



Università degli Studi di Cassino

## Note sulle Leggi di Kirchhoff

Antonio Maffucci, Fabio Villone

A.A. 2004/2005

### INTRODUZIONE

Nei limiti di applicabilità, il *modello circuitale* consente lo studio di sistemi elettromagnetici costituiti dall'interconnessione di un certo numero di dispositivi elettrici ed elettronici (*circuiti*), attraverso la determinazione delle grandezze elettriche *tensione* e *corrente*, definite in modo univoco per ciascun componente. Detto  $l$  il numero di *bipoli*<sup>1</sup> costituenti il circuito in esame, il modello consente di scrivere un sistema di equazioni nelle  $2l$  incognite tensioni e correnti, che può essere suddiviso in due sottosistemi

- equazioni *topologiche* (ottenute dalle *Leggi di Kirchhoff*);
- equazioni *caratteristiche* (ottenute dalle *relazioni costitutive* dei componenti).

Le equazioni topologiche stabiliscono delle relazioni tra le correnti e delle relazioni tra le tensioni che riflettono esclusivamente le proprietà di interconnessione del circuito. Le equazioni caratteristiche, per contro, descrivono il funzionamento del singolo elemento, imponendo un legame tra la tensione e la corrente relative a quello specifico componente.

Dal punto di vista matematico, le equazioni topologiche sono sempre *algebriche e lineari*, mentre la natura più o meno complessa dei componenti del circuito può condurre ad equazioni caratteristiche lineari o non-lineari, statiche o dinamiche, tempo-varianti o tempo-invarianti. Nel seguito vedremo come, sfruttandone le proprietà strutturali, sia possibile riformulare le equazioni topologiche in una forma matriciale che, oltre al vantaggio di essere compatta ed elegante, consenta:

- di impostare molto facilmente procedure di carattere generale per la risoluzione delle reti, naturalmente implementabili in simulatori numerici;
- di disporre di strumenti molto potenti per l'analisi qualitativa delle reti.

### 1. ELEMENTI DI TEORIA DEI GRAFI

#### *Grafo*

Il grafo di una rete è l'insieme dei nodi  $n$ , dei lati  $l$  e della *relazione di incidenza*, di un circuito, cioè della relazione che ad ogni lato fa corrispondere la coppia di nodi a cui è connesso.

In Fig.1 è riportato il grafo corrispondente a due circuiti costituiti da  $n = 3$  nodi ed  $l = 4$ . Si noti che i due circuiti differiscono solo nella natura dei componenti che li costituiscono, ma presentano la stessa topologia, quindi sono descritti dallo stesso grafo. E' evidente che ad ogni circuito si associa un solo grafo, mentre lo stesso grafo può rappresentare circuiti diversi.

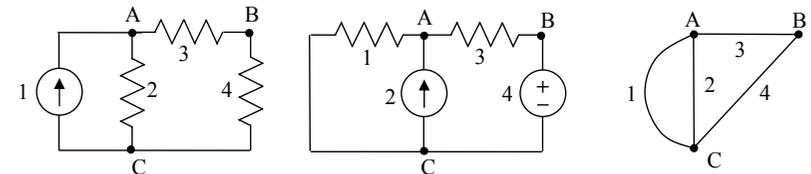


Fig.1 Due circuiti elettrici ed il corrispondente grafo

<sup>1</sup> Nel seguito supporremo di considerare solo reti costituite da bipoli. L'estensione dei risultati a reti composte da elementi multipolari esula dall'obiettivo di queste note ed è rimandata ad ulteriori approfondimenti.

Il grafo di una rete si dice *orientato* quando sia stato associato un verso ad ognuno degli  $l$  lati. Tipicamente i lati del grafo vengono orientati tenendo conto dei versi scelti per orientare le correnti sui corrispondenti bipoli della rete rappresentata dal grafo stesso.

Un grafo si dice *connesso* se ogni nodo è collegato a qualsiasi altro nodo attraverso uno più lati, mentre si dice *planare* se può essere tracciato su un piano senza che i lati si intersechino.

**Maglia**

Sottografo connesso di una rete in cui in ciascun nodo incidono due e solo due lati.

Per definizione, la maglia quindi rappresenta un percorso chiuso costituito da un certo numero di lati. In Fig. 2, con riferimento ad un assegnato circuito, vengono evidenziate tutte le possibili maglie che vi si possono definire. Tali maglie possono essere ovviamente individuate anche a partire dal grafo della rete.

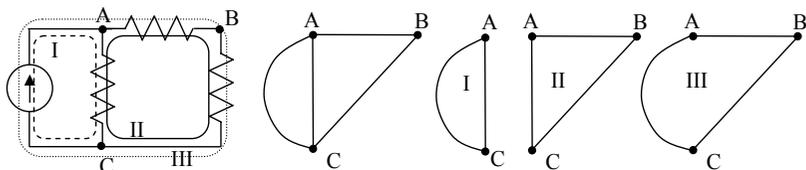


Fig.2 Le possibili maglie individuabili in un circuito

Si noti che è possibile definire una maglia *unione* di due maglie che abbiano un lato in comune, il quale viene eliminato nell'operazione di unione: nell'esempio di Fig.2 la maglia III si può ottenere come unione delle maglie I e II.

Una maglia di un grafo planare che non contiene nessun lato al suo interno è detta *anello*. Il grafo planare di Fig. 2 contiene due anelli, corrispondenti alle maglie I e II.

**Albero di un grafo**

Sottografo connesso di una rete che contiene tutti i nodi senza chiudere alcuna maglia.

Dato un grafo è possibile definire più di un albero, come mostrato in Fig. 3. Tutti gli alberi, tuttavia, dovendo collegare  $n$  nodi senza chiudere maglie sono costituiti da  $n-1$  lati.

L'insieme complemento dell'albero rispetto al grafo è detto *coalbero* ed è costituito dagli  $l-(n-1)$  lati rimanenti. Nella Fig. 3, il coalbero relativo all'albero (a) è costituito dai lati 2, 4 e 6, mentre quello relativo all'albero (b) è costituito dai lati 1, 2 e 5.

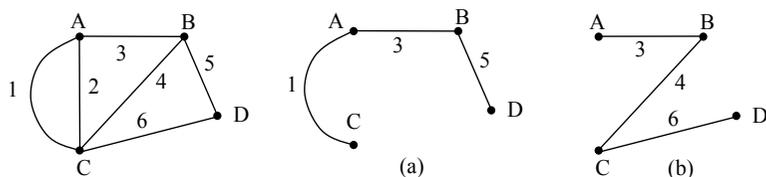


Fig. 3 Grafo di una rete con due possibili scelte di albero

Osserviamo che, per definizione di albero e di coalbero, l'aggiunta di un qualsiasi lato del coalbero chiude una ed una sola maglia, detta *maglia fondamentale*. Il numero di maglie fondamentali è pari al numero di lati del coalbero:  $l-(n-1)$ . In Fig. 4 viene riportato l'insieme di maglie fondamentali relativo alla scelta dell'albero (a) in Fig. 3.

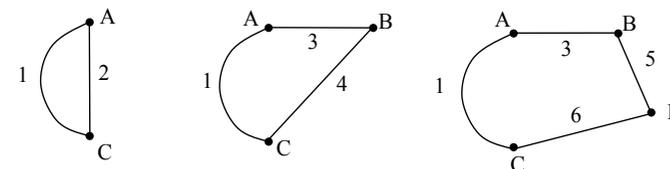


Fig. 4 Insieme di maglie fondamentali associato alla scelta dell'albero (a) in Fig. 3

Ad ogni scelta possibile di albero e, quindi, di coalbero, si associa un insieme diverso di  $l-(n-1)$  maglie fondamentali. Tali maglie sono tra di loro *indipendenti*, nel senso che non è possibile ottenere una qualsiasi di tali maglie dall'unione delle restanti maglie fondamentali. E' inoltre possibile mostrare che qualsiasi altra maglia del grafo può essere ottenuta dall'unione di maglie fondamentali.

Si osservi che è possibile dimostrare che in un grafo planare si possono individuare  $l-(n-1)$  anelli. Anche se, in generale, tali anelli possono non essere associati ad alcun insieme di maglie fondamentali, si può mostrare che anche gli  $l-(n-1)$  anelli sono maglie indipendenti e che tutte le altre maglie si possono ottenere dall'unione di anelli. A differenza dell'insieme di maglie fondamentali, che dipende dalla scelta dell'albero, l'insieme degli anelli di un grafo planare è unico.

**2. NOTE SULLA LEGGE DI KIRCHHOFF PER LE CORRENTI**

**Legge di Kirchhoff per le correnti (LKC)**

In una rete elettrica, la somma algebrica delle correnti afferenti in un nodo è nulla:

$$\sum_k \pm i_k = 0.$$

Associato arbitrariamente un verso di riferimento al nodo (uscente o entrante), tale somma si effettua conteggiando col segno (+) tutte le correnti il cui verso è concorde a quello del riferimento, e col segno (-) quelle il cui verso è ad esso discorde.

Con riferimento all'esempio di Fig.5, l'applicazione della LKC al grafo orientato in esame fornisce le  $n=4$  equazioni del sistema (a), nelle  $l=6$  incognite date dalle correnti di ciascuno dei lati del grafo. Si osservi che tali equazioni sono state ottenute assumendo come positivo il verso uscente da ciascun nodo. Scegliere come positivo il verso entrante in uno qualsiasi dei nodi equivale semplicemente a cambiare segno membro a membro alla corrispondente equazione nel sistema (a) il che, ovviamente, non cambia l'equazione stessa.

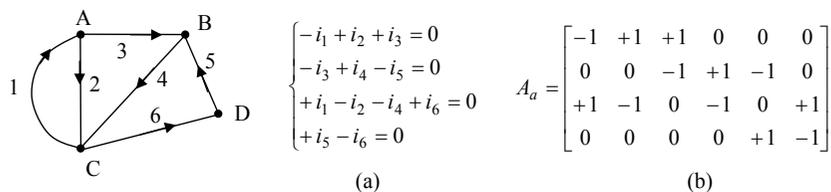


Fig. 5 Grafo orientato e corrispondenti: (a) equazioni per le correnti; (b) matrice di incidenza

Le equazioni ottenute applicando la LKC possono essere facilmente rappresentate in una forma matriciale compatta, definendo una matrice che contiene le informazioni topologiche necessarie.

**Matrice di incidenza**

Dato il grafo orientato di una rete di  $n$  nodi ed  $l$  lati, si definisce *matrice di incidenza*  $A_a$  la matrice  $n \times l$ , il cui elemento generico  $A_a(i, j)$  è pari a:

- 0 se il lato  $j$  non è collegato al nodo  $i$
- +1 se il lato  $j$  è collegato al nodo  $i$  ed il verso del lato  $j$  è uscente dal nodo  $i$
- -1 se il lato  $j$  è collegato al nodo  $i$  ed il verso del lato  $j$  è entrante nel nodo  $i$

La costruzione della matrice di incidenza è molto semplice se si procede “per lati” cioè “per colonne”: la colonna  $j$ -ma è associata al lato  $j$  e conterrà tutti elementi nulli tranne che in corrispondenza dei nodi a cui il lato è collegato. Questi ultimi due elementi saranno pari a +1 o a -1 a seconda della concordanza col verso associato al lato  $j$  rispetto al verso uscente dal nodo. Applicando questo modo di procedere, è semplice stabilire che la matrice di incidenza del grafo orientato di Fig.5 è quella indicata nella stessa figura (b).

Costruita la matrice  $A_a$ , è interessante leggerla, ora, “per righe”. Introdotto il vettore colonna delle correnti incognite

$$\mathbf{i}^T = [i_1 \quad i_2 \quad \dots \quad i_l]^T, \tag{1}$$

è semplice mostrare, applicando le regole del prodotto matriciale, che l’equazione matriciale

$$A_a \mathbf{i} = \mathbf{0}, \tag{2}$$

rappresenta proprio il sistema di equazioni che si otterrebbe imponendo la LKC a tutti i nodi della rete (scegliendo per tutti il verso uscente come positivo). Con riferimento all’esempio di Fig.5, si avrebbe infatti:

$$A_a \mathbf{i} = \begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & -1 & 0 \\ +1 & -1 & 0 & -1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ -i_3 + i_4 - i_5 = 0 \\ +i_1 - i_2 - i_4 + i_6 = 0 \\ +i_5 - i_6 = 0 \end{cases}$$

Utilizziamo, ora, le importanti proprietà strutturali di queste matrici per dimostrare un importante risultato della teoria delle reti.

**Proprietà di indipendenza delle equazioni di Kirchhoff per le correnti**

Data una rete di  $n$  nodi, l’applicazione della LKC fornisce  $n-1$  equazioni linearmente indipendenti per le correnti, ottenute eliminando l’equazione corrispondente ad uno qualsiasi dei nodi della rete.

*Dimostrazione.*

Per il significato attribuito alla (2) è evidente che il numero massimo di equazioni linearmente indipendenti è pari al numero massimo di righe linearmente indipendenti. Poiché ogni colonna di  $A_a$  contiene un elemento pari a +1, un elemento pari a -1 e tutti gli altri elementi nulli, sommando tutte le righe si ottiene il vettore nullo, il che significa che il numero di righe indipendenti è sicuramente minore di  $n$ <sup>1</sup>. Questo prova che sicuramente le  $n$  equazioni non possono essere indipendenti.

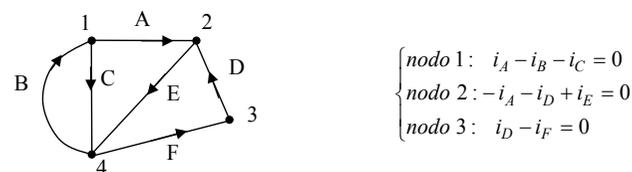


Fig. 6 Indipendenza di  $n-1$  equazioni ai nodi.

Per dimostrare che è possibile scrivere  $n-1$  equazioni linearmente indipendenti, consideriamo una rete nella quale i nodi siano stati numerati da 1 ad  $n$  (vedi fig.6). Osserviamo che, se il grafo è connesso (ipotesi sempre soddisfatta nelle nostre applicazioni), l’aggiunta di ogni nuovo nodo impone un’equazione in cui compare almeno una nuova incognita rispetto a quelle scritte in precedenza, condizione sufficiente a garantirne l’indipendenza. Questo discorso può essere iterato fino ad un numero di nodi pari ad  $n-1$ . ♦

Eliminiamo, ora, una qualsiasi delle  $n$  righe dalla matrice  $A_a$ , ad esempio la riga  $k$ -ma, corrispondente al  $k$ -mo nodo. Otterremo in questo modo la cosiddetta *matrice di incidenza ridotta*  $A_k$ <sup>2</sup>. In seguito, ad esempio, è riportata la matrice di incidenza ridotta ottenuta cancellando la riga 4 dalla matrice di incidenza dell’esempio di Fig.5.

$$A_a = \begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & -1 & 0 \\ +1 & -1 & 0 & -1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & -1 & 0 \\ +1 & -1 & 0 & -1 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

Riassumendo, possiamo quindi affermare che le LKC consentono di scrivere  $n-1$  equazioni linearmente indipendenti fornite dall’espressione matriciale

$$A \mathbf{i} = \mathbf{0}, \tag{3}$$

che equivale a scrivere tutte le equazioni ai nodi tranne il nodo  $k$ , corrispondente alla riga estratta per ottenere la matrice ridotta che compare nella (3).

<sup>1</sup> In tal caso si dice che la matrice non è a rango pieno.

<sup>2</sup> Si osservi che nel seguito ometteremo nella notazione il pedice  $k$ , che serve qui solo a ricordare che la matrice  $A_k$  è una delle  $n$  possibili matrici ridotte, precisamente quella ottenuta cancellando la riga  $k$ -ma.

### 3. NOTE SULLA LEGGE DI KIRCHHOFF PER LE TENSIONI

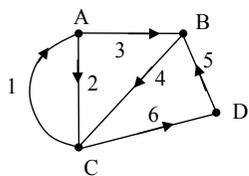
#### Legge di Kirchhoff per le tensioni (LKT)

In una rete elettrica, la somma algebrica delle tensioni afferenti ad una maglia è nulla:

$$\sum_k \pm v_k = 0.$$

Associato arbitrariamente un verso di circolazione della maglia, tale somma si effettua conteggiando col segno (+) tutte le tensioni il cui verso è concorde a quello del riferimento, e col segno (-) quelle il cui verso è ad esso discorde.

Con riferimento all'esempio di Fig.7, l'applicazione della LKT al grafo orientato in esame fornisce le 6 equazioni del sistema in figura, ciascuna per ogni possibile maglia (indicate nel sistema con i lati che le costituiscono) nelle  $l = 6$  incognite date dalle tensioni di ciascuno dei lati del grafo. Tali equazioni sono state ottenute assumendo per ciascuna maglia come positivo il verso di percorrenza antiorario e supponendo che su tutti i bipoli della rete sia stata fatta la stessa convenzione. Il vantaggio della scelta di un'unica convenzione sui versi per ogni bipolo della rete si traduce nel fatto che il verso delle correnti riportato nel grafo orientato induce automaticamente anche quello delle tensioni. Ovviamente tale scelta non è strettamente necessaria, così come non è necessario scegliere per tutte le maglie lo stesso senso di circolazione.



$$\begin{cases} +v_1 + v_2 = 0 & \text{maglia I (lati 1-2)} \\ -v_2 + v_3 + v_4 = 0 & \text{maglia II (lati 2-3-4)} \\ -v_4 - v_5 - v_6 = 0 & \text{maglia III (lati 4-5-6)} \\ +v_1 + v_3 + v_4 = 0 & \text{maglia IV (lati 1-3-4)} \\ -v_2 + v_3 - v_5 - v_6 = 0 & \text{maglia V (lati 2-3-5-6)} \\ +v_1 + v_3 - v_5 - v_6 = 0 & \text{maglia VI (lati 1-3-5-6)} \end{cases}$$

Fig. 7 Grafo orientato e corrispondenti equazioni per le tensioni

E' evidente che non tutte le equazioni del sistema di Fig.7 sono linearmente indipendenti: ad esempio l'eq. 4 può essere ottenuta sommando membro a membro le eq. 1 e 2. Ciò significa che il numero di equazioni per le tensioni linearmente indipendenti che si possono ottenere dalla LKT è minore o uguale al numero di tutte le possibili maglie della rete.

#### Proprietà di indipendenza delle equazioni di Kirchhoff per le tensioni

Data una rete di  $n$  nodi ed  $l$  lati, l'applicazione della LKT fornisce  $l - (n - 1)$  equazioni linearmente indipendenti per le tensioni.

#### Dimostrazione.

Questa proprietà può essere facilmente mostrata a partire dalle proprietà enunciate nel par.1. Scelto, infatti, un qualsiasi insieme di maglie fondamentali, è evidente che le equazioni per le tensioni che si ottengono da ciascuna maglia fondamentale sono linearmente indipendenti, in quanto presentano

un'incognita in esclusiva<sup>1</sup> (la tensione relativa al lato del coalbero associato alla maglia fondamentale). Con riferimento, ad esempio, al grafo di Fig.7, scelto come insieme di maglie fondamentali l'insieme di Fig.4, le equazioni relative a tale scelta sono le seguenti:

$$\begin{cases} +v_1 + v_2 = 0 & \text{maglia I (lati 1-2)} \\ +v_1 + v_3 + v_4 = 0 & \text{maglia IV (lati 1-3-4)} \\ +v_1 + v_3 - v_5 - v_6 = 0 & \text{maglia VI (lati 1-3-5-6)} \end{cases}$$

La prima, ad esempio, si ottiene associando all'albero (a) di Fig.3 il lato 2 del coalbero, e quindi è l'unica che contiene l'incognita  $v_2$ .

Poiché, poi, ogni altra maglia della rete può essere ottenuta dall'unione di maglie fondamentali, è evidente che la relativa equazione alle tensioni può essere ottenuta come combinazione delle equazioni delle maglie fondamentali la cui unione fornisce la maglia in esame. ♦

Come per le equazioni per le correnti, anche quelle per le tensioni possono essere espresse in forma matriciale, introducendo una opportuna matrice.

#### Matrice di maglia

Dato il grafo orientato di una rete di  $n$  nodi ed  $l$  lati, avente  $m$  maglie, si definisce *matrice di maglia*  $B_a$  la matrice  $m \times l$ , il cui elemento generico  $B_a(i, j)$  è pari a:

- 0 se il lato  $j$  non appartiene alla maglia  $i$
- +1 se il lato  $j$  appartiene alla maglia  $i$  ed il suo verso è concorde al verso di circolazione della maglia  $i$
- -1 se il lato  $j$  appartiene alla maglia  $i$  ed il suo verso è discorde al verso di circolazione della maglia  $i$

Anche la costruzione della matrice di maglia può procedere "per lati" cioè "per colonne", sebbene però non vi siano più le proprietà strutturali della matrice di incidenza. Ad esempio la matrice di maglia dell'esempio di Fig.7 è la seguente:

$$B_a = \begin{matrix} \begin{bmatrix} +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & -1 & -1 \\ +1 & 0 & +1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{maglia I} \\ \text{maglia II} \\ \text{maglia III} \\ \text{maglia IV} \\ \text{maglia V} \\ \text{maglia VI} \end{matrix} \\ \text{lati} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \end{matrix}$$

Introdotta il vettore colonna delle tensioni incognite

$$\mathbf{v}^T = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_l]^T, \tag{4}$$

è semplice mostrare, applicando le regole del prodotto matriciale, che l'equazione matriciale

<sup>1</sup> Si osservi che tale condizione è sufficiente ma non necessaria a garantire la lineare indipendenza delle equazioni.

$$B_a \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (5)$$

rappresenta proprio il sistema di equazioni che si otterrebbe imponendo la LKT a tutte le maglie della rete. Con riferimento all'esempio di Fig.7 si avrebbe infatti:

$$B_a \mathbf{v} = \begin{bmatrix} +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & -1 & -1 \\ +1 & 0 & +1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} +v_1 + v_2 = 0 \\ -v_2 + v_3 + v_4 = 0 \\ -v_4 - v_5 - v_6 = 0 \\ +v_1 + v_3 + v_4 = 0 \\ -v_2 + v_3 - v_5 - v_6 = 0 \\ +v_1 + v_3 - v_5 - v_6 = 0 \end{cases}$$

Tenendo conto della proprietà di indipendenza delle LKT, è evidente che è utile introdurre la *matrice di maglie fondamentali*  $B$ , ottenuta con la stessa procedura descritta sopra, ma a partire da un insieme di maglie fondamentali. La seguente equazione matriciale

$$B\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (6)$$

fornisce esattamente  $l - (n - 1)$  equazioni linearmente indipendenti nelle incognite tensioni.

#### 4. NOTE SUI METODI GENERALI DI ANALISI DELLE RETI

Come già ricordato in precedenza, dato un circuito di  $l$  bipoli ed  $n$  nodi, il modello circuitale consente di scrivere un sistema di equazioni nelle  $2l$  incognite tensioni e correnti, che può essere suddiviso in due sottosistemi:

- equazioni *topologiche* (ottenute dalle *Leggi di Kirchhoff*);
- equazioni *caratteristiche* (ottenute dalle *relazioni costitutive* dei componenti).

Per quanto detto finora, il primo sottosistema è costituito da equazioni algebriche lineari che possono sempre essere poste nella forma matriciale<sup>1</sup>:

$$\begin{cases} A\mathbf{i} = \mathbf{0} & n-1 \text{ equazioni (LKC)} \\ B\mathbf{v} = \mathbf{0} & l-(n-1) \text{ equazioni (LKT)} \end{cases} \quad (7)$$

Il secondo sottosistema è fornito dalle  $l$  relazioni caratteristiche che identificano il legame tensione-corrente per ciascuno dei bipoli della rete. In generale tali caratteristiche possono essere molto complesse, a seconda della natura dei bipoli, e inoltre non è in generale assicurata la compatibilità di tali equazioni con quelle topologiche.

Consideriamo il caso semplice di una rete costituita da soli resistori lineari e generatori indipendenti: la generica equazione caratteristica avrà una delle seguenti espressioni:

$$\begin{cases} v_k - R_k i_k = 0 & \text{resistore (convvenz. normale)} \\ v_r = E_r & \text{generatore di tensione} \\ i_m = J_m & \text{generatore di corrente} \end{cases} \quad (8)$$

<sup>1</sup> Osserviamo che queste  $l$  equazioni sono tutte linearmente indipendenti e compatibili.

Quindi l'insieme di tutte le equazioni caratteristiche potrà essere espresso nella forma generale:

$$M\mathbf{v} + N\mathbf{i} = \mathbf{u}, \quad (10)$$

nella quale  $M$  ed  $N$  sono opportune matrici ed  $\mathbf{u}$  è un vettore di termini noti. Si consideri, ad esempio, il circuito di Fig.8, costituito da 2 resistori lineari, un generatore di corrente e un generatore di tensione.

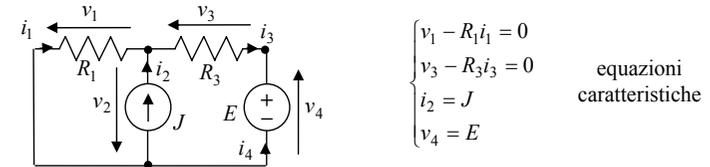


Fig.8 Equazioni caratteristiche per un circuito assegnato

Il sistema delle equazioni caratteristiche relative a tale circuito può essere posto nella forma (10), avendo definito le seguenti matrici:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} -R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J \\ E \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Il sistema complessivo di  $2l = 8$  equazioni nelle  $2l = 8$  incognite tensioni e correnti si può allora porre nella forma matriciale

$$\begin{cases} A\mathbf{i} = \mathbf{0} \\ B\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ M\mathbf{v} + N\mathbf{i} = \mathbf{u} \end{cases} \quad (12)$$

Introdotta il vettore delle incognite

$$\mathbf{x}^T = [i_1 \quad i_2 \quad \dots \quad i_l \quad v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_l]^T \quad (13)$$

il sistema (12) può, in ultima analisi, essere ricondotto ad un unico sistema lineare

$$W\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (14)$$

dove la matrice a blocchi  $W$  ed il vettore dei termini noti  $\mathbf{b}$  sono definiti come segue:

$$W = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \\ N & M \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}.$$

Il modello matematico di un circuito formato da resistori lineari e generatori indipendenti (circuito resistivo lineare) è costituito da un sistema di equazioni algebriche lineari del tipo (14) nelle  $2l$  incognite (13)<sup>1</sup>.

Quando i generatori sono spenti si ha  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  e quindi  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ : un circuito resistivo privo di generatori ammette solo la soluzione banale. Nel caso generale, la risoluzione del sistema (14) può risultare molto onerosa dal punto di vista computazionale, soprattutto quando si sia interessati ad analizzare reti di interesse applicativo che spesso presentano un gran numero di componenti. La simulazione numerica di una siffatta rete richiede tecniche efficienti di risoluzione del sistema (14), che sfruttino, ad esempio, la *sparsità* della matrice  $W$ , cioè il fatto che la gran parte dei suoi elementi è nullo. Inoltre la formulazione (14) presenta l'inconveniente della costruzione di entrambi le matrici topologiche  $A$  e  $B$ . Tenuto conto che il costo computazionale della costruzione della matrice  $A$  è molto inferiore di quello della costruzione della matrice  $B$  (che si basa sulla costruzione non banale di un set di maglie fondamentali), ci si chiede se sia possibile riformulare il modello evitando la costruzione della matrice  $B$ .

Per ovviare al secondo problema si può introdurre un sistema di nuove incognite, dette *potenziali nodali*, associate a ciascuno degli  $n$  nodi della rete, in modo che sia possibile esprimere la tensione di ciascun bipolo del circuito come differenza tra il potenziale del nodo indicato come positivo dal verso scelto per la tensione ed il potenziale del nodo indicato come negativo. In Fig.9 sono riportate le espressioni delle tensioni in funzione dei potenziali di nodo, con riferimento ad un grafo orientato e assumendo che su ogni lato del grafo sia stata adottata la convenzione normale (quindi la tensione è discorde rispetto al verso della corrente).

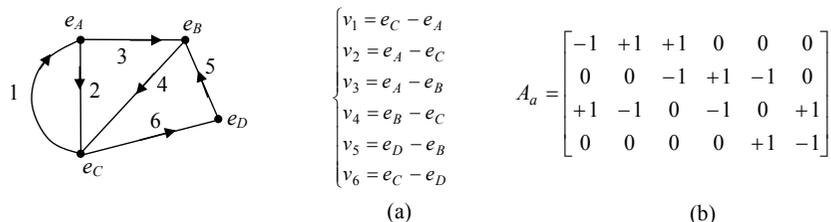


Fig. 9 I potenziali nodali: (a) equazioni per le tensioni; (b) matrice di incidenza del grafo

Le tensioni espresse come differenza di potenziali nodali *soddisfano automaticamente le LKT* (il lettore provi a verificarlo per una qualsiasi della maglia del circuito in Fig.9). Inoltre, costruita la matrice di incidenza (vedi Fig.9, b) ed introdotto il vettore-colonna dei potenziali nodali

$$\mathbf{e}_a^T = [e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n]^T \quad (15)$$

è possibile verificare che

$$\mathbf{v} = A_a^T \mathbf{e}_a. \quad (16)$$

Poiché, inoltre, le tensioni sono definite tutte come differenza delle incognite potenziali, è evidente che uno dei potenziali può essere fissato ad arbitrio: si può, ad esempio, imporre che uno qualsiasi dei potenziali sia nullo, riducendo il numero delle incognite a  $n-1$  (il nodo corrispondente viene detto *nodo di riferimento* per i potenziali). Se consideriamo ora la matrice di incidenza ridotta  $A$

<sup>1</sup> Nel seguito supporremo che siano verificate le condizioni per cui la soluzione del sistema esista e sia unica. Ciò accade quando le equazioni del sistema sono *indipendenti* e *compatibili* tra di loro. Lo studio di sistemi *malposti* è rimandato ad ulteriori approfondimenti.

ottenuta dalla  $A_a$  eliminando proprio la riga corrispondente al nodo di riferimento, varrà ancora la relazione (16) con riferimento alla  $A$  ed al vettore delle  $n-1$  incognite  $\mathbf{e}$ . La conoscenza della matrice di incidenza consente, quindi, non solo di scrivere le LKC ma anche di esprimere la relazione (16), che impone automaticamente le LKT:

$$\begin{cases} A\mathbf{i} = \mathbf{0} \\ \mathbf{v} = A^T \mathbf{e} \end{cases} \quad (17)$$

per cui in ultima analisi tutte le informazioni delle equazioni topologiche sono contenute nella matrice di incidenza ridotta. Aggiungendo ora anche le equazioni caratteristiche si ottengono le cosiddette *equazioni di tableau*: ad esempio per un circuito resistivo lineare, descritto dalle (10), l'analisi di *tableau* con la formulazione (17) consiste nel risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} A\mathbf{i} = \mathbf{0} \\ \mathbf{v} - A^T \mathbf{e} = \mathbf{0} \\ M\mathbf{v} + N\mathbf{i} = \mathbf{u} \end{cases} \Leftrightarrow T\mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A \\ -A^T & I & 0 \\ 0 & M & N \end{bmatrix} \quad (18)$$

nel quale il vettore delle incognite è definito come

$$\mathbf{y}^T = [e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_{n-1} \quad v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_l \quad i_1 \quad i_2 \quad \dots \quad i_l]^T, \quad (19)$$

mentre il termine noto  $\mathbf{b}$  è definito come nella (14). Rispetto al sistema (14), il sistema (18) presenta il vantaggio di non richiedere il calcolo preliminare della matrice  $B$ , ma ha lo svantaggio dell'aumento del numero di incognite.

Per affrontare anche il punto relativo all'efficienza computazionale, il modello (18) può essere ancora riformulato in modo da ottenere  $n-1$  equazioni nelle  $n-1$  incognite  $\mathbf{e}$ . Tale approccio è noto come *metodo dei potenziali nodali* e si applica in modo naturale a reti costituite da resistori lineari e generatori indipendenti di corrente.

Si consideri, ad esempio, la rete di Fig.10 contenente tre nodi, dei quali uno (il nodo C) è stato fissato a potenziale nullo.

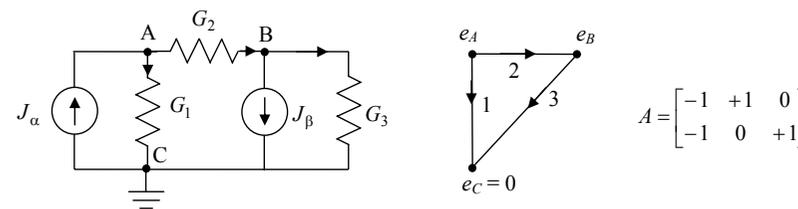


Fig. 10 Metodo dei potenziali nodali: (a) grafo del circuito passivo; (b) matrice di incidenza ridotta del grafo

Osserviamo preliminarmente che essendo note le correnti nei lati dei generatori, la LKC si può scrivere in modo alternativo come

$$A\mathbf{i} = \mathbf{J}, \quad (20)$$

dove  $A$  è la matrice di incidenza ridotta della rete *resa passiva* cioè della rete ottenuta dalla rete di partenza spegnendo i generatori di corrente (vedi Fig.10), mentre il  $k$ -mo termine del vettore  $\mathbf{J}$  è la somma di tutte le correnti dei generatori indipendenti afferenti al nodo  $k$ , considerate positive se il loro verso è entrante nel nodo stesso. Nel caso di Fig.10 si avrebbe, ad esempio:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_\alpha \\ -J_\beta \end{bmatrix}.$$

Possiamo, ancora, esprimere le caratteristiche della rete passiva utilizzando le conduttanze ed assumendo la convenzione normale:

$$i_k = G_k v_k \quad k = 1 \dots 3, \quad (21)$$

oppure in forma matriciale:

$$\mathbf{i} = G_b \mathbf{v}, \quad \text{dove} \quad G_b = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

A questo punto, utilizzando la (20) e la (22) e la seconda delle (17) è semplice ottenere il sistema

$$G\mathbf{e} = \mathbf{J}, \quad (23)$$

dove la matrice  $G$  è definita come  $G = AG_b A^T$  e gode di importanti proprietà strutturali:

- il generico elemento sulla diagonale  $G_{ii}$  è pari alla sommatoria di tutte le conduttanze afferenti al nodo  $i$ ;
- il generico elemento fuori diagonale  $G_{ij}$  è pari alla sommatoria (cambiata di segno) di tutte le conduttanze collegate tra i nodi  $i$  e  $j$ .

Il metodo dei potenziali nodali, quindi, consente di riformulare il problema in un sistema di equazioni in  $n-1$  incognite con una procedura che può essere resa automatica in modo molto semplice, motivo per cui questo approccio è alla base dei simulatori numerici commerciali per l'analisi di circuiti di interesse applicativo (ad esempio SPICE).

Osserviamo che, in presenza di un generatore di tensione  $E$  che si trovi in serie ad un resistore  $R$ , si può preliminarmente trasformare il generatore reale di tensione in un generatore ideale di corrente e quindi applicare il metodo: questo equivale ad analizzare la rete passiva esattamente come prima e ad introdurre il generatore di corrente  $E/R$  nella definizione del termine noto  $\mathbf{J}$ , in corrispondenza dei nodi ai quali è connessa la serie  $E-R$ . Nel caso in cui non vi sia un resistore in serie, occorre riformulare il modello per tener conto del fatto che tale circostanza introduce una nuova incognita (corrente del generatore di tensione) ma abbassa ad  $n-2$  il numero dei potenziali incogniti (solo il potenziale di uno dei due nodi a cui il generatore è collegato può essere assunto come incognito)<sup>1</sup>.

Infine osserviamo che i risultati di questo paragrafo si basano sulla possibilità di esprimere il modello circuitale sottoforma di un sistema di equazioni lineari algebriche. Questa possibilità non si limita solo ai circuiti resistivi lineari, ma anche ai circuiti dinamici lineari in regime permanente sinusoidale: per tali circuiti, definendo una trasformazione fasoriale è possibile ottenere un modello algebrico lineare che coinvolge i fasori di corrente e tensione e le impedenze. Ad esempio il sistema (23) può essere generalizzato come

$$Y\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{J}}, \quad (24)$$

Essendo  $\bar{\mathbf{E}}$  e  $\bar{\mathbf{J}}$  i vettori costituiti dai fasori corrispondenti ad  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{J}$ , ed essendo  $Y$  una matrice di ammettenze definita secondo le regole di cui sopra.

<sup>1</sup> Si parla in questo caso di *metodo dei potenziali nodali modificato*.

## 5. LA CONSERVAZIONE DELLE POTENZE ELETTRICHE

L'ipotesi di validità del modello circuitale consente di ricavare un risultato molto importante, che riguarda il bilancio delle potenze elettriche in una rete.

### *Principio di conservazione delle potenze elettriche*

In una qualsiasi rete elettrica che soddisfa le Leggi di Kirchhoff la somma delle potenze elettriche assorbite dai bipoli è nulla.

Adottando per ogni bipolo la convenzione normale, si ha quindi:

$$\sum_{k=1}^l p_k = \sum_{k=1}^l v_k i_k = 0.$$

### *Dimostrazione.*

Questo principio può essere facilmente mostrato a partire dalle proprietà della matrice  $A$ . Si ha, infatti:

$$\sum_{k=1}^l v_k i_k = \mathbf{v}^T \mathbf{i},$$

la cui, ricordando come si calcola la trasposta del prodotto tra due matrici, si ha:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{i} = (\mathbf{A}^T \mathbf{e})^T \mathbf{i} = \mathbf{e}^T \mathbf{A} \mathbf{i},$$

L'applicazione della LKC ( $\mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0}$ ) consente a questo punto di dimostrare il risultato. Si osservi che la LKT è stata implicitamente imposta esprimendo le tensioni in funzione dei potenziali. ♦

Il principio di conservazione delle potenze elettriche vale nella sola ipotesi di validità delle LK, quindi *a prescindere* dalla natura degli elementi della rete. Tale principio ha lo stesso valore assiomatico delle LK: una qualsiasi delle LK può essere ricavata imponendo la validità dell'altra LK e di tale principio di conservazione.

Osserviamo che, presa una rete in cui su  $N$  bipoli sia stata scelta la convenzione normale e su  $M$  la convenzione del generatore, il principio di conservazione delle potenze si può anche esprimere come segue:

$$\sum_{k=1}^N p_k = \sum_{j=1}^M p_j.$$

Infine osserviamo che, prese due reti distinte che abbiano lo stesso grafo ed indicate con  $(v'_k, i'_k)$  e  $(v''_k, i''_k)$  le relative grandezze elettriche, è possibile mostrare con passi analoghi che vale un *principio di conservazione delle potenze virtuali* (detto anche *Principio di Tellegen*):

$$\sum_{k=1}^l \tilde{p}_k = \sum_{k=1}^l v'_k i''_k = \sum_{k=1}^l v''_k i'_k = 0.$$