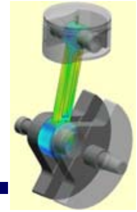


ASSUNZIONE BASE:

Il collasso di un componente avviene quando il massimo valore di un “opportuno” modulo meccanico nello stato di tensione multiassiale diviene uguale o supera lo stesso modulo che produce collasso in uno stato di tensione uniassiale

I criteri di resistenza (o teorie della rottura) definiscono un legame tra lo stato tensionale e la sua pericolosità.

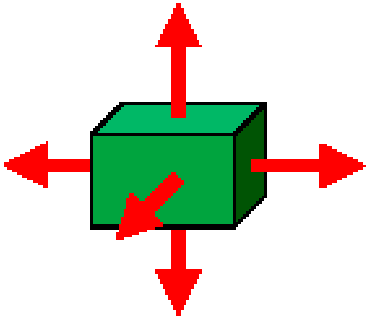
Ogni stato tensionale può essere rappresentato da una funzione scalare delle tensioni principali che può essere confrontata con un valore critico del materiale.

Al valore di tale funzione scalare viene dato il nome di tensione equivalente (o Ideale).

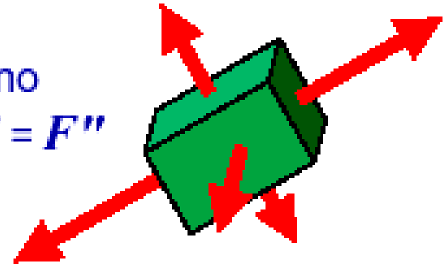
Al valore critico del materiale viene dato il nome di tensione limite.

Il rapporto tra la tensione limite del materiale e la tensione equivalente è il coefficiente di sicurezza della struttura.

Concetto di tensione equivalente



I due stati di tensione sono ugualmente pericolosi se $F' = F''$

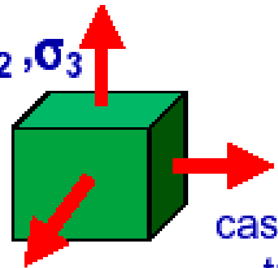


$$F' = f(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3) \longleftrightarrow F'' = f(\sigma''_1, \sigma''_2, \sigma''_3)$$

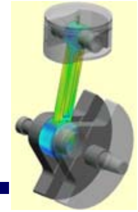
Particolarmente significativo è il confronto con lo stato di tensione che si verifica nella prova del materiale

$\sigma_1 \longleftrightarrow \sigma_e \longleftrightarrow \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

caso monoassiale (prova di trazione)



caso generale triassiale



Massima tensione normale (Rankine)

Massima tensione tangenziale (Tresca)

Massima deformazione normale (St. Venant)

Energia di deformazione Totale (Beltrami)

Energia di distorsione (Criterio di Von Mises)

Criterio di Mohr

Criterio della tensione massima (Rankine)

superficie critica definita dal criterio di Rankine nello spazio delle tensioni principali

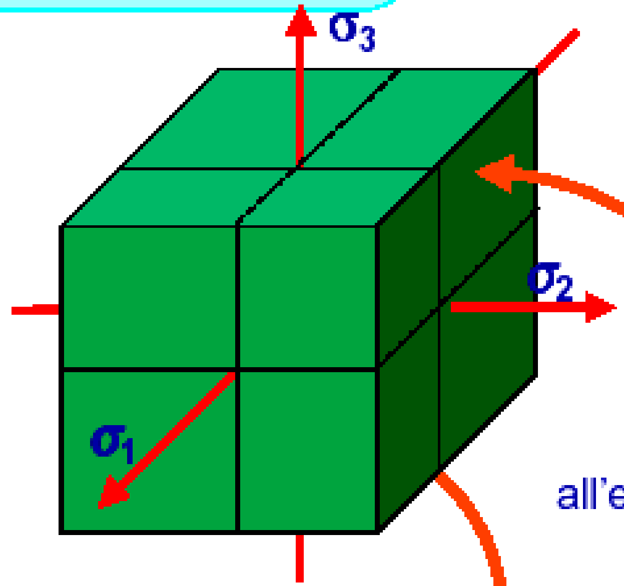
Il materiale subisce danno quando la massima tensione principale raggiunge un valore critico.

σ_{Lt} = tensione limite a trazione

σ_{Lc} = tensione limite a compressione

Si ha rottura se:

$$\boxed{\sigma_e = \begin{cases} \sigma_1 > \sigma_{Lt} \\ \sigma_3 < \sigma_{Lc} \end{cases}}$$



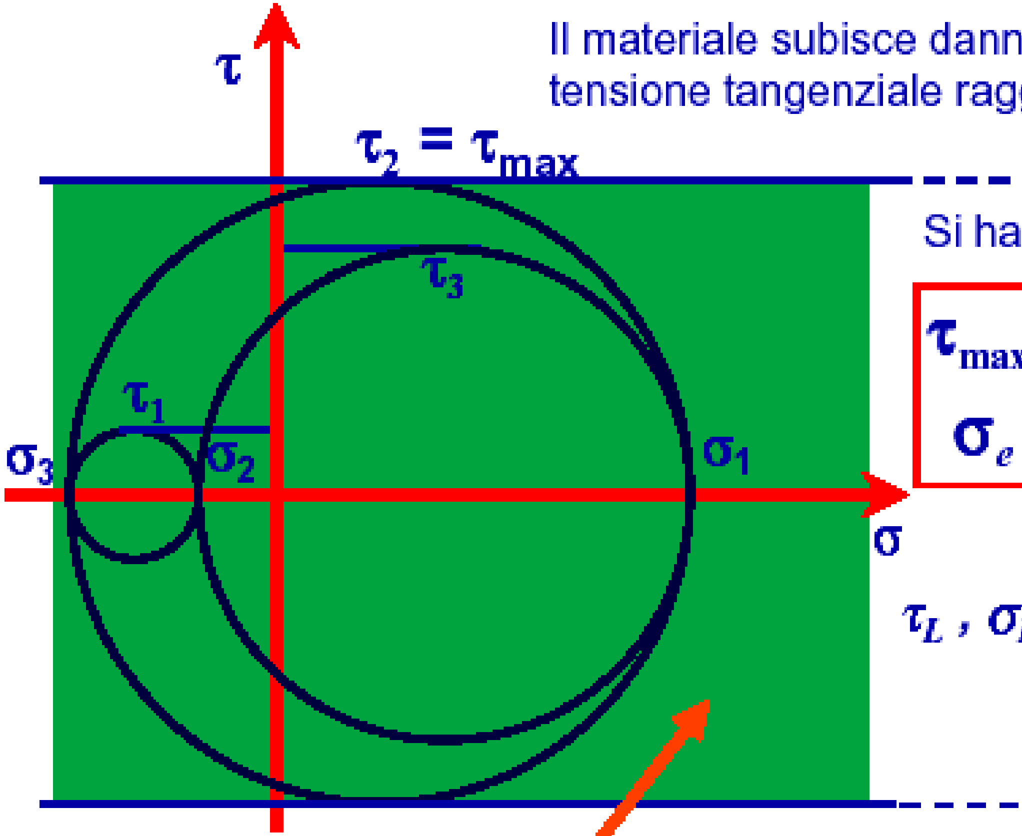
la superficie è la zona critica

all'esterno del volume c'è rottura

all'interno del volume il materiale resiste

Criterio della tensione tangenziale (Tresca)

Il materiale subisce danno quando la massima tensione tangenziale raggiunge un valore critico.



Si ha rottura se:

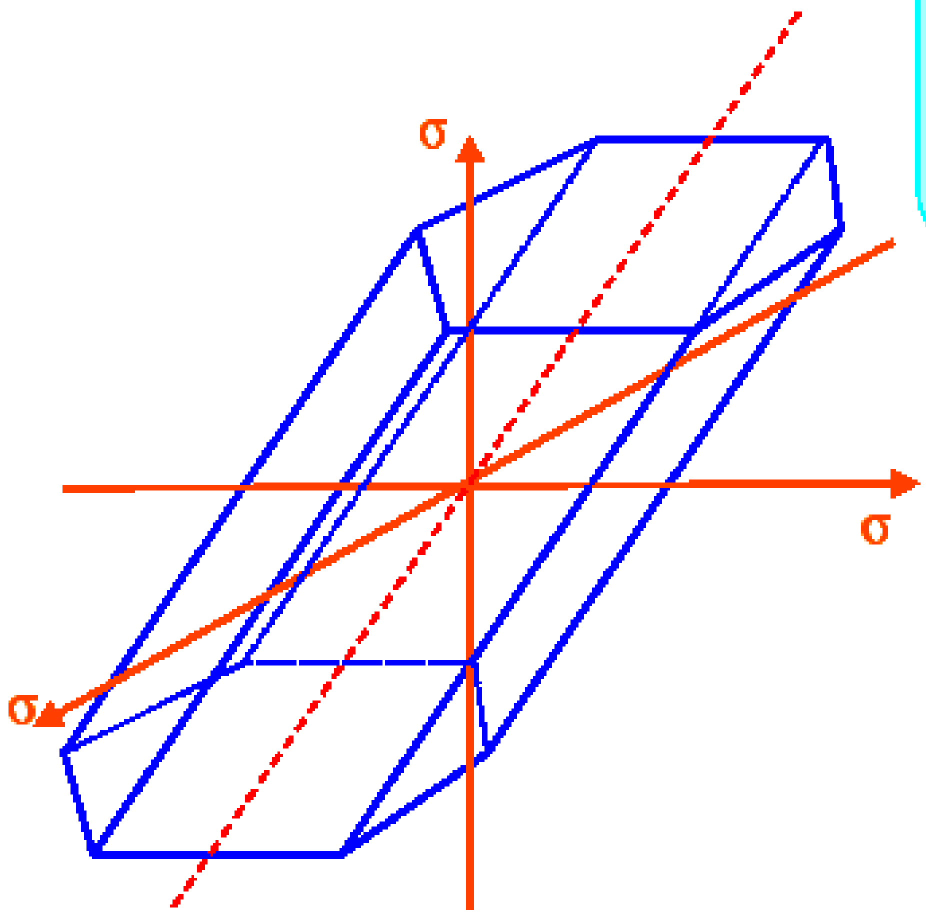
$$\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 > \tau_L$$

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 > \sigma_L$$

τ_L , σ_L = Valori critici del materiale

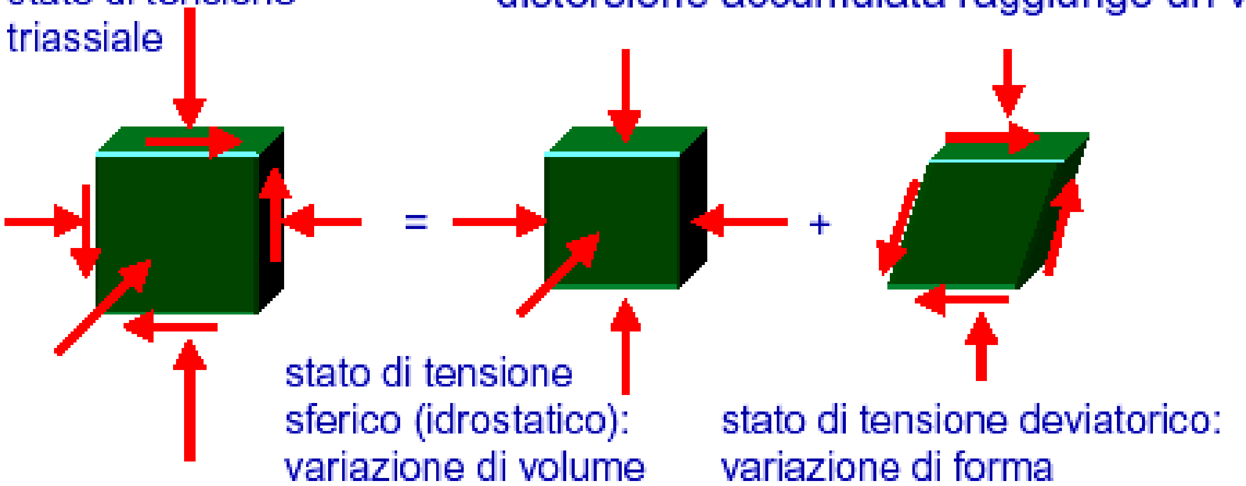
all'interno dell'area il materiale resiste

all'esterno dell'area c'è rottura



superficie critica definita dal criterio di Tresca nello spazio delle tensioni principali

Il materiale subisce danno quando l'energia di distorsione accumulata raggiunge un valore critico.



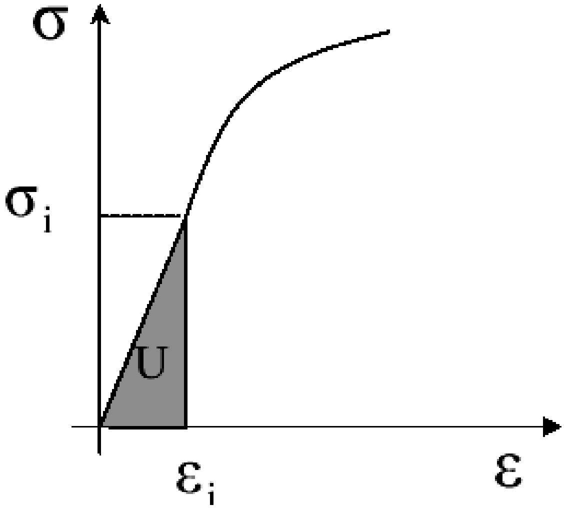
L'energia di distorsione nel caso triassiale si può scrivere:

$$U_D = \frac{1}{2}\left(\frac{1+2\nu}{3E}\right)[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]$$

Nel caso monoassiale si ha: $U_D = \left(\frac{1+2\nu}{3E}\right)\sigma_1^{\,2}$

Quindi, si ha rottura se: $\boxed{\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2} > \sigma_L}$

Criterio dell'energia di distorsione massima (Von Mises)



Energia per unità di volume:

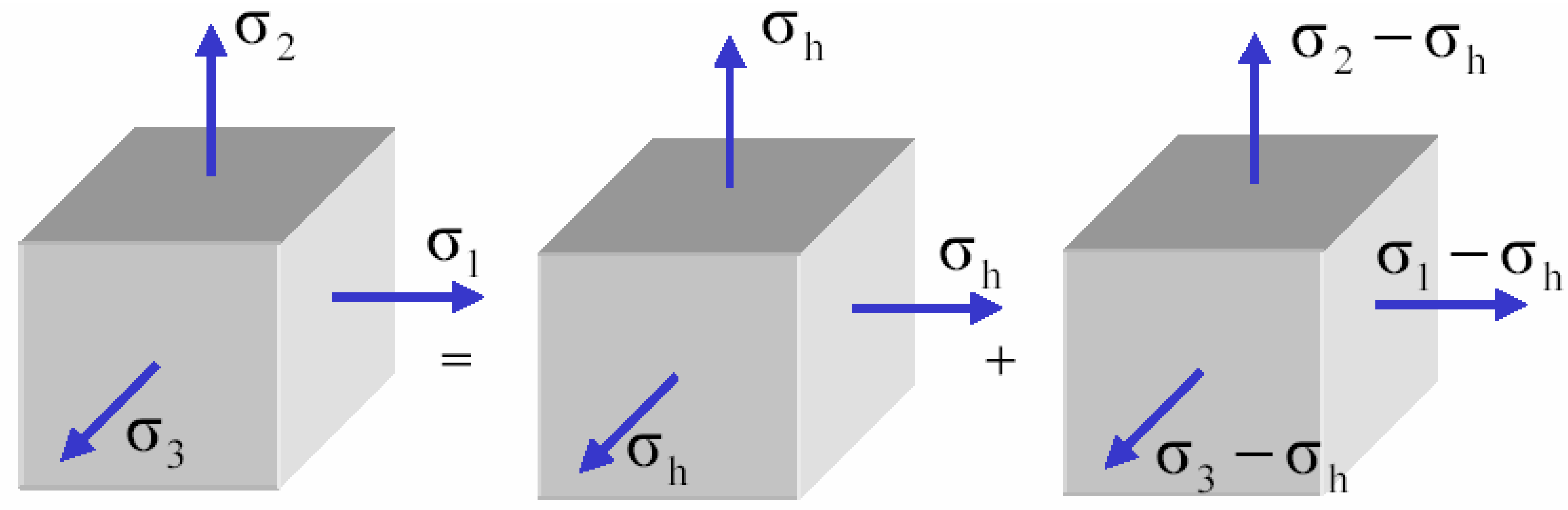
$$U = \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\sigma_3\varepsilon_3$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_3\right)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_3\right)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left(\sigma_3 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_2\right)$$

$$U = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right]$$



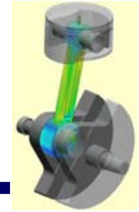
Principal Stresses Acting on Principal Planes

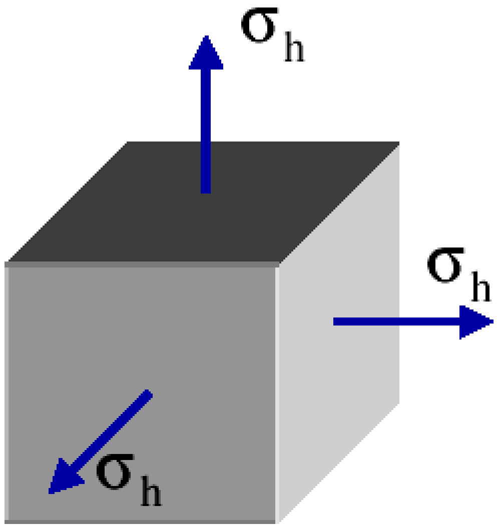
$$\sigma_h = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

Hydrostatic Stress

Distortional Stresses

Criterio dell'energia di distorsione massima (Von Mises)





$$\sigma_h = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

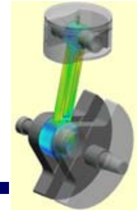
La tensione idrostatica causa una variazione di volume ma non di forma.

σ_h= K e

con K = Bulk modulus

e = deformazione volumetrica

Criterio dell'energia di distorsione massima (Von Mises)



Energia associata alla tensione idrostatica

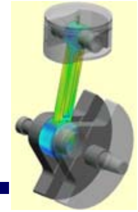
$$U = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right]$$

$$U_h = \frac{1}{2E}\left[\sigma_h^2 + \sigma_h^2 + \sigma_h^2 - 2\nu\left(\sigma_h\sigma_h + \sigma_h\sigma_h + \sigma_h\sigma_h\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2E}\left[3\sigma_h^2 - 6\nu\cdot\sigma_h^2\right]$$

$$\boxed{U_h = \frac{3}{2}\frac{(1-2\nu)}{E}\sigma_h^2}$$

Criterio dell'energia di distorsione massima (Von Mises)



Energia associata alla tensione deviatorica

$$U_d = U - U_h$$

$$= \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right]$$

$$-\frac{3}{2}\frac{(1-2\nu)}{E}\frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{9}$$

$$= \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right]$$

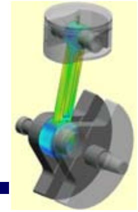
$$-\frac{1}{2}\frac{(1-2\nu)}{3E}\begin{pmatrix} \sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 \\ +\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 \\ +\sigma_3^2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 \end{pmatrix}$$

Energia associata alla tensione deviatorica

$$U_d = U - U_h$$
$$= \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right]$$
$$- \frac{1}{2}\frac{(1-2\nu)}{3E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right)$$

$$\boxed{U_d = \frac{1+\nu}{3E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1\right]}$$

Criterio dell’energia di distorsione massima (Von Mises)



$$U_d = \frac{1+\nu}{3E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1\right]$$

$$U_d = \frac{1+\nu}{3E} S_y^2$$

Si avrà collasso dell’elemento quando l’energia di distorsione per unità di volume dello stato di sforzo triassiale sarà maggiore o uguale a quella raggiunta nella prova di trazione uniassiale al momento dello snervamento

$$\sigma_{eff} = S_y \qquad \sigma_{eff} = \sqrt{\frac{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2}{2}}$$

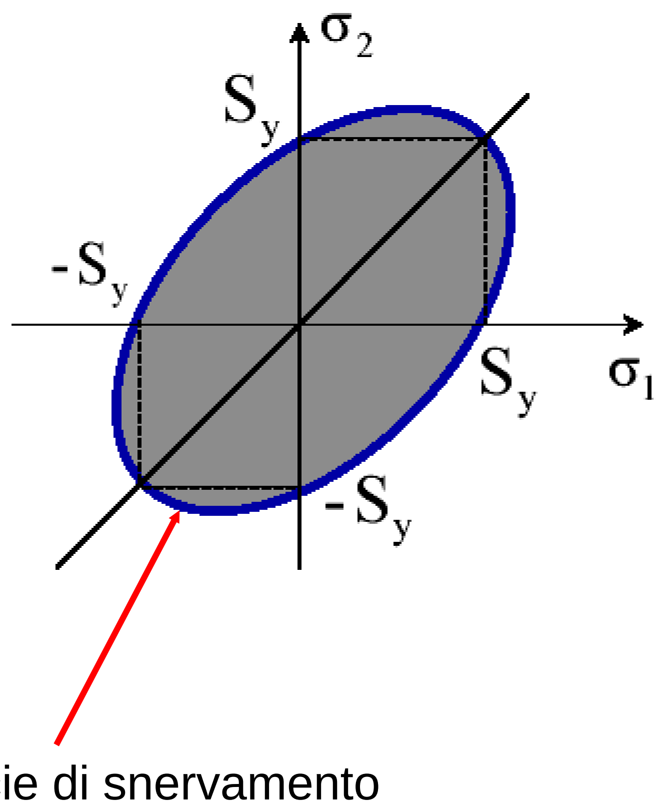
$$\sigma_{eff} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1}$$

Condizioni di tensione piana:

$$\sigma_3 = 0$$

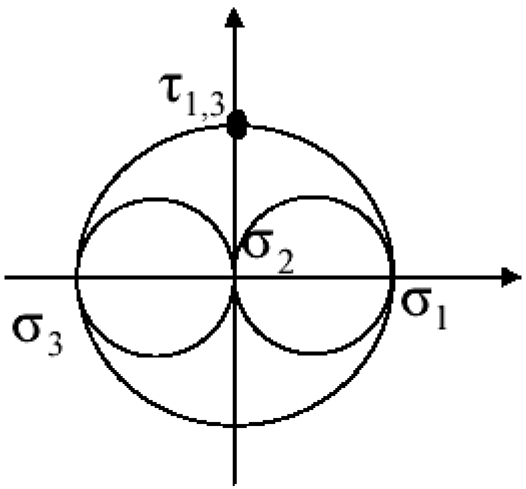
$$\sigma_{eff} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}$$

$$\sigma_{eff} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2}{2}}$$

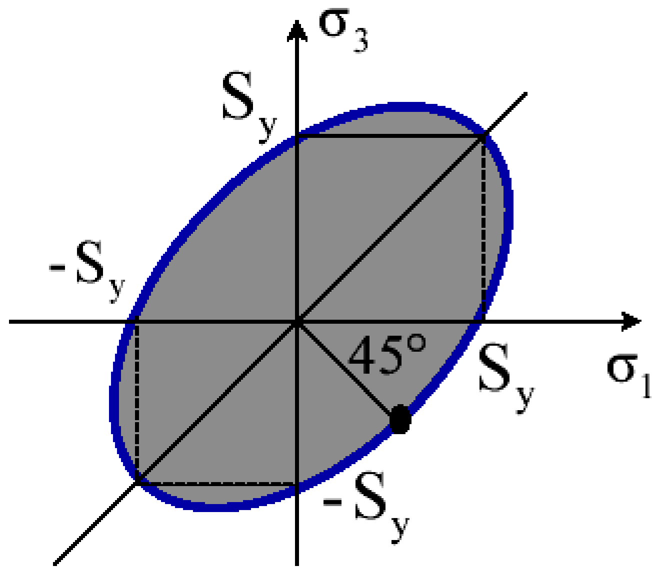


Condizioni di taglio puro

$$\sigma_3 = -\sigma_1$$



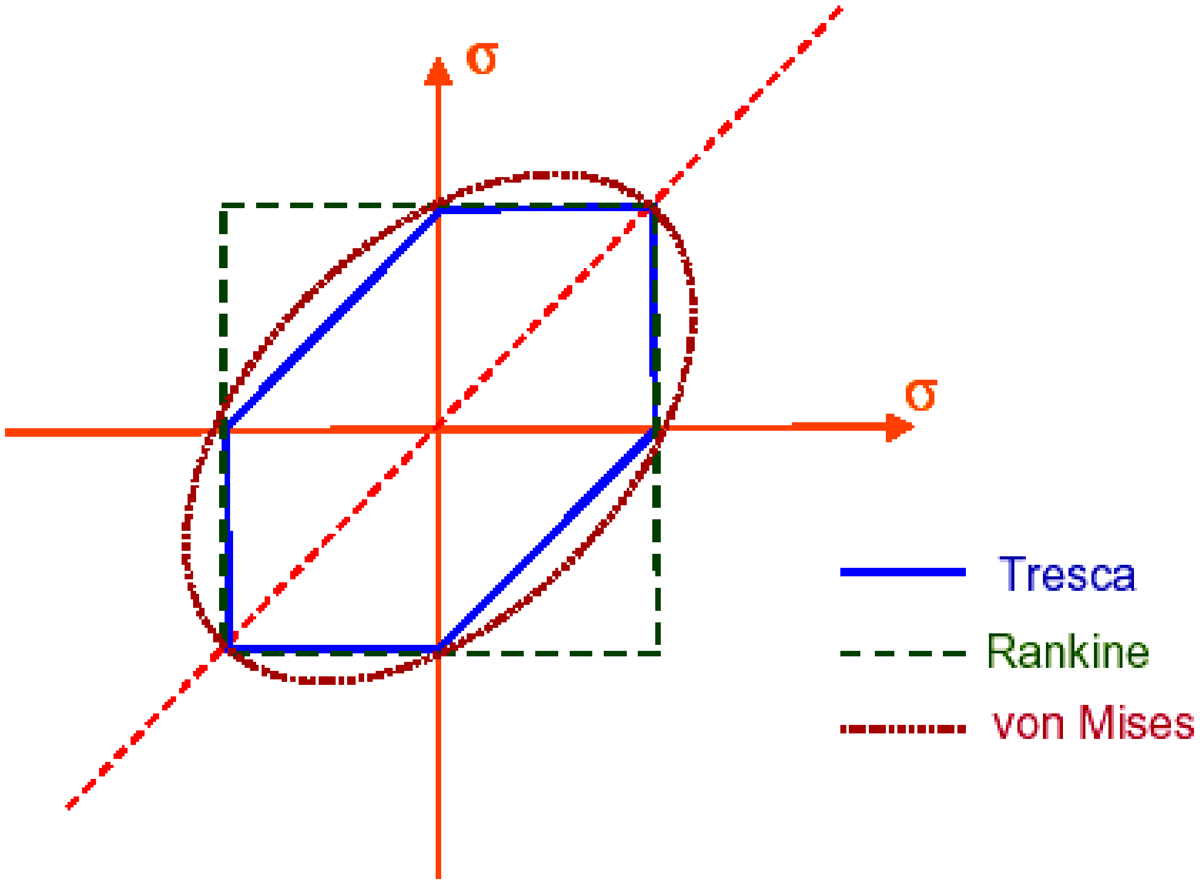
cerchi di Mohr per taglio puro

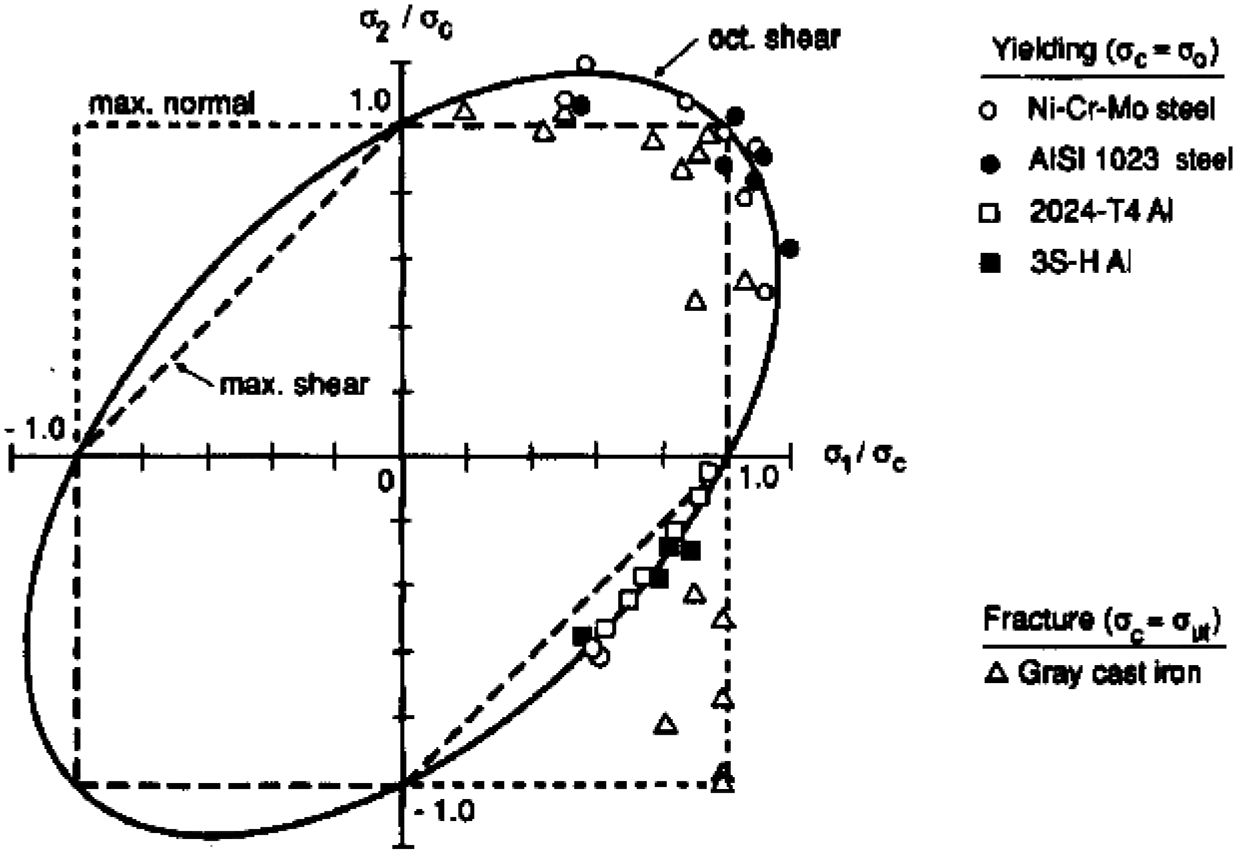


$$\sigma_{eff} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3}$$
$$= \sqrt{3\sigma_1^2} = \sqrt{3\tau_{max}^2} = S_y$$

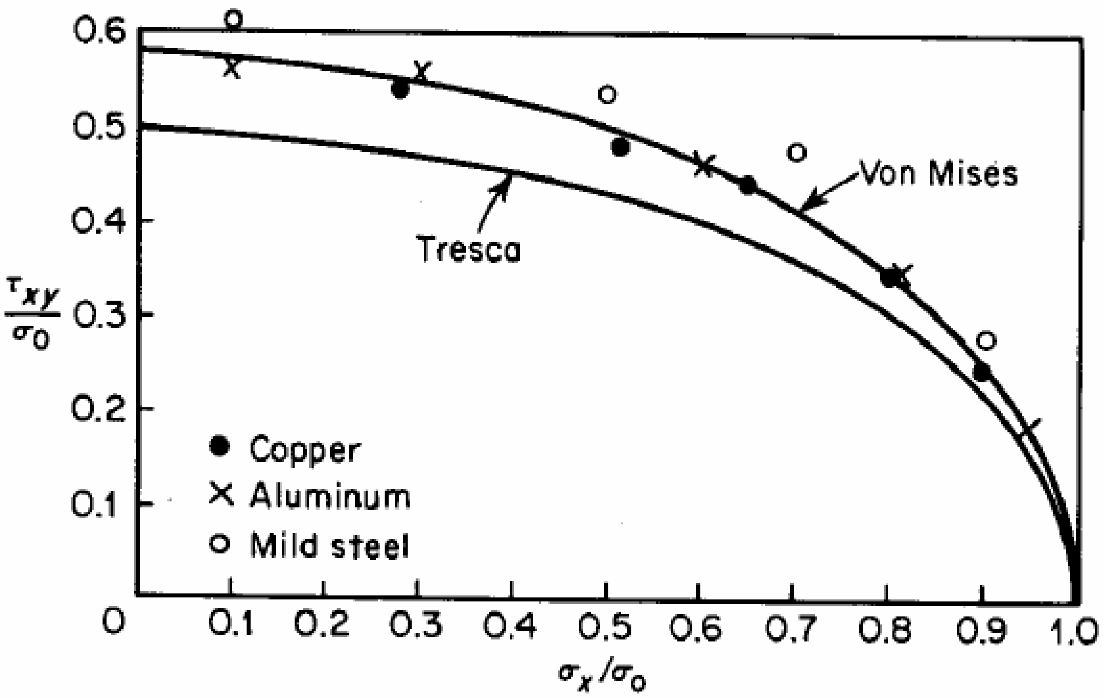
risultato importante:

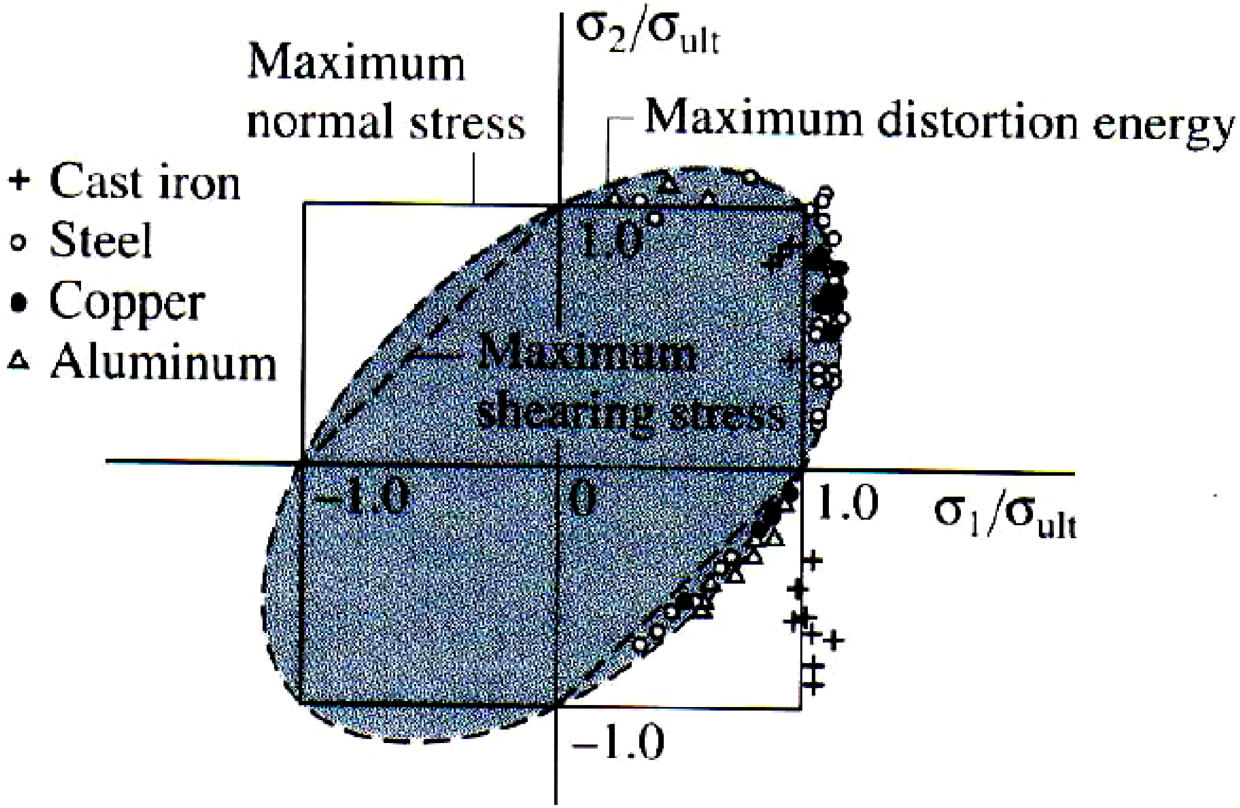
$$\boxed{\tau_{max} = 0.577 \cdot S_y = S_{ys}}$$


σ
σ
Tresca
Rankine
von Mises



σ2 / σc
oct. shear
max. normal
1.0
max. shear
- 1.0
0
1.0
σ1 / σc
- 1.0
Yielding (σc = σo)
Ni-Cr-Mo steel
AISI 1023 steel
2024-T4 Al
3S-H Al
Fracture (σc = σut)
Gray cast iron


0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
$\frac{\tau_{xy}}{\sigma_0}$
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
σ_x/σ_0
Von Mises
Tresca
● Copper
× Aluminum
○ Mild steel


σ2/σult
Maximum normal stress
Maximum distortion energy
+ Cast iron
∘ Steel
• Copper
△ Aluminum
1.0
Maximum shearing stress
−1.0
0
1.0
σ1/σult
−1.0