2, nelle due ipotesi:

a) Il carrello viene tenuto fermo;
b) Il carrello è lasciato libero di rinculare.



$m_1 = 0.5$ Kg ; $m_2 = 50$ g ; $k = 5 \times 10^4$ N m^{-1} ; $\Delta \ell = 1$ cm

Soluzione

L'energia elastica accumulata nella molla vale:

$$U = \frac{1}{2} k \, \Delta\ell^2 = 2.5 \text{ J}$$

a) Per la conservazione dell'energia meccanica, in questo caso:
$K_2 = U = 2.5$ J

b) In questo caso, si muovono sia il carrello che il proiettile. Dunque:

$$K_1 + K_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = U$$

Inoltre, poiché si conserva la quantità di moto del sistema, e notando che inizialmente ogni parte è ferma, si ha:

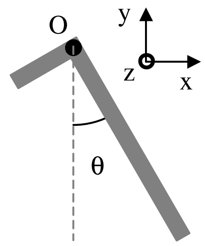
$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$, da cui: $v_1 = -\frac{m_2}{m_1} v_2$

Sostituendo questa espressione nella prima equazione, si ottiene dopo pochi passaggi l'espressione:

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 \, v_2^2 = \frac{U}{\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)} = 2.3 \text{ J}$$

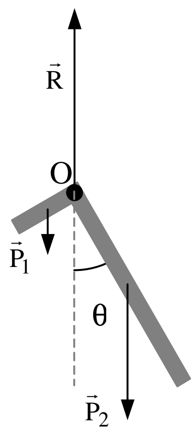
d. Dinamica dei sistemi di punti materiali

Esercizio 1



L'oggetto in figura è realizzato unendo ad angolo retto due bacchette omogenee, dello stesso materiale. La bacchetta più corta ha lunghezza ℓ, l'altra 3ℓ; le masse sono pertanto m, 3m rispettivamente. Si determini l'angolo θ che si determina in condizioni di equilibrio, quando l'oggetto è sospeso in O.

Soluzione



Si tratta di un problema di statica del corpo rigido. Il diagramma di corpo rigido è riportato in figura. Delle due equazioni della statica, la I non permette di determinare l'incognita θ:

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{R} = 0$$

Si ricorre perciò alla II equazione, scritta per i momenti calcolati con polo in O:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0$$

I momenti hanno solo componente z. Proiettando dunque l'equazione sull'asse z si ha:

$$\left(\frac{\ell}{2}\cos\theta\right)(m\,g) - \left(\frac{3\,\ell}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)(3\,m\,g) = 0$$

$$\frac{\cos\theta}{2} - \frac{9\,\mathrm{sen}\,\theta}{2} = 0$$

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{1}{9}$$

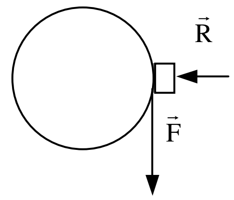
$$\theta = 6.3°$$

In alternativa, si può imporre che il CM si trovi sulla verticale del punto di sospensione. Posta l'origine del sistema di riferimento in O, ciò significa che $x_{CM} = 0$, da cui:

$$x_{CM} = -\left(\frac{\ell}{2}\cos\theta\right)(m) + \left(\frac{3\,\ell}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)(3\,m) = 0$$

Questa equazione è ovviamente equivalente a quella che si ottiene dalla II eq. Cardinale.

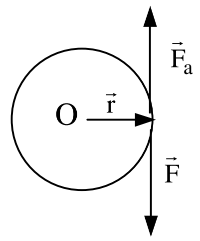
Esercizio 2



Un disco di raggio r è libero di ruotare intorno al suo asse. Una fune in tensione applica una forza tangenziale costante $\vec{F}$; ad essa si oppone l'attrito determinato dal pattino di un freno, premuto sul bordo del disco dalla forza $\vec{R}$. Noto il coefficiente di attrito μ_s, determinare per quale valore di F il disco ruota con velocità angolare costante; e quale potenza eroga F alla velocità angolare ω.

$r = 40$ cm , $R = 140$ N ; $\mu_s = 1.2$; $\omega = 52\ s^{-1}$

Soluzione



Il modulo della forza di attrito vale:
$F_a = \mu_s R = 168$ N

La condizione ω = cost implica che il momento totale applicato al disco sia nullo. Facendo riferimento al diagramma di corpo libero in figura, e fissando il polo O sull'asse del disco, si ha:

$$\vec{M} + \vec{M}_a = 0 \quad ; \quad \vec{r} \times \vec{F} + \vec{r} \times \vec{F}_a = \vec{r} \times \left(\vec{F} + \vec{F}_a\right) = 0 \quad ; \quad \vec{F} = -\vec{F}_a \quad ; \quad F = F_a = 168 \text{ N}$$

La potenza erogata da $\vec{F}$ vale:

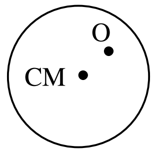
$$P = \vec{M} \cdot \vec{\omega} = M\,\omega = r\,F\,\omega = 3490 \text{ W}$$

Si noti il segno positivo di P: il vettore $\vec{M}$ ed il vettore $\vec{\omega}$ sono sicuramente paralleli e concordi nella situazione il esame.

Esercizio 3

Un disco di massa m, raggio r, ruota con velocità angolare ω rispetto ad un asse passante per il punto O, posto a distanza d dal CM. Determinare:

a) l'energia cinetica K del disco;
b) il modulo della forza esercitata sull'asse di rotazione.



$m = 110\ g$; $r = 8\ cm$; $d = \frac{r}{2}$; $\omega = 120\ s^{-1}$

Soluzione

Il momento di inerzia del disco può essere valutato ricorrendo al teorema di Stein:

$$I = I_{CM} + m\, d^2 = \frac{1}{2} m\, r^2 + m \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} m\, r^2$$

L'energia cinetica allora vale:

$$K = \frac{1}{2} I\, \omega^2 = \frac{3}{4} m\, r^2\, \omega^2 = 3.8\ J$$

La forza sull'asse può essere calcolata ricorrendo alla I equazione cardinale della dinamica. Infatti si ha:

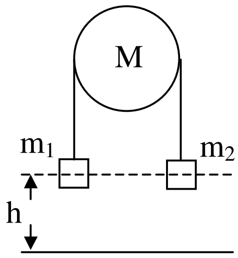
$$\vec{F} = m\, \vec{a}_{cm}$$

Il CM si muove su una traiettoria circolare di raggio d. Dunque proiettando la I equazione cardinale in direzione centripeta:

$$F = m \frac{v_{CM}^2}{d} = \frac{m\, r^2\, \omega^2}{d} = 250\ N$$

Esercizio 4

Una *macchina di Altwood* è realizzata collegando le masse m_1 ed m_2 ad una fune che passa intorno ad una carrucola di massa m e raggio r.



Supponendo che nella condizione iniziale le masse si trovino ferme alla stessa altezza h , determinare con che velocità la massa m_1 tocca il suolo.

$m_1 = 1.1$ Kg ; $m_2 = 0.4$ Kg ; m = 8 Kg ; h = 25 cm

Soluzione

E' possibile ricorrere alla conservazione dell'energia meccanica totale del sistema, costituito da tre parti: le due masse puntiformi m_1 , m_2, e il corpo rigido di massa M (carrucola). Detta E l'energia meccanica, si ha:

$E_{in} = E_{fin}$

$E_{in} = U_{1in} + U_{2in}$; $Ef_{in} = U_{1fin} + U_{2fin} + K_1 + K_2 + K$

avendo indicato con i simboli K_1 , K_2 , K le energie cinetiche finali delle masse m_1 , m_2, m rispettivamente, ed avendo riconosciuto che le energie cinetiche sono tutte nulle nella configurazione iniziale.

Ponendo lo zero dell'energia potenziale al livello del suolo, si ha:

$U_{1in} = m_1\, g\, h$; $U_{2in} = m_2\, g\, h$; $U_{1fin} = 0$; $U_{2in} = 2\, m_2\, g\, h$

Osservando che le masse m_1 , m_2 hanno uguale velocità v (in modulo), e che la velocità angolare ω della carrucola è legata a v dalla relazione $v = \omega\, r$, si ha per le energie cinetiche:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1\, v^2 \;;\; K_2 = \frac{1}{2} m_2\, v^2 \;;\; K = \frac{1}{2} I\, \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m\, r^2}{2}\right)\omega^2 = \frac{1}{4} m\, v^2$$

Quindi:

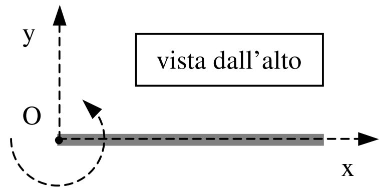
$$\left(m_1 + m_2\right) g\, h = 2\, m_2\, g\, h + \frac{2m_1 + 2m_2 + m}{4} v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{4\left(m_1 - m_2\right) g\, h}{2m_1 + 2m_2 + m}} = 0.8\ \mathrm{m\, s^{-1}}$$

Esercizio 5

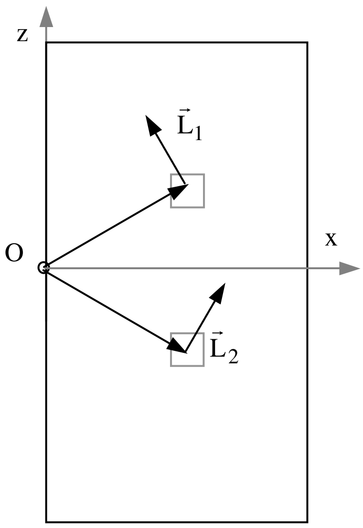
Una porta di larghezza ℓ , massa m, ruota con velocità angolare ω intorno ai cardini. Determinare l'energia cinetica K e il momento angolare $\vec{L}$ con polo O, scelto sull'asse di rotazione a metà altezza della porta.

Suggerimenti: $I_{CM} = \frac{1}{12} m \ell^2$; L_x , $L_y = 0$ con questa scelta del polo.



$\ell = 90$ cm , m = 21 Kg ; $\omega = 3.1 \ s^{-1}$

Soluzione



Il momento di inerzia per un'asse passante per O, per il teorema di Steiner, vale:

$$I = \frac{1}{12} m \ell^2 + m \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} m \ell^2 = 5.7 \text{ Kg m}^2$$

Si ha allora:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = 27 \text{ J}$$

Vista la geometria del problema, il momento angolare ha solo la componente z diversa da 0: è facile rendersene conto dalla figura. Poiché il polo si trova esattamente a metà altezza, per simmetria, le componenti x dei momenti angolari delle particelle costituenti la porta si elidono.

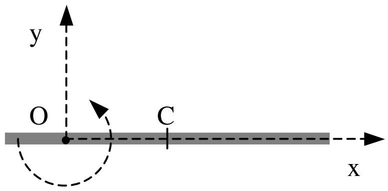
Quindi:

$$\vec{L} = \left(0, 0, L_z \right)$$

$$L_z = I \omega = 18 \text{ Kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

Esercizio 6

Un'asta di lunghezza ℓ, massa m, ruota con velocità angolare ω intorno ad un asse perpendicolare, passante per il punto O, posto a distanza d dal centro C. Determinare l'energia cinetica K e il momento angolare $\vec{L}$ con polo O.



Suggerimento: $I_{CM} = \frac{1}{12} m \ell^2$

$\ell = 7.8$ cm , m = 250 g ; $\omega = 30\ s^{-1}$; d = 2.2 cm

Soluzione

Il momento di inerzia per un'asse passante per O, per il teorema di Steiner, vale:

$$I = I_{CM} + m d^2 = \frac{1}{12} m \ell^2 + m d^2 = 2.5 \times 10^{-4}\ \text{Kg m}^2$$

Si ha allora:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = 0.11\ \text{J}$$

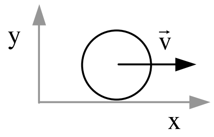
Vista la geometria del problema, il momento angolare ha solo la componente z diversa da 0:

$$\vec{L} = (0, 0, L_z)$$

$$L_z = I \omega = 0.0075\ \text{Kg m}^2\ \text{s}^{-1}$$

Esercizio 7

Una ruota di raggio r e massa m rotola in piano, procedendo con velocità v. Determinarne l'energia cinetica e il momento angolare $\vec{L}$ con polo O, scelto sull'asse di rotazione istantaneo.



Suggerimento: $I_{CM} = \frac{1}{2} m\, r^2$

r = 40 cm , m = 18 Kg ; v = 32 m s^{-1}

Soluzione

L'asse istantaneo di rotazione passa per il punto di contatto della ruota con il suolo. Il momento di inerzia per tale asse, per il teorema di Steiner, vale:

$$I = I_{CM} + m\, d^2 = \frac{1}{2} m\, r^2 + m\, r^2 = \frac{3}{2} m\, r^2 = 4.3 \text{ Kg m}^2$$

Nel rotolamento, la relazione tra velocità di avanzamento e velocità angolare è la seguente:

$v = r\, \omega$

Si ha allora:

$$K = \frac{1}{2} I\, \omega^2 = \frac{1}{2} I \frac{v^2}{r^2} = 14 \text{ KJ}$$

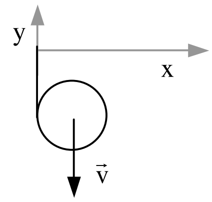
Vista la geometria del problema, il momento angolare ha solo la componente z diversa da 0, e questa risulta negativa:

$$\vec{L} = \left(0, 0, L_z \right)$$

$$L_z = -I\, \omega = -I \frac{v}{r} = -340 \text{ Kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

Esercizio 8

Un anello di raggio r e massa m, vincolata ad una fune, rotola verso il basso. Determinarne l'energia cinetica e il momento angolare $\vec{L}$ con polo O, scelto sull'asse di rotazione istantaneo $\left(I_{CM} = m\, r^2 \right)$, in un dato istante in cui la velocità angolare è ω.



$r = 4.1$ cm , $m = 0.14$ Kg ; $\omega = 2.2\ s^{-1}$

Soluzione

L'asse istantaneo di rotazione passa per il punto di contatto della ruota con la fune. Il momento di inerzia per tale asse, per il teorema di Steiner, vale:

$I = I_{CM} + m\, d^2 = m\, r^2 + m\, r^2 = 2\, m\, r^2 = 0.47 \times 10^{-3}$ Kg m^2

Si ha allora:

$$K = \frac{1}{2} I\, \omega^2 = 1.1 \text{ mJ}$$

Vista la geometria del problema, il momento angolare ha solo la componente z diversa da 0, e questa risulta negativa:

$$\vec{L} = \left(0, 0, L_z \right)$$

$$L_z = -I\, \omega = -1.0 \times 10^{-3} \text{ Kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

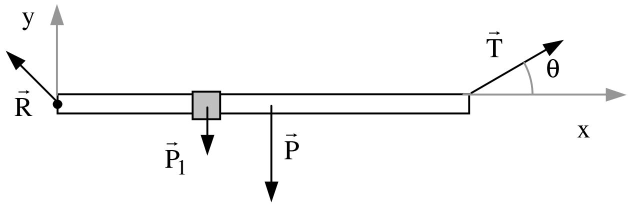
Esercizio 9

Una trave di massa m e lunghezza ℓ è vincolata da un perno in O. L'estremo libero B è collegato ad una fune, come in figura. La trave è posta in orizzontale; in A, a distanza $\frac{\ell}{3}$ da O, la trave è caricata dalla massa m_1. Determinare il valore delle componenti R_x e R_y della reazione vincolare $\vec{R}$ esercitata dal perno, e le componenti T_x e T_y della tensione della fune $\vec{T}$.

m = 14 Kg ; ℓ = 1.3 m ; m_1 = 3.2 Kg ; $\theta = 30°$

Soluzione

Il diagramma di corpo libero per la trave è mostrato in figura.



Con la scelta del polo in O, le due equazioni della statica danno:

$$\begin{cases} R_x + T_x = 0 \\ R_y + T_y - P_1 - P = 0 \end{cases} \qquad \text{I equazione}$$

$$-\frac{P_1\,\ell}{3} - \frac{P\,\ell}{2} + T_y\,\ell = 0 \qquad \text{II equazione}$$

Dalla II si ricava il valore di T_y:

$$T_y = \frac{2\,P_1 + 3\,P}{6} = 79 \text{ N}$$

Noto θ, T_x si determina come segue:

$$T_x = \frac{T_y}{\text{tg}\,\theta} = 137 \text{ N}$$

Dalla I equazione si ricavano infine R_x, R_y:

$R_x = - T_x = -137$ N

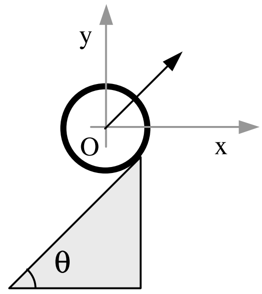
$R_y = P_1 + P - T_y = 90$ N

Esercizio 10

Un disco di massa m e raggio r rotola salendo su un piano inclinato. Un istante prima di lasciare la rampa, la velocità del CM è pari a v_o; poi il disco prosegue movendosi liberamente (e quindi, continuando a ruotare intorno all'asse centrale). Determinare:

a) la massima altezza y_{max} che il disco può raggiungere;
b) il valore della sua energia cinetica K nel punto più alto della traiettoria.

Si assuma il sistema di riferimento mostrato in figura, nel quale la posizione iniziale del CM è assunta come origine.



$m = 0.32$ Kg ; $r = 28$ mm ; $\theta = 45°$; $v_o = 11$ m s $^{-1}$

Soluzione

Le equazioni del moto del CM sono equivalenti, in base alla I equazione Cardinale della dinamica, a quelle di un punto materiale sottoposto all'accelerazione di gravità:

$$\begin{cases} x = v_{ox}\ t \\ v_x = v_{ox} \\ y = v_{oy}\ t - \frac{1}{2} g\ t^2 \\ v_y = v_{oy} - g\ t \end{cases}$$

Ponendo $v_y = 0$ si ricava l'istante t nel quale il CM raggiunge la massima quota:

$$t = \frac{v_{oy}}{g}$$

Sostituendo nella terza equazione si ricava l'altezza massima y_{max}:

$$y_{max} = \frac{v_{oy}^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_{oy}^2}{g^2} = \frac{1}{2} \frac{v_{oy}^2}{g} = 3.1 \text{ m}$$

Nel punto in questione, l'energia cinetica del disco è:

$$K = \frac{1}{2} m\ v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I\ \omega^2$$

e si ha:

$v_{CM\ x} = v_{ox} = v_o \cos\theta = 7.8$ m s^{-1}
$v_{CM\ y} = 0$

$$\omega = \omega_o = \frac{v_o}{r} = 390 \text{ s}^{-1}$$

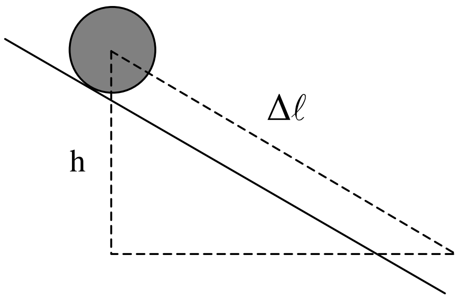
$$I = \frac{1}{2} m\ r^2 = 125 \times 10^{-6} \text{ Kg m}^2$$

Si ha infine:
K = 19.2 J

Esercizio 11

Un cilindro di massa m ruota senza strisciare su un piano inclinato di angolo α. Il cilindro parte da fermo. Determinare:

a) La velocità del CM dopo uno spostamento $\Delta \ell$;
b) L'energia cinetica totale acquisita K ;
c) L'energia cinetica di traslazione K_{CM};
d) L'energia cinetica di rotazione intorno al CM K_{rot}.



$m = 10$ Kg ; $\alpha = 30°$; $\Delta \ell = 1$ m ; $I_{CM} = \frac{1}{2} M R^2$

Soluzione

Si ha:
$h = \Delta \ell \text{ sen } \alpha = 0.5$ m

La conservazione dell'energia meccanica comporta, in questo caso:
mgh = K

L'energia cinetica del cilindro può essere scritta, ricorrendo al teorema di Koenig:

$$K = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\, \omega^2 = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{4} m v_{CM}^2 = \frac{3}{4} m v_{CM}^2$$

Si ricava dunque il valore finale della velocità del CM:

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{U}{m}} = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{mg\,\Delta\ell \text{ sen } \alpha}{m}} = 2.6 \text{ ms}^{-1}$$

e quindi:

$$K = \frac{3}{4} m v_{CM}^2 = 50 \text{ J} \quad ; \quad K_{CM} = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = 33 \text{ J} \quad ; \quad K = \frac{1}{4} m v_{CM}^2 = 17 \text{ J}$$