



Università degli Studi di Cassino

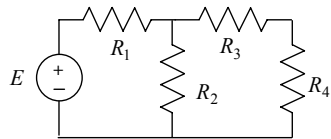
## **Esercitazioni di Elettrotecnica: circuiti in regime stazionario**

prof. Antonio Maffucci

ver.3.1 – ottobre 2007

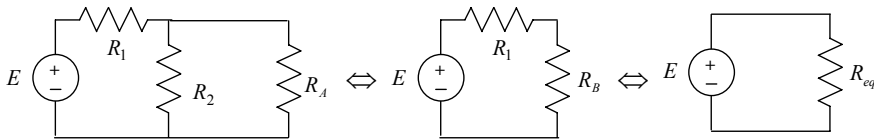
## 1. Serie, parallelo e partitori.

**ES. 1.1** Calcolare la resistenza equivalente vista ai capi del generatore E.



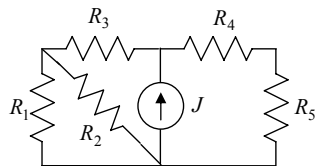
$$\begin{aligned} R_1 &= 1 \, \Omega & R_2 &= 4 \, \Omega \\ R_3 &= 3 \, \Omega & R_4 &= 2 \, \Omega \end{aligned}$$

Utilizzando l'equivalenza serie e parallelo, il circuito di resistenze visto da E si può ridurre ad un unico resistore attraverso i seguenti passi:



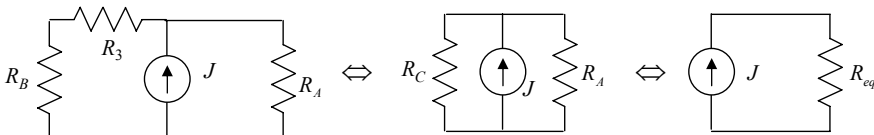
$$\begin{aligned} R_A &= R_3 + R_4 = 5 \, \Omega & R_B &= R_A \parallel R_2 = \frac{R_A R_2}{R_A + R_2} = 2.22 \, \Omega & R_{eq} &= R_B + R_1 = 3.22 \, \Omega \end{aligned}$$

**ES. 1.2** Calcolare la resistenza equivalente vista dal generatore J.



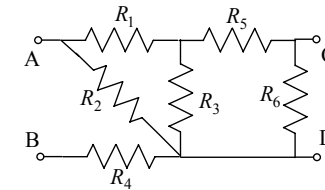
$$\begin{aligned} R_1 &= R_4 = 5 \, \Omega & R_2 &= 3 \, \Omega \\ R_3 &= R_5 = 2 \, \Omega \end{aligned}$$

Utilizzando l'equivalenza serie e parallelo, il circuito di resistenze visto da E si può ridurre ad un unico resistore attraverso i seguenti passi:



$$\begin{aligned} R_A &= R_4 + R_5 = 7 \, \Omega & R_C &= R_B + R_3 = 3.87 \, \Omega & R_{eq} &= \frac{R_A R_C}{R_A + R_C} = 2.49 \, \Omega \\ R_B &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 1.87 \, \Omega \end{aligned}$$

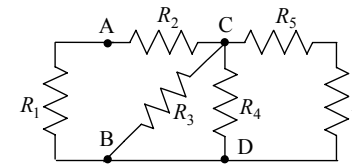
**ES. 1.3** - Calcolare la  $R_{eq}$  vista ai morsetti A-B e quella vista ai morsetti C-D.



$$\begin{aligned} R_1 &= R_2 = 5 \, \Omega & R_3 &= 10 \, \Omega \\ R_4 &= 4 \, \Omega & R_5 &= 3 \, \Omega \\ R_6 &= 2 \, \Omega \end{aligned}$$

Risultato:  $R_{eqAB} = 7.125 \, \Omega$ ,  $R_{eqCD} = 1.600 \, \Omega$ .

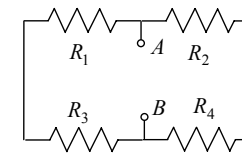
**ES. 1.4** - Calcolare la  $R_{eq}$  vista ai morsetti A-B e quella vista ai morsetti C-D.



$$\begin{aligned} R_1 &= R_3 = 0.2 \, \Omega & R_2 &= 0.4 \, \Omega \\ R_4 &= R_5 = 1 \, \Omega & R_6 &= 3 \, \Omega \end{aligned}$$

Risultato:  $R_{eqAB} = 0.147 \, \Omega$ ,  $R_{eqCD} = 0.126 \, \Omega$ .

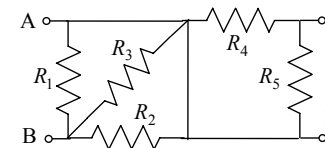
**ES. 1.5** - Calcolare il valore di  $R_4$  tale che ai morsetti A-B si abbia  $R_{eq} = R$ .



$$R_1 = R_2 = R \quad R_3 = R/2$$

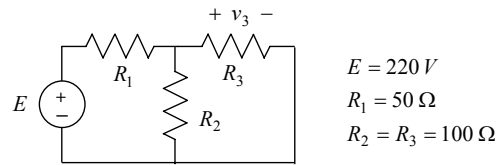
Risultato:  $R_4 = 2R$ .

**ES. 1.6** - Calcolare la  $R_{eq}$  vista ai morsetti A-B e quella vista ai morsetti C-D.

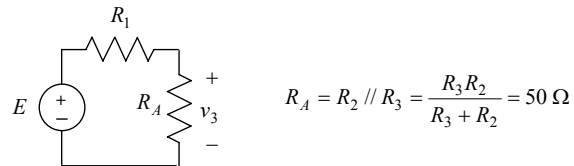


$$\begin{aligned} R_1 &= 2.3 \, \text{m}\Omega & R_2 &= 1.4 \, \text{m}\Omega \\ R_3 &= 1 \, \text{m}\Omega, & R_4 &= 3 \, \text{m}\Omega, & R_5 &= 0.8 \, \text{m}\Omega \end{aligned}$$

Risultato:  $R_{eqAB} = 0.47 \, \text{m}\Omega$ ,  $R_{eqCD} = 0.63 \, \text{m}\Omega$ .

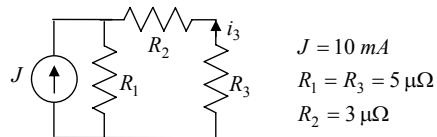
**ES. 1.7** - Calcolare la tensione  $v_3$  usando il partitore di tensione.

Il partitore di tensione si applica a due resistori in serie, quindi occorre preliminarmente ricondursi alla rete equivalente seguente:

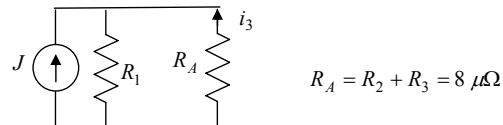


Applicando ora il partitore di tensione si ha:

$$v_3 = E \frac{R_A}{R_A + R_1} = 110 \text{ V}.$$

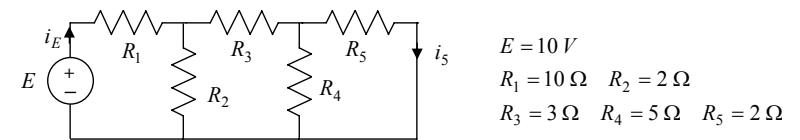
**ES. 1.8** - Calcolare la corrente  $i_3$  usando il partitore di corrente.

Il partitore di corrente si applica a due resistori in parallelo, quindi occorre riferirsi alla rete equivalente seguente:



Applicando ora il partitore di corrente si ha (tenuto conto dei versi):

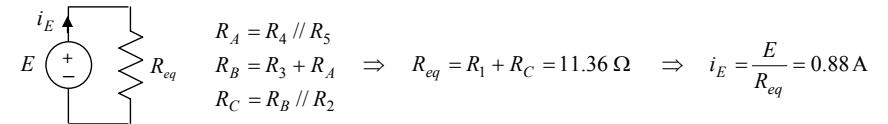
$$i_3 = -J \frac{R_1}{R_A + R_1} = -3.84 \text{ mA}.$$

**ES. 1.9** - Calcolare la potenza erogata dal generatore E e quella assorbita dal resistore  $R_5$ .

Scegliendo le correnti come in figura, le potenze richieste sono date da:

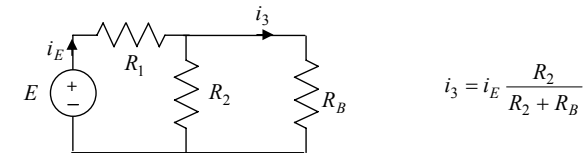
$$P_E^{erog} = E i_E, \quad P_{R_5} = R_5 i_5^2.$$

La  $i_E$  si valuta a partire dal calcolo della resistenza equivalente vista ai capi del generatore:



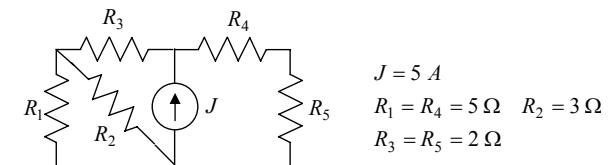
da cui si ricava:  $P_E^{erog} = 8.80 \text{ W}$ .

Nota la corrente  $i_E$ , si può ricavare la  $i_5$  applicando due volte il partitore di corrente. Dapprima ricaviamo  $i_3$  dalla rete equivalente seguente



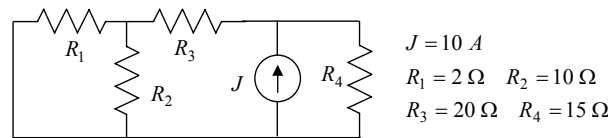
quindi ricaviamo  $i_5$  ripartendo  $i_3$  tra i resistori  $R_4$  ed  $R_5$ :

$$i_5 = i_3 \frac{R_4}{R_4 + R_5} = 0.19 \text{ A} \Rightarrow P_{R_5} = 72.20 \text{ mW}.$$

**ES. 1.10** - Calcolare la potenza erogata dal generatore J e quella assorbita dal resistore  $R_1$ .

Risultato:  $P_J^{erog} = 62.25 \text{ W}$ ,  $P_{R_1} = 7.25 \text{ W}$ .

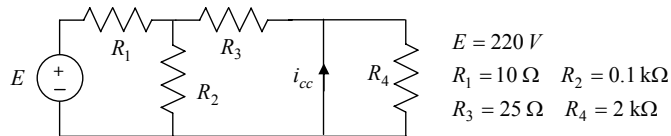
**ES. 1.11** - Calcolare la potenza erogata dal generatore e quella assorbita da ogni resistore. Verificare la conservazione delle potenze.



$$\begin{aligned} J &= 10 \text{ A} \\ R_1 &= 2 \Omega \quad R_2 = 10 \Omega \\ R_3 &= 20 \Omega \quad R_4 = 15 \Omega \end{aligned}$$

Risultato:  $P_J^{erog} = 0.886 \text{ kW}$ ,  $P_{R_1} = 0.023 \text{ kW}$ ,  $P_{R_2} = 0.004 \text{ kW}$ ,  $P_{R_3} = 0.335 \text{ kW}$ ,  $P_{R_4} = 0.524 \text{ kW}$ .

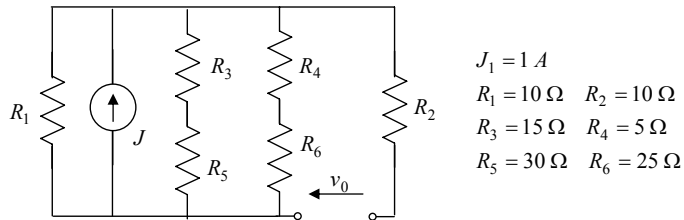
**ES. 1.12** - Calcolare la corrente  $i_{cc}$  che circola nel corto-circuito.



$$\begin{aligned} E &= 220 \text{ V} \\ R_1 &= 10 \Omega \quad R_2 = 0.1 \text{ k}\Omega \\ R_3 &= 25 \Omega \quad R_4 = 2 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

Risultato:  $i_{cc} = -5.87 \text{ A}$ .

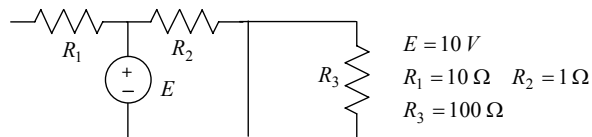
**ES. 1.13** - Calcolare la tensione  $v_0$  sul circuito aperto in figura.



$$\begin{aligned} J &= 1 \text{ A} \\ R_1 &= 10 \Omega \quad R_2 = 10 \Omega \\ R_3 &= 15 \Omega \quad R_4 = 5 \Omega \\ R_5 &= 30 \Omega \quad R_6 = 25 \Omega \end{aligned}$$

Risultato:  $v_0 = -6.43 \text{ V}$ .

**ES. 1.14** - Valutare la potenza assorbita dai resistori della rete in figura.

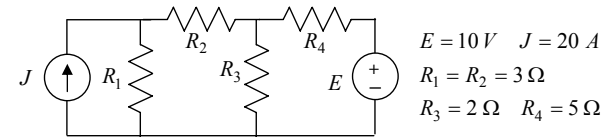


$$\begin{aligned} E &= 10 \text{ V} \\ R_1 &= 10 \Omega \quad R_2 = 1 \Omega \\ R_3 &= 100 \Omega \end{aligned}$$

Risultato:  $P_{R_1} = P_{R_3} = 0$ ,  $P_{R_2} = 100 \text{ W}$ .

## 2. Sovrapposizione degli effetti.

**ES. 2.1** - Calcolare la potenza totale erogata dai generatori.

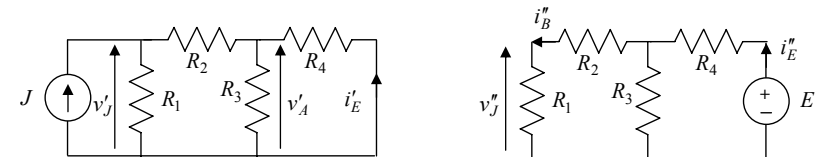


$$\begin{aligned} E &= 10 \text{ V} \quad J = 20 \text{ A} \\ R_1 &= R_2 = 3 \Omega \\ R_3 &= 2 \Omega \quad R_4 = 5 \Omega \end{aligned}$$

Adottando la convenzione del generatore sui due generatori della rete, la potenza erogata da ciascuno di essi sarà data da:

$$P_E^{erog} = E i_E, \quad P_J^{erog} = J v_J.$$

La tensione  $v_J$  e la corrente  $i_E$  si possono valutare applicando la sovrapposizione degli effetti, risolvendo i due circuiti ausiliari ottenuti considerando un solo generatore acceso:



Con riferimento al primo circuito ausiliario, il contributo  $v'_J$  è ottenuto valutando la resistenza equivalente vista dal generatore:

$$R_{eqJ} = (R_3 // R_4 + R_2) // R_1 = 1.79 \Omega \Rightarrow v'_J = R_{eqJ} J = 35.80 \text{ V}.$$

Per valutare  $i'_E$  si può utilizzare la tensione  $v'_A$  sul parallelo  $R_A = R_3 // R_4$ :

$$v'_A = v'_J \frac{R_A}{R_2 + R_A} \Rightarrow i'_E = -\frac{v'_A}{R_4} = -2.31 \text{ A}$$

(nell'ultimo passaggio si è tenuto conto della convenzione adottata su  $R_4$ ). Nel secondo circuito ausiliario, il contributo  $i''_E$  è ottenuto valutando la resistenza equivalente vista dal generatore:

$$R_{eqE} = (R_1 + R_2) // R_3 + R_4 = 6.50 \Omega \Rightarrow i''_E = E / R_{eqE} = 1.54 \text{ A}.$$

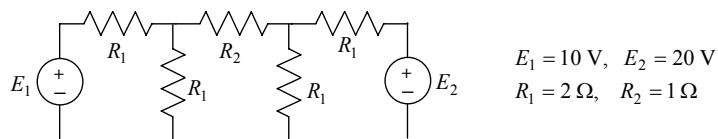
Per valutare  $v''_J$  è utile passare attraverso il calcolo della corrente  $i''_B$  della serie  $R_B = R_1 + R_2$ :

$$i''_B = i''_E \frac{R_3}{R_B + R_3} \Rightarrow v''_J = R_1 i''_B = 1.14 \text{ V}.$$

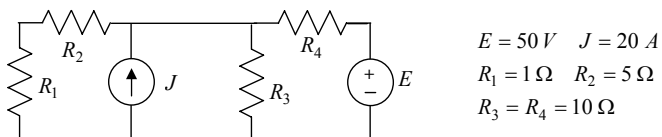
Se ne conclude che:

$$P_E^{erog} = E i_E = E (i'_E + i''_E) = -7.70 \text{ W}, \quad P_J^{erog} = J v_J = J (v'_J + v''_J) = 0.74 \text{ kW}.$$

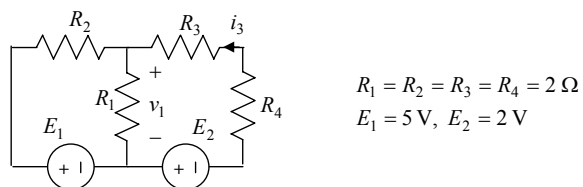
(Si osservi che in questa rete il generatore di tensione sta assorbendo potenza elettrica positiva).

**ES. 2.2** - Calcolare la potenza totale erogata dai generatori.

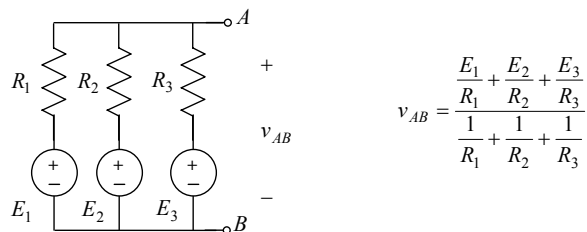
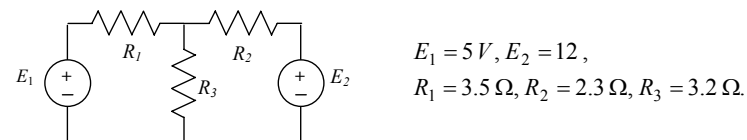
Risultato:  $P_{E_1}^{erog} = 16.67 \text{ W}, P_{E_2}^{erog} = 0.12 \text{ kW}.$

**ES. 2.3** - Calcolare la potenza totale erogata dai generatori.

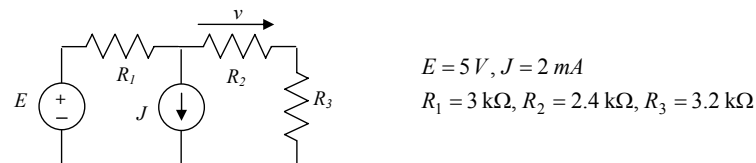
Risultato:  $P_E^{erog} = -0.09 \text{ kW}, P_J^{erog} = 1.36 \text{ kW}.$

**ES. 2.4** - Calcolare la tensione  $v_1$  e la corrente  $i_3$ .

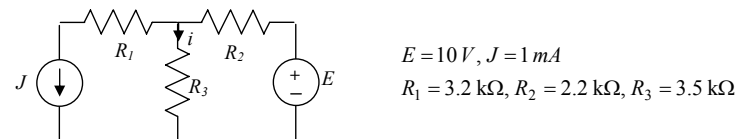
Risultato:  $v_1 = 1.60 \text{ V}, i_3 = -0.90 \text{ A}.$

**ES. 2.5** - Utilizzando la sovrapposizione degli effetti, dimostrare la Formula di Millmann.**ES. 2.6** - Determinare la potenza erogata dal generatore  $E_1$ .

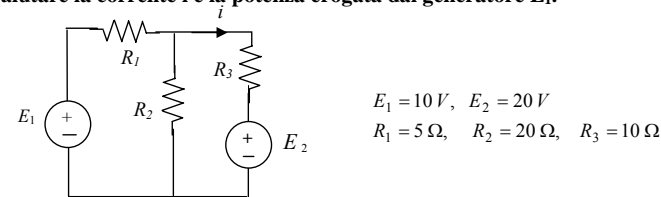
Risultato:  $P_{E_1}^{erog} = -2.05 \text{ W}.$

**ES. 2.7** - Utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, determinare la tensione  $v$ .

Risultato:  $v = 0.28 \text{ V}.$

**ES. 2.8** - Utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, determinare la corrente  $i$  e la potenza assorbita da  $R_3$ .

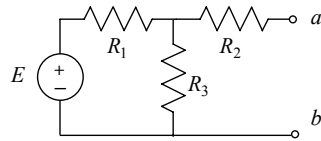
Risultato:  $i = 1.37 \text{ mA}, P = 6.57 \text{ mW}.$

**ES. 2.9** - Valutare la corrente  $i$  e la potenza erogata dal generatore  $E_1$ .

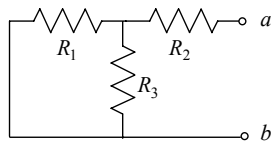
Risultato:  $i = -0.86 \text{ A}, P_{E_1}^{erog} = -2.86 \text{ W}.$

### 3. Generatori equivalenti di Thévenin e di Norton.

#### ES. 3.1 - Calcolare l'equivalente di Thévenin visto ai capi dei morsetti a-b.



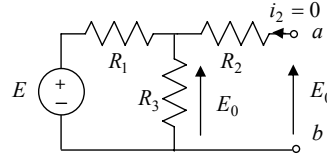
La resistenza equivalente si ottiene spegnendo l'unico generatore, quindi studiando la rete seguente



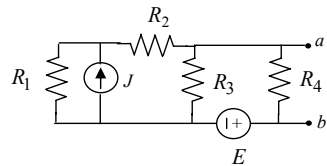
$$R_{eq} = R_2 + R_1 // R_3 = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}.$$

La tensione a vuoto  $E_0$  si ottiene valutando la tensione tra i morsetti aperti. Tenuto conto che in queste condizioni non circola corrente sul resistore  $R_2$  è evidente che la  $E_0$  è anche la tensione su  $R_3$ . Poiché  $R_1$  ed  $R_3$  sono in serie, la tensione  $E_0$  si può ricavare da un semplice partitore di tensione:

$$E_0 = E \frac{R_3}{R_1 + R_3}.$$



#### ES. 3.2 - Calcolare l'equivalente di Norton visto ai capi dei morsetti a-b.



$$\begin{aligned} J &= 20 \text{ A} & E &= 10 \text{ V} \\ R_1 &= R_2 = 2 \Omega \\ R_3 &= R_4 = 4 \Omega \end{aligned}$$

La resistenza equivalente si ottiene spegnendo i generatori:

$$R_{eq} = R_4 // [R_3 // (R_1 + R_2)] = 1.33 \Omega$$

La corrente  $I_{cc}$  è la corrente che circola da a a b quando i due morsetti sono in corto-circuito. Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, il contributo  $I'_{cc}$  dovuto al solo generatore di corrente si valuta sostituendo il generatore di tensione con un corto-circuito e applicando la formula del partitore di corrente:

$$I'_{cc} = J \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 10 \text{ A}$$

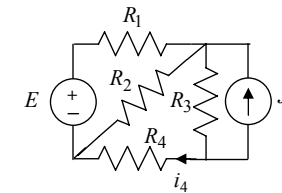
(si noti che  $R_3$  ed  $R_4$  sono cortocircuitate). Il contributo  $I''_{cc}$  dovuto al generatore di tensione si valuta sostituendo il generatore di corrente con un circuito aperto. In questo circuito  $I''_{cc}$  è proprio la corrente che circola nel generatore di tensione (si noti che su tale generatore è fatta la convenzione dell'utilizzatore):

$$I''_{cc} = -\frac{E}{R_E} = -5 \text{ A},$$

dove  $R_E = (R_1 + R_2) // R_3 = 2 \Omega$ . Pertanto la  $I_{cc}$  sarà

$$I_{cc} = I'_{cc} + I''_{cc} = 5 \text{ A}.$$

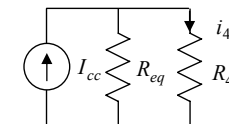
#### ES. 3.3 - Utilizzando l'equivalente di Norton calcolare la corrente che circola in $R_4$ .



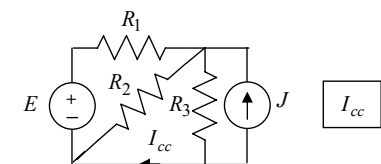
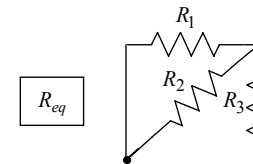
$$\begin{aligned} E &= 54 \text{ V} \\ J &= 10 \text{ A} \\ R_1 &= 6 \Omega & R_2 &= R_3 = 4 \Omega \\ R_4 &= 12 \Omega \end{aligned}$$

Riducendo la rete vista ai capi di  $R_4$  con il teorema di Norton, si ottiene la rete seguente, dalla quale si evince che

$$i_4 = I_{cc} \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R_4}.$$



I circuiti per valutare i parametri di Norton sono riportati di seguito:



Si avrà allora

$$R_{eq} = R_1 // R_2 + R_3 = 6.40 \Omega.$$

La corrente  $I_{cc}$  si può valutare applicando il principio di sovrapposizione degli effetti. Il contributo  $I'_{cc}$  dovuto al solo generatore di corrente si valuta sostituendo il generatore di tensione con un corto-circuito e applicando la formula del partitore di corrente:

$$I'_{cc} = -J \frac{R_3}{R_3 + (R_1 // R_2)} = -6.250 \text{ A}$$

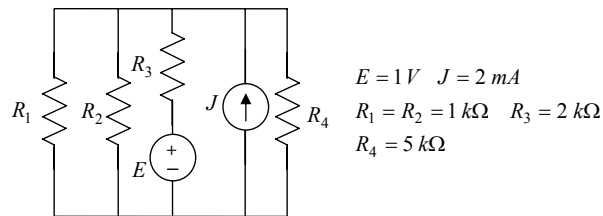
Il contributo  $I'_{cc}$  dovuto al generatore di tensione si valuta sostituendo il generatore di corrente con un circuito aperto. Applicando il partitore di tensione si può ricavare la tensione sul parallelo  $R_p = R_2 // R_3$  e quindi ricavare la corrente richiesta (che circola in  $R_3$ ).

$$v_p'' = E \frac{R_p}{R_1 + R_p} \Rightarrow I''_{cc} = \frac{v_p''}{R_3} = 3.375 \text{ A}.$$

Si ottiene in definitiva

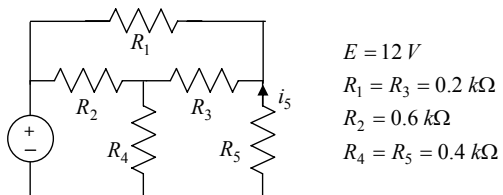
$$I_{cc} = I'_{cc} + I''_{cc} = -2.875 \text{ A} \Rightarrow i_4 = -1.000 \text{ A}.$$

**ES. 3.4** - Utilizzando il teorema di Thévenin calcolare la potenza assorbita dal resistore  $R_2$ .



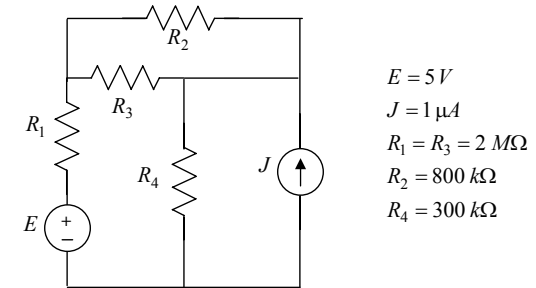
Risultato:  $P_{R_2} = 0.85 \text{ mW}$ .

**ES. 3.5** - Utilizzando il teorema di Thévenin calcolare la corrente  $i_5$ .



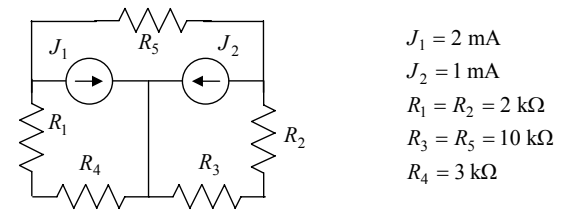
Risultato:  $i_5 = -18 \text{ mA}$ .

**ES. 3.6** - Utilizzando il teorema di Norton calcolare la potenza assorbita dal resistore  $R_3$ .



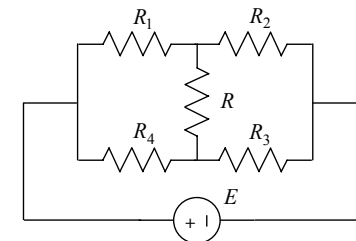
Risultato:  $P_{R_3} = 0.43 \mu\text{W}$ .

**ES. 3.7** - Utilizzando il teorema di Thévenin calcolare la potenza assorbita da  $R_5$ .



Risultato:  $P_{R_5} = 54.87 \mu\text{W}$ .

**ES. 3.8** - Verificare che il resistore  $R$  non è percorso da corrente se tra le resistenze vi è la seguente relazione (ponte di Wheatstone):

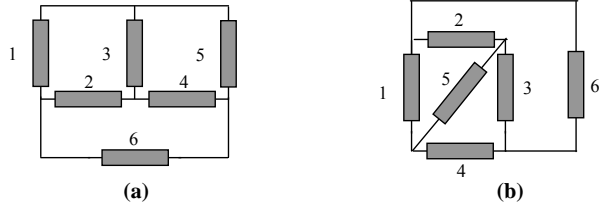


$$\frac{R_1}{R_4} = \frac{R_2}{R_3}$$

(Suggerimento: applicare Norton ai capi di  $R$  ed imporre che sia nulla la corrente  $I_{cc}$ )

#### 4. Metodi generali per l'analisi delle reti in regime stazionario.

**ES. 4.1** - Date le seguenti reti di bipoli, scrivere un sistema completo di equazioni di Kirchhoff indipendenti.

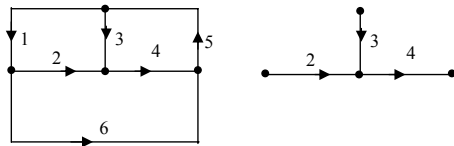


Rete (a)

Orientando il grafo come in figura e scegliendo, ad esempio, l'albero indicato, un possibile sistema completo di equazioni di Kirchhoff è dato da:

$$\text{LKC} \begin{cases} -i_1 + i_2 + i_6 = 0 \\ -i_2 - i_3 + i_4 = 0 \\ -i_4 + i_5 - i_6 = 0 \end{cases}$$

$$\text{LKT} \begin{cases} v_1 + v_2 - v_3 = 0 \\ v_3 + v_4 + v_5 = 0 \\ -v_2 - v_4 + v_6 = 0 \end{cases}$$

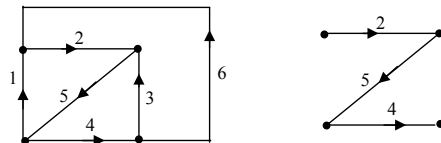


Rete (b)

Orientando il grafo come in figura e scegliendo, ad esempio, l'albero indicato, un possibile sistema completo di eq. di Kirchhoff è dato da:

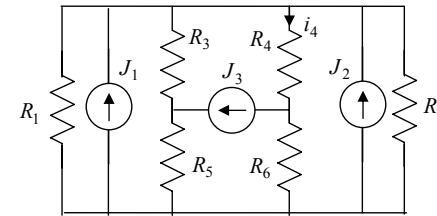
$$\text{LKC} \begin{cases} -i_1 + i_2 - i_6 = 0 \\ -i_2 - i_3 + i_5 = 0 \\ i_3 - i_4 + i_6 = 0 \end{cases}$$

$$\text{LKT} \begin{cases} -v_1 - v_2 - v_5 = 0 \\ v_2 + v_4 + v_5 + v_6 = 0 \\ v_3 + v_4 + v_5 = 0 \end{cases}$$



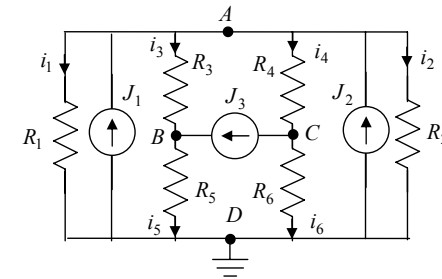
Si osservi che su tutti i bipoli delle reti (a) e (b) è stata adottata la stessa convenzione.

**ES. 4.2** - Utilizzando il metodo dei potenziali nodali calcolare la corrente nel resistore  $R_4$ .



$$\begin{aligned} J_1 &= J_2 = 1 \text{ A} & J_3 &= 3 \text{ A} \\ R_1 &= 30 \Omega & R_2 &= 10 \Omega \\ R_3 &= 25 \Omega & R_4 &= 5 \Omega \\ R_5 &= 35 \Omega & R_6 &= 15 \Omega \end{aligned}$$

Si individuino i nodi della rete e si orientino tutte le correnti nei resistori, adottando su di essi la convenzione normale:



Avendo scelto come potenziale di riferimento quello del nodo D, le incognite saranno i potenziali degli altri tre nodi:  $e_A, e_B, e_C$ . Per le convenzioni adottate si ha:

$$v_1 = v_2 = e_A, \quad v_3 = e_A - e_B, \quad v_4 = e_A - e_C, \quad v_5 = e_B, \quad v_6 = e_C.$$

Applicando la LKC ai nodi A, B, C e sostituendo le caratteristiche dei resistori (scritte con riferimento alle conduttanze) si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = J_1 + J_2 \\ -i_3 + i_5 = J_3 \\ -i_4 + i_6 = -J_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G_1 e_A + G_2 e_A + G_3 (e_A - e_B) + G_4 (e_A - e_C) = J_1 + J_2 \\ -G_3 (e_A - e_B) + G_5 e_B = J_3 \\ -G_4 (e_A - e_C) + G_6 e_C = -J_3 \end{cases}$$

Si osservi che tale sistema può essere posto nella forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_3 + G_4 & -G_3 & -G_4 \\ -G_3 & G_3 + G_5 & 0 \\ -G_4 & 0 & G_4 + G_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_A \\ e_B \\ e_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 + J_2 \\ J_3 \\ -J_3 \end{bmatrix}$$

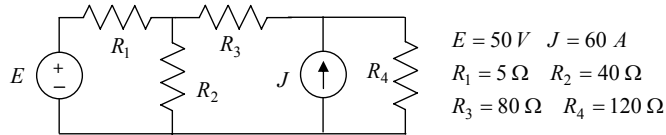
Risolvendo tale sistema si ottiene:

$$e_A = 7.500 \text{ V}, \quad e_B = 48.125 \text{ V}, \quad e_C = -5.625 \text{ V}$$

$$\text{da cui: } i_4 = \frac{v_4}{R_4} = G_4 (e_A - e_C) = 2.625 \text{ A.}$$

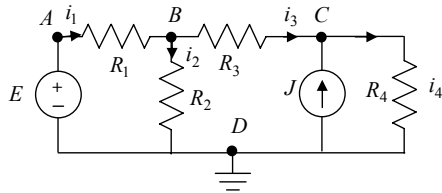


**ES. 4.3** - Utilizzando il metodo dei potenziali nodali modificato calcolare la potenza erogata dai due generatori e la potenza assorbita dai resistori (verificare la conservazione delle potenze).



$$\begin{aligned} E &= 50 \text{ V} & J &= 60 \text{ A} \\ R_1 &= 5 \, \Omega & R_2 &= 40 \, \Omega \\ R_3 &= 80 \, \Omega & R_4 &= 120 \, \Omega \end{aligned}$$

Si individuino i nodi della rete e si orientino tutte le correnti nei resistori, adottando su di essi la convenzione normale:



Avendo scelto come potenziale di riferimento quello del nodo D, le incognite saranno i potenziali degli altri tre nodi:  $e_A, e_B, e_C$ . Per la presenza del generatore di tensione tra nodo A e nodo D, si ha banalmente  $e_A = E$ . Con le convenzioni adottate si ha:

$$v_1 = E - e_B, \quad v_2 = e_B, \quad v_3 = e_B - e_C, \quad v_4 = e_C.$$

Applicando la LKC ai nodi B e C e sostituendo le caratteristiche dei resistori (scritte con riferimento alle conduttanze) si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} -i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ -i_3 + i_4 = J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (G_1 + G_2 + G_3)e_B - G_3e_C = G_1E \\ -G_3e_B + (G_3 + G_4)e_C = J \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si ottiene:

$$e_B = 0.20 \text{ kV}, \quad e_C = 3.00 \text{ kV}.$$

Adottando la convenzione del generatore sui due generatori si ha:

$$P_E^{erog} = Ei_E = Ei_1 = EG_1v_1 = EG_1(E - e_B) = -1.50 \text{ kW}$$

$$P_J^{erog} = Jv_J = Jv_4 = Je_C = 180.00 \text{ kW}$$

$$P_{R_1} = G_1v_1^2 = G_1(E - e_B)^2 = 4.50 \text{ kW}$$

$$P_{R_2} = G_2v_2^2 = G_2e_B^2 = 1.00 \text{ kW}$$

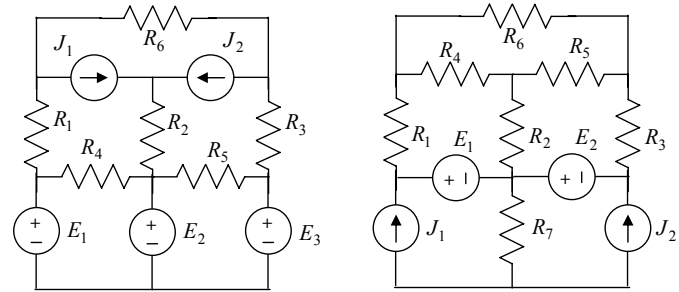
$$P_{R_3} = G_3v_3^2 = G_3(e_B - e_C)^2 = 98.00 \text{ kW}$$

$$P_{R_4} = G_4v_4^2 = G_4e_C^2 = 75.00 \text{ kW}$$

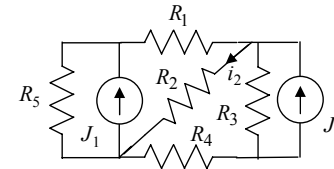
È facile verificare che  $P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} + P_{R_4} = P_E^{erog} + P_J^{erog}$ .

**ES. 4.4** - Con riferimento alla seguenti reti:

- scrivere il sistema completo delle equazioni di Kirchhoff e delle equazioni caratteristiche (utilizzare grafo, albero e co-albero).
- scrivere il suddetto sistema in forma matriciale, individuando le matrici di incidenza ridotta e di maglia fondamentale.



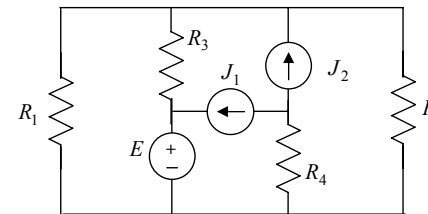
**ES. 4.5** - Utilizzando il metodo delle correnti di maglia calcolare la corrente in  $R_2$ .



$$\begin{aligned} J_1 &= 10 \text{ A} \\ J_2 &= 5 \text{ A} \\ R_1 &= 2 \, \Omega & R_2 &= R_3 = 3 \, \Omega \\ R_4 &= R_5 = 5 \, \Omega \end{aligned}$$

Risultato:  $i_2 = 5 \text{ A}$ .

**ES. 4.6** - Utilizzando il metodo delle correnti di maglia calcolare la potenza erogata da ciascun generatore della rete.

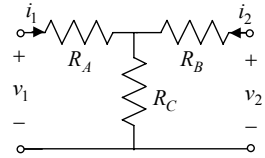


$$\begin{aligned} J_1 &= J_2 = 1 \text{ mA}, \quad E = 2 \text{ mV} \\ R_1 &= 0.3 \, \Omega & R_2 &= 0.2 \, \Omega \\ R_3 &= 0.4 \, \Omega & R_4 &= 0.5 \, \Omega \end{aligned}$$

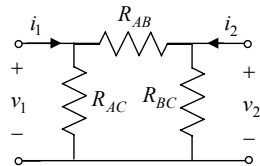
Risultato:  $P_E^{erog} = 5.2 \, \mu\text{W}$ ,  $P_{J_1}^{erog} = 3.0 \, \mu\text{W}$ ,  $P_{J_2}^{erog} = 1.6 \, \mu\text{W}$ .

## 5. Analisi di reti con doppi-bipoli resistivi e generatori pilotati

### ES. 5.1 - Analizzando i seguenti doppi-bipoli:



schema a T (stella)



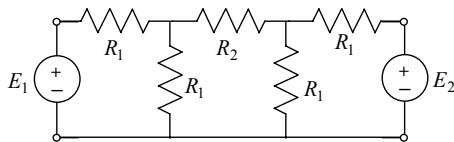
schema a Π (triangolo)

- verificare che lo schema a T realizza una qualunque matrice  $\mathbf{R}$  con le posizioni seguenti (formule di sintesi):  $R_A = R_{11} - R_m$ ,  $R_B = R_{22} - R_m$ ,  $R_C = R_m$ ;
- verificare che lo schema a Π realizza una qualunque matrice  $\mathbf{G}$  con le posizioni seguenti (formule di sintesi):  $G_{AC} = G_{11} + G_m$ ,  $G_{BC} = G_{22} + G_m$ ,  $G_{AB} = -G_m$ ;
- verificare le seguenti formule di trasformazione stella-triangolo (suggerimento: imporre l'equivalenza tra gli schemi a T e a Π):

$$\begin{array}{ll}
 Y \rightarrow \Delta & \Delta \rightarrow Y \\
 R_{AB} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_C} & R_A = \frac{R_{AB} R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} \\
 R_{AC} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_B} & R_B = \frac{R_{AB} R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} \\
 R_{BC} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_A} & R_C = \frac{R_{AC} R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}
 \end{array}$$

### ES. 5.2 - Con riferimento alla seguente rete:

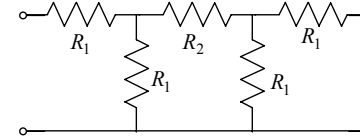
- caratterizzare attraverso la matrice  $\mathbf{G}$  il doppio bipolo resistivo visto ai capi dei generatori;
- utilizzare la matrice  $\mathbf{G}$  per calcolare la potenza assorbita dal doppio-bipolo;



$$\begin{array}{l}
 E_1 = E_2 = 10 \text{ V} \\
 R_1 = 2 \Omega \quad R_2 = 1 \Omega
 \end{array}$$

a.) L'elemento  $G_{11}$  è definito come:

$$G_{11} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{v_2=0}$$



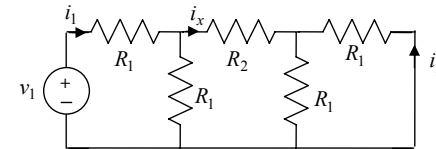
quindi corrisponde alla conduttanza di ingresso della rete descritta in alto. Applicando le regole di equivalenza serie e parallelo di conduttanze si ottiene:

$$G_{11} = \frac{G_1 \left( G_1 + \frac{2G_1 G_2}{2G_1 + G_2} \right)}{2G_1 + \frac{2G_1 G_2}{2G_1 + G_2}} = 0.33 \text{ S}.$$

Per la simmetria della rete rispetto alle due porte, si ha anche  $G_{11} = G_{22}$  (si provi a dimostrarlo).

L'elemento  $G_{12}$  è definito come:

$$G_{12} = \left. \frac{i_2}{v_1} \right|_{v_2=0}$$



Il circuito per il calcolo di tale parametro è disegnato in alto. Si osservi che:

$$G_{12} = \left. \frac{i_2}{v_1} \right|_{v_2=0} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{v_2=0} \cdot \left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{v_2=0} = G_{11} \cdot \left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{v_2=0}$$

quindi ci si riporta al calcolo di  $\left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{v_2=0}$ , che può essere effettuato con l'applicazione reiterata del partitore di corrente:

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{-i_x / 2}{i_1} = -\frac{1}{2i_1} i_1 \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_1 / 2} = -0.25$$

da cui:  $G_{12} = -0.25 \cdot G_{11} = -0.08 \text{ S}$ .

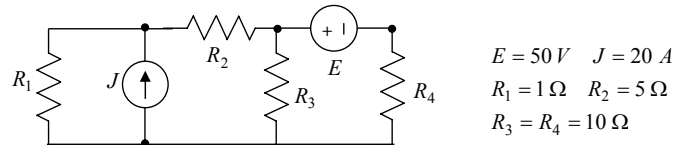
Si provi a verificare che  $G_{12} = G_{21} = G_m$ , proprietà valida per tutti i doppi-bipoli reciproci.

b.) Introdotta il vettore  $\mathbf{e}^T = [E_1 \quad E_2]$ , la potenza assorbita dal doppio-bipolo è esprimibile come:

$$P = \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{i} = \mathbf{e}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{G}}} \cdot \mathbf{e} = G_{11} E_1^2 + G_{22} E_2^2 + 2G_m E_1 E_2 = 50 \text{ W}.$$

**ES. 5.3 - Con riferimento alla seguente rete:**

- a) caratterizzare attraverso la matrice **H** il doppio bipolo resistivo visto ai capi dei generatori;  
 b) utilizzare la matrice **H** per calcolare la potenza assorbita da tale doppio-bipolo;



$$E = 50 \text{ V} \quad J = 20 \text{ A}$$

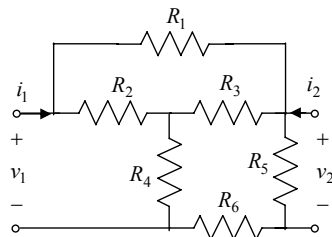
$$R_1 = 1 \Omega \quad R_2 = 5 \Omega$$

$$R_3 = R_4 = 10 \Omega$$

Risultato: a)  $H_{11} = 0.909 \Omega$ ,  $H_{22} = 0.073 \text{ S}$ ,  $H_{12} = -H_{21} = 0.045$ ; b)  $P = 0.546 \text{ kW}$ .

**ES. 5.4 - Con riferimento al seguente doppio-bipolo:**

- a) caratterizzarlo attraverso la matrice **R**;  
 b) sintetizzare un doppio-bipolo equivalente con uno schema a T;

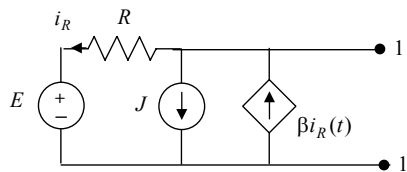


$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$$

$$R_5 = \frac{2}{3} R \quad R_6 = \frac{1}{3} R$$

$$R = 24 \Omega$$

Risultato: a)  $R_{11} = 24 \Omega$ ,  $R_{22} = 12 \Omega$ ,  $R_m = 8 \Omega$ ; b)  $R_A = 16 \Omega$ ,  $R_B = 4 \Omega$ ,  $R_C = 8 \Omega$ .

**ES. 5.5 - Valutare l'equivalente di Thévenin ai capi dei morsetti 1-1'**

Risultato:  $V_0 = E + \frac{RJ}{\beta - 1}$ ,  $R_{eq} = \frac{R}{1 - \beta}$ .

Per calcolare  $V_0$  basta applicare la LKC e la LKT:

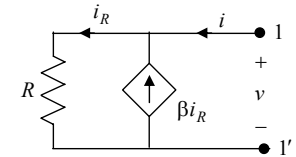
$$i_R - \beta i_R = -J \Rightarrow i_R = \frac{J}{\beta - 1}, \quad V_0 = E + Ri_R = E + \frac{RJ}{\beta - 1}$$

Per calcolare  $R_{eq}$  occorre spegnere tutti (e soli) i generatori indipendenti, cioè  $E$  e  $J$ , e valutare

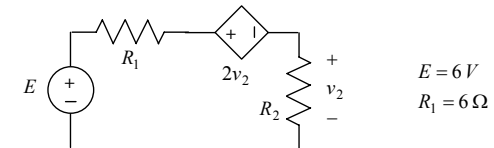
$$i = i_R - \beta i_R \Rightarrow i = (1 - \beta)i_R$$

$$i_R = \frac{v}{R}$$

$$R_{eq} = \frac{v}{i} = \frac{R}{1 - \beta}$$



Per  $\beta > 1$  si ha  $R_{eq} < 0$ , risultato plausibile visto che nella rete è presente un bipolo attivo. Per  $\beta = 1$  non esiste il circuito equivalente di Thévenin.

**ES. 5.6 - Per il circuito in esame, determinare il valore di  $R_2$  che rende massima la potenza assorbita dallo stesso resistore  $R_2$ .**

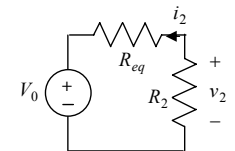
$$E = 6 \text{ V}$$

$$R_1 = 6 \Omega$$

La condizione di massimo trasferimento di potenza su  $R_2$  si può trovare immediatamente una volta rappresentata tutta la rete vista ai capi di  $R_2$  attraverso il generatore equivalente di Thévenin:  $R_2 = R_{eq}$ .

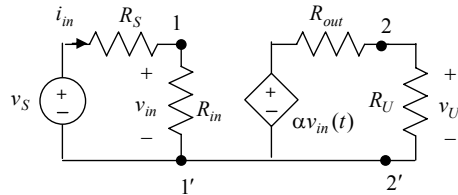
Il calcolo di  $R_{eq}$  può essere effettuato facilmente applicando Kirchhoff:

$$R_{eq} = \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{E=0} = \frac{v_2}{\frac{v_2 + 2v_2}{R_1}} = \frac{R_1}{3} = 2 \Omega.$$



**ES. 5.7** - Per il circuito Il seguente circuito rappresenta lo schema equivalente di un amplificatore di tensione. Calcolare:

- la matrice delle conduttanze del doppio bipolo ai capi dei morsetti 1-1' e 2-2';
- il guadagno di tensione  $A_v = v_U / v_S$
- i valori dei parametri  $R_{in}$  ed  $R_{out}$  per cui il guadagno  $A_v$  è massimo.



a) Orientando correnti e tensioni del doppio-bipolo come nella figura a lato, la matrice delle conduttanze si valuta applicando la definizione:

$$G_{11} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{v_2=0} = \frac{i_1}{R_{in} i_1} = \frac{1}{R_{in}};$$

$$G_{12} = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{v_1=0} = \frac{v_1}{R_{in} v_2} \bigg|_{v_1=0} = 0;$$

$$G_{21} = \left. \frac{i_2}{v_1} \right|_{v_2=0} = -\frac{\alpha v_1}{R_{out} v_1} = -\frac{\alpha}{R_{out}}; \quad G_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{v_1=0} = \frac{v_2}{R_{out} v_2} = \frac{1}{R_{out}}.$$

Si osservi che  $G_{12} \neq G_{21}$ , cioè il doppio-bipolo non è reciproco.

b) analizzando la maglia alla porta 1 e quella alla porta 2 si ottiene:

$$v_{in} = v_S \frac{R_{in}}{R_{in} + R_S}, \quad v_u = \alpha v_{in} \frac{R_U}{R_{out} + R_U},$$

da cui

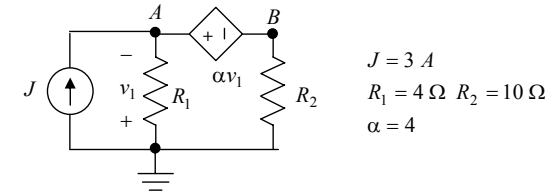
$$A_v = \frac{v_u}{v_s} = \alpha \frac{R_{in}}{R_{in} + R_S} \frac{R_U}{R_{out} + R_U}.$$

c) Osservando l'espressione di  $A_v$  è semplice verificare che il massimo è dato da

$$A_{v_{max}} = \alpha$$

e si ottiene per  $R_{in} \rightarrow \infty$ ,  $R_{out} \rightarrow 0$ .

**ES. 5.8** - Calcolare i potenziali di nodo del circuito seguente.



$$J = 3 \text{ A} \\ R_1 = 4 \Omega \quad R_2 = 10 \Omega \\ \alpha = 4$$

Indicando con  $V_A$ ,  $V_B$  i potenziali dei nodi A e B si ha che

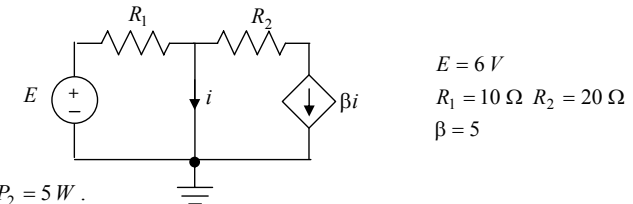
$$V_A = -v_1 \Rightarrow V_A - V_B = \alpha v_1 = -\alpha V_A \Rightarrow V_B = (1 + \alpha) V_A.$$

Applicando il metodo dei potenziali nodali (modificato) si ha:

$$\begin{cases} \frac{V_A}{R_1} - i = J \\ \frac{V_B}{R_2} + i = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{V_A}{R_1} + \frac{V_B}{R_2} = J \Rightarrow \frac{V_A}{R_1} + \frac{(1 + \alpha)V_A}{R_2} = J \Rightarrow V_A = \frac{J}{\frac{1}{R_1} + \frac{(1 + \alpha)}{R_2}} = 4 \text{ V}$$

$$V_B = (1 + \alpha)V_A = 20 \text{ V}.$$

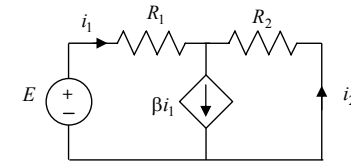
**ES. 5.9** - Calcolare la potenza dissipata in  $R_2$ .



$$E = 6 \text{ V} \\ R_1 = 10 \Omega \quad R_2 = 20 \Omega \\ \beta = 5$$

Risultato:  $P_2 = 5 \text{ W}$ .

**ES. 5.10** - Con riferimento al seguente circuito, valutare l'equivalente di Norton ai capi di  $R_2$  e la corrente  $i_2$  circolante in tale resistenza.



$$\text{Risultato: } I_{cc} = (1 - \beta) \frac{E}{R_1}, \quad R_{eq} = \frac{R_1}{1 - \beta}, \quad i_2 = -I_{cc} \frac{R_{eq}}{R_2 + R_{eq}}.$$