A Modi in fibra.

A.1 L'equazione dei modi

Per trovare i modi in fibra occorre partire dalle equazioni di Maxwell che in un mezzo dielettrico privo di cariche e correnti :

$$
\begin{aligned}
&\nabla \underline{D} = 0 \\
&\nabla \underline{B} = 0 \\
&\nabla x \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \\
&\nabla x \underline{H} = -\frac{\partial \underline{D}}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

Dove E, D, H e B sono rispettivamente i vettori campo elettrico, induzione elettrica, campo magnetico e induzione magnetica. Nel caso di mezzi isotropi inoltre abbiamo:

$$
\begin{aligned}
&\underline{B} = \mu_0 \underline{H} \\
&\underline{D} = \varepsilon(\underline{r}) \underline{E}
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

Supponiamo ora un campo monocromatico

$$\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}(\underline{r}) e^{j\omega t} \tag{A.3}$$

Per guide cilindriche utilizziamo il formalismo:

$$\nabla = \nabla_{trasv} + \underline{z_0} \frac{\partial}{\partial z} \tag{A.4}$$

e suddividiamo il campo nelle componenti traverse e longitudinali

$$\underline{E} = \underline{E}_{trasv} + \underline{z_0} E_z \tag{A5}$$

$$\underline{H} = \underline{H}_{trasv} + \underline{z_0} H_z$$

Inoltre supponiamo che

$$\underline{E}(\underline{r}) = \underline{E}(\rho,\phi,z) = \underline{E}(\rho,\phi) e^{-j\beta z}$$

(A.6)

$$\underline{H}(\underline{r}) = \underline{H}(\rho,\phi,z) = \underline{H}(\rho,\phi)e^{-j\beta z}$$

Questo porta alle seguenti relazioni:

$$\underline{E}_{trasv} = -\frac{i}{\omega^2\mu_0\varepsilon - \beta^2}\left(\beta\nabla_{trasv}E_z + \omega\mu_0\nabla_{trasv}H_x x\underline{z_0}\right)$$

(A.7)

$$\underline{H}_{trasv} = -\frac{i}{\omega^2\mu_0\varepsilon - \beta^2}\left(\beta\nabla_{trasv}H_z + \omega\mu_0\nabla_{trasv}E_x x\underline{z_0}\right)$$

Cioè le componenti trasverse si possono trovare direttamente da quelle longitudinali, che sono date dalle seguenti equazioni:

$$\nabla^2{}_{trasv}E_z + \left(\omega^2\mu_0\varepsilon - \beta^2\right)E_z = 0$$
$$\nabla^2{}_{trasv}H_z + \left(\omega^2\mu_0\varepsilon - \beta^2\right)H_z = 0 \qquad \text{(A.8)}$$

Che esplicitando le coordinate circolari diviene:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial\phi^2} + \left(\omega^2\mu_0\varepsilon - \beta^2\right)E_z = 0 \qquad \text{(A.9)}$$

Ed un’altra identica per H.

Questa è l’equazione (3.11) quando A(z)=exp(-jβz).

Segue quindi la trattazione di pag. 36.

Una volta trovata l'espressione dei modi un generico campo monocromatico può essere scritto

$$\underline{E}(\rho,\phi,z,t)=\sum_{m,l} c_{m,l}(\omega)\underline{E}_{m,l}(\rho,\phi,\omega)\exp\left[j\left(\omega t-\beta_{m,l}z\right)\right] \qquad \text{(A.10)}$$

E nel caso policromatico

$$\underline{E}(\rho,\phi,z,t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m,l}\int_{0}^{+\infty} c_{m,l}\underline{E}_{m,l}(\rho,\phi,\omega)\exp\left[j\left(\omega t-\beta_{m,l}z\right)\right]d\omega \qquad \text{(A.11)}$$

Nel caso in cui la banda del segnale, centrata intorno alla frequenza ω_0, è stretta e la distribuzione dei modi dipende debolmente dalla frequenza possiamo scrivere:

$$\underline{E}(\rho,\phi,z,t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m,l}\underline{E}_{m,l}(\rho,\phi,\omega_0)\int_{0}^{+\infty} c_{m,l}(\omega)\exp\left[j\left(\omega t-\beta_{m,l}z\right)\right]d\omega=\sum_{m,l}\underline{E}_{m,l}a_{ml}(z,t) \qquad \text{(A.12)}$$

Dove

$$a_{ml}(z,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} c_{m,l}(\omega)\exp\left[j\left(\omega t-\beta_{m,l}(\omega)z\right)\right]d\omega \qquad \text{(A.13)}$$

Occorre quindi trovare i coefficienti c che dipendono dalle condizioni al contorno. Partiamo dalla condizione di ortogonalità dei modi che può essere scritta come:

$$\iint_{Superficie}\left[\underline{E}_{m,l}(\rho,\phi,\omega)x\underline{H}_{r,s}^{*}(\rho,\phi,\omega)\right]\cdot\underline{z_0}dxdy=2P\delta_{mr,ls} \qquad \text{(A.14)}$$

E questa condizione ci permette di trovare cml.

$$\iint_{Superficie}\left[\underline{E}(\rho,\phi,\omega,z)x\underline{H}_{r,s}^{*}(\rho,\phi,\omega)\right]\cdot\underline{z_0}dxdy=2P\,\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} c_{m,l}(\omega)\exp\left[j\left(\omega t-\beta_{m,l}(\omega)z\right)\right]d\omega$$

(A.15)

E quindi per z=0

$$c_{m,l}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega t}dt\iint_{Superficie}\left[\underline{E}(\rho,\phi,t,z=0)x\underline{H}_{r,s}^{*}(\rho,\phi,\omega)\right]\cdot\underline{z_0}dxdy \qquad \text{(A.16)}$$

Modi polarizzati linearmente

Si può dimostrare che i modi HEm+1,l e EHm-1,l hanno la stessa costante di propagazione β. Quindi una combinazione lineare di questi può fornire una nuova base.

In particolare i modi

$$(LP_x)_{ml} = \frac{\underline{E_{trasv}}(HE_{m+1,l}) - \underline{E_{trasv}}(EH_{m-1,l})}{2}$$

$$(LP_y)_{ml} = \frac{\underline{E_{trasv}}(HE_{m+1,l}) + \underline{E_{trasv}}(EH_{m-1,l})}{2} \qquad \text{(A.17)}$$

Sono modi polarizzati linearmente secondo le direzioni x e y. Sono particolarmente utili nel coso di fibra monomodale in cui si è persa la degenerazione dei modi.

In questo caso l'equazione A.12 la possiamo scrivere nel dominio della frequenza:

$$\underline{E}(\rho,\phi,z,\omega) = F(x,y)B(\omega)\left[\underline{x_0}c_x e^{j\beta_{xx}z} + \underline{y_0}c_y e^{j\beta_{yx}z}\right]$$

Dove la funzione F dipende dalla distribuzione dei modi e dal campo di ingresso e B rappresenta in pratica la trasformata di Fourier del segnale di ingresso nella banda ottica.
Il segnale $A(t) = B(t)e^{j\omega_0 t}$ rappresenta il segnale in banda base. Da qui si passa alla relazione (3.30).