2. Torsione per la sezione generica (prof. Elio Sacco)

2.1. Torsione per la sezione generica

2.1.1. Cinematica

Nel caso di sezione generica, la cinematica della trave consiste nella rotazione relativa tra le sezioni della trave secondo un angolo specifico di rotazione Θ costante lungo l'asse della trave, come accade per la sezione circolare, ed un ingobbamento della sezione anch'esso costante rispetto ad x_3. Si assume quindi che il vettore di spostamento abbia la forma:

$$\mathbf{u} = x_3 \Theta \mathbf{x}^{\perp} + \Theta \omega \mathbf{e}^3 \tag{2.1}$$

essendo $\omega = \omega(x_1, x_2)$ la funzione di ingobbamento che dipende solo dalla geometria della sezione e

$$\mathbf{x}^{\perp} = \begin{Bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{Bmatrix} \tag{2.2}$$

In forma esplicita il campo di spostamenti è:

$$\begin{aligned} u_1 &= -x_2 x_3 \Theta \\ u_2 &= x_1 x_3 \Theta \\ u_3 &= \omega \Theta \end{aligned} \tag{2.3}$$

Definito che sia il campo di spostamenti dalla (2.1) è possibile calcolare le deformazioni ad esso associato:

$$\begin{gathered} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = 0 \\ 2\varepsilon_{13} = \Theta\left(\omega_{,1} - x_2\right) \\ 2\varepsilon_{23} = \Theta\left(\omega_{,2} + x_1\right) \end{gathered} \tag{2.4}$$

ovvero, introducendo il vettore di deformazione:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = \Theta(\nabla\omega + \mathbf{x}^{\perp}) \tag{2.5}$$

2.1.2. Legame costitutivo

Le tensioni si ricavano tramite legame costitutivo:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{13} = G\Theta\left(\omega_{,1} - x_2\right) \\ \sigma_{23} = G\Theta\left(\omega_{,2} + x_1\right) \end{aligned} \tag{2.6}$$

ovvero, introducendo il vettore le cui due componenti sono le tensioni tangenziali non nulle:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{Bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = G\Theta(\nabla\omega + \mathbf{x}^{\perp}) \tag{2.7}$$

2.1.3. Equilibrio

Le equazioni indefinite di equilibrio forniscono:

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma_{13,3} = G\Theta_{,3}\left(\omega_{,1} - x_2\right) \\ 0 &= \sigma_{23,3} = G\Theta_{,3}\left(\omega_{,2} + x_1\right) \\ 0 &= \sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} = G\Theta(\omega_{,11} + \omega_{,22}) \end{aligned} \tag{2.8}$$

La prima e la seconda delle (2.8) sono verificate poiché Θ è costante lungo l’asse della trave. Al contrario, la terza delle (2.8) non è automaticamente verificata e conduce all’equazione di campo:

$$\omega_{,11} + \omega_{,22} = \Delta\omega = 0 \tag{2.9}$$

L’equazione ai limiti sul mantello della trave, come illustrato in Figura 2- 1, fornisce:

$$0 = \boldsymbol{\tau} \bullet \mathbf{n} = G\Theta(\nabla\omega + \mathbf{x}^{\perp}) \bullet \mathbf{n} \tag{2.10}$$

La relazione (2.10) equivale a:

$$0 = \nabla\omega \bullet \mathbf{n} + \mathbf{x}^{\perp} \bullet \mathbf{n} \tag{2.11}$$

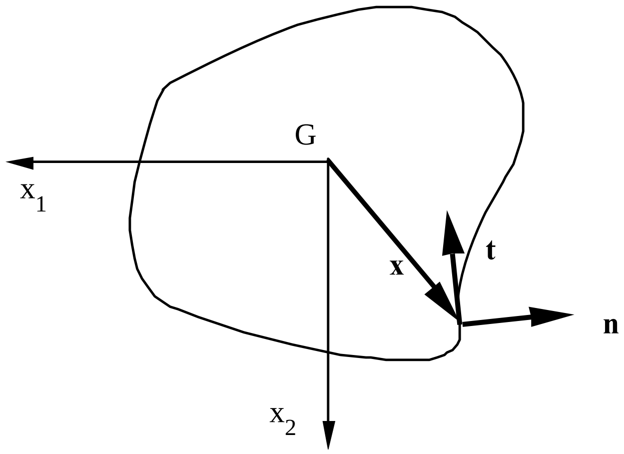

Figura 2- 1: Torsione per la sezione generica.

Essendo $\mathbf{x}^{\perp} = \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}$, l'equazione (2.11) diventa:

$$0 = \nabla\omega \bullet \mathbf{n} - \mathbf{e}^3 \times \mathbf{n} \bullet \mathbf{x} = \nabla\omega \bullet \mathbf{n} - \mathbf{t} \bullet \mathbf{x}$$

con $\mathbf{t} = \mathbf{e}^3 \times \mathbf{n}$ la tangente al contorno della sezione retta. Posto $\rho^2 = \mathbf{x} \bullet \mathbf{x}$, il vettore posizione del generico punto della sezione si calcola come:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\nabla\rho^2 = \rho\nabla\rho \tag{2.12}$$

per cui la (2.11) si riscrive nella forma:

$$0 = \nabla\omega \bullet \mathbf{n} - \rho\nabla\rho \bullet \mathbf{t} \tag{2.13}$$

Allora, l'equazione di equilibrio al contorno si può scrivere come:

$$\nabla\omega \bullet \mathbf{n} = \rho\nabla\rho \bullet \mathbf{t} \tag{2.14}$$

2.1.4. Problema di Neumann

In definitiva l'equazione indefinita di equilibrio (2.9) e la condizione ai limiti (2.14) conducono al seguente problema alle derivate parziali per la determinazione di ω:

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= 0 && \text{in } A \\ \nabla\omega \bullet \mathbf{n} &= \rho\nabla\rho \bullet \mathbf{t} && \text{su } \partial A \end{aligned} \tag{2.15}$$

noto come problema di Neumann[1] per l'equazione di Laplace[2]. E' chiaro l'aspetto puramente geometrico del problema (2.15). In analisi matematica si mostra che la soluzione del problema di Neumann esiste ed unica, a meno di una costante arbitraria, purché sia soddisfatta la condizione:

$$\int_{\partial A} \nabla\omega \bullet \mathbf{n} ds = 0 \tag{2.16}$$

Nel caso in esame la condizione di esistenza (2.16) è soddisfatta. Infatti, tenendo conto delle (2.14) e (2.12), si ha:

$$\int_{\partial A} \nabla\omega \bullet \mathbf{n} ds = \int_{\partial A} \rho\nabla\rho \bullet \mathbf{t} ds = \int_{\partial A} \frac{1}{2}\nabla\rho^2 \bullet \mathbf{t} ds = 0 \tag{2.17}$$

essendo $\nabla(\rho^2)\bullet\mathbf{t}\,ds$ un differenziale esatto.

La costante a meno della quale si individua la soluzione del problema rappresenta uno spostamento rigido lungo l'asse x_3 della trave. Essendo $u_3 = \Theta\omega$ la componente dello spostamento del generico punto in direzione dell'asse della trave, l'indeterminazione della soluzione del problema (2.15) è eliminata ponendo nullo lo spostamento medio:

$$\overline{w} = \frac{1}{A}\int_A u_3\, dA = \frac{1}{A}\Theta\int_A \omega\, dA = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \int_A \omega\, dA = 0 \tag{2.18}$$

---

1 John von Neumann (Budapest, 28 dicembre 1903 – Washington, 8 febbraio 1957) matematico e informatico statunitense di origine ungherese. Fu una delle personalità scientifiche preminenti del XX secolo cui si devono fondamentali contributi in campi come teoria degli insiemi, analisi funzionale, topologia, fisica quantistica, economia, informatica, teoria dei giochi, fluidodinamica e in molti altri settori della matematica.

2 Pierre Simon marchese di Laplace (Beaumont-en-Auge, 23 marzo 1749 – Parigi, 5 marzo 1827) matematico, fisico e astronomo francese. Fu uno dei principali scienziati nel periodo napoleonico. Ha dato fondamentali contribuiti a vari campi della matematica, dell'astronomia e della teoria della probabilità ed è stato uno degli scienziati più influenti al suo tempo, anche per il suo contributo all'affermazione del determinismo. Laplace, infatti, diede la svolta finale all'astronomia matematica riassumendo ed estendendo il lavoro dei suoi predecessori nella sua opera in cinque volumi Mécanique Céleste (Meccanica Celeste) (1799-1825). Questo capolavoro ha trasformato lo studio geometrico della meccanica sviluppato da Newton in quello basato sull'analisi matematica. Nel 1799 fu nominato ministro degli interni da Napoleone che nel 1806 gli conferì il titolo di conte dell'Impero. Fu nominato marchese nel 1817, dopo la restaurazione dei Borboni.

in tal modo la funzione $\omega(x_1, x_2)$ resta univocamente determinata.

2.1.5. Risultanti

E' necessario ora verificare la validità della soluzione, controllando che la risultante sia nulla ed il momento risultante dia il momento torcente applicato.
A tale scopo si osserva inizialmente che le caratteristiche della sollecitazione N ed $\mathbf{M}^f$ sono nulle essendo $\sigma_{33} = 0$.
Inoltre, ricordando che $\boldsymbol{\tau} \bullet \mathbf{n} = 0$ su ∂A, si consideri l'integrale:

$$\mathbf{0} = \int_{\partial A} \mathbf{x}\left(\boldsymbol{\tau} \bullet \mathbf{n}\right) ds = \int_{\partial A} \mathbf{x}\sigma_{i3} n_i ds \tag{2.19}$$

che, per il teorema della divergenza fornisce:

$$0 = \int_A \left(x_j \sigma_{i3}\right)_{,i} dA = \int_A x_j \sigma_{i3,i} dA + \int_A x_{j,i} \sigma_{i3} dA = \int_A x_j \sigma_{i3,i} dA + \int_A \sigma_{j3} dA = V_j \tag{2.20}$$

essendo per la (2.8)$_3$ $\sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} = 0$. In definitiva, si ricava che la risultante del taglio è nulla.
Per quanto riguarda il momento torcente, tendendo in conto le espressioni delle tensioni tangenziali (2.6)$_2$ e (2.6)$_3$, si ha:

$$\begin{aligned} M^t &= \mathbf{e}^3 \bullet \int_A \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau}\, dA = \int_A \left(x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{13}\right) dA \\ &= G\Theta \int_A \left[x_1\left(\omega_{,2} + x_1\right) - x_2\left(\omega_{,1} - x_2\right)\right] dA \\ &= G\Theta \int_A \left(x_1^2 + x_2^2 + x_1 \omega_{,2} - x_2 \omega_{,1}\right) dA \\ &= G\Theta \left[I_p + \int_A \left(x_1 \omega_{,2} - x_2 \omega_{,1}\right) dA\right] \end{aligned} \tag{2.21}$$

Introducendo il fattore di rigidezza torsionale J_t:

$$J_t = I_p + \int_A \left(x_1 \omega_{,2} - x_2 \omega_{,1}\right) dA \tag{2.22}$$

si ottiene:

$$\Theta = \frac{M^t}{GJ_t}$$

La soluzione in termini di spostamenti, deformazioni e tensioni, del problema dell'equilibrio elastico della trave di sezione generica soggetta a torsione, risulta quindi:

$$\begin{aligned} u_1 &= -x_2 x_3 \frac{M^t}{GJ_t} \\ u_2 &= x_1 x_3 \frac{M^t}{GJ_t} \\ u_3 &= \omega \frac{M^t}{GJ_t} \end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{13} &= \frac{M^t}{GJ_t}\left(\omega_{,1} - x_2\right) \\ 2\varepsilon_{23} &= \frac{M^t}{GJ_t}\left(\omega_{,2} + x_1\right) \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \frac{M^t}{J_t}\left(\omega_{,1} - x_2\right) \\ \sigma_{23} &= \frac{M^t}{J_t}\left(\omega_{,2} + x_1\right) \end{aligned} \tag{2.25}$$

dove la funzione di ingobbamento $\omega\left(x_1, x_2\right)$ si ottiene risolvendo il problema di Neumann (2.15).

2.1.6. <u>Centro di torsione</u>

Nella trattazione fin qui svolta si è fatta l'ipotesi che l'asse di rotazione della trave coincidesse con l'asse baricentrico. Si sarebbe pervenuti alla medesima soluzione anche se si fosse scelto un asse di rotazione parallelo a quello baricentrico ma non coincidente con esso. E' dimostrato infatti che la scelta dell'asse di rotazione delle sezioni, nella torsione con momento costante, risulta essere del tutto arbitraria.
A tal proposito si fa l'ipotesi che l'asse di rotazione intersechi il piano $x_1 x_2$ in un punto C individuato da un vettore $\mathbf{x}_c$. In tale ipotesi il campo di spostamenti relativo al generico punto della sezione trasversale assume la forma:

$$\mathbf{u} = \Theta\left[x_3\mathbf{e}^3 \times (\mathbf{x}-\mathbf{x}_c) + \omega_c \mathbf{e}^3 \right] \tag{2.26}$$

essendo $\mathbf{e}^3 \times (\mathbf{x}-\mathbf{x}_c) = (\mathbf{x}-\mathbf{x}_c)^{\perp}$ ed $\omega_c(x_1, x_2)$ una nuova funzione d'ingobbamento relativa al nuovo centro di rotazione prescelto C.
Le deformazioni associate al campo di spostamenti sono:

$$\boldsymbol{\gamma} = \Theta\left[\nabla\omega_c + \mathbf{e}^3 \times (\mathbf{x}-\mathbf{x}_c) \right] \tag{2.27}$$

e le uniche componenti di tensione non nulle:

$$\boldsymbol{\tau} = G\Theta\left[\nabla\omega_c + \mathbf{e}^3 \times (\mathbf{x}-\mathbf{x}_c) \right] \tag{2.28}$$

Le equazioni indefinite di equilibrio diventano:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \boldsymbol{\tau},_3 = G\Theta\left[\nabla\omega_c + \mathbf{e}^3 \times (\mathbf{x}-\mathbf{x}_c) \right]_{,3} \\ 0 &= div\left(\boldsymbol{\tau}\right) = G\Theta div\left[\nabla\omega_c + \mathbf{e}^3 \times (\mathbf{x}-\mathbf{x}_c) \right] = G\Theta\Delta\omega_c \end{aligned} \tag{2.29}$$

e le equazioni ai limiti sul mantello della trave sono:

$$0 = \boldsymbol{\tau} \bullet \mathbf{n} = G\Theta\left[\nabla\omega_c + \mathbf{e}^3 \times (\mathbf{x}-\mathbf{x}_c) \right] \bullet \mathbf{n} \tag{2.30}$$

L'equazione (2.30) si può riscrivere come:

$$\nabla\left(\omega_c + \mathbf{x} \bullet \mathbf{x}_c \times \mathbf{e}^3 \right) \bullet \mathbf{n} = \rho\nabla\rho \bullet \mathbf{t} \tag{2.31}$$

Si giunge al nuovo problema di Neumann:

$$\begin{aligned} &\Delta\left(\omega_c + \mathbf{x} \bullet \mathbf{x}_c \times \mathbf{e}^3 \right) = 0 \\ &\nabla\left(\omega_c + \mathbf{x} \bullet \mathbf{x}_c \times \mathbf{e}^3 \right) \bullet \mathbf{n} = \rho\nabla\rho \bullet \mathbf{t} \end{aligned} \tag{2.32}$$

Resta dimostrata anche in questo caso l'esistenza e l'unicità della soluzione, che è definita a meno di una costante di integrazione. Proprio per l'unicità della soluzione, le funzioni soluzioni della (2.15) e della (2.32) possono differire fra loro soltanto per la suddetta costante.
Indicando con c tale costante, risulta quindi:

$$\omega_c + \mathbf{x} \bullet \mathbf{x}_c \times \mathbf{e}^3 = \omega + c \quad \Leftrightarrow \quad \omega_c = \omega + \mathbf{x} \bullet \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}_c + c \tag{2.33}$$

Le due terne di spostamento relative al problema (2.15) e al problema (2.32) pertanto differiscono solo per un moto rigido della trave. Infatti, sostituendo la seconda delle relazioni (2.33) nell'espressione del vettore di deformazione (2.26), si ottiene:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} &= \Theta\left[\nabla\left(\omega + \mathbf{x} \bullet \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}_c + c\right) + \mathbf{e}^3 \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)\right] \\ &= \Theta\left[\nabla\omega + \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}_c + \mathbf{e}^3 \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)\right] \\ &= \Theta\left[\nabla\omega + \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}\right] \end{aligned} \tag{2.34}$$

che risulta uguale alla deformazione fornita dalla formula (2.5).
Fra gli infiniti assi di rotazione è opportuno tuttavia individuare quell'unico asse che dà luogo ad un moto medio della sezione nullo, nel senso che per esso risulti nullo non solo lo spostamento assiale medio (il che è possibile per qualunque asse di rotazione) ma anche le rotazioni medie.
Per annullare lo spostamento assiale medio, si pone:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_A \omega_c \, dA = \int_A (\omega + \mathbf{x} \bullet \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}_c + c) \, dA \\ &= \int_A \omega \, dA + \int_A \mathbf{x} \bullet \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}_c \, dA + \int_A c \, dA \qquad \Rightarrow c = 0 \end{aligned} \tag{2.35}$$

essendo nullo l'ingobbamento medio dovuto ad ω ed avendo scelto il sistema di riferimento baricentrico, che rende nullo il vettore momento statico della sezione retta della trave.
Lo spostamento in direzione assiale del generico punto della sezione retta può d'altra parte essere visto come prodotto da una rotazione intorno ad un asse nel piano della sezione retta, ovvero ortogonale ad $\mathbf{e}^3$:

$$w\mathbf{e}^3 = \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{x} \tag{2.36}$$

essendo $\boldsymbol{\varphi} = \varphi_1 \mathbf{e}^1 + \varphi_2 \mathbf{e}^2$ il vettore di rotazione funzione di $\mathbf{x}$.
Semplici calcoli dimostrano che:

$$\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3\\ \varphi_1 & \varphi_2 & 0\\ x_1 & x_2 & 0\end{bmatrix}=\left(x_2\varphi_1-x_1\varphi_2\right)\mathbf{e}^3 \tag{2.37}$$

Premoltiplicando vettorialmente ambo i membri della relazione (2.36) per il vettore posizione **x** e tenendo conto della relazione (2.37), si ottiene:

$$\begin{aligned} w\,\mathbf{x}\times\mathbf{e}^3 &= \mathbf{x}\times\mathbf{e}^3\left[\boldsymbol{\varphi}\bullet\left(\mathbf{x}\times\mathbf{e}^3\right)\right]\\ &=\left[\left(\mathbf{x}\times\mathbf{e}^3\right)\otimes\left(\mathbf{x}\times\mathbf{e}^3\right)\right]\boldsymbol{\varphi}\end{aligned} \tag{2.38}$$

Integrando la (2.38) sull'area della sezione, si ottiene:

$$\int_A w\,\mathbf{x}\times\mathbf{e}^3\,dA=\int_A\left[\left(\mathbf{x}\times\mathbf{e}^3\right)\otimes\left(\mathbf{x}\times\mathbf{e}^3\right)\right]\boldsymbol{\varphi}\,dA=\mathbf{J}^*\overline{\boldsymbol{\varphi}} \tag{2.39}$$

dove $\mathbf{J}^*$ è il tensore di inerzia, ruotato di $\pi/2$ rispetto a **J**. Il vettore $\overline{\boldsymbol{\varphi}}$ può intendersi come la rotazione media pesata che subisce la sezione, ottenuta dall'applicazione del teorema della media. Invertendo la (2.39) si ottiene la forma esplicita della rotazione media come:

$$\overline{\boldsymbol{\varphi}}=\left(\mathbf{J}^*\right)^{-1}\int_A w\,\mathbf{x}\times\mathbf{e}^3\,dA=\frac{1}{\det\left(\mathbf{J}\right)}\mathbf{J}\int_A w\,\mathbf{x}\times\mathbf{e}^3\,dA \tag{2.40}$$

In particolare, indicando con λ_1 e λ_2 gli autovalori di **J**, nel riferimento principale d'inerzia si ha:

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \lambda_1\mathbf{e}^1\otimes\mathbf{e}^1+\lambda_2\mathbf{e}^2\otimes\mathbf{e}^2\\ \mathbf{J}^* &= \lambda_2\mathbf{e}^1\otimes\mathbf{e}^1+\lambda_1\mathbf{e}^2\otimes\mathbf{e}^2\\ \left(\mathbf{J}^*\right)^{-1} &= \frac{1}{\lambda_2}\mathbf{e}^1\otimes\mathbf{e}^1+\frac{1}{\lambda_1}\mathbf{e}^2\otimes\mathbf{e}^2\end{aligned} \tag{2.41}$$

per cui le componenti del vettore rotazione media della sezione sono:

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}_1 &= -\frac{1}{\lambda_2}\int_A w\,x_2\,dA\\ \overline{\varphi}_2 &= -\frac{1}{\lambda_1}\int_A w\,x_1\,dA\end{aligned} \tag{2.42}$$

La rotazione media della sezione calcolata intorno al punto individuato dal vettore posizione $\mathbf{x}_c$ vale:

$$
\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{\varphi}}_c &= \frac{1}{\det\left(\mathbf{J}\right)}\mathbf{J}\int_A w_c\ \mathbf{x}\times\mathbf{e}^3\ dA \\
&= \Theta\frac{1}{\det\left(\mathbf{J}\right)}\mathbf{J}\int_A \omega_c\ \mathbf{x}\times\mathbf{e}^3\ dA
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

Sostituendo l'espressione di ω_c fornita dalla (2.33) nella (2.43), si ha:

$$
\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{\varphi}}_c &= \Theta\frac{1}{\det\left(\mathbf{J}\right)}\mathbf{J}\int_A (\omega+\mathbf{x}\bullet\mathbf{e}^3\times\mathbf{x}_c)\mathbf{x}\times\mathbf{e}^3\ dA \\
&= \Theta\frac{1}{\det\left(\mathbf{J}\right)}\mathbf{J}\int_A (\omega\,\mathbf{x}\times\mathbf{e}^3+(\mathbf{x}\bullet\mathbf{e}^3\times\mathbf{x}_c)\mathbf{x}\times\mathbf{e}^3\ dA \\
&= \Theta\frac{1}{\det\left(\mathbf{J}\right)}\mathbf{J}\int_A (\omega\,\mathbf{x}\times\mathbf{e}^3+(\mathbf{x}_c\bullet\mathbf{x}\times\mathbf{e}^3)\mathbf{x}\times\mathbf{e}^3\ dA \\
&= \Theta\frac{1}{\det\left(\mathbf{J}\right)}\mathbf{J}\int_A \left\{\omega\,\mathbf{x}\times\mathbf{e}^3+\left[(\mathbf{x}\times\mathbf{e}^3)\otimes(\mathbf{x}\times\mathbf{e}^3)\right]\mathbf{x}_c\right\}dA \\
&= \Theta\frac{1}{\det\left(\mathbf{J}\right)}\mathbf{J}\left\{\int_A \omega\,\mathbf{x}\times\mathbf{e}^3 dA+\mathbf{J}^*\mathbf{x}_c\right\}
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

Il vettore posizione $\mathbf{x}_c$ si determina imponendo che $\bar{\varphi}_c$ sia nullo, ovvero:

$$
\int_A \omega\,\mathbf{x}\times\mathbf{e}^3 dA+\mathbf{J}^*\mathbf{x}_c=0 \tag{2.45}
$$

per cui si ottiene:

$$
\mathbf{x}_c=\frac{1}{\det\left(\mathbf{J}\right)}\mathbf{J}\int_A \omega\,\mathbf{e}^3\times\mathbf{x}\,dA \tag{2.46}
$$

Il punto della sezione retta individuato dal vettore posizione $\mathbf{x}_c$ definito dalla (2.46) è detto *centro di torsione*. Le coordinate di tale centro risultano essere dipendenti attraverso ω dalla sola forma della sezione della trave e sono quindi indipendenti dal materiale e dalle forze agenti.
Nel sistema di riferimento principale d'inerzia si ha:

$$
\begin{aligned}
x_{c1} &= -\frac{1}{\lambda_2}\int_A \omega\, x_2 dA \\
x_{c2} &= \frac{1}{\lambda_1}\int_A \omega\, x_1 dA
\end{aligned}
\tag{2.47}
$$

E' opportuno rilevare che se uno degli assi principali d'inerzia è anche asse di simmetria della sezione, il centro di torsione C deve necessariamente cadere su tale asse (infatti ω in tal caso è emisimmetrica rispetto ad esso) e che pertanto se la sezione ha due assi di simmetria il loro punto di intersezione definisce univocamente baricentro e centro di torsione.

2.2. Funzione di Prandtl

Il problema della torsione può essere risolto in maniera alternativa attraverso l'uso della funzione di Prandtl[3] detta anche la funzione delle tensioni.
Si suppone che le tensioni derivino dalla funzione delle tensioni (o di Prandtl) $F = F(x_1, x_2)$ tramite la relazione:

$$
\boldsymbol{\tau} = \begin{Bmatrix} F_{,2} \\ -F_{,1} \end{Bmatrix} = -\mathbf{e}^3 \times \nabla F \tag{2.48}
$$

ovvero:

$$
\sigma_{13}\left(x_1, x_2\right) = F_{,2} \qquad\qquad \sigma_{23}\left(x_1, x_2\right) = -F_{,1} \tag{2.49}
$$

In tal modo la terza equazione indefinita di equilibrio $(2.8)_3$ diventa:

$$
0 = \sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} = F_{,21} - F_{,12} = 0 \tag{2.50}
$$

ovvero è automaticamente soddisfatta.
Dalle tensioni definite tramite le relazioni (2.49) si ricavano le deformazioni:

---

[3] *Ludwig Prandtl (4 February 1875 - 15 August 1953) fisico tedesco. E' stato un pioniere dell'areodinamica e sviluppò le basi matematiche per i principi fondamentali dell'aeronautica subsonica nel 1920. I suoi studi hanno identificato lo strato di contorno, i profili alari sottili e le teorie della portanza. Il numero di Prandtl prende nome da lui.*

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = 0 \\
&2\varepsilon_{13}\left(x_1, x_2\right) = \frac{F_{,2}}{G} \\
&2\varepsilon_{23}\left(x_1, x_2\right) = -\frac{F_{,1}}{G}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

2.2.1. Problema di Dirichlet

La particolare scelta per la rappresentazione delle tensioni tangenziali assicura la condizione di equilibrio. Per verificare la congruenza associata alle deformazioni (2.51), è necessario imporre il soddisfacimento delle equazioni indefinite di congruenza interna, che nel caso generale risultano:

$$\begin{array}{ccccccc}
\varepsilon_{12,32} & - & \varepsilon_{13,22} & = & \varepsilon_{22,31} & - & \varepsilon_{23,21} \\
\varepsilon_{12,33} & - & \varepsilon_{13,23} & = & \varepsilon_{32,31} & - & \varepsilon_{33,21} \\
\varepsilon_{22,33} & - & \varepsilon_{23,23} & = & \varepsilon_{32,32} & - & \varepsilon_{33,22} \\
\varepsilon_{11,32} & - & \varepsilon_{13,12} & = & \varepsilon_{21,31} & - & \varepsilon_{23,11} \\
\varepsilon_{11,33} & - & \varepsilon_{13,13} & = & \varepsilon_{31,31} & - & \varepsilon_{33,11} \\
\varepsilon_{11,22} & - & \varepsilon_{12,12} & = & \varepsilon_{21,21} & - & \varepsilon_{22,11}
\end{array} \tag{2.52}$$

e per il problema in esame si riducono alle:

$$\begin{aligned}
0 = \varepsilon_{13,22} - \varepsilon_{23,21} = \left(\varepsilon_{13,2} - \varepsilon_{23,1}\right)_{,2} \\
0 = \varepsilon_{13,12} - \varepsilon_{23,11} = \left(\varepsilon_{13,2} - \varepsilon_{23,1}\right)_{,1}
\end{aligned} \tag{2.53}$$

in altri termini si ha:

$$\varepsilon_{13,2} - \varepsilon_{23,1} = \text{costante} \tag{2.54}$$

L'equazione (2.54) può essere riscritta in termini di tensioni tangenziali:

$$2G\left(\varepsilon_{13,2} - \varepsilon_{23,1}\right) = \sigma_{13,2} - \sigma_{23,1} = k_0 \tag{2.55}$$

essendo k_0 una costante. Tenendo conto delle relazioni (2.49), la (2.55) diventa:

$$\sigma_{13,2} - \sigma_{23,1} = -\left(F_{,11} + F_{,22}\right) = k_0 \tag{2.56}$$

D’altra parte, ricordando le espressioni $(2.6)_1$ e $(2.6)_2$ delle tensioni tangenziali ottenute a partire dalla formulazione cinematica del problema, si ha:

$$\sigma_{13,2} - \sigma_{23,1} = G\Theta(\omega_{,21} - \omega_{,12} + 1 + 1) = 2G\Theta \tag{2.57}$$

e quindi, per la (2.56), $k_0 = 2G\Theta$, ovvero:

$$F_{,11} + F_{,22} = \Delta F = -2G\Theta \tag{2.58}$$

che rappresenta la condizione necessaria e sufficiente di congruenza per il problema della torsione di una sezione monoconnessa.
Per quanto riguarda la condizione di equilibrio sul mantello della trave, la (2.10) si trasforma in:

$$0 = \boldsymbol{\tau} \bullet \mathbf{n} = -\mathbf{e}^3 \times \nabla F \bullet \mathbf{n} = \nabla F \bullet \mathbf{e}^3 \times \mathbf{n} = \nabla F \bullet \mathbf{t} \tag{2.59}$$

cioè F costante su ∂A. Nel caso di sezione monoconnessa la costante può essere posta uguale a zero perchè lo stato tensionale non dipende da questa costante, essendo ottenuto come gradiente di F.
L’equazione di campo (2.58) con la condizione al limite (2.59) conduce al problema di Dirichlet[4]:

$$\begin{aligned} \Delta F &= -2G\Theta \qquad && \text{in } A \\ F &= 0 && \text{su } \partial A \end{aligned} \tag{2.60}$$

Naturalmente, una qualsiasi funzione $\hat{F}$ definita come:

$$\hat{F} = F + k$$

con k costante risolve il problema (2.60).

---

[4] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (Düren, 13 febbraio 1805 - 5 maggio 1859) matematico tedesco ricordato soprattutto per la moderna definizione "formale" di funzione. Egli fu educato in Germania e quindi in Francia, dove ebbe modo di istruirsi da molti dei più celebri matematici del tempo. Il suo primo lavoro riguardava l'Ultimo teorema di Fermat. Per quanto riguarda il suo contributo alla meccanica razionale, è di fondamentale importanza per lo studio delle vibrazioni e dell'equilibrio stabile dei sistemi il Criterio di Dirichlet per i sistemi soggetti solamente a forze conservative.

2.2.2. <u>Risultanti</u>

Nasce ora l'esigenza di verificare che la risultante delle tensioni sia nulla e che il momento risultante fornisca una sollecitazione di pura torsione. La risultante delle tensioni tangenziali $\boldsymbol{\tau}$ definite dalla relazione (2.48) vale:

$$\mathbf{V} = \int_A \boldsymbol{\tau}\, dA = -\int_A \mathbf{e}^3 \times \nabla F\, dA = -\mathbf{e}^3 \times \int_{\partial A} F\mathbf{n}\, ds = \mathbf{0} \tag{2.61}$$

essendo $F = 0$ sul contorno della sezione. Anche qualora si consideri la funzione $\widehat{F}$, che assume valore k sul contorno, si dimostra agevolmente che $\mathbf{V} = \mathbf{0}$. Infatti:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \int_A \boldsymbol{\tau}\, dA = -\mathbf{e}^3 \times \int_A \nabla \widehat{F}\, dA \\ &= -\mathbf{e}^3 \times \int_{\partial A} F\mathbf{n}\, ds - k\mathbf{e}^3 \times \int_{\partial A} \mathbf{n}\, ds \\ &= \mathbf{0} - k\int_{\partial A} \mathbf{t}\, ds = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.62}$$

Il momento torcente vale invece:

$$\begin{aligned} M^t &= \mathbf{e}^3 \bullet \int_A \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau}\, dA = \mathbf{e}^3 \bullet \int_A \mathbf{x} \times (\nabla F \times \mathbf{e}^3) dA \\ &= -\int_A \mathbf{x} \bullet \left[\mathbf{e}^3 \times (\nabla F \times \mathbf{e}^3)\right] dA = -\int_A \mathbf{x} \bullet \nabla F\, dA \\ &= -\int_A div\left(F\mathbf{x}\right) dA + \int_A F\, div\left(\mathbf{x}\right) dA \\ &= -\int_{\partial A} F\, \mathbf{x} \bullet \mathbf{n}\, ds + \int_A 2F\, dA \end{aligned} \tag{2.63}$$

ma il primo integrale dell'ultimo termine è nullo, essendo per la seconda delle (2.60) $F = 0$ su ∂A, per cui si ha:

$$M^t = \int_A 2F\, dA \tag{2.64}$$

Nel caso si consideri $\widehat{F}$ si perviene allo stesso risultato. Infatti, si ha:

$$
\begin{aligned}
M^t &= -\int_{\partial A} \widehat{F}\mathbf{x} \bullet \mathbf{n}\, ds + \int_A 2\widehat{F}\, dA \\
&= -\int_{\partial A} F\mathbf{x} \bullet \mathbf{n}\, ds - k\int_{\partial A} \mathbf{x} \bullet \mathbf{n}\, ds + \int_A 2F\, dA + 2k\int_A dA \\
&= \mathbf{0} - k\int_A div(\mathbf{x})\, dA + \int_A 2F\, dA + 2k\, A \\
&= \mathbf{0} - k\int_A 2\, dA + \int_A 2F\, dA + 2k\, A \\
&= \mathbf{0} - 2k\, A + \int_A 2F\, dA + 2k\, A \\
&= \int_A 2F\, dA
\end{aligned}
\tag{2.65}
$$

2.2.3. Ingobbamento

Infine, invertendo la relazione (2.7) e tenendo conto della (2.48) si ricava l'espressione del gradiente della funzione di ingobbamento ω in funzione della funzione delle tensioni F :

$$
\begin{aligned}
\nabla\omega &= \frac{1}{G\Theta}\boldsymbol{\tau} - \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x} = -\frac{1}{G\Theta}\mathbf{e}^3 \times \left(\nabla F + \mathbf{x}\right) \\
&= \frac{1}{G\Theta}\begin{Bmatrix} F_{,2} \\ -F_{,1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{Bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.66}
$$

Note che siano la funzione F e l'angolo unitario di torsione Θ tramite le equazione (2.60) e (2.64), dalla (2.66) si ricava ω in funzione del momento torcente e quindi si definiscono gli spostamenti della trave.

2.2.4. Soluzione

In definitiva, per determinare la soluzione del problema della torsione utilizzando la formulazione di Prandtl, si esegue la procedura:

- Si risolve il problema

$$
\begin{aligned}
\Delta\widehat{F} &= 1 \qquad \text{in } A \\
\widehat{F} &= 0 \qquad \text{su } \partial A
\end{aligned}
\tag{2.67}
$$

  determinando così la funzione $\widehat{F}\left(x_1, x_2\right)$;

- Si assume $F\left(x_1, x_2\right) = -2G\Theta\widehat{F}\left(x_1, x_2\right)$;

- Si impone che la funzione $F\left(x_1, x_2\right)$ soddisfi la condizione di equilibrio:

$$M^t = \int_A 2F\, dA = -4G\Theta \int_A \widehat{F}\, dA \tag{2.68}$$

determinando l'angolo unitario di torsione come:

$$\Theta = -\frac{M^t}{4G\int_A \widehat{F}\, dA} \tag{2.69}$$

- Si ricava l'ingobbamento integrando l'equazione:

$$\nabla\omega = \frac{1}{G\Theta}\begin{Bmatrix} F_{,2} \\ -F_{,1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{Bmatrix} \tag{2.70}$$

2.3. Analogie con altri fenomeni fisici

Le relazioni che governano il problema della torsione presentano delle analogie formali con quelle relative ad altri fenomeni fisici che facilitano l'intuizione ingegneristica nella valutazione qualitativa dell'andamento delle tensioni tangenziali sulla sezione e sono quindi utili allo scopo di fornire delle approssimazioni.

Una prima analogia considera una membrana sottile e perfettamente flessibile, vincolata a non spostarsi trasversalmente sul contorno ∂A e qui soggetta a trazione uniforme S; sulla membrana agisce una pressione trasversale p, pure uniforme. Viene definito $w(x_1, x_2)$ lo spostamento trasversale, che si suppone abbastanza piccolo da poter trattare le sue derivate come infinitesimi.

Facendo riferimento alla Figura 2- 2, imponendo l'equilibrio alla traslazione verticale dell'elemento infinitesimo tratteggiato e la condizione di vincolo al contorno, si ottengono le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} &\Delta w = -\frac{p}{S} && \text{in } A \\ &w = 0 && \text{su } \partial A \end{aligned} \tag{2.71}$$

Il confronto con la prima equazione delle (2.71) mostra, a meno della sostituzione di $2G\Theta$ con p/S, la coincidenza matematica tra le funzioni $w(x_1, x_2)$ e $F = F(x_1, x_2)$, se contorno della membrana e contorno della sezione coincidono o sono affini. L'*analogia della membrana*, scoperta da Prandtl, fu sperimentata dallo stesso avvalendosi di membrane realizzate con un velo di sapone soggette a pressione nota e utilizzata per determinare il valore delle tensioni ed il fattore di rigidezza torsionale per diversi tipi di sezione trasversale.

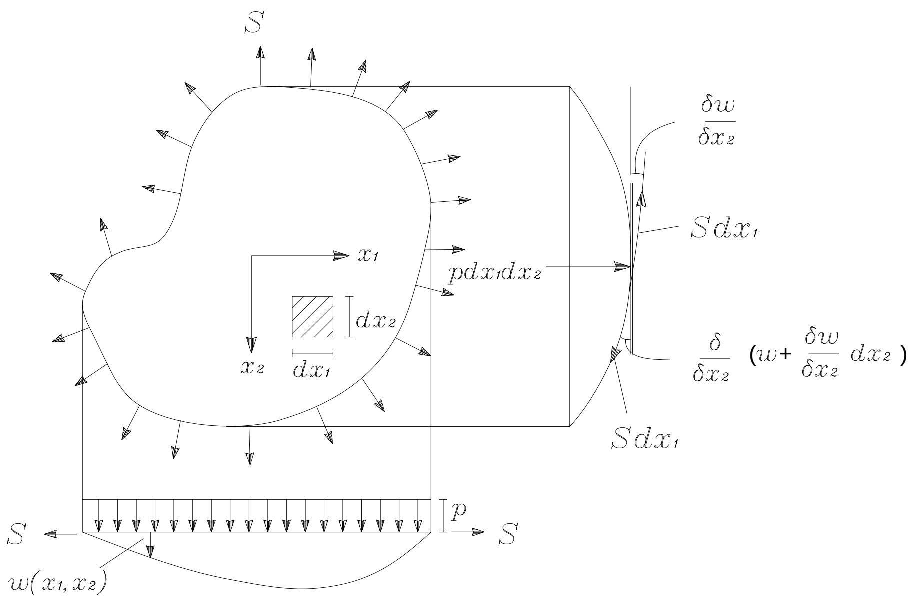

Figura 2- 2: Analogia della membrana

Una seconda analogia è quella nota come *analogia idrodinamica*. Questa considera il moto di un fluido ideale in rotazione con vorticità uniforme in un tubo che abbia la stessa forma trasversale della sezione soggetta a torsione. Dette v_1 , v_2 le componenti di velocità del fluido nel piano, le equazioni che governano il moto si scrivono:

$$\begin{aligned} & v_{1,1} + v_{2,2} = 0 && \text{in } A \\ & v_{1,2} - v_{2,1} = c && \text{in } A \\ & v_1 n_1 + v_2 n_2 = 0 && \text{su } \partial A \end{aligned} \tag{2.72}$$

Il confronto con le equazioni indefinite di equilibrio e con la condizione di mantello scarico valide nel problema di de Saint Venant, stabilisce l'analogia tra i due fenomeni, identificando il vettore $\boldsymbol{\tau}$ con la velocità del fluido.
L'analogia idrodinamica evidenzia la maggiore efficienza torsionale di profili chiusi in parete sottile rispetto ai profili aperti. Osservando l'andamento qualitativo del "fluido" nelle due sezioni in Figura 2- 3 è evidente come a parità di tensioni tangenziali massime, un profilo chiuso possa equilibrare un momento torcente più elevato che un profilo aperto. L'analogia permette anche di valutare qualitativamente alcuni effetti locali come la concentrazione di tensioni in angoli rientranti.

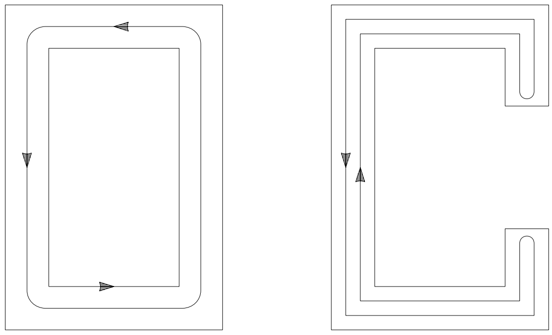

Figura 2- 3: Sezione sottile chiusa e sezione sottile aperta soggette a torsione.

2.4. Sezione ellittica

Si consideri una trave con sezione ellittica di semidiametri a e b, soggetta ad una sollecitazione di torsione uniforme M_t, illustrata in Figura 2- 4. Come dimostrato, è possibile valutare lo stato tensionale che insorge nella sezione e l'ingobbamento che essa subisce, attraverso la funzione di Prandtl. Per la sezione ellittica la funzione delle tensioni assume la forma:

$$F(x_1, x_2) = c\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1\right) \tag{2.73}$$

essendo c una costante che si determina imponendo che valga la relazione (2.58):

$$-2G\Theta = F_{,11} + F_{,22} = 2c\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \quad \Rightarrow \quad c = -G\Theta\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \tag{2.74}$$

In definitiva, si ottiene:

$$F(x_1, x_2) = -G\Theta\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1\right) \tag{2.75}$$

Per valutare l'angolo unitario di torsione si sostituisce nella formula (2.64) la funzione F riportata nella relazione (2.75):

$$M_t = -2G\Theta\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}\int_A\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1\right)dA \tag{2.76}$$

da cui si ricava:

$$M_t = -2G\Theta \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{I_2}{a^2} + \frac{I_1}{b^2} - A \right) \tag{2.77}$$

essendo A, I_1 e I_2 l'area ed i momenti d'inerzia della sezione ellittica calcolati rispetto agli assi principali:

$$A = \pi ab \qquad I_1 = \frac{\pi a b^3}{4} \qquad I_2 = \frac{\pi a^3 b}{4} \tag{2.78}$$

Sostituendo queste relazioni nella (2.77) si ottiene:

$$M_t = G\Theta \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} = G\Theta J_t \tag{2.79}$$

Il fattore di rigidezza torsionale per la sezione ellittica vale dunque:

$$J_t = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \tag{2.80}$$

E' possibile ora riscrivere la funzione delle tensioni nella forma:

$$F(x_1, x_2) = -\frac{M_t}{\pi ab} \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 \right) \tag{2.81}$$

A partire dall'espressione della funzione di Prandtl (2.75), ovvero dalla (2.81), è possibile ricavare le tensioni tangenziali, tramite le relazioni:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= F_{,2} = -\frac{2M_t x_2}{\pi a b^3} \\ \sigma_{23} &= -F_{,1} = \frac{2M_t x_1}{\pi a^3 b} \end{aligned} \tag{2.82}$$

Il modulo della tensione tangenziale totale varia linearmente con la distanza dal baricentro e vale quindi:

$$\tau = \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} = \frac{2M_t}{\pi ab} \sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{x_2^2}{b^4}} \tag{2.83}$$

Poiché la normale **n** ad ogni ellisse simile al contorno ha componenti:

$$n_1 = \frac{x_1}{a^2} \qquad n_2 = \frac{x_2}{b^2} \tag{2.84}$$

le espressioni delle tensioni tangenziali (2.82) mostrano che è sempre $\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 = 0$, e quindi il vettore $\boldsymbol{\tau}$ è tangente a tali ellissi.
Le linee di flusso del vettore $\boldsymbol{\tau}$, e cioè le linee cui $\boldsymbol{\tau}$ è tangente in ogni punto, sono le linee in cui F assume valore costante e coincidono quindi con le curve di livello della funzione delle tensioni. Nel caso in esame, attesa la (2.81), tali linee risultano essere ellissi omotetiche al contorno della sezione aventi cioè equazione:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - k^2 = 0 \tag{2.85}$$

con k un numero qualunque compreso nell'intervallo $0 \leq k \leq 1$.
Prendendo in esame la generica linea di flusso, si ricava il valore di x_1 dall'equazione (2.85):

$$x_1^2 = a^2 \left(k^2 - \frac{x_2^2}{b^2} \right) \tag{2.86}$$

Sostituendo l'espressione (2.86) nella formula (2.83) si ottiene l'andamento della tensione tangenziale totale lungo di essa può essere espresso nella forma:

$$\tau = \frac{2M_t}{\pi ab} \sqrt{\frac{k^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^4}(1 - \frac{b^2}{a^2})} \tag{2.87}$$

Per $a > b$ il valore massimo della tensione tangenziale τ sulla linea di flusso si ha quando x_2 raggiunge il suo valore massimo e cioè per $x_2 = k\, b$, in corrispondenza del semiasse minore dell'ellisse di flusso considerata. Sulla detta linea la tensione tangenziale massima vale dunque:

$$\tau_{\max}(k) = \frac{2M_t\, k}{\pi ab^2} \tag{2.88}$$

Definito l'intervallo di valori entro cui può variare k, si ha che la massima tensione tangenziale nella sezione si verifica in corrispondenza dei punti estremi del semidiametro minore dell'ellisse di frontiera della sezione ($k = 1$):

$$\tau_{\max} = \frac{2M_t}{\pi a b^2} \tag{2.89}$$

Una volta definito lo stato tensionale nella sezione è possibile ricavare la funzione di ingobbamento ω per poter poi esplicitare le componenti dello spostamento. Le equazioni (2.70), nel caso di sezione ellittica, assumono la forma:

$$\begin{aligned} \omega,_1 &= -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} x_2 \\ \omega,_2 &= -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} x_1 \end{aligned} \tag{2.90}$$

e integrando si ottiene l'espressione:

$$\omega(x_1, x_2) = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} x_1 x_2 \tag{2.91}$$

La sezione ellittica per effetto del momento torcente si dispone dunque secondo una superficie gobba avente la forma di un paraboloide iperbolico. Le linee di equazione $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ non si spostano e l'ingobbamento è antisimmetrico rispetto ad entrambi gli assi. Il centro di torsione della trave coincide con il baricentro della sezione stessa.

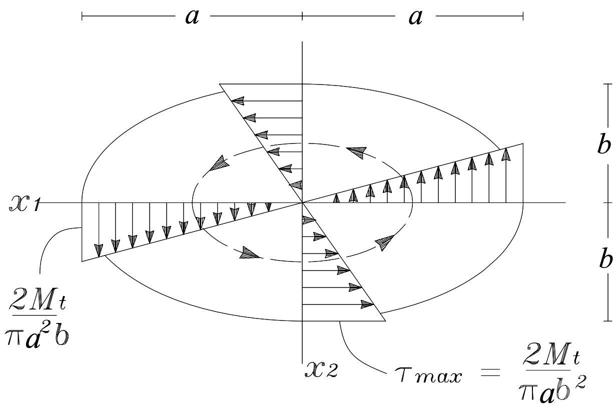

Figura 2- 4: Stato tensione della sezione ellittica.

Nel caso particolare di *sezione circolare* si ha che $a = b = R$ e che il risultato si particolarizza nelle seguenti relazioni:

$$
\begin{aligned}
&J_t = \frac{\pi R^4}{2} = I_p \\
&\sigma_{13} = \quad F,_2 = \frac{2M_t x_2}{\pi R^4} \\
&\sigma_{23} = -F,_1 = \frac{2M_t x_1}{\pi R^4} \\
&\tau = \frac{2M_t}{\pi}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R^4} = \frac{2M_t}{\pi}\frac{r}{R^4} \\
&\tau_{\max} = \frac{2M_t}{\pi R^3}
\end{aligned}
\tag{2.92}
$$

dove si è indicato con I_p il momento d'inerzia polare della sezione retta circolare di raggio R, con r la coordinata radiale e con $\tau_{\max}$ la tensione tangenziale massima calcolata in corrispondenza di $r = R$

La funzione d'ingobbamento (2.91) risulta, per la sezione circolare, evidentemente nulla. Questo indica che le sezioni rette del cilindro si mantengono piane e che le componenti dello spostamento assumono dunque la forma:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= -x_2 x_3 \Theta \\
u_2 &= \quad x_1 x_3 \Theta \\
u_3 &= \quad 0
\end{aligned}
\tag{2.93}
$$

essendo:

$$
\Theta = \frac{M_t}{G I_p} \tag{2.94}
$$

2.5. Sezione rettangolare allungata

Si considera ora il caso in cui la sezione della trave di forma rettangolare di dimensione $a \times b$ con un lato di dimensione molto maggiore dell'altro: $a >> b$. In questo caso non appare applicabile a rigore il principio di Saint-Venant, in quanto, come risulta evidente, la sezione non è compatta. Si suppone allora che la sollecitazione di torsione sia applicata in modo opportuno sulle basi della trave, ed in seguito si vedrà cosa si intende per *modo opportuno*.

Si sceglie il sistema di riferimento in modo tale che l'origine sia baricentrica e l'asse x_1 sia parallelo al lato maggiore a, come mostrato in Figura 2- 5.

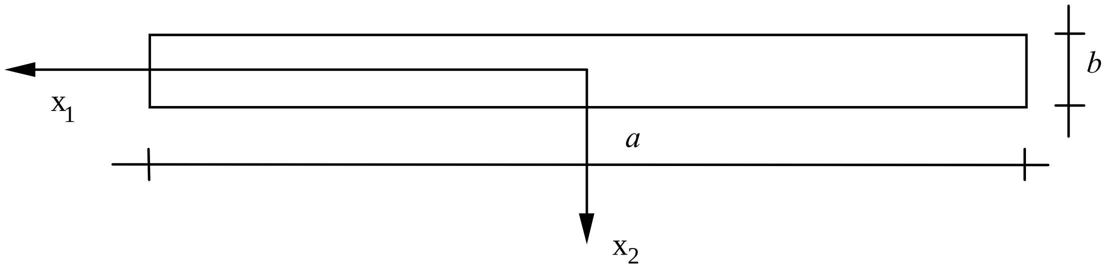

Figura 2- 5: Sezione rettangolare allungata.

Se la sezione rattengolare è sufficientemente allungata, ed al limite il rapporto a/b tra il lato maggiore e quello minore tende ad infinito, appare giustificato supporre che la tensione tangenziale $\boldsymbol{\tau}$ non dipenda dall'ascissa x_1, ovvero $\boldsymbol{\tau}_{,1} = \mathbf{0}$. La terza equazione indefinita di equilibrio (2.8), riscritta nella forma:

$$\sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} = 0 \tag{2.95}$$

assicura che $\sigma_{23,2} = 0$, ovvero la componente tangenziale σ_{23} non dipende da x_2. D'altra parte, la condizione al contorno sul mantello della trave (2.10) impone che sul bordo ∂A della sezione la tensione tangenziale sia tangente al bordo stesso. Se ne deduce che sui due lati maggiori della sezione rettangolare la tensione tangenziale ha componente solo lungo la direzione x_1, ovvero $\sigma_{23}(\pm b/2) = 0$. Allora lungo ogni corda la componente tangenziale σ_{23} è nulla.

2.5.1. Funzione di Prandtl

Si intende affrontare il problema della torsione per la sezione rettangolare allungata tramite la teoria di Prandtl, utilizzando cioè la funzione delle tensioni F. Sulla base delle considerazioni appena sviluppate, si tratta di costruire una funzione F che soddisfa le condizioni (2.60), ovvero che sia a laplaciano costante e che assuma valore nullo per $x_2 = \pm b/2$. A tale scopo si assume:

$$F = c\left(x_2 + \frac{b}{2}\right)\left(x_2 - \frac{b}{2}\right) = c\left(x_2^2 - \frac{b^2}{4}\right) \tag{2.96}$$

con c costante che viene determinata utilizzando l'equazione di congruenza nel campo A $(2.60)_1$:

$$\Delta F = 2c = -2G\Theta \tag{2.97}$$

In definitiva, ricavando la costante c dall'equazione (2.97) e sostituendola nella forma di rappresentazione di F (2.96), si ottiene:

$$F = -G\Theta\left(x_2^2 - \frac{b^2}{4}\right) \tag{2.98}$$

L'angolo specifico di torsione Θ si calcola imponendo che il momento risultante delle tensioni tangenziali sia il valore assegnato M^t. Infatti, utilizzando la formula (2.64) si ha:

$$M^t = \int_A 2F dA = -2G\Theta\int_A \left(x_2^2 - \frac{b^2}{4}\right) dA = G\Theta J_t \tag{2.99}$$

dove il fattore di rigidezza torsionale J_t vale:

$$J_t = \frac{ab^3}{3} \tag{2.100}$$

Invertendo la (2.99), tenendo conto della relazione (2.100), si ottiene finalmente:

$$\Theta = \frac{3M^t}{Gab^3} \tag{2.101}$$

Una volta trovato il valore di Θ si sostituisce nell'espressione (2.98) della funzione di Prandtl F e si ottiene:

$$F = -\frac{3M^t}{ab^3}\left(x_2^2 - \frac{b^2}{4}\right) \tag{2.102}$$

Infine, utilizzando le espressioni (2.49) che forniscono le componenti della tensione tangenziale in funzione di F, si ha:

$$\sigma_{13} = F_{,2} = -\frac{6M^t}{ab^3}x_2 \qquad \sigma_{23} = -F_{,1} = 0 \tag{2.103}$$

Il *modo opportuno*, di cui si parlava in precedenza, con il quale viene applicata la sollecitazione di torsione sulle basi della trave, è definito dalla forma delle tensioni tangenziali (2.103).

Nella generica sezione della trave, la tensione tangenziale massima in valore assoluto si ha per $x_2 = \pm b/2$:

$$\tau_{\max} = \frac{3M^t}{ab^2} \tag{2.104}$$

2.5.2. Effetto di bordo

Tenendo conto dell'equazione (2.98) l'espressione della tensione tangenziale (2.103) può essere riscritta nella forma equivalente:

$$\sigma_{13} = -2G\Theta x_2 \qquad\qquad \sigma_{23} = 0 \tag{2.105}$$

Volendo allora calcolare il valore del momento torcente M^t in funzione di Θ, come momento risultante della distribuzione delle tensioni tangenziali espresse dalla (2.105), si ha:

$$\begin{aligned} M^t &= \mathbf{e}^3 \bullet \int_A \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau}\, dA = \int_A \left(x_1\sigma_{23} - x_2\sigma_{13} \right) dA \\ &= 2G\Theta \int_A x_2^2 dA = G\Theta \frac{ab^3}{6} \end{aligned} \tag{2.106}$$

Si evidenzia che il risultato appena ottenuto tramite l'espressione (2.106) è in contrasto con quello ottenuto tramite la formula (2.101). Infatti la (2.106) fornisce un momento torcente pari alla metà di quello calcolato con la (2.101). Tale risultato è dovuto all'approssimazione ipotizzata sull'andamento del vettore $\boldsymbol{\tau}$ nella sezione.

Le espressioni (2.105) delle tensioni tangenziali non soddisfano la condizione (2.59) per $x_1 = \pm a/2$. Le formule (2.105), infatti, forniscono una buona approssimazione dell'andamento delle tensioni tangenziali nella parte centrale della sezione, mentre presentano un andamento inaccettabile per $x_1 = \pm a/2$.

In realtà, volendo soddisfare la condizione di mantello scarico su tutta la frontiera della sezione, si deve ammettere un differente andamento delle tensioni tangenziali, rispetto a quello definito dalla (2.105), in particolare in prossimità delle due zone di estremità della sezione.

Si consideri allora una di queste due zone e si imponga la condizione di equilibrio su una qualsiasi parte P della sezione che risieda in questa zona, come mostrato in Figura 2- 6.

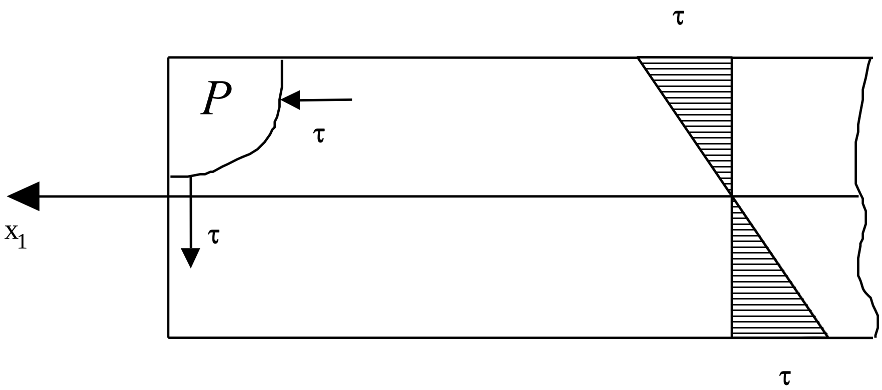

Figura 2- 6: Zona di estremità della sezione rettangolare allungata.

L'equazione di equilibrio scritta in forma integrale su P fornisce:

$$0 = \int_P div(\boldsymbol{\tau}) dA = \int_{\partial P} \boldsymbol{\tau} \bullet \mathbf{n}\, ds \qquad (2.107)$$

ovvero, come noto per i cosidetti campi solenoidali, a divergenza nulla, il flusso del vettore $\boldsymbol{\tau}$ entrante nella parte P della sezione deve eguagliare quello uscente. Con riferimento alla Figura 2- 6, volendo allora rispettare la condizione di mantello laterale della trave scarico, si dovrà supporre che, per bilanciare il flusso entrante in P, la tensione tangenziale in prossimità degli estremi della sezione deve cambiare direzione ed assumere quindi componente non nulla in direzione di x_2. In definitiva, nelle zone in prossimità di $x_1 = \pm a/2$ si hanno tensioni tangenziali con componente non nulla in direzione x_2. Tali tensioni, per quanto relative ad una zona di piccola estensione, hanno un braccio d'applicazione pari circa $\pm a/2$, e quindi contribuiscono notevolmente nel calcolo del momento torcente. Per correggere allora la formula (2.106) si dovrà tener conto anche del momento torcente derivante dalle tensioni tangenziali σ_{23} agenti nelle vicinanze delle estremità della sezione rettangolare.
A tale scopo si suppone per semplicità che la dimensione d di ognuna delle due zone di estremità della sezione ove si hanno tensioni tangenziali σ_{23} sia molto piccola, come schematicamente riportato in Figura 2- 7.

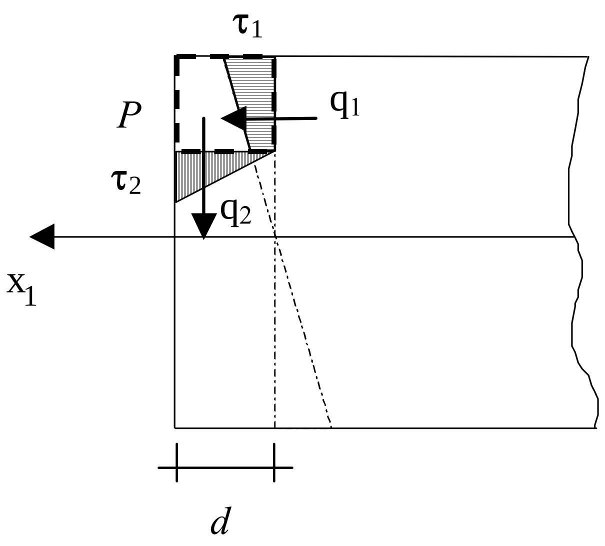

Figura 2- 7: Distribuzione delle tensioni tangenziali nella zona di estremità della sezione rettangolare.

Tenendo conto della formula $(2.105)_1$, il flusso q_1 delle tensioni tangenziali $\tau_1 = \sigma_{13}$ vale:

$$q_1 = \int_{-b/2}^{x_2} \tau_1 \, d\eta = -2G\Theta \int_{-b/2}^{x_2} \eta \, d\eta = G\Theta \left(\frac{b^2}{4} - x_2^2 \right) \tag{2.108}$$

Si consideri ora come parte P la zona della sezione delimitata dalla linea tratteggiata in Figura 2- 7. L'equazione (2.107) impone che il flusso totale q_1 delle tensioni tangenziali σ_{13} entranti in P eguagli il flusso totale q_2 delle tensioni tangenziali $\tau_2 = \sigma_{23}$ uscenti da P. Ciò implica che:

$$q_2 = q_1 = G\Theta \left(\frac{b^2}{4} - x_2^2 \right) \tag{2.109}$$

Se la dimensione di d tende a zero, il valore di q_2 non cambia. In tal modo, su ognuna delle due corde di estremità della sezione rettangolare agirà una distribuzione parabolica lungo x_2 di q_2. La risultante del flusso q_2 vale:

$$R = \int_{-b/2}^{b/2} q_2 \, dx_2 = G\Theta \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{b^2}{4} - x_2^2 \right) dx_2 = G\Theta \frac{b^3}{6} \tag{2.110}$$

In definitiva, si può calcolare il momento torcente risultante dalla distribuzione delle tensioni tangenziali come la somma del momento torcente ricavato dalla formula (2.106) aumentato dell'apporto provocato dalla presenza delle forze R agenti sulle estremità della sezione:

$$M^t = G\Theta \frac{ab^3}{6} + G\Theta \frac{b^3}{6} a = G\Theta \frac{ab^3}{3} \tag{2.111}$$

che coincide perfettamente con la formula (2.99).

2.6. Sezione rettangolare

Si prenda in esame il caso di una trave con sezione rettangolare di dimensione $a\times b$, sollecitata da un momento torcente costante M_t.

Nel caso di sezione rettangolare il problema della torsione uniforme viene affrontato attraverso la tecnica dello sviluppo in serie di Fourier.

In particolare, sviluppando in serie il termine noto dell'equazione differenziale (2.67) si ha:

$$f_1 = \sum_{\substack{m=1 \\ dispari}}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ dispari}}^{\infty} \frac{16}{n\, m\, \pi^2} \sin\frac{m\pi x_1}{a} \sin\frac{n\pi x_2}{b} \tag{2.112}$$

Posto:

$$\begin{aligned} \tilde{F} = & \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_{mn} \sin\frac{m\pi x_1}{a} \sin\frac{n\pi x_2}{b} \\ & + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_{mn} \sin\frac{m\pi x_1}{a} \cos\frac{n\pi x_2}{b} \\ & + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_{mn} \cos\frac{m\pi x_1}{a} \sin\frac{n\pi x_2}{b} \\ & + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{D}_{mn} \cos\frac{m\pi x_1}{a} \cos\frac{n\pi x_2}{b} \end{aligned} \tag{2.113}$$

l'equazione di Prandtl assume la forma:

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{A}_{mn}\frac{\pi^2\left(m^2b^2+n^2a^2\right)}{a^2b^2}\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{n\pi x_2}{b}\\
&-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{B}_{mn}\frac{\pi^2\left(m^2b^2+n^2a^2\right)}{a^2b^2}\sin\frac{m\pi x_1}{a}\cos\frac{n\pi x_2}{b}\\
&-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{C}_{mn}\frac{\pi^2\left(m^2b^2+n^2a^2\right)}{a^2b^2}\cos\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{n\pi x_2}{b}\\
&-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{D}_{mn}\frac{\pi^2\left(m^2b^2+n^2a^2\right)}{a^2b^2}\cos\frac{m\pi x_1}{a}\cos\frac{n\pi x_2}{b}\\
&=\sum_{\substack{m=1\\ dispari}}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\ dispari}}^{\infty}\frac{16}{n\,m\,\pi^2}\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{n\pi x_2}{b}
\end{aligned}
\tag{2.114}
$$

ovvero:

$$
\begin{aligned}
0=&\sum_{\substack{m=1\\ dispari}}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\ dispari}}^{\infty}\left[\tilde{A}_{mn}\frac{\pi^2\left(m^2b^2+n^2a^2\right)}{a^2b^2}-\frac{16}{n\,m\,\pi^2}\right]\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{n\pi x_2}{b}\\
&+\sum_{\substack{m=1\\ dispari}}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\ pari}}^{\infty}\tilde{A}_{mn}\frac{\pi^2\left(m^2b^2+n^2a^2\right)}{a^2b^2}\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{n\pi x_2}{b}\\
&+\sum_{\substack{m=1\\ pari}}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\ dispari}}^{\infty}\tilde{A}_{mn}\frac{\pi^2\left(m^2b^2+n^2a^2\right)}{a^2b^2}\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{n\pi x_2}{b}\\
&+\sum_{\substack{m=1\\ pari}}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\ pari}}^{\infty}\tilde{A}_{mn}\frac{\pi^2\left(m^2b^2+n^2a^2\right)}{a^2b^2}\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{n\pi x_2}{b}\\
&+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{B}_{mn}\frac{\pi^2\left(m^2b^2+n^2a^2\right)}{a^2b^2}\sin\frac{m\pi x_1}{a}\cos\frac{n\pi x_2}{b}\\
&+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{C}_{mn}\frac{\pi^2\left(m^2b^2+n^2a^2\right)}{a^2b^2}\cos\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{n\pi x_2}{b}\\
&+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{D}_{mn}\frac{\pi^2\left(m^2b^2+n^2a^2\right)}{a^2b^2}\cos\frac{m\pi x_1}{a}\cos\frac{n\pi x_2}{b}
\end{aligned}
\tag{2.115}
$$

Dovendo l’equazione (2.115) essere valida per ogni x_1 e x_2, devono annullarsi tutti i coefficienti della sommatoria; ciò consente di pervenire alla seguente espressione della funzione $\tilde{F}$:

$$\tilde{F}\left(x_1, x_2\right) = -\sum_{\substack{m=1 \\ (dispari)}}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ (dispari)}}^{\infty} \frac{16 a^2 b^2}{n\, m\, \pi^4 \left(m^2 b^2 + n^2 a^2\right)} \sin \frac{m \pi x_1}{a} \sin \frac{n \pi x_2}{b} \qquad (2.116)$$

E’ possibile quindi determinare la quantità:

$$\int_A \tilde{F}\, dA = -\sum_{\substack{m=1 \\ (dispari)}}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ (dispari)}}^{\infty} \frac{64\, a^3 b^3}{n^2\, m^2\, \pi^6 \left(m^2 b^2 + n^2 a^2\right)} \qquad (2.117)$$

Per cui dalla relazione (2.69) si ricava:

$$\Theta = -\frac{M_t}{4G \int_A \tilde{F} dA} = \frac{M_t}{4G \displaystyle\sum_{\substack{m=1 \\ (dispari)}}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ (dispari)}}^{\infty} \frac{64\, a^3 b^3}{n^2\, m^2\, \pi^6 \left(m^2 b^2 + n^2 a^2\right)}} \qquad (2.118)$$

2.7. Sezione sottile aperta

Si considera il caso in cui la sezione retta della trave sia costituita da una striscia sottile di materiale di spessore variabile o non, avente come linea media la curva piana, di lunghezza a, di equazione:

$$x_1 = x_1(\zeta) \qquad x_2 = x_2(\zeta) \qquad (2.119)$$

con ζ ascissa curvilinea del generico punto della linea media misurata a partire da un’origine O, generalmente scelta in corrispondenza di un’estremità della linea. Si assume per ipotesi che la linea media non formi circuiti chiusi. In questo caso per corda relativa all’ascissa curvilinea ζ si intende sempre quella ortogonale alla linea media della sezione, cui corrisponde uno spessore $b(\zeta)$.

La sezione sottile deve soddisfare alcuni requisiti geometrici:

$$a >> b(\zeta) \quad \forall \zeta$$
$$\frac{d}{d\zeta} b(\zeta) << 1 \quad \forall \zeta$$
$$\rho(\zeta) >> b(\zeta) \quad \forall \zeta$$

dove $\rho(\zeta)$ rappresenta il raggio di curvatura della linea media della sezione valutato in corrispondenza dell’ascissa curvilinea ζ.

Si esamina inizialmente un tratto di lunghezza infinitesima $d\zeta$ della sezione sottile. Si sceglie un riferimento locale destrogiro definito dal versore $\mathbf{t}$ della tangente alla linea media della sezione e dal versore $\mathbf{m}$ definito come $\mathbf{m} = \mathbf{e}^3 \times \mathbf{t}$. Il generico punto giacente sulla corda $b(\zeta)$ è individuato dalla distanza κ dalla linea media, come mostrato in Figura 2- 8. Se il raggio di curvatura $\rho(\zeta)$ della linea media della striscia di materiale è grande rispetto alla corda generica $b(\zeta)$, l'elemento di sezione di lunghezza $d\zeta$ può con buona approssimazione essere considerato come un tratto di una sezione di forma rettangolare allungata.

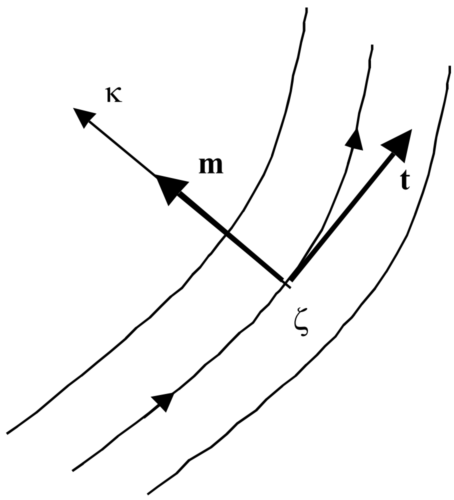

Figura 2- 8: Generico tratto della sezione sottile.

Analogamente al caso della sezione rettangolare allungata, in corrispondenza della generica ascissa curvilinea, la funzione di Prandtl F può essere scelta con buona approssimazione come quella definita dalla formula (2.98):

$$F = -G\Theta\left(\kappa^2 - \frac{b(\zeta)^2}{4}\right) \qquad (2.120)$$

L'aliquota infinitesima di momento torcente assorbita dal tratto di lunghezza $d\zeta$ per la relazione (2.64) vale:

$$dM^t = -2G\Theta\, d\zeta \int_{-b/2}^{b/2}\left(\kappa^2 - \frac{b(\zeta)^2}{4}\right)d\kappa = G\Theta\frac{b(\zeta)^3}{3}d\zeta \qquad (2.121)$$

Integrando la (2.121) su tutta la linea media della sezione sottile allungata, si ottiene il valore del momento torcente totale agente sulla sezione aperta:

$$M^t = G\Theta\int_0^a \frac{b(\zeta)^3}{3} d\zeta = G\Theta J_t \tag{2.122}$$

Le tensioni tangenziali si calcolano tenendo conto delle espressioni (2.49), cioè derivando la funzione delle tensioni F definita dalla (2.120) rispetto alla coordinata nello spessore κ e rispetto all'ascissa curvilinea ζ. In definitiva, ricordando che si è assunto che la curvatura della linea media sia molto piccola, si ha:

$$\begin{aligned} \tau_\zeta &= F_{,\kappa} = -2G\Theta\kappa \\ \tau_\kappa &= -F_{,\zeta} = \frac{1}{2} G\Theta \frac{db(\zeta)}{d\zeta} b(\zeta) \approx 0 \end{aligned} \tag{2.123}$$

dove l'ultimo termine della $(2.123)_2$ è tanto più piccolo, e quindi trascurabile, quanto più lo spessore della sezione varia lentamente lungo l'ascissa curvilinea. In termini di momento torcente applicato, la componente non trascurabile della tensione tangenziale si determina dalle relazioni $(2.123)_1$ e (2.122):

$$\tau_\zeta = -\frac{2M^t}{J_t}\kappa \tag{2.124}$$

che risulta analoga alla formula (2.103) ottenuta per la sezione rettangolare allungata. Infine la tensione tangenziale massima in valore assoluto, relativa all'ascissa curvilinea ζ, vale:

$$\tau_{\max} = \frac{M^t}{J_t} b(\zeta) \tag{2.125}$$

Nel caso in cui la sezione sottile abbia spessore costante, cioè la dimensione b della corda non dipende dall'ascissa curvilinea ζ, il fattore di rigidezza torsionale J_t vale:

$$J_t = \int_0^a \frac{b(\zeta)^3}{3} d\zeta = \frac{ab^3}{3} \tag{2.126}$$

Si nota che l'espressione della rigidezza torsionale (2.126) è perfettamente analoga a quella determinata per la sezione rettangolare allungata.

2.8. Sezione sottile chiusa

Si esamina ora il caso in cui la linea media della sezione sottile formi un circuito chiuso. In tal caso la sezione è detta chiusa o biconnessa. L'ascissa curvilinea ζ che percorre la sezione chiusa è scelta in modo da girare in senso antiorario lungo la striscia di materiale che definisce la sezione.

Il problema della torsione per la sezione sottile chiusa si affronta in termini di tensioni. In particolare, assumendo che lo spessore sia piccolo rispetto alla lunghezza della linea media della sezione, si può ragionevolmente supporre che la tensione tangenziale abbia direzione della tangente $\mathbf{t}$ e, assegnata l'ascissa ζ, sia costante lungo la corda con valore τ_c. Tale stato tensionale rispetta ovunque , con buona approssimazione quando b varia molto lentamente con ζ, la condizione di equilibrio sul mantello della trave. Per le prime due equazioni di indefinite di equilibrio le tensioni tangenziali sono costanti lungo l'asse della trave. La terza equazione indefinita di equilibrio viene soddisfatta in modo integrale per il tratto generico tratto della sezione sottile chiusa. Infatti, scelte due corde indicate in Figura 2- 9 con 1 e 2, di dimensioni b_1 e b_2, alle quali corrispondono valori delle tensioni τ_1 e τ_2, si impone l'equilibrio della parte di trave di lunghezza unitaria, definita dalle due parti di sezioni definite dalle corde 1 e 2:

$$\tau_{c1} b_1 = \tau_{c2} b_2 \tag{2.127}$$

Vista la casuale scelta delle corde 1 e 2, l'equazione (2.127) conduce al risultato che il prodotto $\tau_c(\zeta) b(\zeta)$ è costante su tutta la sezione sottile chiusa.

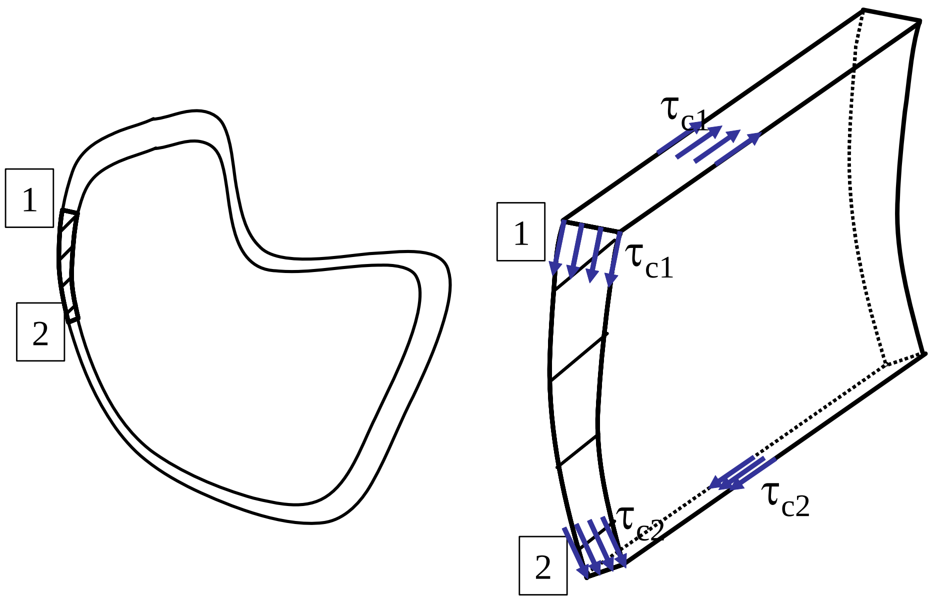

Figura 2- 9: Tensioni tangenziali per la sezione chiusa.

E’ necessario verificare che la distribuzione delle tensioni tangenziali fornisca una sollecitazione di pura torsione. A tale scopo si deve inizialmente controllare che la risultante $\mathbf{V}$ delle tensioni tangenziali sia nulla. Si ha infatti:

$$\mathbf{V} = \int_A \tau_c \mathbf{t}\, dA = \int_0^a \tau_c \mathbf{t} b\, d\zeta = \tau_c b \int_0^a \mathbf{t}\, d\zeta = 0 \tag{2.128}$$

Il momento risultante delle tensioni tangenziali vale:

$$M^t = \mathbf{e}^3 \bullet \int_A \mathbf{x} \times \tau_c \mathbf{t}\, dA = \int_a \tau_c b h(\zeta)\, d\zeta = \tau_c\, b \int_a h d\zeta = 2\tau_c b\Omega \tag{2.129}$$

dove $h(\zeta)d\zeta$ è il doppio dell’area del triangolo di base $d\zeta$ ed altezza $h(\zeta)$ rappresentato in Figura 2- 10 e Ω rappresenta l’area della figura geometrica che ha per contorno la linea media della sezione sottile.

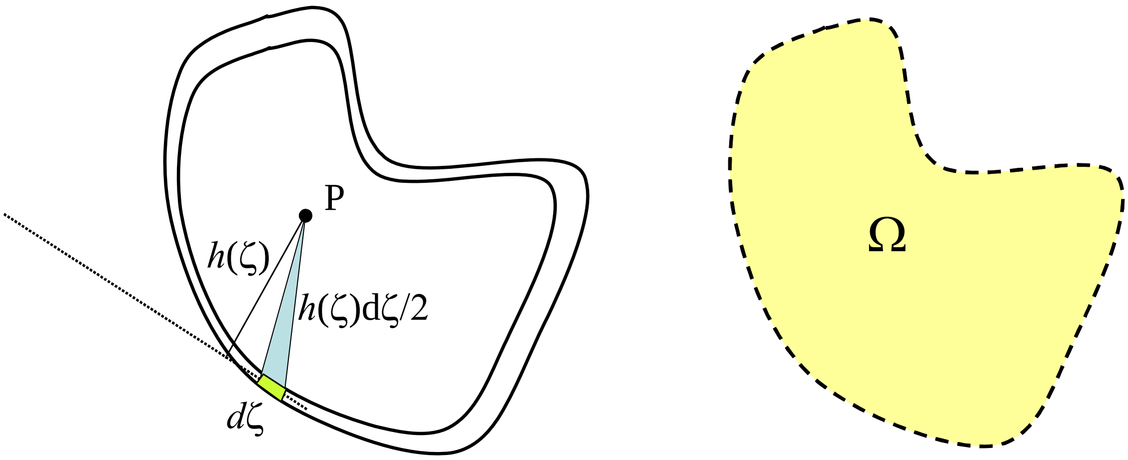

Figura 2- 10: Equilibrio alla rotazione della sezione chiusa.

Invertendo l’equazione (2.129) si ottiene la cosidetta prima formula di Bredt:

$$\tau_c = \frac{M^t}{2b\Omega} \tag{2.130}$$

La formula (2.129), ovvero la sua forma inversa (2.130), fornisce la relazione tra il valore del momento torcente M^t la distribuzione di tensioni tangenziali τ_c.

Volendo ricavare la relazione tra l'angolo unitario di torsione ed il momento torcente applicato, si applica il principio dei lavori virtuali per un tratto di trave di lunghezza unitaria. Il sistema delle forze è fornito dalla distribuzione delle tensioni tangenziali τ_c^* che hanno momento torcente risultante unitario:

$$\tau_c^* = \frac{1}{2b\Omega} \tag{2.131}$$

Gli scorrimenti angolari, valutati nel sistema degli spostamenti, sono ricavati utilizzando la relazione (2.130):

$$\gamma_\zeta = \frac{1}{G}\tau_c = \frac{1}{G}\frac{M^t}{2b\Omega} \tag{2.132}$$

Eguagliando il lavoro virtuale esterno con quello virtuale interno si ottiene:

$$\begin{aligned} 1\Theta &= \int_A \tau_c^* \gamma_\zeta \, dA = \int_A \frac{1}{2b\Omega}\frac{1}{G}\left(\frac{M^t}{2b\Omega}\right) d\zeta \, d\kappa \\ &= \frac{1}{2G\Omega}\int_0^a \int_{-b/2}^{b/2} \frac{1}{b}\frac{M^t}{2b\Omega} d\zeta \, d\kappa \\ &= \frac{M^t}{4G\Omega^2}\int_0^a \frac{1}{b} d\zeta \end{aligned} \tag{2.133}$$

La relazione (2.133) è nota come seconda formula di Bredt. Il fattore di rigidezza torsionale J_t proprio della sezione chiusa vale:

$$J_t = \frac{4\Omega^2}{\displaystyle\int_0^a \frac{1}{b} d\zeta} \tag{2.134}$$

per cui la seconda formula di Bredt si riscrive nella forma:

$$\Theta = \frac{M^t}{GJ_t} \tag{2.135}$$

Nel caso che la sezione sottile sia triconnessa, e cioè costituita da due maglie chiuse, le tensioni tangenziali che insorgono nella sezione e la rigidezza torsionale sono determinati come di seguito riportato.

Si denotino con q_1 e con q_2 i valori dei flussi nelle due maglie come illustrato in Figura 2- 11, tali che:

$$M_1^t = 2\Omega_1 q_1 \qquad M_2^t = 2\Omega_2 q_2 \tag{2.136}$$

con Ω_1 ed Ω_2 rispettivamente le aree delle maglie 1 e 2, ed inoltre con

$$M^t = M_1^t + M_2^t = 2\Omega_1 q_1 + 2\Omega_2 q_2 \tag{2.137}$$

Per determinare l'angolo unitario di rotazione si applica il principio dei lavori virtuali. Poiché si intende determinare la rotazione della sezione, si sceglie un sistema di forze definito dalla sezione oggetto di studio sollecitata da una coppia torcente unitaria. Si ricorda che per applicare il PLV si deve considerare un sistema di tensioni in equilibrio, e non necessariamente congruente, con le forze assegnate. Si scelgono allora due sistemi di tensioni in equilibrio con la coppia torcente unitaria, come illustrato in Figura 2- 11.

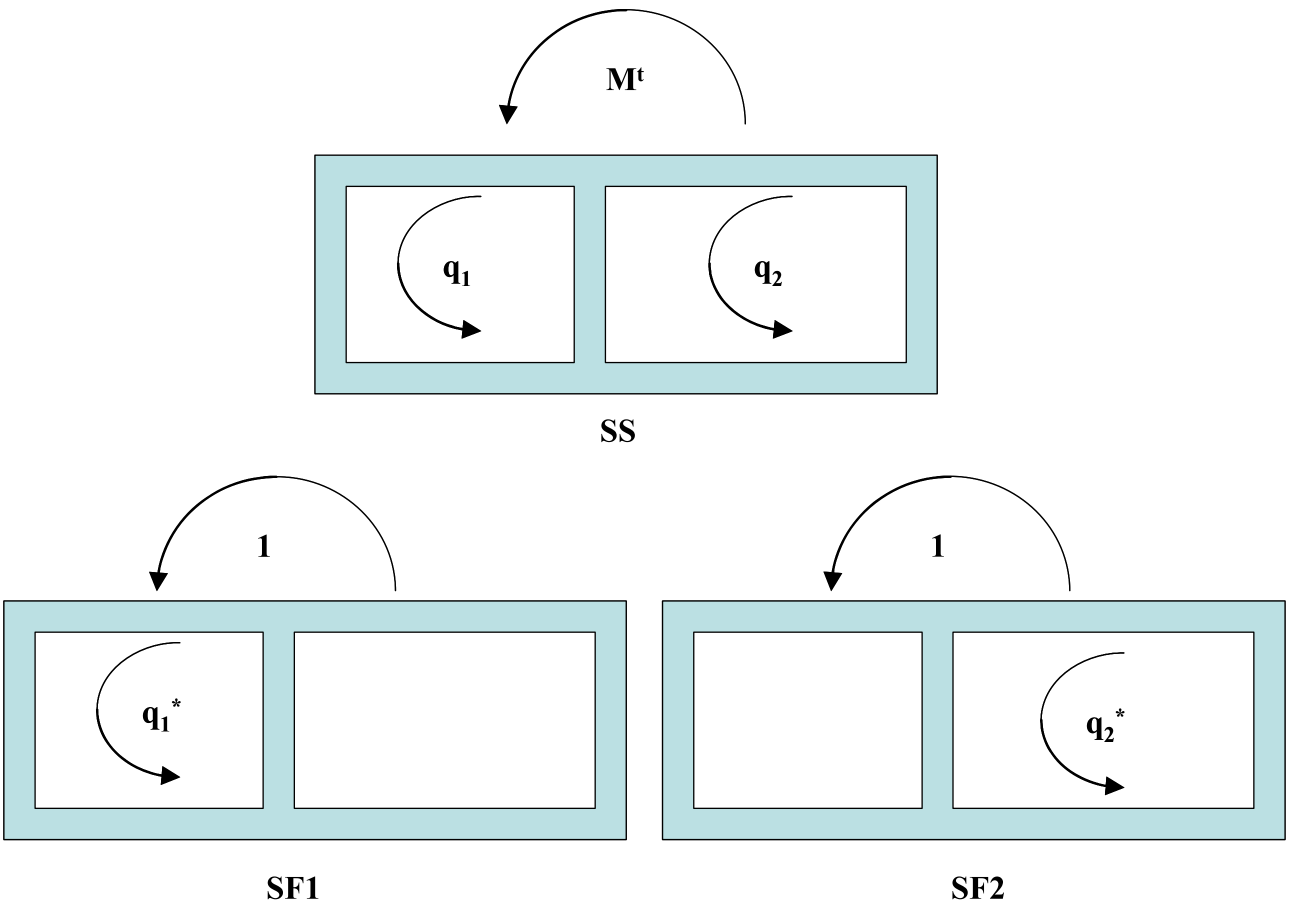

Figura 2- 11: Sezione triconnessa soggetta a torsione.

Considerando i due sistemi di forze SF1 ed SF2, il PLV fornisce le equazioni:

$$
\begin{aligned}
\Theta &= \int_1 \tau_1^* \gamma_1 b dA - \int_{1-2} \tau_1^* \gamma_2 b dA \\
&= \int_1 \frac{1}{2\Omega_1 b} \frac{q_1}{Gb} b dA - \int_{1-2} \frac{1}{2\Omega_1 b} \frac{q_2}{Gb} b dA \\
&= \frac{q_1}{2G\Omega_1} \int_1 \frac{1}{b} dA - \frac{q_2}{2G\Omega_1} \int_{1-2} \frac{1}{b} dA
\end{aligned}
\tag{2.138}
$$

$$
\begin{aligned}
\Theta &= \int_2 \tau_2^* \gamma_2 b dA - \int_{1-2} \tau_2^* \gamma_1 b dA \\
&= \int_2 \frac{1}{2\Omega_2 b} \frac{q_2}{Gb} b dA - \int_{1-2} \frac{1}{2\Omega_2 b} \frac{q_1}{Gb} b dA \\
&= \frac{q_2}{2G\Omega_2} \int_1 \frac{1}{b} dA - \frac{q_1}{2G\Omega_2} \int_{1-2} \frac{1}{b} dA
\end{aligned}
\tag{2.139}
$$

avendo indicato con 1 la maglia 1, con 2 la maglia 2 e con 1-2 il tratto comune della maglia 1 e 2. In definitiva si ottiene il sistema di 3 equazioni nelle 3 incognite Θ, q_1, q_2:

$$
\begin{aligned}
M^t &= 2\Omega_1 q_1 + 2\Omega_2 q_2 \\
\Theta &= \frac{q_1}{2G\Omega_1} \int_1 \frac{1}{b} dA - \frac{q_2}{2G\Omega_1} \int_{1-2} \frac{1}{b} dA \\
\Theta &= -\frac{q_1}{2G\Omega_2} \int_{1-2} \frac{1}{b} dA + \frac{q_2}{2G\Omega_2} \int_1 \frac{1}{b} dA
\end{aligned}
\tag{2.140}
$$

Il procedimento può essere esteso al caso di sezioni più volte connesse.