Corso di Sistemi Automatici di Misura

SECONDA LEZIONE:

LA CONVERSIONE ANALOGICO DIGITALE

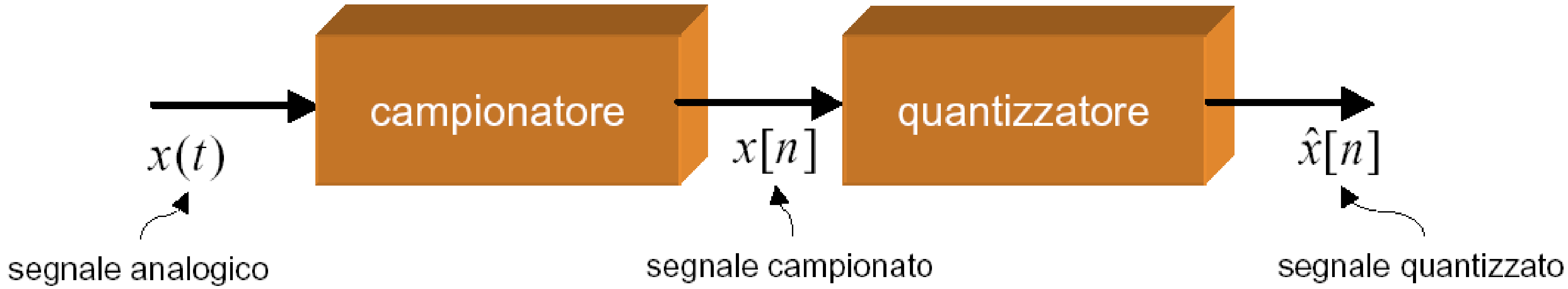
Marco Laracca
m.laracca@unicas.it

Gruppo Misure Elettriche ed Elettroniche

Facoltà di Ingegneria - DAEIMI.

Università degli Studi di Cassino

La conversione A/D



- La conversione A/D effettua **due** distinte operazioni:
  - **campionamento:** discretizzazione dei tempi (dal tempo continuo al tempo discreto);
  - **quantizzazione:** discretizzazione delle ampiezze (dalle ampiezze continue alle ampiezze discrete).

Il campionamento: introduzione

Con il termine "campionamento" si indicano, in generale, le modalità di raccolta di una quantità discreta di informazioni che sia **rappresentativa** di un fenomeno.

Esempi:

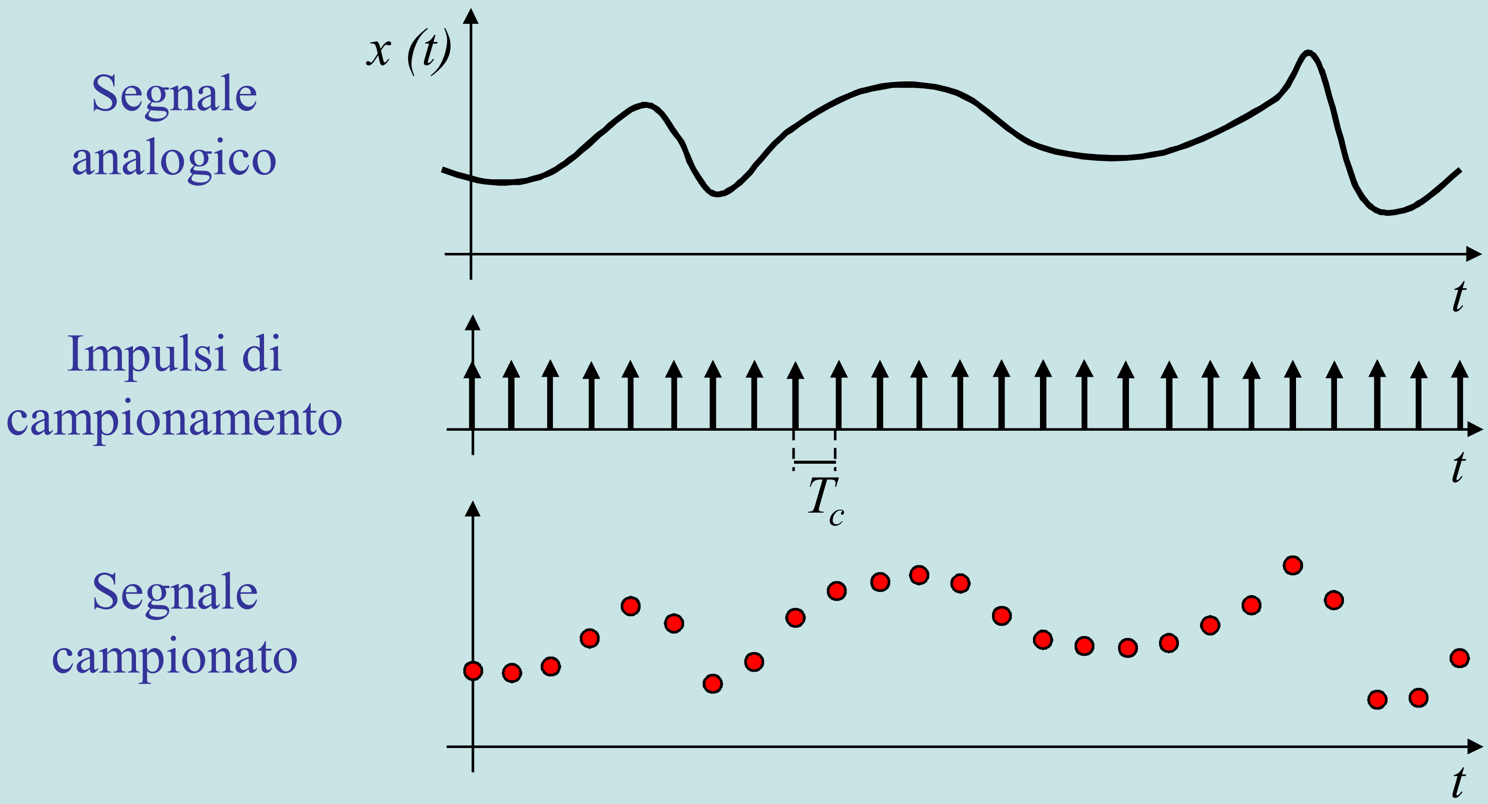
Scelta di 1000 persone alle quali sottoporre un questionario da cui dedurre ("*inferire*") le preferenze della popolazione di una città.

Raccolta dei valori della concentrazione di una sostanza inquinante lungo un fiume. Problema: in quali e quanti punti raccolgo i dati?

Monitoraggio della temperatura corporea di un paziente. Problema: con che cadenza ("*frequenza*") raccolgo le misure?

Ricostruire nel migliore dei modi l'andamento di una grandezza fisica rispetto al tempo ("*segnale*") nella memoria (che è discreta e limitata) di un calcolatore o di uno strumento numerico.

Campionamento

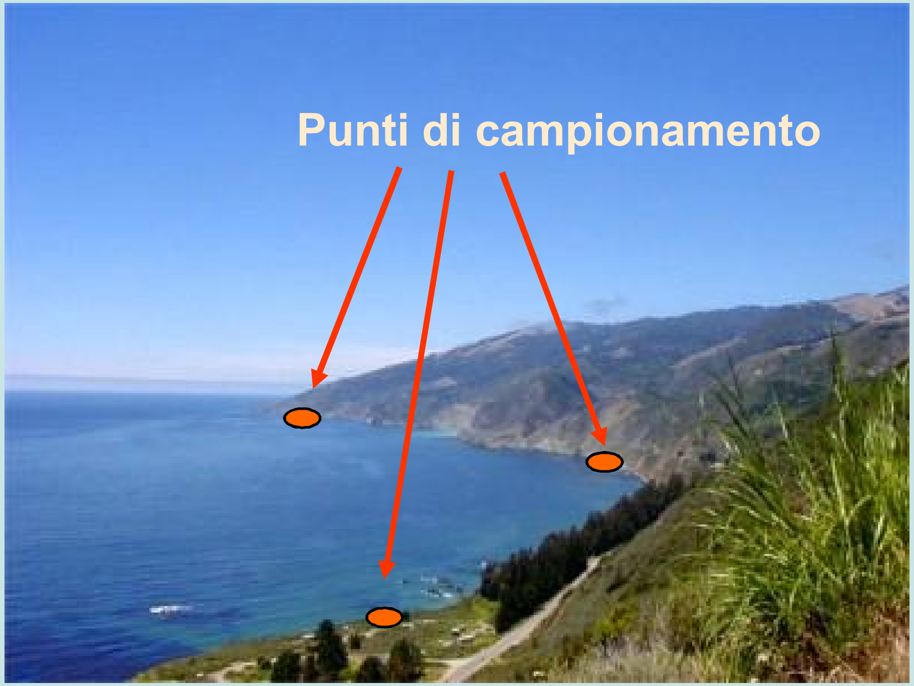


Il segnale *x(t)* è un segnale continuo nel tempo e nelle ampiezze. Cioè qualsiasi sia l'intervallo di osservazione tale segnale è sempre rappresentato da un numero infinito di punti.

Quando si effettua un campionamento quello che si cerca di fare e di rappresentare lo stesso segnale con un numero finito di punti.

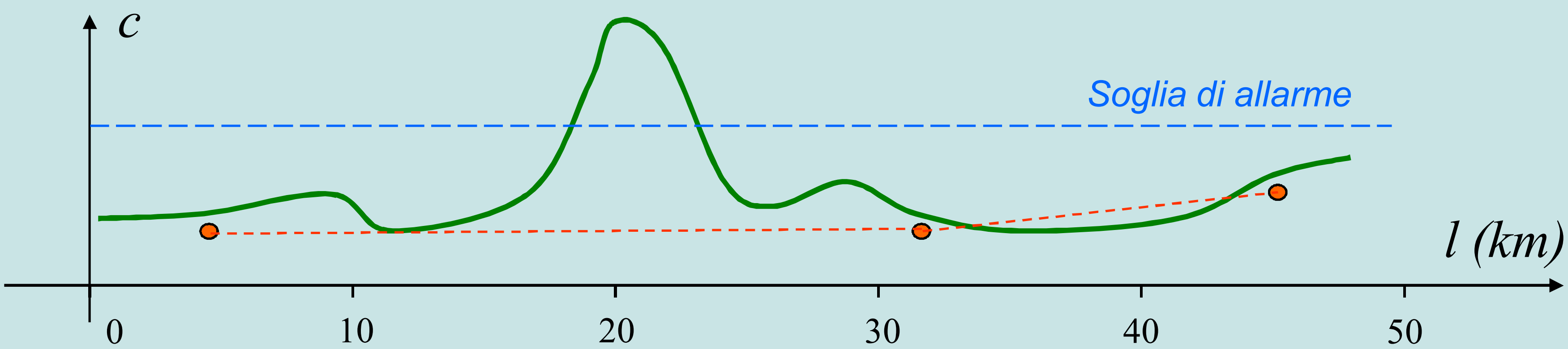
Il problema della frequenza di campionamento

Quando si raccolgono valori discreti e si desidera che siano rappresentativi della grandezza continua dalla quale sono estratti, è fondamentale che i punti o gli istanti di campionamento siano **sufficientemente vicini** tra loro.



Punti di campionamento troppo distanti possono dare luogo a significative **perdite di informazione**.

Punti di campionamento troppo vicini comportano uno **spreco di risorse** (tempo di misura, memoria per la conservazione dei dati).



Teorema di Shannon

Claude E. Shannon

Theorem 1: If a function *f(t)* contains no frequencies higher than *W* cps, it is completely determined by giving its ordinates at a series of points spaced 1/2*W* seconds apart

… non è stato “inventato” da Shannon:

“This is a fact which is common knowledge in the communication art.”

(Shannon, 1948 $\rightarrow$ Cauchy, 1843)

C.E. Shannon, “Communication in the presence of noise”, *Proc. IRE*, vol. 37, pp. 10-21, Jan. 1949 - Classic paper, *Proc. IEEE*, vol. 86, no. 2, pp. 447-457, Feb. 1998

Teorema di Shannon

Dato un segnale a banda limitata $x(t)$, la cui trasformata di Fourier $X(f)$ soddisfi la condizione:

$$|X(f)| = 0 \quad \text{per} \quad |f| > B$$

il segnale è **completamente determinato** a partire dalla sequenza $x(nT)$ dei suoi campioni acquisiti ad intervalli uniformi di durata:

$$Tc \leq 1/2B \text{ ovvero } Fc >= 2B$$

dove: $-\infty<n<+\infty$.

Tc=periodo di campionamento

Fc =frequenza di campionamento

N.B.: un segnale a banda limitata **non può** avere durata limitata, quindi la sequenza ha **infiniti** campioni.

Teorema di Fourier

Una qualunque funzione periodica x(t) è sviluppabile in una serie costituita da un termine costante e da una somma di infinite sinusoidi:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega_0 t)$$

Dove:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \qquad A_0 = \int_0^T x(t)dt$$

$$f_0 = \frac{1}{T} \qquad A_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(n\omega_0 t)dt$$

$$f_n = n f_0 \qquad B_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(n\omega_0 t)dt$$

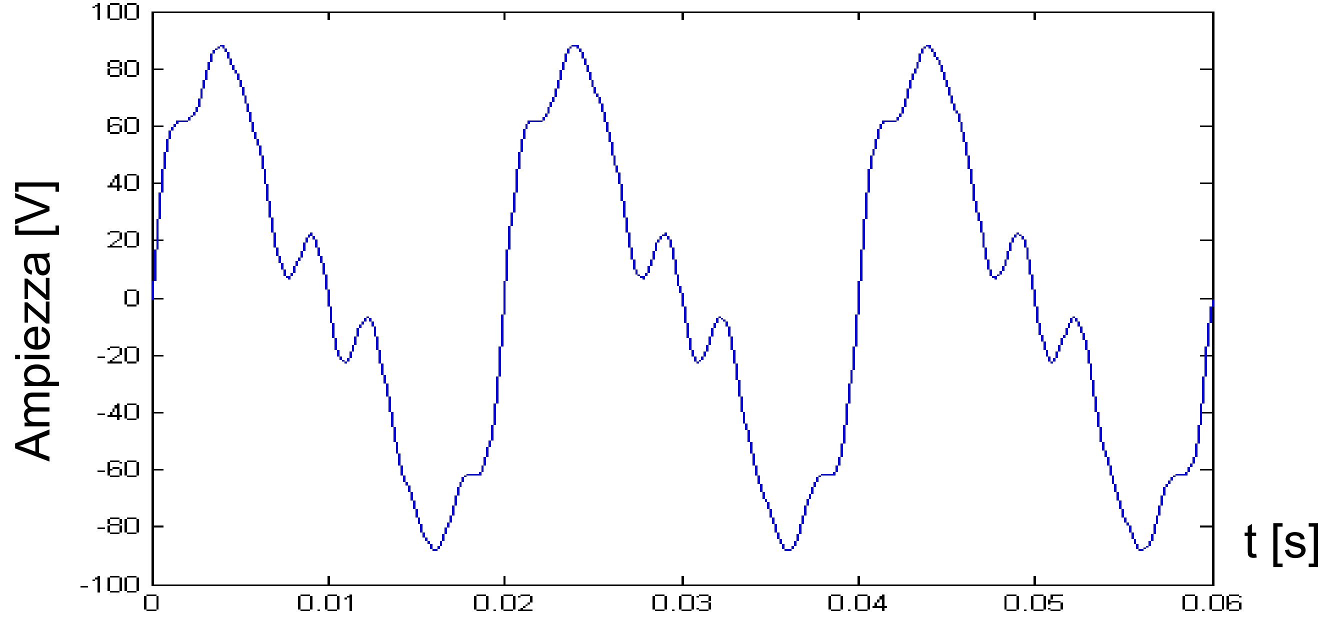
La rappresentazione nel dominio del tempo

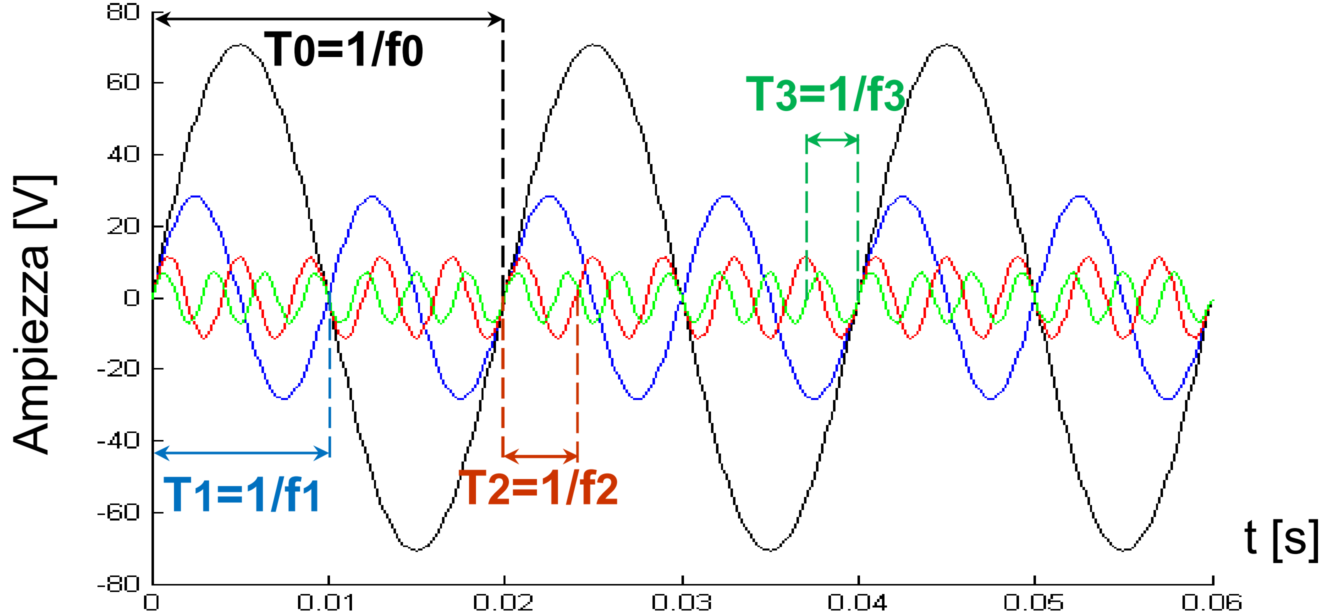
f_0=50Hz A_0=50V

f_1=100Hz A_1=20V

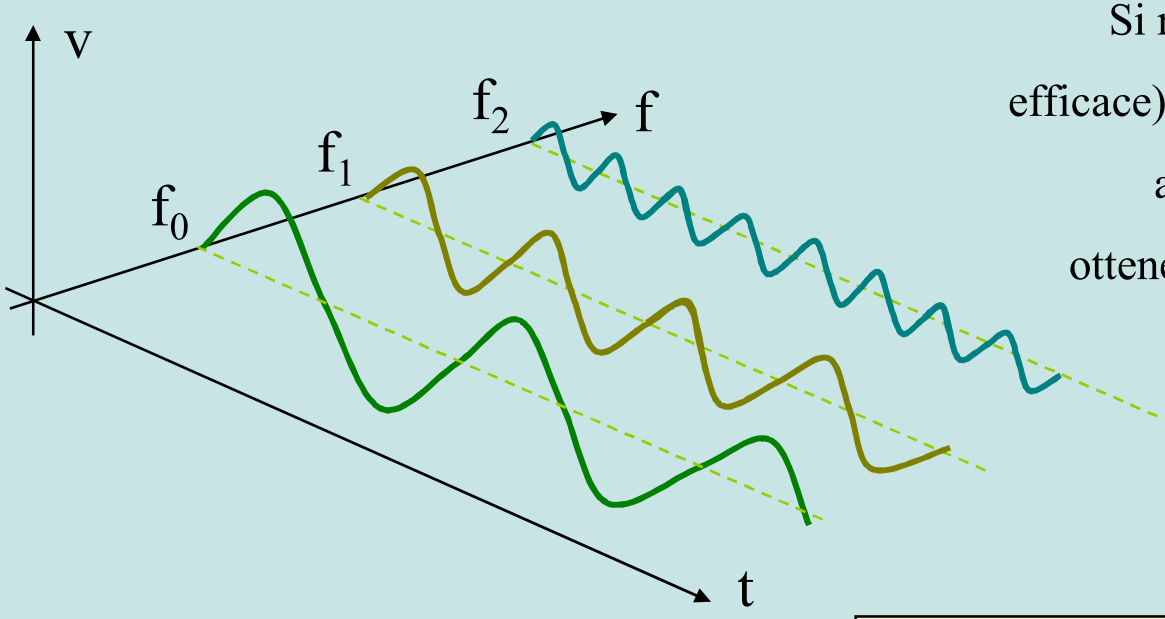
f_2=250Hz A_2=8V

f_3=350Hz A_3=5V

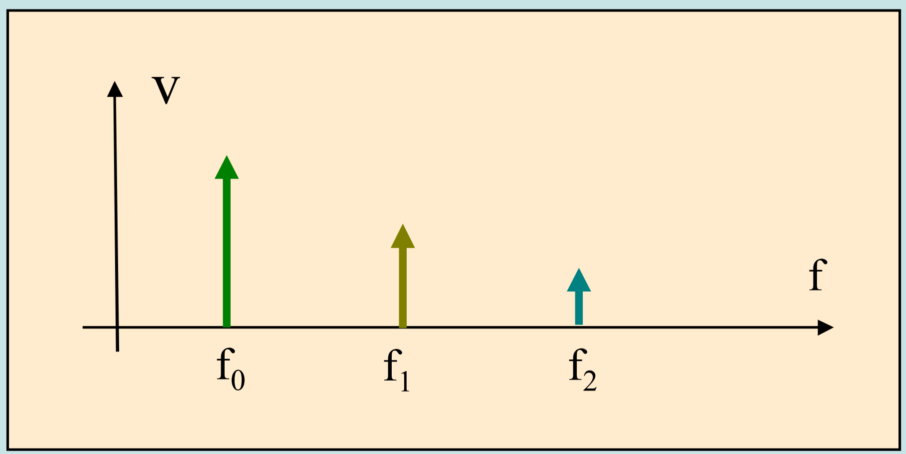




La rappresentazione nel dominio della frequenza



Si rappresenta il valore (massimo o efficace) di ampiezza di una componente armonica rispetto alla frequenza, ottenendo lo **spettro di ampiezza** del segnale.

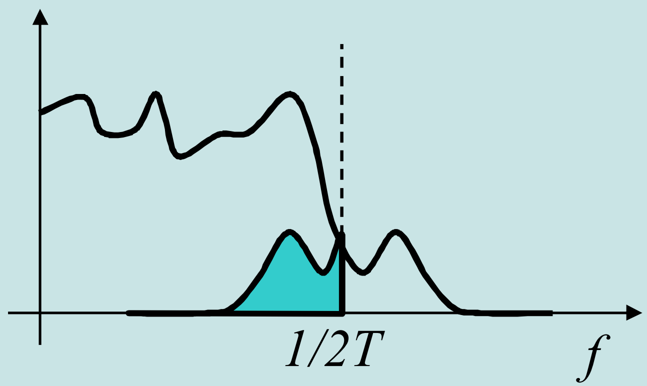


La frequenza più elevata alla quale si trova una componente significativa del segnale individua la **banda** del segnale.

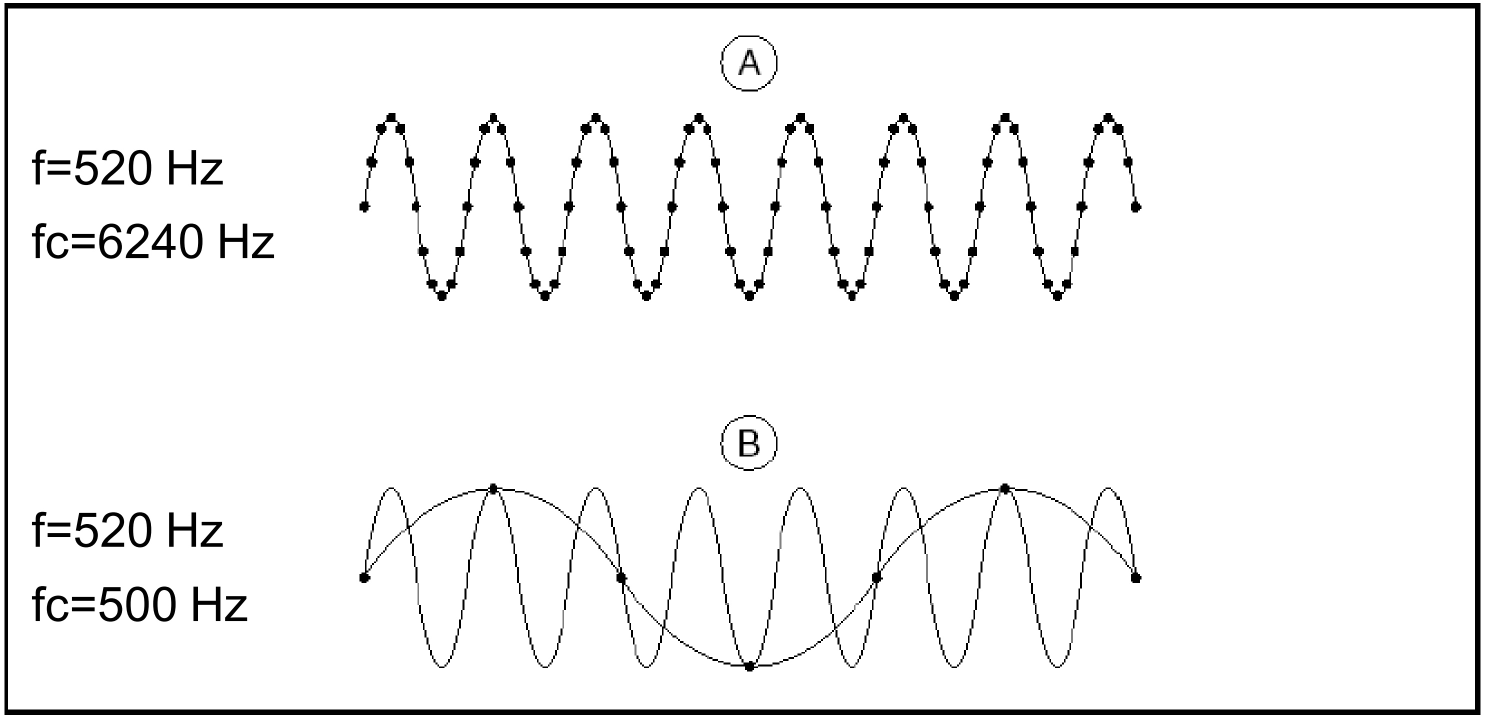
Aliasing

◆ **se il segnale non è a banda limitata, o la frequenza di campionamento è fc < 2B, alcune componenti spettrali vengono riprodotte in modo errato**

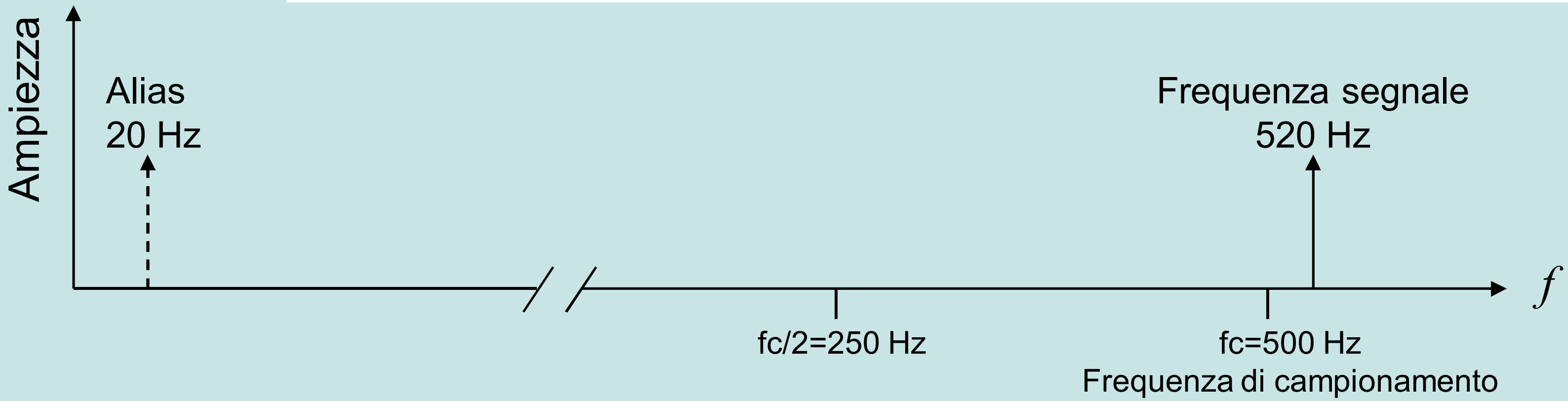
◆ **effetto: componenti a frequenza │f1│ > fc/2 vengono riportate alle frequenze: K·(fc/2) ± f1 (frequency folding); i relativi campioni sono indistinguibili**



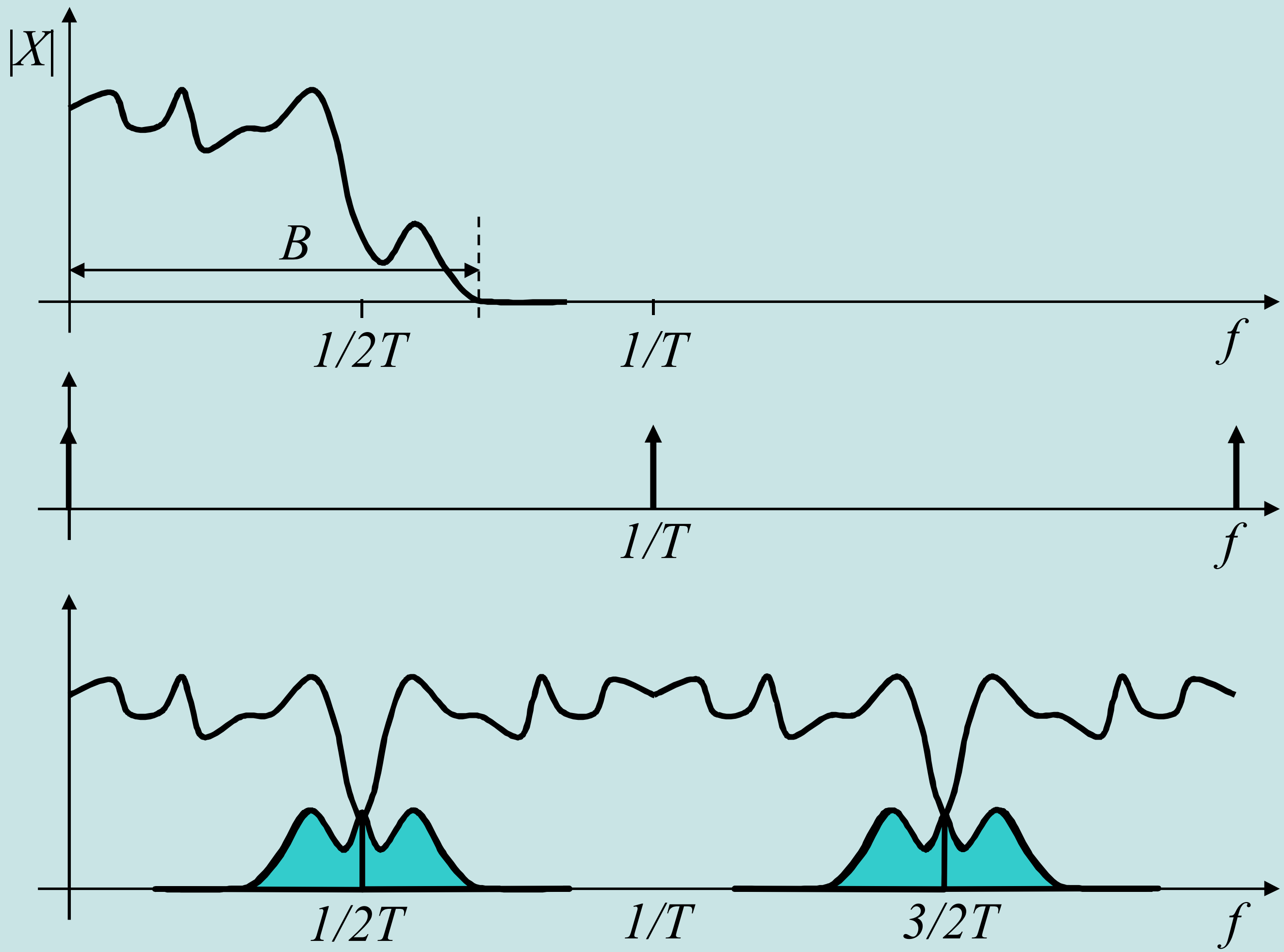
Aliasing



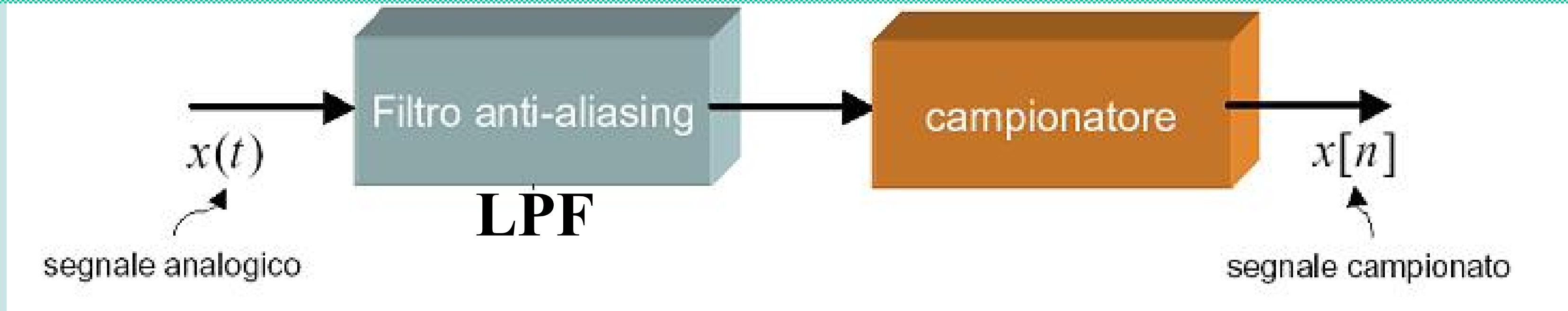
A Campionato adeguatamente B Aliasing da sottocampionamento

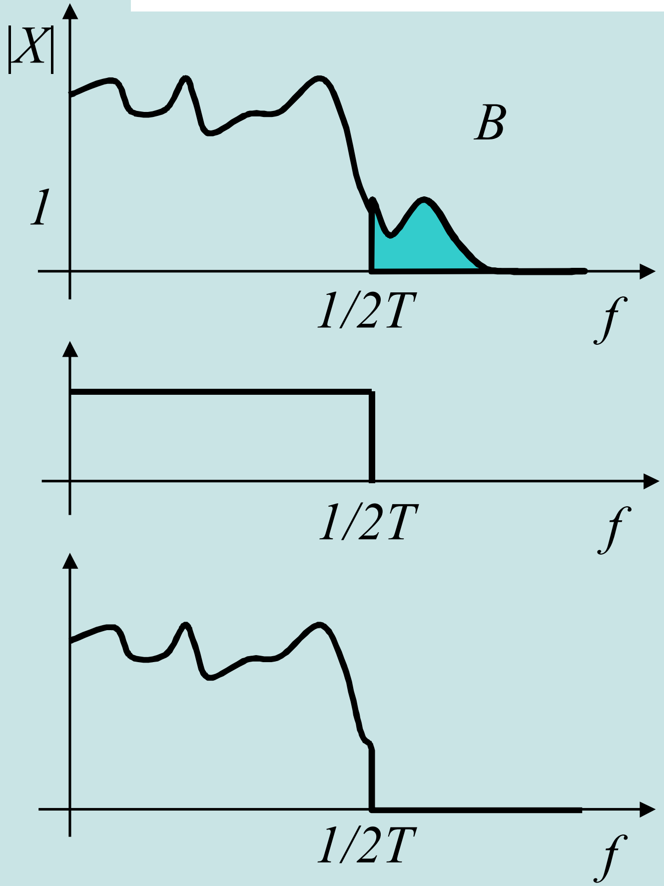


Aliasing



Filtro anti-aliasing



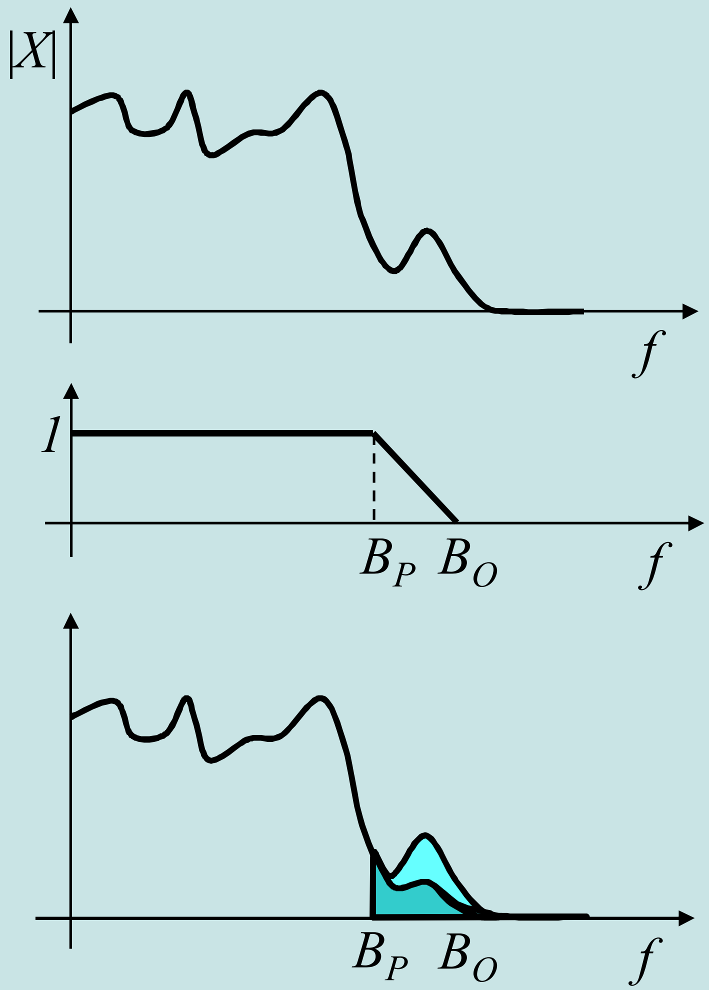


Nella forma enunciata, il teorema del campionamento si riferisce a segnali **<u>a banda limitata</u>**.

Filtro anti-aliasing

Limita la banda del segnale all'intervallo (-1/2T, +1/2T). La ricostruzione in questo intervallo di frequenze è univoca.

Filtro anti-aliasing reale



Realizzabilità

un filtro reale ha una banda di transizione con estensione non infinitesima.

banda passante: B_P

banda attenuata: $B_O > B_P$

Filtro anti-aliasing reale

segnale "nullo" per $|f| > B_O$

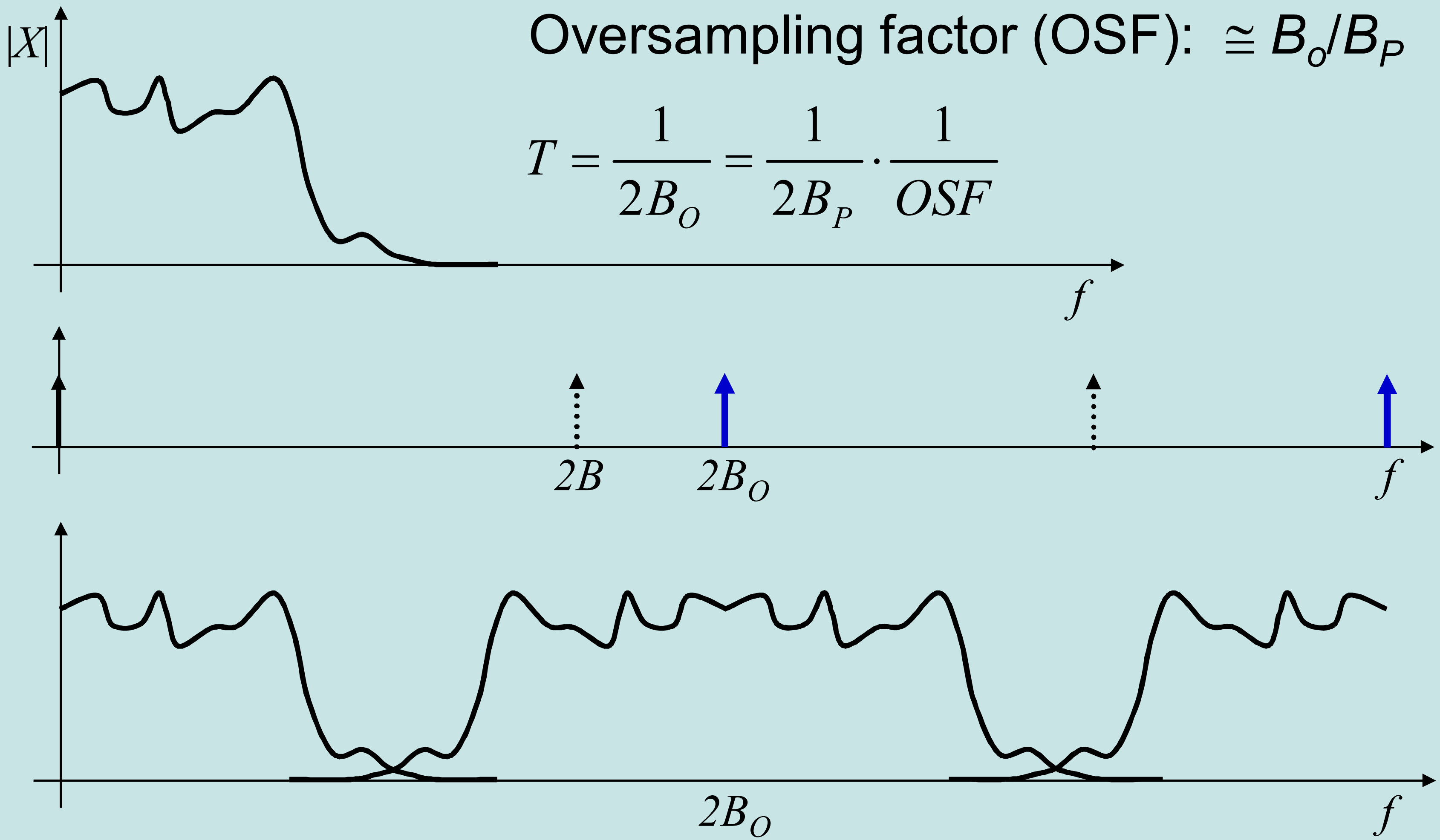
segnale **attenuato** per

$B_P < |f| < B_O$

Sovracampionamento

Oversampling factor (OSF): $\cong B_o/B_P$

$$T = \frac{1}{2B_O} = \frac{1}{2B_P} \cdot \frac{1}{OSF}$$



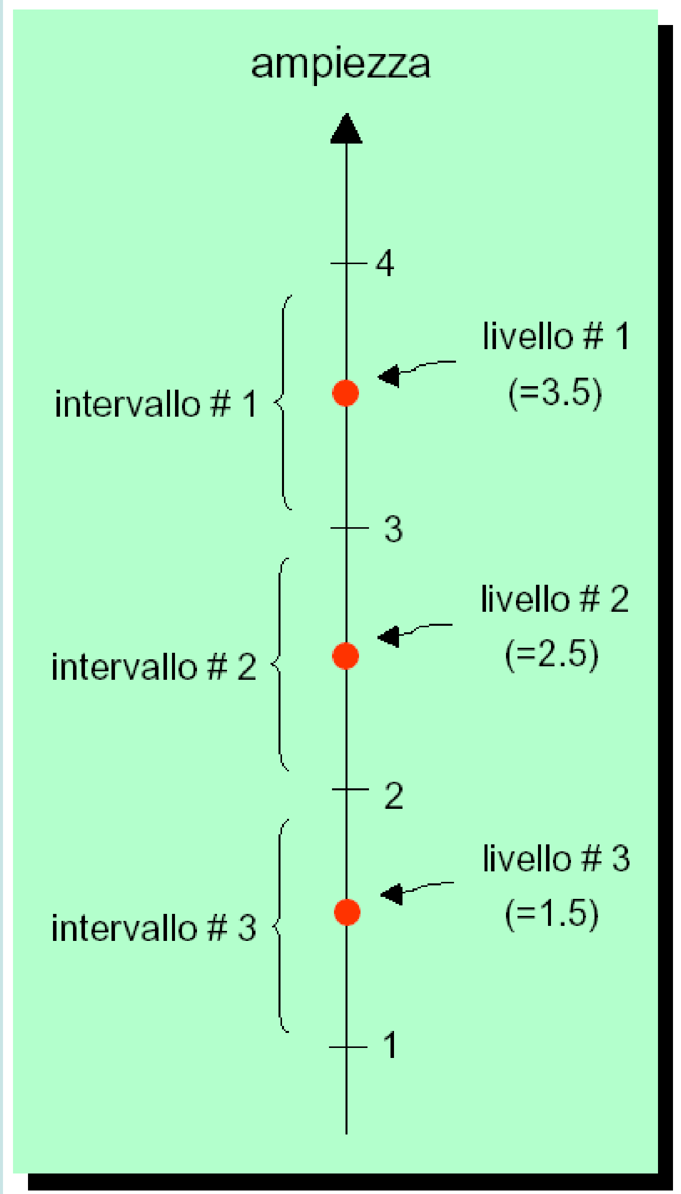
Quantizzazione

• Dopo avere discretizzato i tempi con il campionamento, è necessario **discretizzare** le **ampiezze**:

QUANTIZZAZIONE

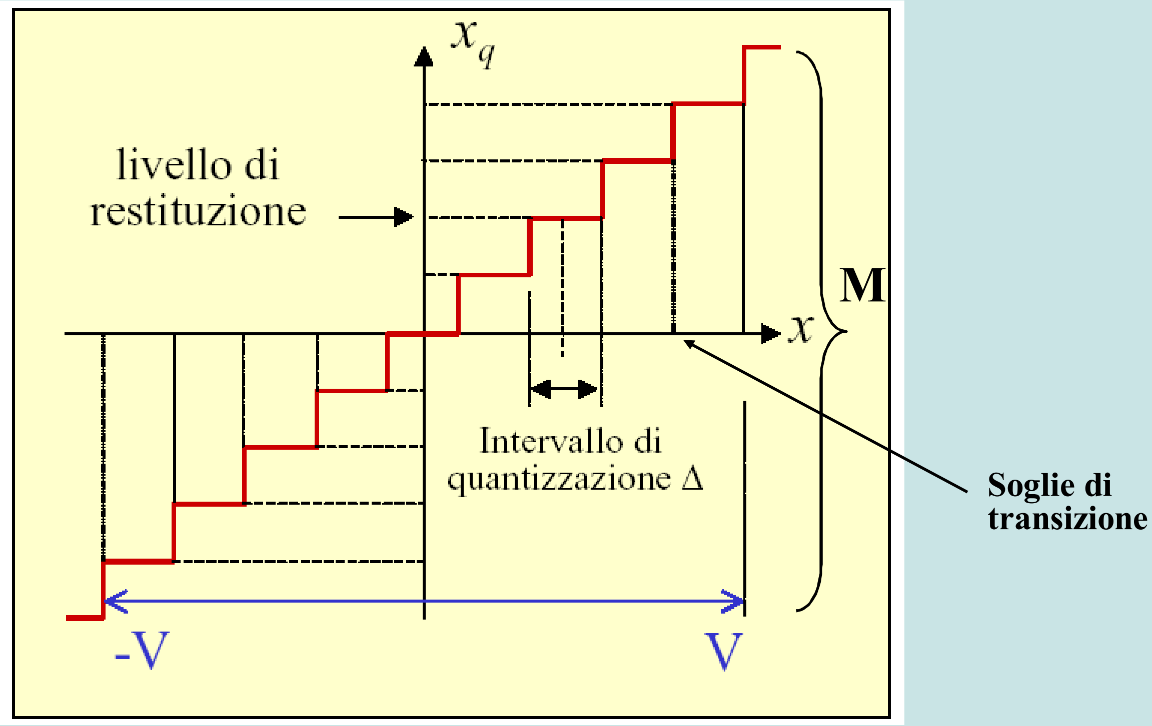
• In pratica l'intervallo di ampiezze del segnale (dinamica) viene suddiviso in **intervalli di quantizzazione**: tutti i valori di ampiezza appartenenti allo stesso intervallo vengono rappresentati con un **unico livello di quantizzazione**

• Esempio: Tutte le ampiezze appartenenti all'intervallo [1,2] vengono restituite con valore 1.5

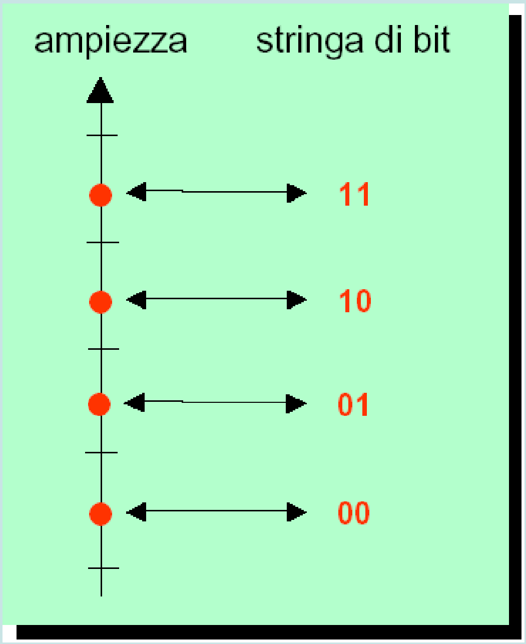


Quantizzazione

- Il quantizzatore è descritto da **due** parametri fondamentali:
  1) L'ampiezza **Δ** degli intervalli di quantizzazione
  2) Il numero **M** degli intervalli di quantizzazione
- Gli **M** livelli di quantizzazione possono essere rappresentati con stringhe di bit. Occorrono **$b=\log_2 M$** bit per rappresentare **M** livelli.



Esempio: M=4 b=2 bit

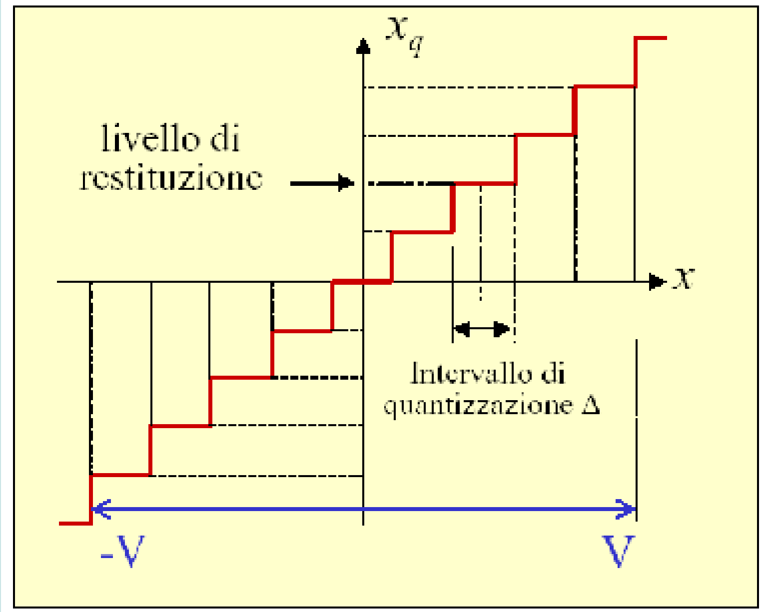


Quantizzazione

$V = V_{FS}$ = Tensione di fondo scala

$$\Delta = \frac{2V_{FS}}{M} = \frac{2V_{FS}}{2^N} = \frac{V_{FS}}{2^{N-1}} = Risoluzione = LSB$$

- **A parità di V_{FS} la risoluzione migliora se aumenta *N***
- **A parità di *N* la risoluzione migliora se diminuisce V_{FS}**



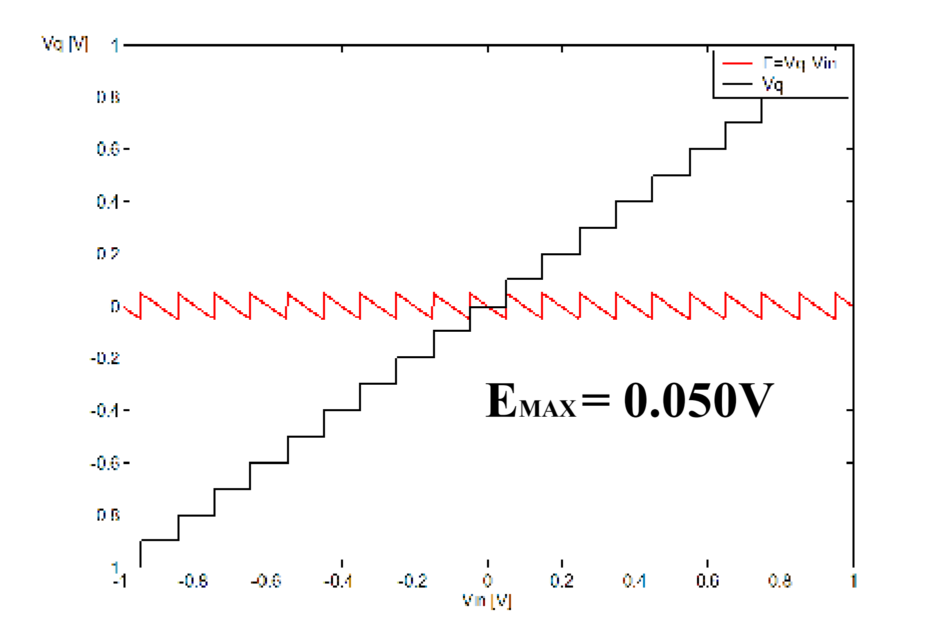
- La precisione di un quantizzatore **aumenta** al crescere ***M*** dei livelli di quantizzazione ma **aumenta** anche il numero di bit e quindi l'ingombro in memoria
- Esempio: 1 minuto di audio HI-FI (stereo) campionato a 44.1 kHz (qualità CD) e con 16 bit/canale corrisponde a:

2 canali * 60 s * 44100 campioni/s * 16 bit = **84 672 000** bit

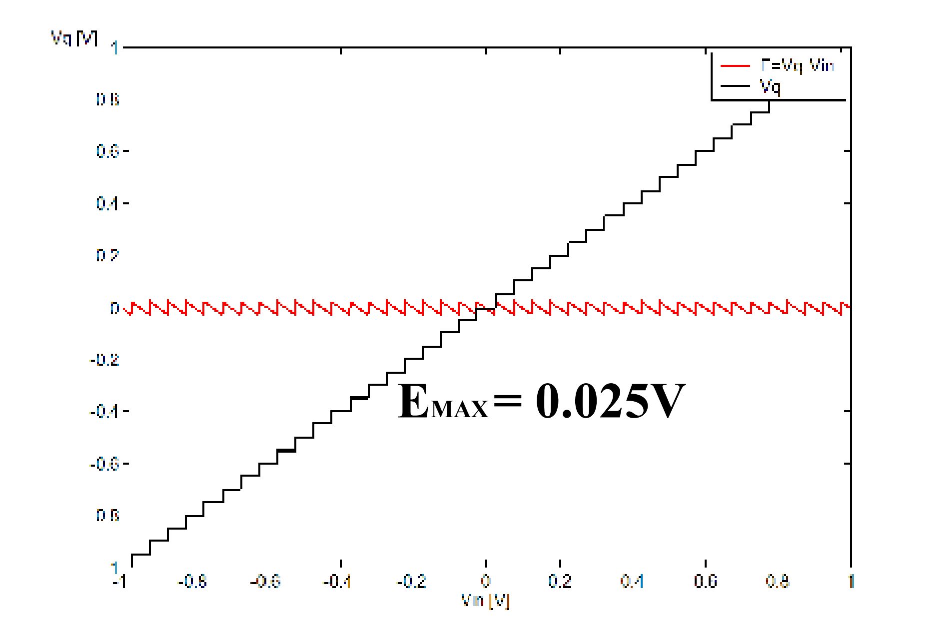
N.B. 84 672 000 bit = 10 584 000 byte = 10 335 kB = **10 MB**

L'errore di quantizzazione

M=20



M=40



- **Il valore massimo dell'errore di quantizzazione coincide con la risoluzione nominale del convertitore diviso 2**

- **A parità di fondo scala (1V) l'aumento di *M* (e quindi del numero di bit *N*) fa diminuire il valore massimo dell'errore di quantizzazione**

Tempo di conversione

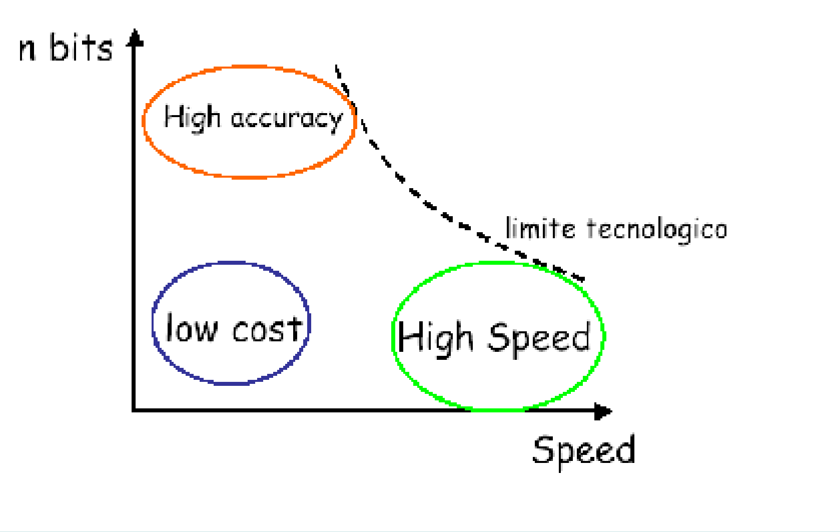
- T_{ADC} = E' il tempo necessario affinché il campione in ingresso al convertitore venga digitalizzato

- T_{ADC} dipende dal tipo di convertitore

- Affinché non si abbia perdita di informazione è necessario che **$T_{ADC} < T_C$**

- Solitamente le schede di acquisizione dati utilizzano dei convertitori ad *approssimazioni successive* (SAR), *sigma-delta* o *pipeline* a seconda del tempo di conversione e livelli di accuratezza richiesti.

- Solitamente i convertitori veloci sono quelli che offrono le peggiori caratteristiche di accuratezza di conversione



…Riassumendo

- **La conversione A/D (analogico/digitale) consta di due passi:**

1) **Campionamento (discretizzazione temporale)**
2) **Quantizzazione e codifica in binario (discretizzazione delle ampiezze)**

I principali parametri caratteristici di un convertitore A/D sono:

- **Tipo di convertitore**
- **Fcmax = max frequenza di campionamento**
- **N=numero di bit nominali**
- **V_{FS} = tensione di fondo scala (massima tensione convertibile)**
- **T_{ADC}=tempo impiegato per la conversione**

Errori statici e dinamici di un A/D

ERRORI STATICI

Errore di Offset

Errore di Gain

Errore di Non Linearità: DNL e INL

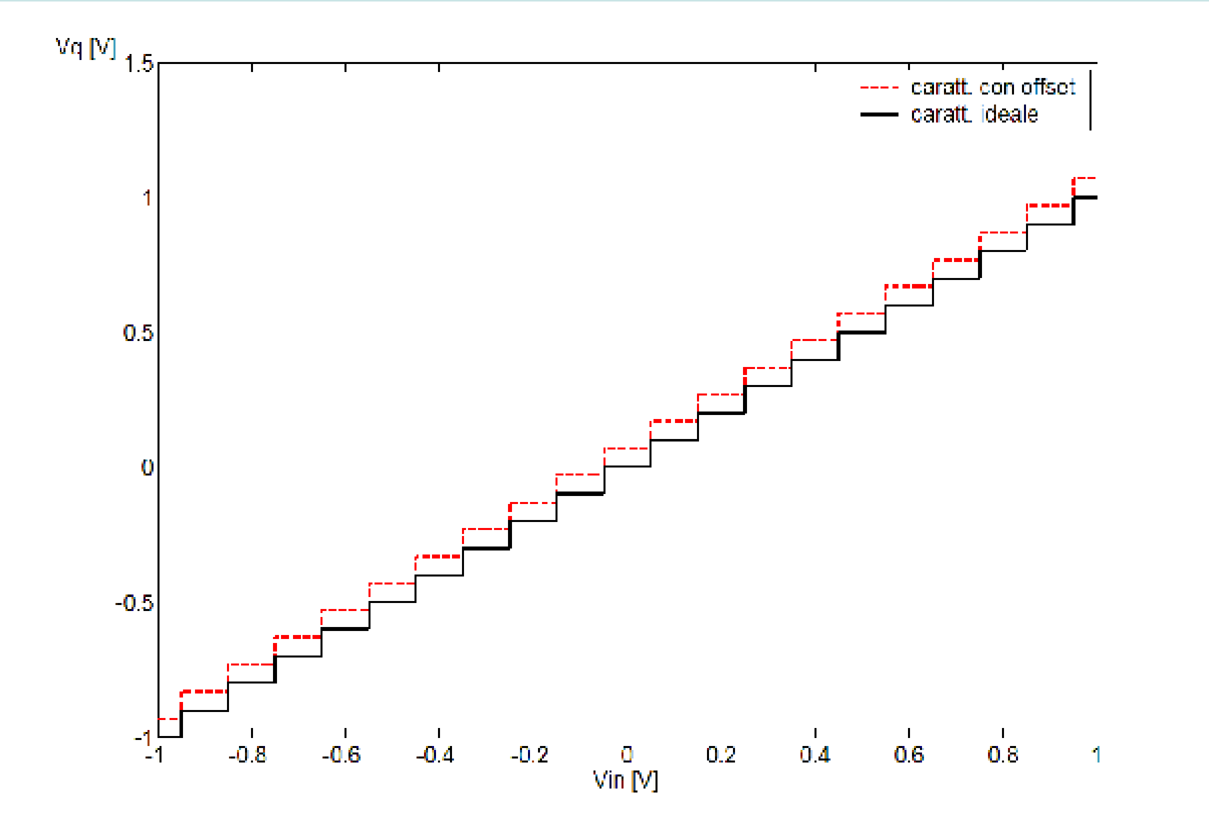
ERRORI DINAMICI

JITTER

Gli errori statici possono essere valutati e compensati preliminarmente, mentre quelli dinamici sono di più difficile valutazione e compensazione

Errori statici

Errore di offset

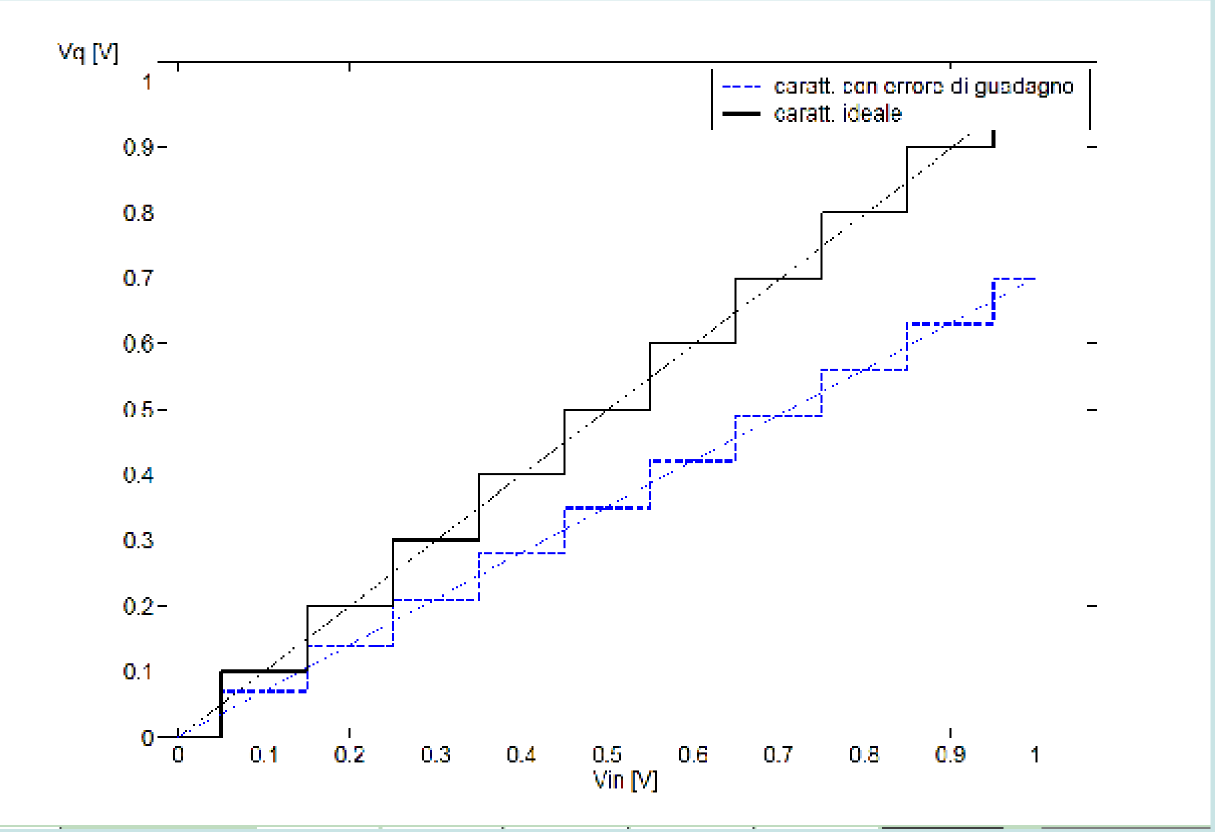


•Rispetto a Vin = 0.0V la caratteristica è traslata verso destra o verso sinistra

•A Vin = 0.0V non corrisponde Vq = 0.0V

Errori statici

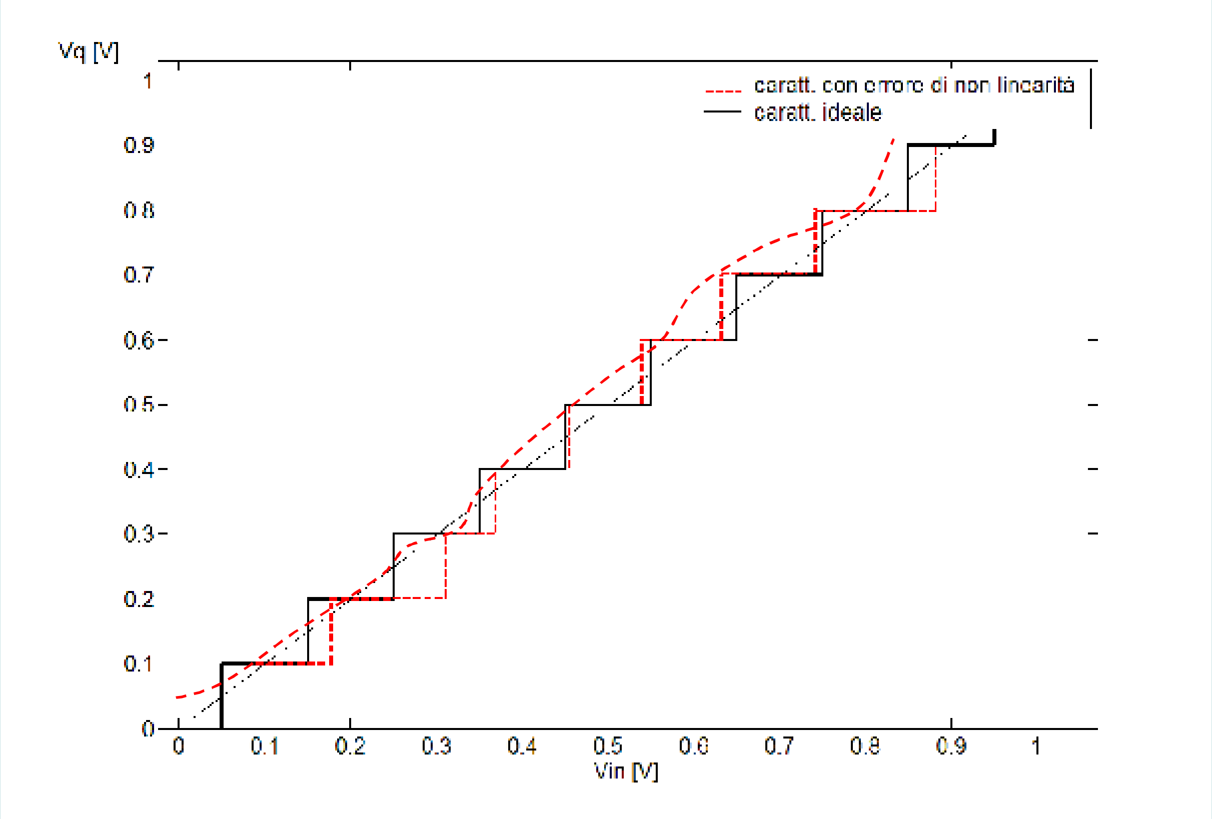
Errore di guadagno



- La caratteristica ha un'inclinazione diversa da 45°
- Spesso l'errore di offset e di guadagno sono presenti contemporaneamente

Errori statici

Errore di Non Linearità

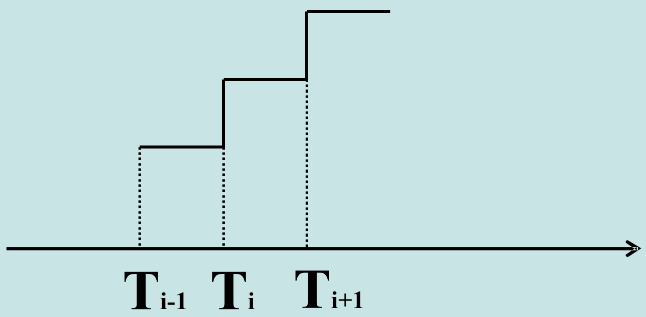


• La caratteristica ha un andamento non lineare e può essere anche non monotona.

• Le non linearità della caratteristica vengono quantificate attraverso due indici: DNL (Non Linearità Differenziale) e INL (Non Linearità Integrale)

Errori statici

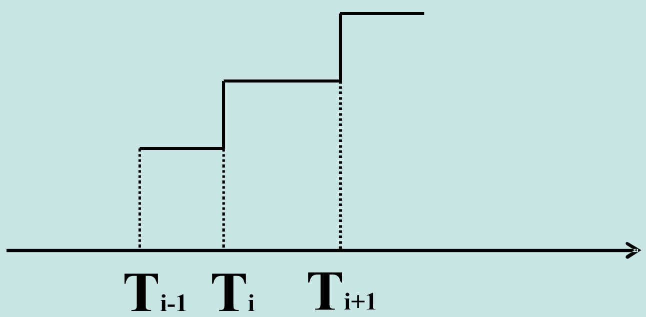
DNL



Caso ideale

$T_{i+1} - T_i = \Delta =$ passo di quantizzazione nominale

$$\frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta} - 1 = 0$$



Caso reale

$T_{i+1} - T_i \neq \Delta =$ passo di quantizzazione nominale

$$\frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta} \neq 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta} - 1 \neq 0$$

$$DNL_i = \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta} - 1$$

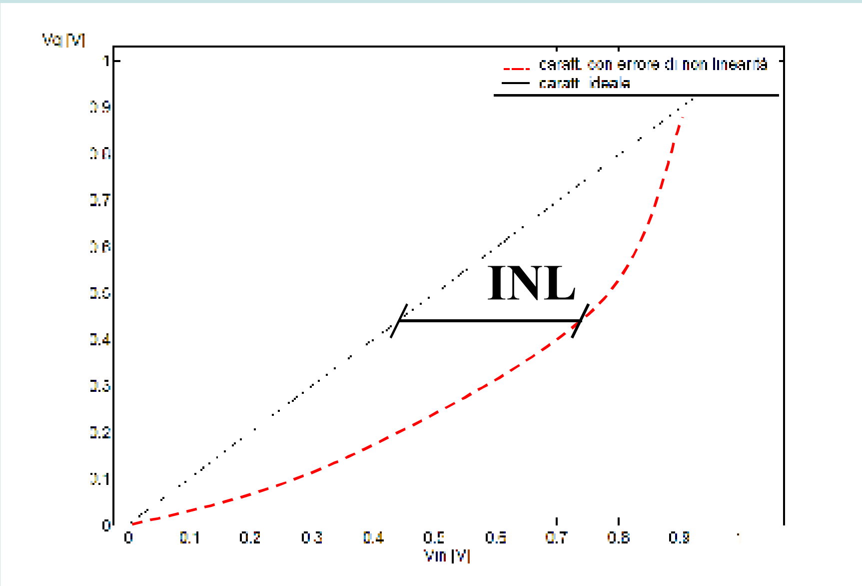
Non linearità differenziale riferita all'i-esimo gradino

Errori statici

INL

La DNL è un parametro puntuale

La INL (errore di Non linearità Integrale) descrive il massimo scostamento della caratteristica reale da quella ideale



$$INL_j = \sum_{i=1}^{j-1} DNL_i$$ **(INL al j-esimo gradino)**

$$INL = \max_j(INL_j)$$

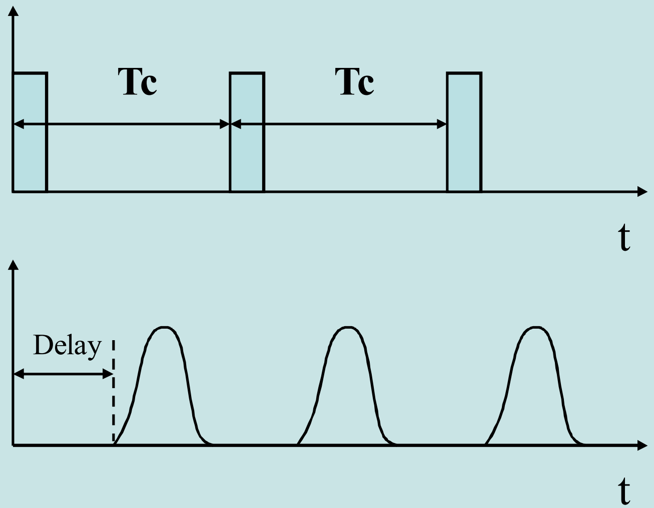
La INL rappresenta un parametro che sintetizza la non linearità complessiva del convertitore

Errori dinamici

JITTER

Si ha perché i campioni non sono "prelevati" negli istanti prefissati a causa di:

1) **un ritardo del treno di impulsi (impulsi di clock)**
2) **non idealità di ogni singolo impulso**



Incertezza sull'istante effettivo di campionamento

Solitamente gli errori dinamici dipendono dalla frequenza di campionamento e dalla frequenza del segnale da convertire

Parametri sintetici per caratterizzare gli A/D

La valutazione degli errori di offset, gain e delle non linearità di un convertitore (DNL e INL) forniscono una valutazione puntuale del convertitore

Esistono alcuni **indici sintetici** che vengono utilizzati per dare informazioni sul **comportamento globale** di un convertitore:

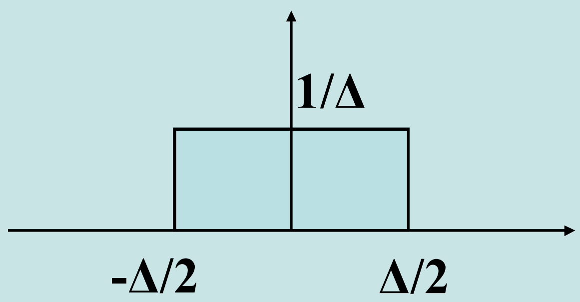
1. **SNR (Signal-to-Noise Ratio)**
2. **ENOB (Effective Number of Bits)**

Parametri sintetici per caratterizzare gli A/D

SNR

Sotto alcune ipotesi semplificative, l'errore di quantizzazione può essere scorrelato dal segnale di ingresso:

L'errore di quantizzazione può essere considerato come costante su tutto il passo di quantizzazione:



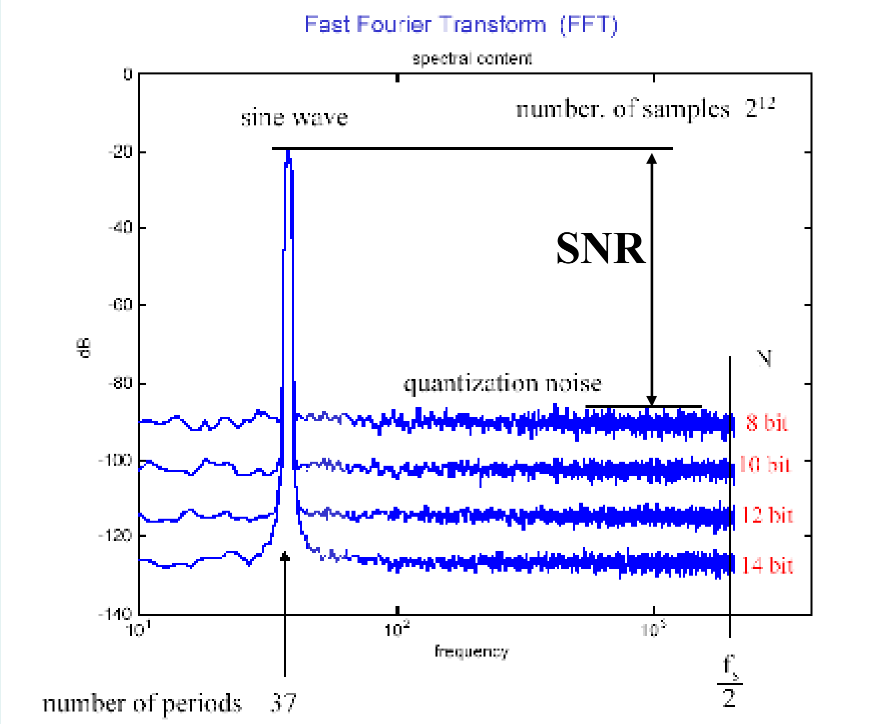
Δ=LSB

L' SNR è il rapporto tra la potenza di segnale (sinusoidale) e la potenza di rumore. Si può dimostrare che:

SNR=6.02*N+1.87 (dB) **(N = numero di bit nominali)**

Parametri sintetici per caratterizzare gli A/D

SNR



L'SNR può essere stimato valutando l'FFT di un segnale sinusuidale acquisito

Nel caso ideale la potenza di rumore dipende solo dall'errore (rumore) di quantizzazione

Se aumenta N migliora il rapporto segnale-rumore (SNR)

Parametri sintetici per caratterizzare gli A/D

ENOB

Nel caso ideale, l'unico errore durante una conversione è quello **di quantizzazione.**

Nel caso reale, a causa delle imperfezioni del convertitore (non linearità, jitter) la potenza di rumore aumenta e quindi **l'SNR diminuisce rispetto al caso ideale.**

La diminuzione dell'SNR può essere imputata ad un **errore di quantizzazione** (maggiore rispetto a quello nominale) **che inglobi anche il rumore dovuto alle altre imperfezioni del convertitore:**

$$SNR_{ideale}=6.02*N+1.87\ (dB)$$ **(N=numero di bit ideali)**

$$SNR_{reale}=6.02*N'+1.87\ (dB)$$

$$N' = ENOB = \frac{SNR_{reale} - 1.87}{6.02}$$

$$SNR_{ideale} > SNR_{reale} \Rightarrow N'=ENOB < N$$

Parametri sintetici per caratterizzare gli A/D

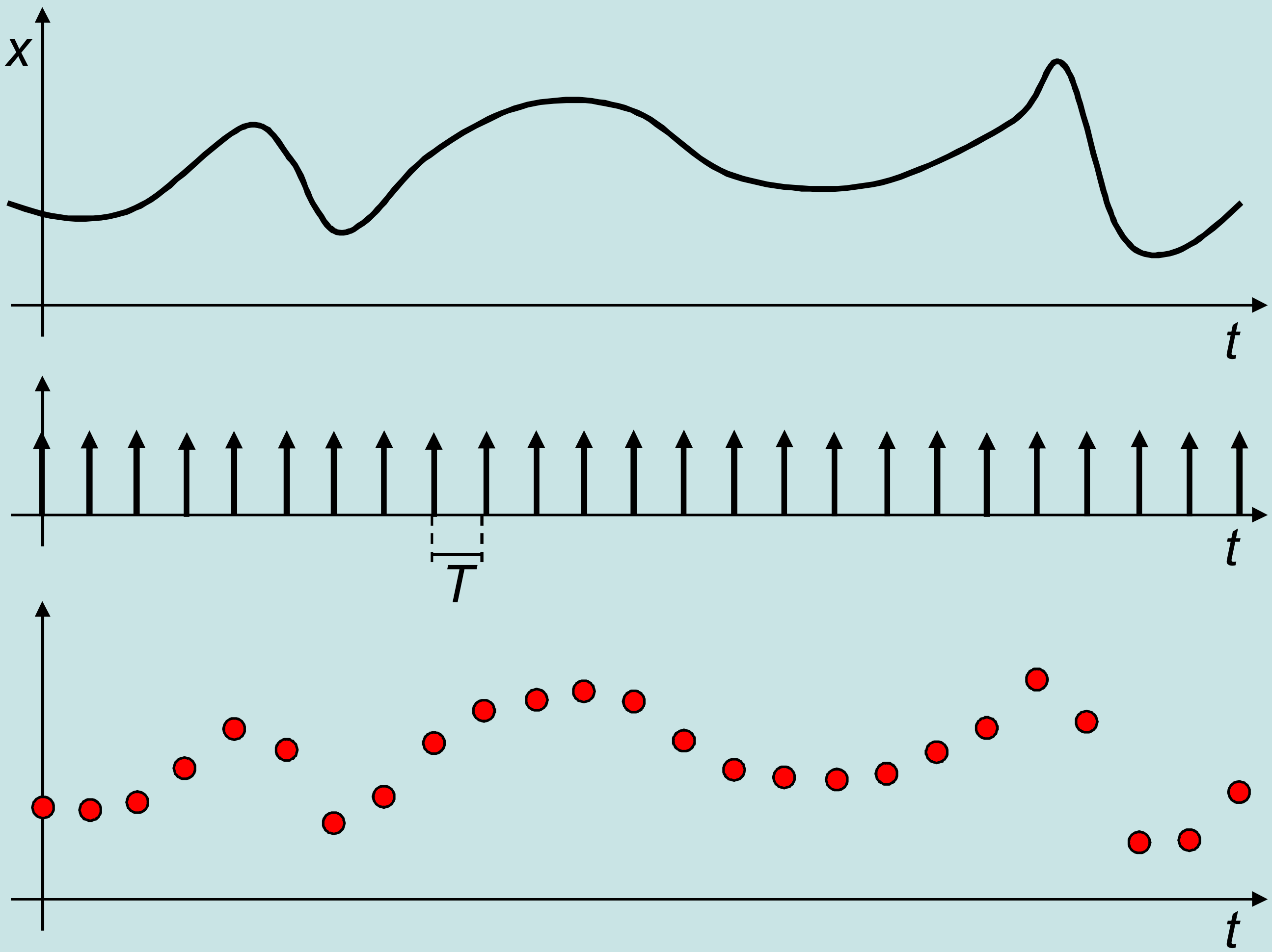
IEEE Std 1241-2000

IEEE Standard for Terminology and Test Methods for Analog-to-Digital Converters

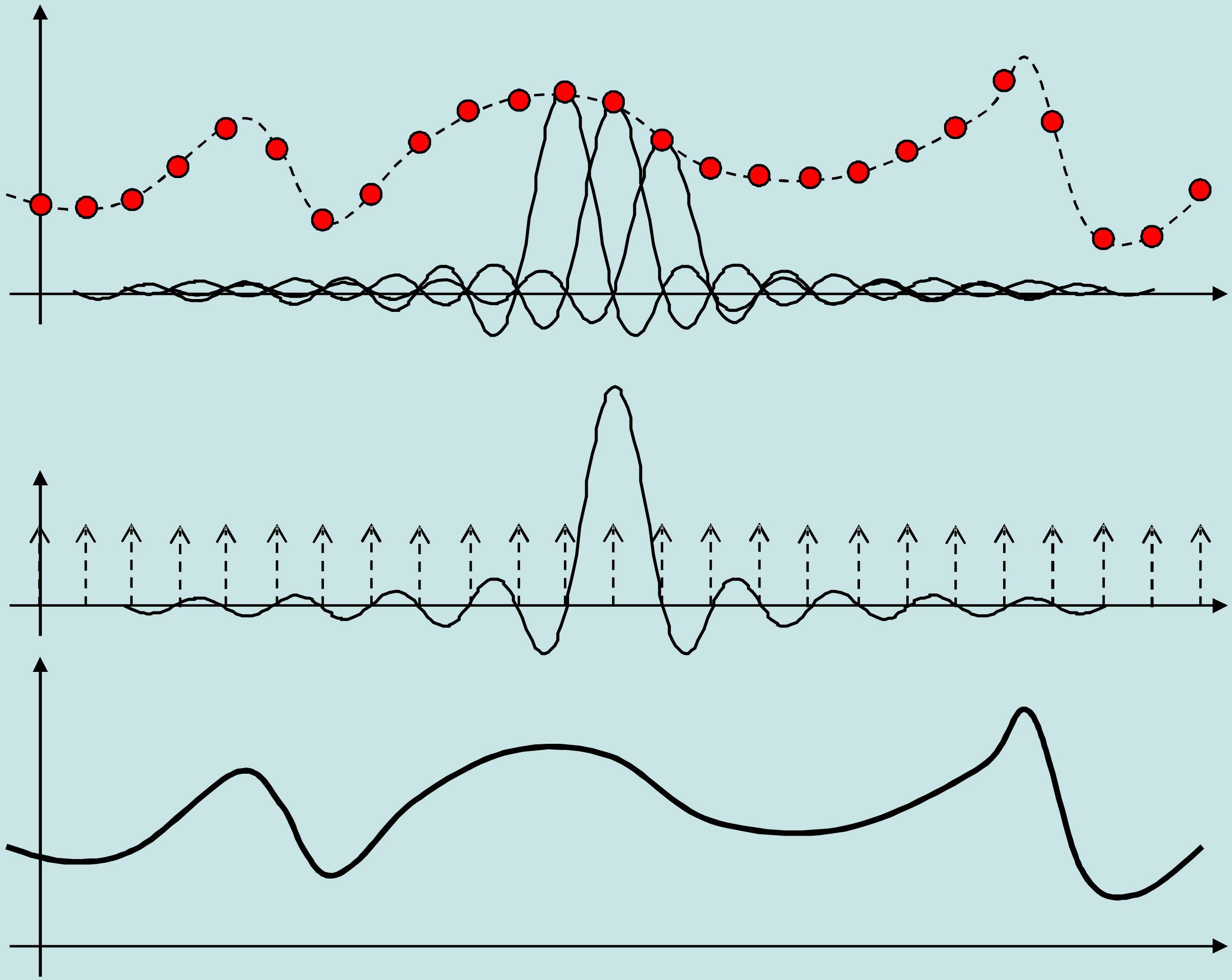
Ricostruzione dei segnali

Esempio: visualizzazione del segnale negli oscilloscopi digitali

Campionamento e Quantizzazione



Ricostruzione



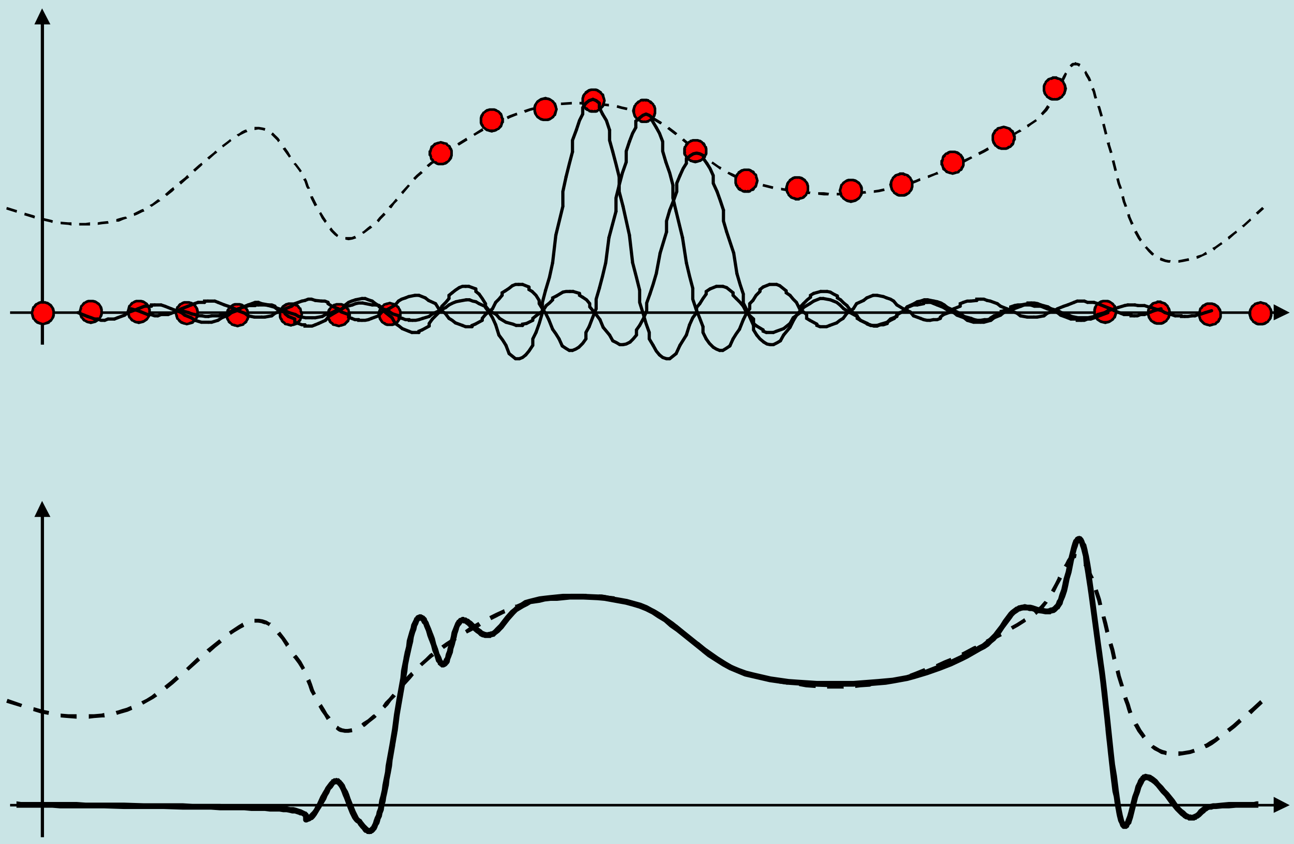
Ricostruzione e tempo di osservazione

- in pratica, il tempo T_W durante il quale un segnale viene osservato è finito
- si acquisiscono in totale $N = T_W/T$ campioni; se $T=1/2B$, $N = 2BT_W$
- la ricostruzione si deve realizzare disponendo di un insieme **finito** di campioni
- "Generally speaking, any set of $2TW$ independent numbers associated with the function can be used to describe it"

Ricostruzione da una sequenza finita

- la ricostruzione si deve realizzare disponendo di un insieme **finito** di campioni
- qual è il filtro di ricostruzione più adatto?
- la ricostruzione si può interpretare come il **filtraggio** di una sequenza di campioni **troncata**, di durata $N = 2BT_W$
- comportamento in transitorio del filtro interpolatore?

Ricostruzione da una sequenza finita



Ricostruzione da una sequenza finita

- *N* è il **<u>numero di gradi di libertà</u>** del segnale; più esattamente, **della rappresentazione del segnale** di cui disponiamo:

$$x_R(t) = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} x(nT) \cdot \frac{\operatorname{sen}\pi(\frac{t}{T}-n)}{\pi(\frac{t}{T}-n)} + e_{tr}(t)$$

- $e_{tr}(t)$ indica lo **scostamento** tra il segnale $x(t)$ ed il segnale ricostruito $x_R(t)$

Errore di troncamento

- scostamento tra il segnale $x(t)$ ed il segnale ricostruito $x_R(t)$: $e_{tr}(t) = x_R(t)-x(t)$
- in pratica ha interesse valutare l'entità di $e_{tr}(t)$ nell'intervallo di osservazione $[n_0T, (n_0+N)T)$
- l'errore di troncamento è legato all'andamento della risposta al gradino del filtro di ricostruzione
- il filtro "ideale" ha risposta all'impulso infinita

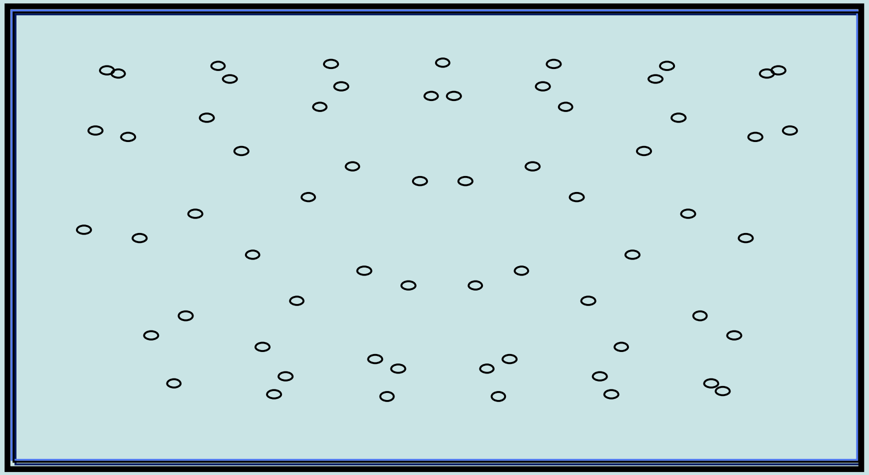
Effetti ai bordi

- “sinc” è davvero, in pratica, l’interpolatore migliore?
  - durata infinita
  - risposta in frequenza non realizzabile
- l’interpolazione di tipo “sinc” applicata ad una sequenza di durata finita introduce pesanti distorsioni ai bordi (**effetto di Gibbs**)
  - durata transitorio: dell’ordine di 10^2 campioni e più
  - $|e_{tr}(t)| < 10^{-2}$ se $N >> 10^3$ (sempre = 0 se $t = nT$)
- quali altri interpolatori si possono utilizzare?

Applicazione: oscilloscopio digitale

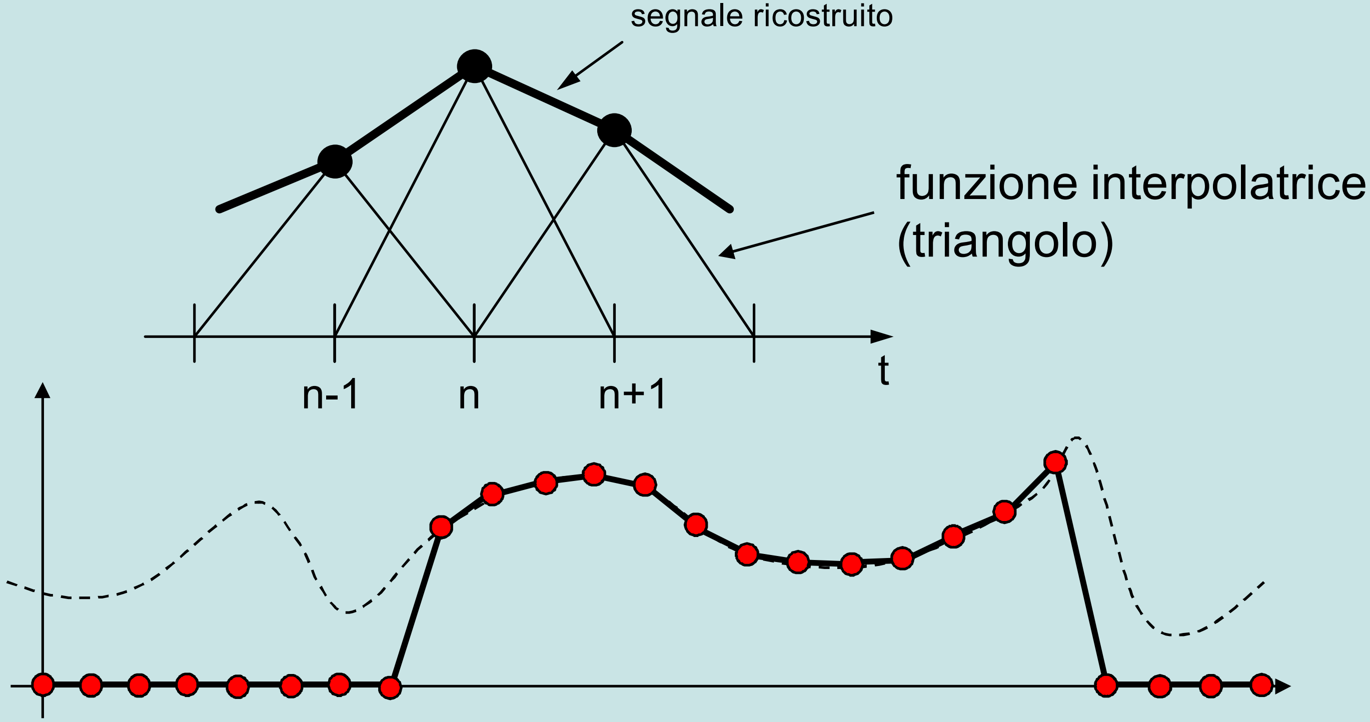
Lo strumento deve permettere di interpretare correttamente l'andamento del segnale: **ricostruzione** nell'intervallo di osservazione T_W a partire dai campioni disponibili.

Visualizzazione dei soli punti acquisiti:



Interpolazione lineare

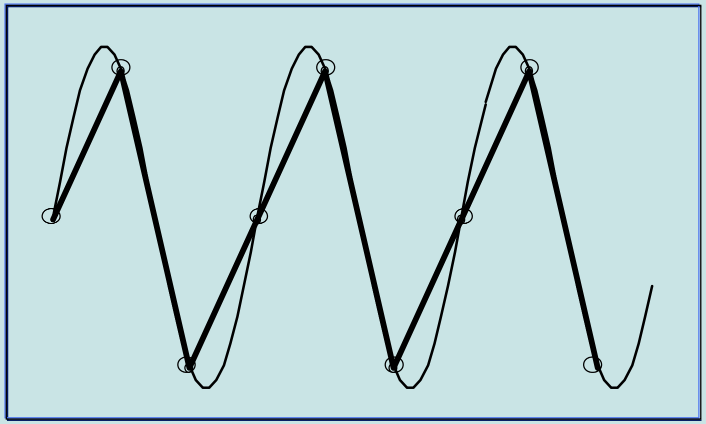
È il metodo di ricostruzione più semplice



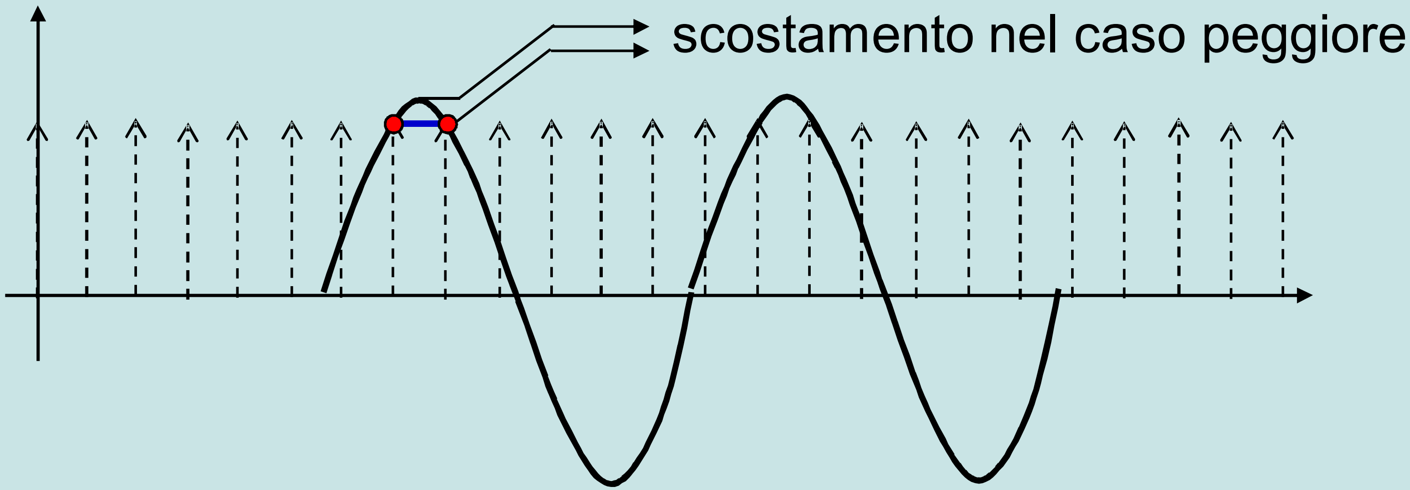
Interpolazione lineare

- effetti ai bordi: molto ridotti
- la funzione di interpolazione ha durata finita
- per fornire una rappresentazione sufficientemente fedele richiede un fattore di sovraccampionamento piuttosto alto

Esempio: la sinusoide è indistinguibile da un'onda triangolare

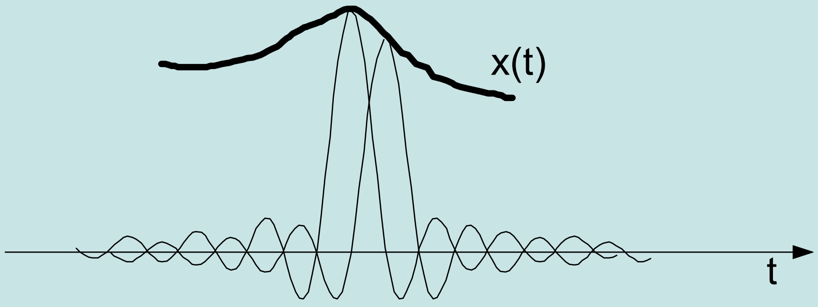


Interpolazione lineare

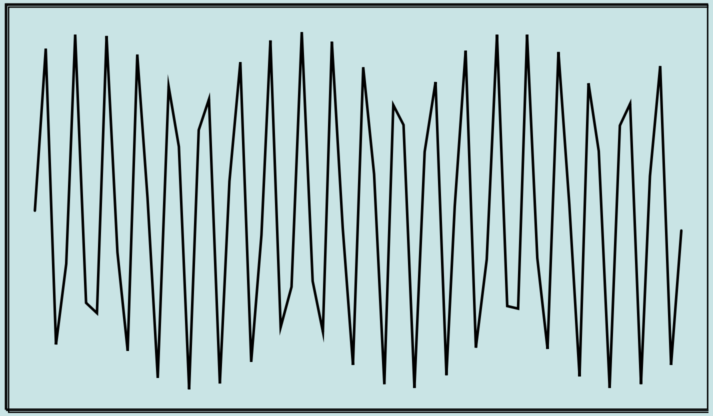


Per ottenere un errore di ricostruzione < 1%, i campioni devono essere stati acquisiti con OSF ≥ 5 (cioè, $F_S \geq 10 \cdot F_{MAX}$)

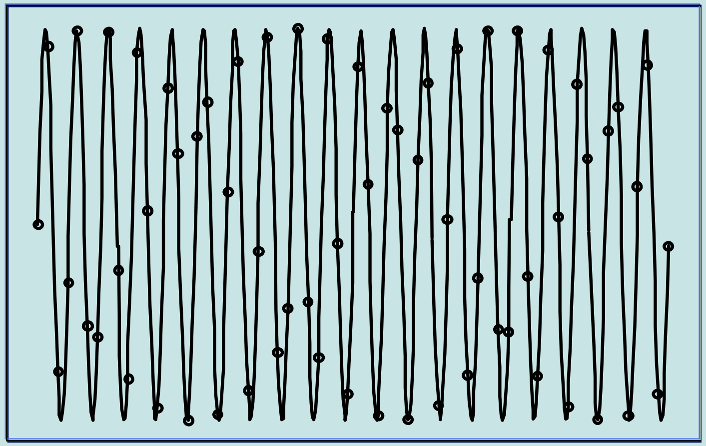
Approssimazioni del sinc()



INTERP. LINEARE



INTERP. “TIPO SINC”



- ricostruzione migliore, fattore di sovraccampionamento $\cong$ 2;
- filtro di ricostruzione con risposta impulsiva a durata finita, ma più lunga di quella dell’interpolatore lineare