

Indice

1	Introduzione	9
1.1	Argomenti	9
1.1.1	Meccanica del continuo	9
1.1.2	Teoria della trave	10
1.1.3	Analisi di sistemi di travi	10
1.2	Notazioni	11
1.3	Bibliografia	13
2	IL MODELLO "TRAVE": TEORIA TECNICA	15
2.1	Cinematica	15
2.2	Equazioni di equilibrio	19
2.3	Legame costitutivo	24
2.4	Problema dell'equilibrio elastico	27
2.5	Principo dei lavori virtuali	28
2.6	Esercizi	31
2.6.1	Esercizio 1	31
2.6.2	Esercizio 2	33
2.6.3	Esercizio 3	36
2.6.4	Esercizio 4	39
2.6.5	Esercizio 5	41
3	ANALISI DELLA DEFORMAZIONE	45
3.1	Definizione di mezzo continuo e deformabile	45
3.2	Funzione cambiamento di configurazione	46
3.2.1	Requisiti analitici per la funzione \mathbf{y}	48
3.2.2	Sistemi di riferimento	49
3.3	Deformazione dell'intorno del punto	51
3.3.1	Decomposizione polare	53
3.3.2	Misure di deformazione	55
3.4	Deformazione infinitesima	58
3.4.1	Decomposizione additiva di \mathbf{H}	60

3.4.2	Misure ingegneristiche di deformazione	62
3.4.3	Interpretazione fisica delle componenti di deformazione	63
3.4.4	Deformazioni e direzioni principali	67
3.4.5	Dilatazione cubica	70
3.4.6	Deformazione media	71
3.4.7	Equazioni di compatibilità	71
3.4.8	Esercizio sulla deformazione	75
4	ANALISI DELLA TENSIONE	79
4.1	Concetto di tensione in un punto	80
4.2	Teoremi di Cauchy	81
4.2.1	Teorema di azione e reazione o di reciprocità	81
4.2.2	Teorema di rappresentazione o del tetraedro	82
4.3	Equazioni d'equilibrio	85
4.4	Direzioni e Tensioni principali	89
4.5	Deviatore di tensione	91
4.6	Stato tensionale piano	92
4.7	Cerchi di Mohr	94
4.7.1	Costruzione dei cerchi di Mohr	94
4.7.2	Utilizzazione del cerchio Mohr nel caso piano	97
4.8	Tensione tangenziale ottaedrale	99
5	PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI	103
5.1	Identità fondamentale della meccanica	104
5.1.1	Esempio	106
5.2	Principio degli spostamenti virtuali	107
5.2.1	Esempio	108
5.3	Principio delle forze virtuali	109
5.3.1	Esempio	110
6	LEGAME COSTITUTIVO	113
6.1	Introduzione	113
6.2	Materiali elastici secondo Green	115
6.3	Corpo elastico lineare	117
6.4	Simmetrie materiali	119
6.4.1	Materiali monoclini ed ortotropi	121
6.5	Isotropia	123
6.5.1	Direzioni principali	124
6.5.2	Invarianti di tensione	125
6.5.3	Legame tensione-deformazione	125
6.5.4	Definita positività	128

6.5.5	Determinazione delle costanti elastiche	129
7	PROBLEMA DELL'EQUILIBRIO ELASTICO	131
7.1	Principio di sovrapposizione degli effetti	132
7.2	Unicità della soluzione del problema dell'equilibrio elastico	134
7.3	Teorema di Clapeyron	135
7.4	Teorema di Betti	136
7.4.1	Teorema di Betti generalizzato	139
7.4.2	Linee di influenza	140
7.4.3	Esercizi sulle linee di influenza	142
	Esercizio 1	142
	Esercizio 2	142
7.5	Equazioni di Navier	142
8	PRINCIPI VARIAZIONALI	145
8.1	Energia potenziale totale	146
8.1.1	Stazionarietà dell'energia potenziale totale	146
8.1.2	Minimo dell'energia potenziale totale	149
8.2	Energia complementare	151
8.2.1	Stazionarietà dell'energia complementare	151
8.2.2	Minimo dell'energia complementare	153
8.3	Esempi esplicativi	156
8.3.1	Esempio n. 1	156
	Soluzione diretta	157
	Energia potenziale totale	158
	Energia complementare	159
8.3.2	Esempio n. 2	159
	Soluzione diretta	161
	Energia potenziale totale	161
	Energia complementare	162
8.3.3	Esempio n. 3	163
	Soluzione diretta	164
	Energia potenziale totale	164
	Energia complementare	165
9	GEOMETRIA DELLE SUPERFICI PIANE	167
9.1	Definizioni	167
9.2	Determinazione delle caratteristiche geometriche	168
9.3	Teoremi di trasporto di Huygens	171
9.4	Direzioni coniugate e direzioni principali	174
9.5	Centro relativo e nocciolo di inerzia	177

9.6	Ellisse d'inerzia	179
9.7	Esempi	181
9.7.1	Rettangolo	181
9.7.2	Triangolo	183
9.7.3	Programma di calcolo	185
9.7.4	Risultati numerici	189
	Sezione rettangolare	189
	Sezione rettangolare ruotata di 30 gradi	190
	Sezione triangolare	191
	Sezione a L	192
10	IL PROBLEMA DI SAINT-VENANT	195
10.1	Posizione del problema	195
10.1.1	Ipotesi geometriche	195
10.1.2	Ipotesi di carico	196
10.1.3	Ipotesi sulla natura del materiale	196
10.1.4	Ipotesi sul tipo di analisi da condurre	197
10.2	Problema dell'equilibrio elastico	197
10.3	Principio fondamentale di Saint-Venant	198
10.4	Sollecitazioni semplici	199
10.5	Metodo seminverso	200
10.5.1	Equilibrio	200
10.5.2	Legame costitutivo	201
10.5.3	Congruenza	201
11	SFORZO NORMALE E MOMENTO FLETTENTE	203
11.1	Sollecitazione di sforzo normale e momento flettente	203
11.1.1	Stato tensionale	203
11.1.2	Legame costitutivo	205
11.1.3	Spostamenti	206
11.2	Sforzo normale centrato	208
11.3	Flessione semplice	209
11.3.1	Flessione retta	209
11.3.2	Flessione deviata	212
11.4	Flessione composta	213
12	TORSIONE	217
12.1	Sollecitazione di torsione	217
12.2	Torsione nella sezione circolare	217
12.3	Torsione per la sezione generica	221
12.3.1	Cinematica	221

12.3.2	Legame costitutivo	222
12.3.3	Equilibrio	222
12.3.4	Problema di Neumann	223
12.3.5	Risultanti	224
12.4	Centro di torsione	225
12.5	Funzione di Prandtl	228
12.5.1	Problema di Dirichlet	229
12.5.2	Risultanti	230
12.5.3	Ingobbamento	231
12.6	Sezione rettangolare allungata	231
12.6.1	Funzione di Prandtl	232
12.6.2	Effetto di bordo	233
12.6.3	Ingobbamento	236
12.7	Sezione sottile aperta	237
12.8	Sezione sottile chiusa	239
12.8.1	Sezione triconnessa	244
13	FLESSIONE E TAGLIO	247
13.1	Sollecitazione di flessione e taglio	247
13.2	Centro di taglio	249
13.3	Tensione tangenziale media su una corda	252
13.4	Sollecitazione sull'asse di simmetria	253
13.5	La sezione rettangolare	258
13.6	La sezione in parete sottile	259
13.7	Deformazione di una trave in parete sottile	259
13.8	Determinazione del centro di taglio	261
13.9	Esercizio sulla sollecitazione di taglio	261
13.10	Sezione sottile chiusa	269
14	CRITERI DI RESISTENZA	275
14.1	Premesse	275
14.2	I criteri di sicurezza: generalità	279
14.3	Materiali fragili	280
14.3.1	Criterio della massima tensione normale	280
14.3.2	Criterio della massima dilatazione	284
14.4	Materiali duttili	286
14.4.1	Criterio della massima tensione tangenziale	287
14.4.2	Criterio della massima energia di distorsione	288
14.4.3	Criterio della massima tensione tangenziale ottaedrale	291

15 INTRODUZIONE ALLA STABILITA' DELL'EQUILIBRIO	293
15.1 Sistemi articolati rigidi	293
15.2 Travi con elasticità diffusa	299
15.2.1 Esempio	301
A Cenni sul calcolo delle variazioni	305
A.1 I funzionali: generalità	305
A.2 L'operatore variazionale	306
A.3 Variazione prima di un funzionale	307

Prefazione

Nelle pagine che seguono sono sviluppati alcuni Argomenti di Scienza delle Costruzioni. In particolare, vengono trattati elementi della teoria dei mezzi continui e della teoria della trave.

Il testo nasce dal desiderio di raggiungere, interpretare ed inquadrare alcuni classici argomenti di Scienza delle Costruzioni in un contesto formale leggermente differente da quello riportato nei molti libri di Scienza delle Costruzioni pubblicati in Italia.

Ritengo che queste pagine non debbano sostituire ma solo affiancare classici e completi testi di Scienza delle Costruzioni nella biblioteca di un ingegnere, o studente di ingegneria.

Ringrazio gli studenti di Ingegneria dell'Università di Cassino che mi hanno aiutato ed incoraggiato a scrivere.

Cassino, 21 gennaio 2009

Elio Sacco

Capitolo 1

Introduzione

La Scienza delle Costruzioni fornisce gli strumenti di base ed i metodi necessari per la determinazione del grado di sicurezza, inteso in senso generale, di una qualsiasi struttura soggetta a carichi statici o dinamici.

La Scienza delle Costruzioni si trova a cavallo tra materie di carattere prettamente teorico, quali la Matematica, la Fisica e la Meccanica Razionale, e materie di carattere più applicativo, come la Tecnica delle Costruzioni, la Geotecnica, le Costruzioni Idrauliche, le Costruzioni di Strade, Ferrovie ed Aeroporti, le Costruzioni di Macchine, le Costruzioni Navali, le Costruzioni Aeronautiche, le Costruzioni Aerospaziali, e così via.

1.1 Argomenti

La Scienza delle Costruzioni tratta i seguenti argomenti:

- Meccanica del continuo
- Teoria della trave
- Analisi di sistemi di travi

1.1.1 Meccanica del continuo

La Meccanica del continuo intende determinare le equazioni fondamentali che governano la deformazione di un corpo soggetto ad un assegnato sistema di forze. In particolare, lo studio si articola nei seguenti argomenti:

1. Analisi della deformazione
2. Analisi della tensione

3. Principio dei lavori virtuali
4. Legame costitutivo
5. Problema dell'equilibrio elastico
6. Principi variazionali
7. Criteri di resistenza

1.1.2 Teoria della trave

La teoria della trave studia un particolare problema dell'equilibrio elastico: quello relativo ad un solido cilindrico con una dimensione (lunghezza del cilindro) molto maggiore delle rimanenti altre due dimensioni (sezione retta del cilindro). Il cilindro, detto trave, è soggetto a forze solo sulle due basi, ed è studiato facendo ricorso alla teoria di Saint-Venant. Per la trave si considerano i classici 4 casi di sollecitazione semplice:

1. Sforzo normale
2. Flessione
3. Torsione
4. Taglio

1.1.3 Analisi di sistemi di travi

Si forniscono gli strumenti fondamentali per l'analisi di sistemi costituiti da una o più travi vincolate. Il grado di vincolo è tale che le sole equazioni di equilibrio non sono sufficienti a definire univocamente lo stato di sforzo e di deformazione a cui è soggetto il sistema di travi. Vengono allora forniti gli strumenti e le metodologie fondamentali per affrontare tale studio:

1. Equazione della linea elastica della trave
2. Principio dei lavori virtuali per la trave
3. Equazioni di congruenza (metodo delle forze)
4. Equazioni di equilibrio (metodo degli spostamenti)

1.2 Notazioni

Nelle pagine che seguono si è generalmente indicato con le lettere latine maiuscole in grassetto i tensori, con le lettere latine minuscole in grassetto i vettori e con le lettere greche gli scalari. Questa regola generale è stata talvolta violata, nei casi in cui esisteva nella letteratura scientifica una consolidata abitudine ad un differente uso dei simboli. Così, a titolo di esempio, in letteratura i tensori delle deformazioni e delle tensioni sono quasi sempre indicati rispettivamente con $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\boldsymbol{\sigma}$, mentre il vettore momento statico è indicato con \mathbf{S} . Tale notazione è di così corrente uso che non è sembrato opportuno cambiarla, sebbene ciò infrangesse le regole generali di notazione.

Scelta che sia una base, le componenti dei tensori e vettori sono indicati con i rispettivi simboli (lettere latine maiuscole ovvero minuscole) ma non in grassetto e con gli indici riportati a pedice. Così, la componente (ij) del tensore \mathbf{T} , è indicata con T_{ij} e la componente (i) del vettore \mathbf{v} è indicata con v_i . Le lettere minuscole latine usate come indici delle componenti sia per tensori che vettori possono assumere valori da 1 a 3 ($i, j, .. = 1, 2, 3$). Le lettere minuscole greche usate come indici delle componenti sia per tensori che vettori possono assumere valori da 1 a 2 ($\alpha, \beta, .. = 1, 2$).

Si utilizza inoltre la notazione di sommatoria contratta (notazione di Einstein), per cui gli indici ripetuti nell'operazione di prodotto si intendono sommati:

$$w_i = T_{ij}v_j = T_{i1}v_1 + T_{i2}v_2 + T_{i3}v_3$$

così che

$$\begin{aligned} w_1 &= T_{1j}v_j = T_{11}v_1 + T_{12}v_2 + T_{13}v_3 \\ w_2 &= T_{2j}v_j = T_{21}v_1 + T_{22}v_2 + T_{23}v_3 \\ w_3 &= T_{3j}v_j = T_{31}v_1 + T_{32}v_2 + T_{33}v_3 \end{aligned}$$

Come regola generale, la derivata parziale di una funzione rispetto alla variabile x_i è indicata con la virgola seguita da i , riportati in pedice. Così, per esempio:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \omega_{,i}$$

Gli operatori differenziali utilizzati nel seguito sono denotati come:

- *div* (divergenza):

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{v}) &= v_{i,i} \\ [\operatorname{div}(\mathbf{T})]_i &= T_{ij,j} \end{aligned}$$

- ∇ (gradiente):

$$\begin{aligned}(\nabla\omega)_i &= \omega_{,i} \\ (\nabla\mathbf{v})_{ij} &= v_{i,j}\end{aligned}$$

- Δ (laplaciano):

$$\Delta\omega = \omega_{,ii} = \omega_{,11} + \omega_{,22} + \omega_{,33}$$

Inoltre si denota con δ_{ij} il simbolo di Kronecker:

-

$$\begin{aligned}\delta_{ij} &= 1 & \text{se} & \quad i = j \\ \delta_{ij} &= 0 & \text{se} & \quad i \neq j\end{aligned}$$

Sono poi introdotte le seguenti operazioni sugli scalari, sui vettori e sui tensori:

- somma di due vettori (il risultato è un vettore):

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \quad (w_i = v_i + u_i)$$

- prodotto di uno scalare per un vettore (il risultato è un vettore):

$$\mathbf{w} = \alpha\mathbf{v} \quad (w_i = \alpha v_i)$$

- prodotto scalare tra due vettori (il risultato è uno scalare):

$$\alpha = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \quad (\alpha = v_i u_i)$$

- prodotto diadico o tensoriale tra due vettori (il risultato è un tensore):

$$\mathbf{T} = \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} \quad (T_{ij} = v_i u_j)$$

- somma di due tensori (il risultato è un tensore):

$$\mathbf{T} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad (T_{ij} = A_{ij} + B_{ij})$$

- prodotto di uno scalare per un tensore (il risultato è un tensore):

$$\mathbf{T} = \alpha\mathbf{A} \quad (T_{ij} = \alpha A_{ij})$$

- prodotto scalare tra due tensori (il risultato è uno scalare):

$$\alpha = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad (\alpha = A_{ij} B_{ij})$$

- applicazione di tensore ad un vettore (il risultato è un vettore)

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}\mathbf{v} \quad (u_i = T_{ij} v_j)$$

Infine \mathbf{T}^T è il trasposto di \mathbf{T} , \mathbf{T}^{-1} è l'inverso di \mathbf{T} e \mathbf{T}^{-T} è il trasposto dell'inverso ovvero l'inverso del trasposto di \mathbf{T} .

1.3 Bibliografia

Ritengo infine necessario citare almeno alcuni tra i testi che più mi hanno aiutato nello studio della Scienza delle Costruzioni:

1. ASCIONE L. - GRIMALDI A., *Introduzione alla Meccanica dei Solidi*, Liguori Editore, 1986.
2. ASCIONE L., *Elementi di Scienza delle Costruzioni*, CUES Collana Didattica di Ingegneria, 2001.
3. BALDACCI R., *Scienza delle Costruzioni*, Vol. 1 - Vol. 2, Utet, Torino, 1970.
4. BENVENUTO E., *La Scienza delle Costruzioni ed il suo Sviluppo Storico*, Sansoni, Firenze, 1981.
5. CAPURSO M., *Lezioni di Scienza delle Costruzioni*, Pitagora Editrice, Bologna, 1971.
6. CARPINTERI A., *Scienza delle Costruzioni*, Pitagora Editrice, Bologna, 1994.
7. CERADINI G., *Scienza delle Costruzioni*, Vol. 3, *Teoria della Trave*, E.S.A., Roma, 1987.
8. CORRADI DELL'ACQUA L., *Meccanica delle Strutture*, Vol. 1, Vol. 2, Vol. 3, McGraw-Hill, 1992.
9. DI TOMMASO A., *Fondamenti di Scienza delle Costruzioni*, Parte I, Patron, Bologna, 1981.
10. FRANCIOSI V., *Scienza delle Costruzioni*, Vol.1, Vol. 2, Vol. 3, Liguori, Napoli, 1979.
11. GAMBAROTTA I., NUNZIANTE L., TRALLI A., *Scienza delle costruzioni*, McGraw-Hill, 2003.
12. GURTIN M., *An introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press, 1981.
13. MALVERN L.E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, 1969.
14. MASE G.E., *Meccanica dei Continui*, Collana Schaum, 1976.
15. LUONGO A. - PAOLONE A., *Scienza delle Costruzioni (1)*, CEA, 2004

16. LUONGO A. - PAOLONE A., *Scienza delle Costruzioni: Saint-Venant (2)*, CEA, 2005
17. PODIO GUIDUGLI P., *Lezioni di Scienza delle Costruzioni, Parte I. Travi e travature*, Aracne, 2008.
18. PODIO GUIDUGLI P., *Lezioni di Scienza delle Costruzioni, Parte II. Stato di sforzo nelle travi*, Aracne, 2008.
19. ROMANO G., *Scienza delle Costruzioni, Tomo I: Cinematica ed Equilibrio*, Hevelius Edizioni, 2002.
20. ROMANO G., *Scienza delle Costruzioni, Tomo II: Elasticità e resistenza dei materiali*, Hevelius Edizioni, 2003.
21. SACCO E., *Argomenti di Scienza delle Costruzioni*, Aracne, 2004.
22. SOLLAZZO A. - MARZANO S., *Scienza delle Costruzioni, Vol. 2*, UTET, Torino, 1992.
23. SOKOLNIKOFF I.S., *Mathematical Theory of Elasticity, Third Edition, International Student Edition*, 1970.
24. SPARACIO R., *La Scienza e i Tempi del Costruire*, UTET Università, 1999.
25. TIMOSHENKO S.P. - GOODIER J.N., *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, 1985.
26. VIOLA E., *Scienza delle Costruzioni, 1 Teoria dell'Elasticità*, Pitagora Editrice, Bologna, 1990.
27. VIOLA E., *Scienza delle Costruzioni, 3 Teoria della Trave*, Pitagora Editrice, Bologna, 1992.

Capitolo 2

IL MODELLO "TRAVE": TEORIA TECNICA

La trave \mathcal{T} è un solido tridimensionale con una dimensione molto maggiore delle altre due; data una figura piana di dimensione caratteristica d ed area A , la trave è ottenuta facendo traslare la figura piana lungo il segmento ad essa ortogonale passante per il baricentro, come illustrato in figura 2.1. Tale segmento, di lunghezza $\ell_0 \gg d$, è detto asse della trave. Per sezione retta della trave si intende la superficie piana ottenuta come l'intesezione di un piano ortogonale all'asse della trave con la trave stessa.

La trave rappresenta un modello fondamentale nella meccanica delle strutture. Il modello trave è fondato sull'ipotesi che il suo comportamento possa essere descritto riferendosi esclusivamente all'asse ed alle sezioni della trave.

Nella trave si considera un sistema di riferimento cartesiano, tale che l'asse z contiene l'asse della trave e gli assi x ed y giacciono sulla base della trave, con origine nel baricentro.

2.1 Cinematica

La cinematica della trave è definita dalla deformazione dell'asse e dalle rotazioni delle sezioni. Nella trave si possono distinguere due comportamenti cinematici: assiale e flessionale, come schematicamente illustrato in figura 2.2. Nel seguito viene trattato esclusivamente il problema piano della trave; infatti, posto il sistema di riferimento cartesiano illustrato in figura 2.2, si considera il caso in cui la trave si infletta nel piano yz .

La cinematica alla base della teoria tecnica della trave fu sviluppata da Eulero e da Bernoulli. In figura 2.3 è evidenziata la deformazione della tipica sezione della trave: la sezione all'ascissa generica z ha uno spostamento w_0 lungo l'asse z , uno spostamento v lungo l'asse y ed inoltre presenta una rotazione φ intorno all'asse x ,

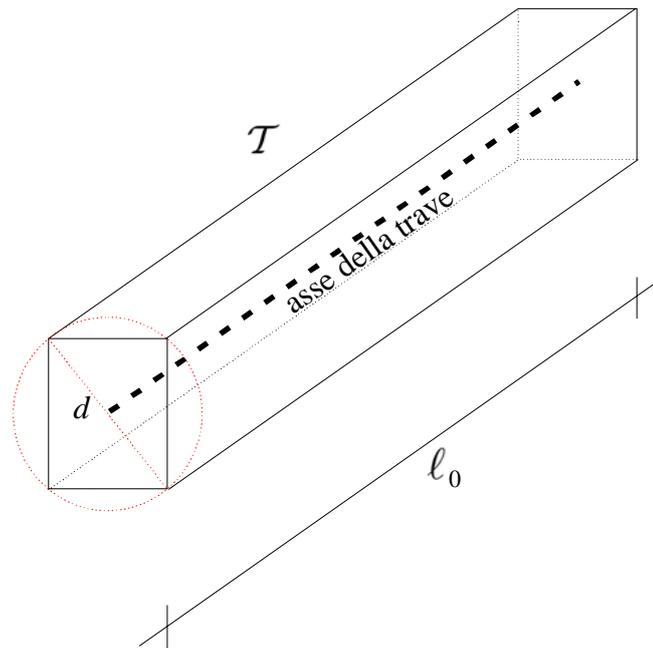


Figura 2.1: Schema della trave \mathcal{T} : dimensione caratteristica della sezione, lunghezza iniziale ed asse della trave.

ortogonale al piano yz . I parametri cinematici sono quindi lo spostamento assiale w_0 , l'inflessione v e la rotazione φ ; tali quantità sono funzioni esclusivamente dell'ascissa z , i.e. $w_0 = w_0(z)$, $v = v(z)$, $\varphi = \varphi(z)$.

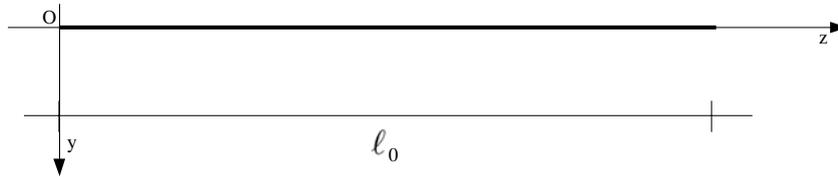
Si assume che la sezione retta all'ascissa z , inizialmente piana ed ortogonale alla linea d'asse della trave, a deformazione avvenuta sia ancora piana ed ortogonale alla deformata dell'asse della trave. Sulla base di tale ipotesi cinematica, detta di Eulero-Bernoulli, si desume che la rotazione della generica sezione retta della trave deve essere pari all'angolo che la tangente alla linea d'asse forma con l'asse z . Sulla base della piccolezza delle deformazioni, concetto ripreso e chiarito nel capitolo successivo, è possibile confondere i valori dell'angolo compreso tra la retta tangente e l'asse z , con il valore del coefficiente angolare. Tenendo allora conto che il coefficiente angolare della retta tangente la funzione $v(z)$ è la derivata di $v(z)$, si deduce:

$$\varphi = -v' \quad (2.1)$$

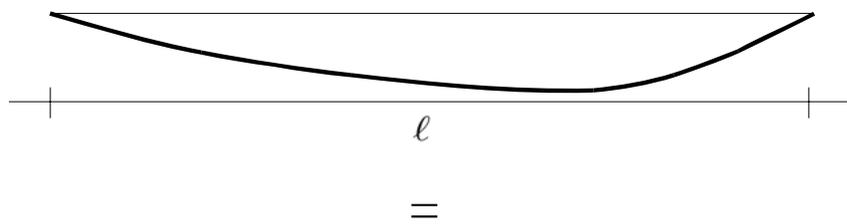
dove il segno meno assicura $\varphi > 0$ per rotazioni antiorarie.

Rigurdando la trave come un solido tridimensionale, è possibile calcolare lo spostamento di un generico punto della sezione retta della trave. Poichè la sezione retta subisce uno spostamento lungo l'asse y pari a v , se ne deduce che lo spostamento lungo l'asse y in ogni punto della sezione retta vale sempre v . D'altra parte,

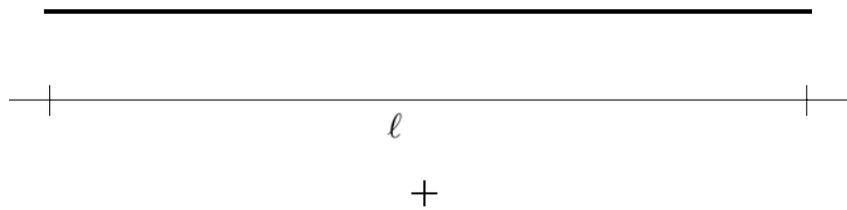
Configurazione iniziale della trave



Configurazione attuale della trave



Deformazione assiale



Deformazione flessionale

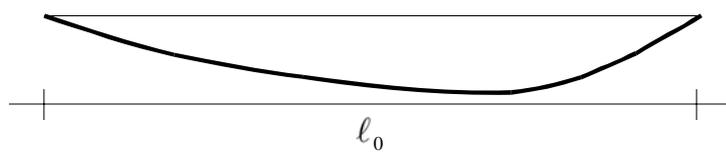


Figura 2.2: Cinematica della trave: deformazione assiale e flessionale.

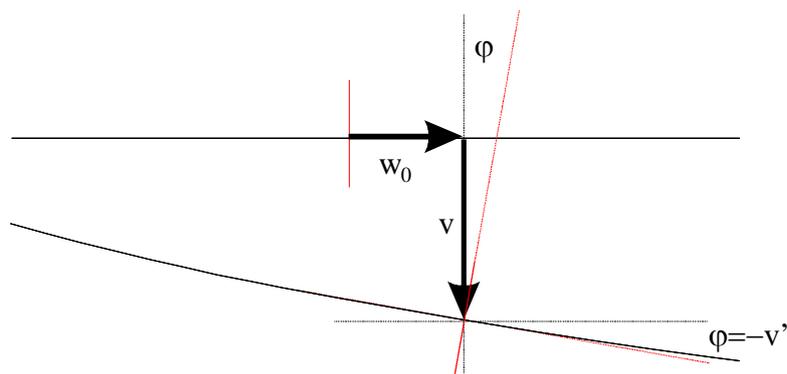


Figura 2.3: Parametri cinematici della trave per la generica sezione retta.

lo spostamento lungo l'asse z nel generico punto della sezione retta si ottiene come somma dell'effetto di w_0 , spostamento lungo z in corrispondenza dell'asse della trave, e di φ , rotazione della sezione:

$$w = w_0 + y\varphi = w_0 - y v' \quad (2.2)$$

In figura 2.4 è riportato un tratto di lunghezza finita Δz di trave. Per la generica sezione z i parametri cinematici valgono: $w_0 = w_0(z)$, $v = v(z)$, $\varphi = \varphi(z)$; mentre, per la sezione $z + \Delta z$ i parametri cinematici valgono: $w_0(z + \Delta z) = w_0 + \Delta w_0$, $v(z + \Delta z) = v + \Delta v$, $\varphi(z + \Delta z) = \varphi + \Delta\varphi$.

La variazione di spostamento lungo l'asse z vale $w_0(z + \Delta z) - w_0(z) = w_0 + \Delta w_0 - w_0 = \Delta w_0$. Si definisce deformazione assiale ε_0 il limite $\Delta z \rightarrow 0$ del rapporto tra la variazione di spostamento e l'incremento di ascissa Δz :

$$\varepsilon_0 = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w_0}{\Delta z} = \frac{dw_0}{dz} = w'_0 \quad (2.3)$$

dove l'apice ' indica la derivazione rispetto a z ; tale notazione non può indurre confusione in quanto, come evidenziato precedentemente, tutti i parametri cinematici introdotti dipendono esclusivamente dalla variabile z . Inoltre, si definisce la deformazione ε in corrispondenza del generico punto della trave come:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{dw}{dz} = w' \quad (2.4)$$

che, tenendo conto della formula (2.2), diventa:

$$\varepsilon = w'_0 + y \varphi' = w'_0 - y v'' \quad (2.5)$$

Assumendo che il tratto di trave di lunghezza Δz rappresentato in figura 2.4 nella configurazione deformata si atteggi secondo un arco di cerchio, si intende determinare il raggio di curvatura R di tale arco di cerchio, ovvero il valore della

curvatura $c = 1/R$ della inflessione della trave. Sulla base della ipotesi di spostamenti infinitesimi, la lunghezza dell'arco di cerchio di raggio R risulta pari a Δz ; ne consegue che vale la relazione $R \Delta\varphi = \Delta z$. La curvatura vale quindi:

$$c = \frac{1}{R} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta z} = \frac{d\varphi}{dz} = \varphi' \quad (2.6)$$

In definitiva, le equazioni che governano la deformazione della trave sono le seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0 &= w'_0 \\ \varphi &= -v' \\ c &= \varphi' \end{aligned} \right\} c = -v'' \quad (2.7)$$

Inoltre, tenendo conto delle (2.3) e (2.6), la deformazione (2.5) si determina come:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + y c \quad (2.8)$$

Le equazioni (2.5) e (2.6) sono le equazioni di congruenza della trave.

2.2 Equazioni di equilibrio

Si assume che la trave \mathcal{T} sia soggetta ad un sistema piano di sollecitazioni: forze agenti nel piano yz , coppie lungo l'asse x . In figura 2.5, è riportato lo schema. Il sistema di carichi agenti sulla trave è in equilibrio, ovvero soddisfa le equazioni cardinali della statica.

Sezionando la trave \mathcal{T} tramite un piano ortogonale all'asse, si definiscono due parti della trave: una parte \mathcal{T}_1 appartenente ad un semispazio definito dal piano, una seconda \mathcal{T}_2 appartenente all'altro semispazio, come illustrato in figura 2.5. Si individua dunque la sezione S all'ascissa z , di separazione tra la parte \mathcal{T}_1 e la parte \mathcal{T}_2 .

Considerando le sole azioni esterne agenti su \mathcal{T}_1 ovvero su \mathcal{T}_2 l'equilibrio non è assicurato; d'altra parte, poichè la trave era inizialmente in equilibrio, vuol dire che ogni sua parte deve essere in equilibrio; se ne deduce allora che attraverso la superficie di taglio devono agire azioni mutue tra \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 che ripristinino l'equilibrio.

Le azioni di scambio tra le parti della trave sono una forza risultante \mathbf{R} ed una coppia M , come riportato in figura 2.5. Si definiscono allora le seguenti caratteristiche della sollecitazione in corrispondenza della generica ascissa z della trave:

- T componente di \mathbf{R} in direzione y , taglio;
- N componente di \mathbf{R} in direzione z , sforzo normale;

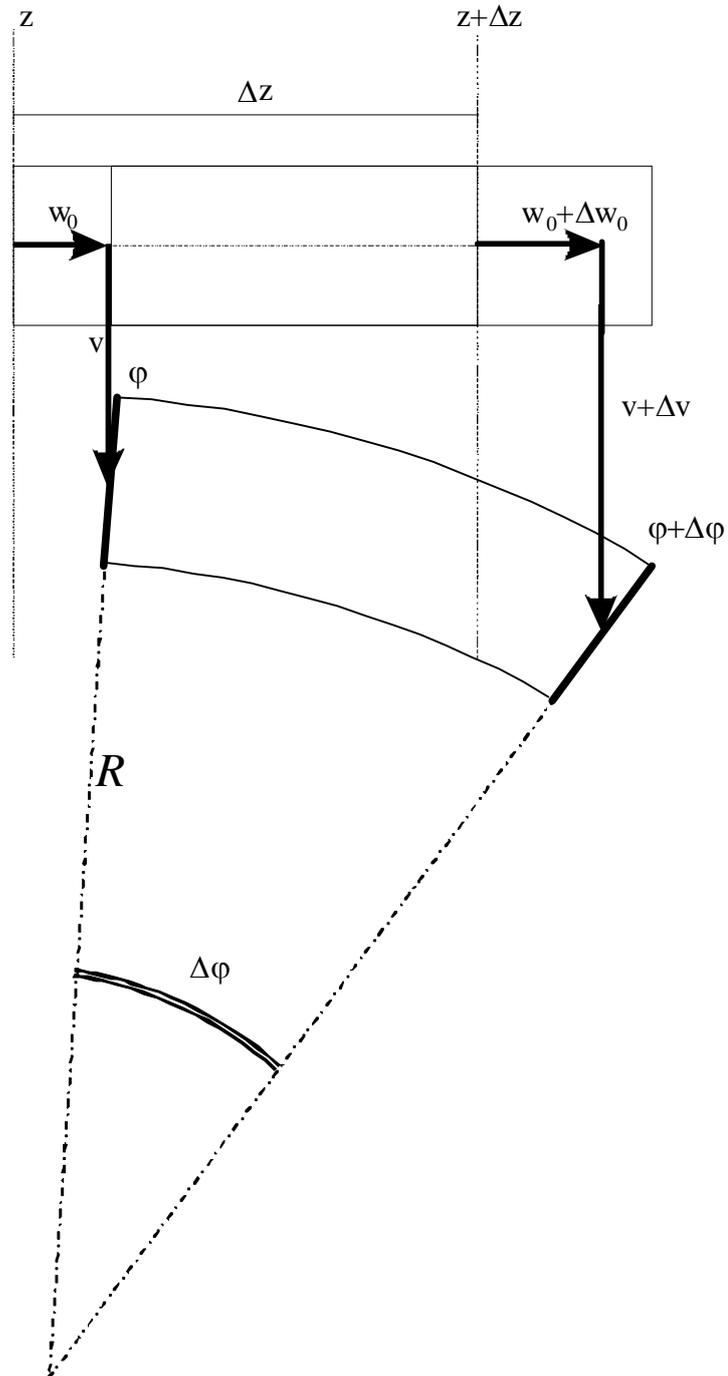


Figura 2.4: Deformazione di un generico tratto di trave di lunghezza Δz .

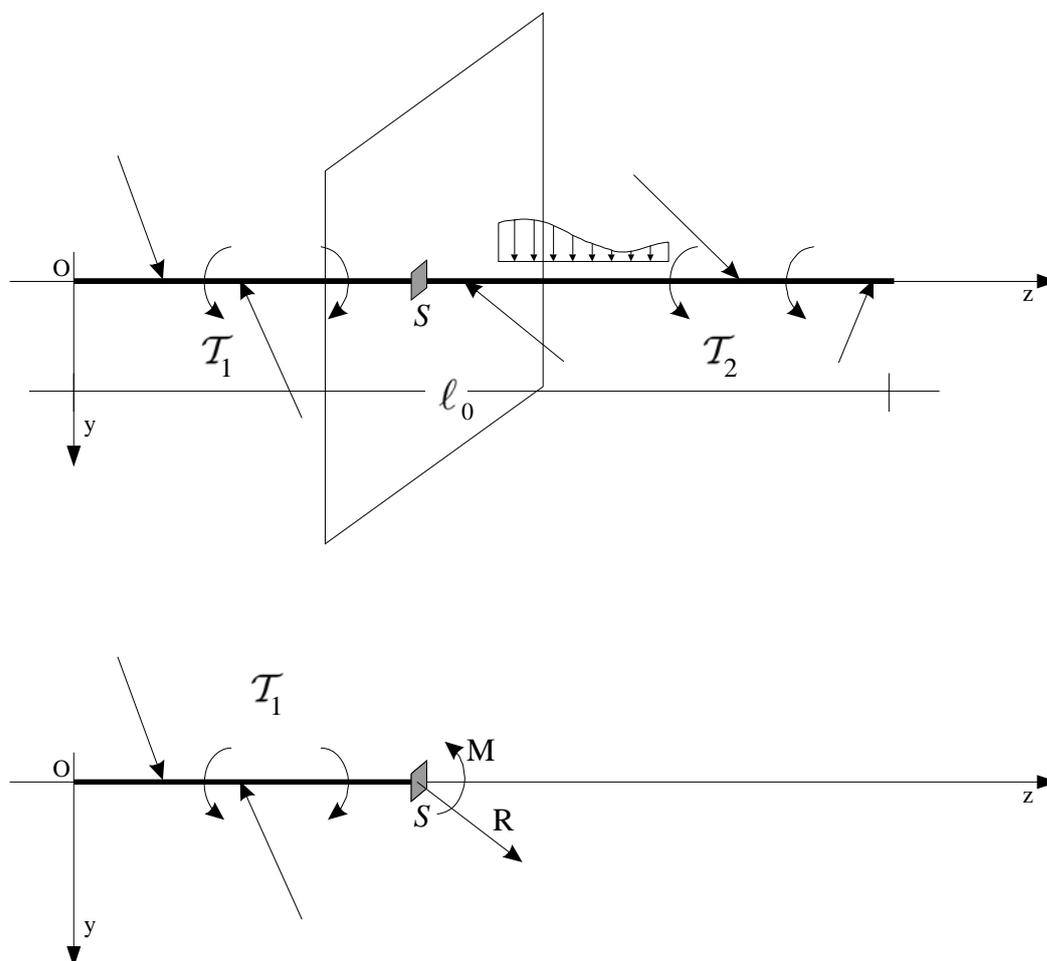


Figura 2.5: Sollecitazioni agenti sulla trave e risultante e momento risultante di interazione tra le parti della trave.

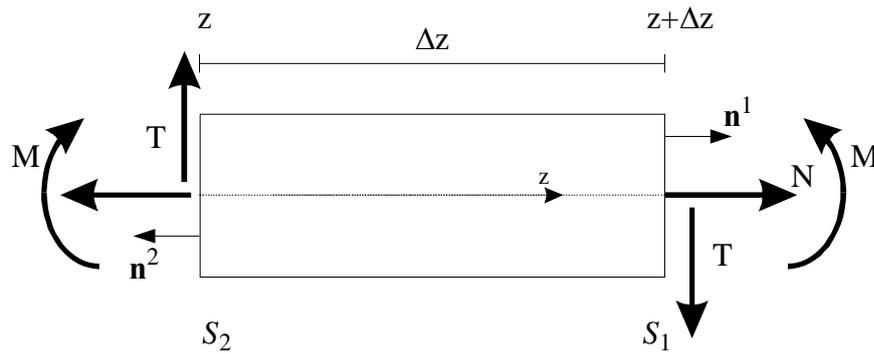


Figura 2.6: Caratteristiche della sollecitazione positive per il generico tratto di trave di lunghezza Δz .

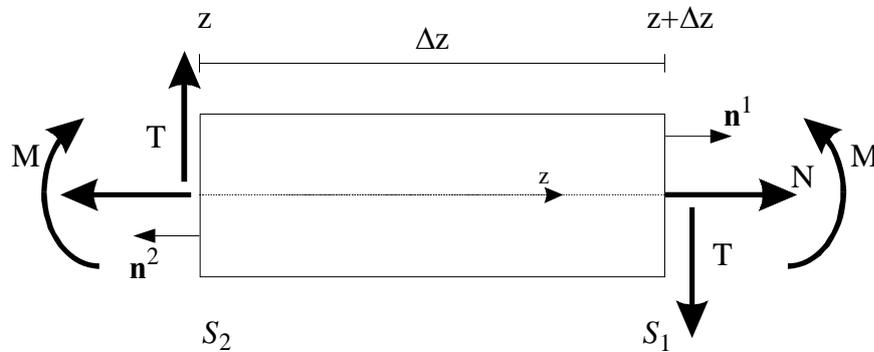


Figura 2.7: Caratteristiche della sollecitazione positive per il generico tratto di trave di lunghezza Δz .

- M momento flettente;

Si consideri ora un tratto di trave, delimitato dalle sezioni rette S_1 ed S_2 , nel quale le caratteristiche della sollecitazione siano costanti, come illustrato in figura 2.6. Si definisce quindi normale ad una sezione retta il versore uscente dal tratto di trave. Si distinguono nella figura 2.6 due versori uscenti, i.e. \mathbf{n}^1 ed \mathbf{n}^2 ; in particolare, \mathbf{n}^1 avendo lo stesso verso dell'asse z assegnato è detto positivo e, di conseguenza, S_1 è la sezione retta di normale positiva; al contrario \mathbf{n}^2 avendo verso opposto all'asse z assegnato è detto negativo e, di conseguenza, S_2 è la sezione retta di normale negativa.

In figura 2.6 sono riportate le caratteristiche della sollecitazione positive. In particolare, sulla sezione retta di normale positiva lo sforzo normale positivo ha il verso dell'asse z , il taglio positivo ha il verso dell'asse y , ed il momento positivo è antiorario. Al contrario, sulla sezione retta di normale negativa lo sforzo normale

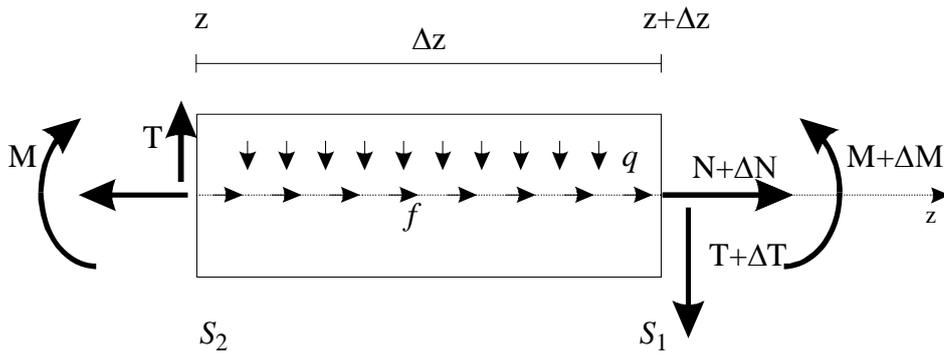


Figura 2.8: Equilibrio del tratto di trave di lunghezza Δz .

positivo ha il verso opposto all'asse z , il taglio positivo ha il verso opposto all'asse y , ed il momento positivo è orario.

Si consideri ora il caso in cui le caratteristiche della sollecitazione non sono costanti lungo l'asse della trave. In particolare, lungo la trave agiscono un carico distribuito assiale f , nel verso di z , e trasversale q , nel verso di y , come illustrato in figura 2.8; si pone inoltre:

- sezione S_2 all'ascissa z :
Taglio T , Sforzo Normale N , Momento Flettente M ,
- sezione S_1 all'ascissa $z + \Delta z$:
Taglio $T + \Delta T$, Sforzo Normale $N + \Delta N$, Momento Flettente $M + \Delta M$.

Facendo riferimento sempre alla figura 2.8, si determinano le seguenti equazioni di equilibrio del tratto di trave di lunghezza Δz :

- traslazione lungo l'asse z

$$N + \Delta N - N + f \Delta z = 0 \quad (2.9)$$

ovvero

$$\frac{\Delta N}{\Delta z} = -f \quad (2.10)$$

facendo il limite per $\Delta z \rightarrow 0$:

$$N' = -f \quad (2.11)$$

- traslazione lungo l'asse y

$$T + \Delta T - T + q \Delta z = 0 \quad (2.12)$$

ovvero

$$\frac{\Delta T}{\Delta z} = -q \quad (2.13)$$

facendo il limite per $\Delta z \rightarrow 0$:

$$T' = -q \quad (2.14)$$

- rotazione intorno al baricentro della sezione S_1

$$M + \Delta M - M + q \frac{\Delta z^2}{2} - T \Delta z - \Delta T \Delta z = 0 \quad (2.15)$$

ovvero

$$\frac{\Delta M}{\Delta z} - T + q \frac{\Delta z}{2} - \Delta T = 0 \quad (2.16)$$

facendo il limite per $\Delta z \rightarrow 0$:

$$M' = T \quad (2.17)$$

Derivando l'equazione (2.17) e tenendo conto della (2.14), si ottiene:

$$M'' = -q \quad (2.18)$$

Le equazioni (2.11), (2.14) e (2.17) sono le equazioni di equilibrio locale della trave, dette anche equazioni indefinite di equilibrio della trave.

2.3 Legame costitutivo

Si consideri una fibra di materiale di lunghezza Δz ed area ΔA . Sui due estremi della fibra agiscono due forze ΔF uguali ed opposte, che garantiscono l'equilibrio della fibra.

Per effetto dell'azione esterna, le due forze ΔF , la fibra subisce una variazione di lunghezza che, a deformazione avvenuta, vale $\widetilde{\Delta z}$. L'allungamento risulta allora:

$$\varepsilon_e = \frac{\widetilde{\Delta z} - \Delta z}{\Delta z} \quad (2.19)$$

dove il pedice $_e$ evidenzia che la fibra si è deformata grazie alla elasticità del materiale che la compone. Di conseguenza, la quantità ε_e è la deformazione elastica della fibra.

D'altra parte, si definisce tensione normale σ la quantità:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (2.20)$$

Al variare del valore della tensione normale σ si ha una variazione della deformazione ε_e . Il rapporto tra la tensione normale e la deformazione rappresenta una proprietà caratteristica del materiale di cui è costituito la fibra considerata. In particolare, tale rapporto è generalmente indicato con E e rappresenta il modulo di Young del materiale:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_e} \quad (2.21)$$

L'equazione (2.21) può essere riscritta nella forma:

$$\sigma = E\varepsilon_e \quad (2.22)$$

ed è nota come equazione di legame costitutivo. Si evidenzia che la deformazione subita dalla fibra è elastica, ovvero è dovuta all'elasticità del materiale impegnato.

Una volta definita la relazione (2.22) per la generica fibra, è possibile determinare le equazioni costitutive della trave. Infatti, considerando la trave come un fascio di fibre sulle quali agiscono le tensioni σ , lo sforzo normale ed il momento flettente si calcolano come la risultante ed il momento risultante delle tensioni sulla sezione:

$$N = \int_A \sigma \, dA \quad M = \int_A y\sigma \, dA \quad (2.23)$$

Sostituendo nelle due equazioni (2.23) la relazione costitutiva (2.22), si ottiene:

$$N = \int_A E\varepsilon_e \, dA \quad M = \int_A yE\varepsilon_e \, dA \quad (2.24)$$

Ricordando poi la relazione (2.8), si ha:

$$N = \int_A E(\varepsilon_{0e} + y c_e) \, dA = \int_A (E \varepsilon_{0e} + Ey c_e) \, dA = EA \varepsilon_{0e} + ES c_e = EA \varepsilon_{0e} \quad (2.25)$$

$$M = \int_A yE(\varepsilon_{0e} + y c_e) \, dA = \int_A (Ey \varepsilon_{0e} + Ey^2 c_e) \, dA = ES \varepsilon_{0e} + EI c_e = EI c_e \quad (2.26)$$

essendo S il momento statico rispetto all'asse x , che risulta nullo poichè x è baricentrico, I il momento d'inerzia rispetto all'asse x ed inoltre ε_{0e} e c_e la deformazione elastica assiale e la curvatura elastica della trave.

Le equazioni (2.25) e (2.26) rappresentano le relazioni costitutive globali della trave che legano gli enti cinematici deformazione elastica assiale ε_{0e} e curvatura c_e agli enti statici sforzo normale N e momento flettente M .

Si considera ora il caso in cui la deformazione assiale e la curvatura siano provocati non solo dalle caratteristiche della sollecitazione sforzo normale N e momento flettente M , ma anche da altre possibili azioni agenti sulla trave. A titolo d'esempio si può considerare il caso di una trave soggetta a variazione termica. Infatti, la differenza ΔT tra la temperatura attuale T e la temperatura di riferimento T_0 induce una deformazione anche con caratteristiche della sollecitazione nulle. In definitiva, si può supporre che la deformazione totale della trave sia ottenuta come somma della deformazione provocata da caratteristiche della sollecitazione, ε_{0e} e c_e , e della deformazione dovuta a variazioni termiche, ε_{0t} e c_t :

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{0e} + \varepsilon_{0t} \quad c = c_e + c_t \quad (2.27)$$

Il tipico tratto di trave di lunghezza Δz , soggetto ad una variazione costante di temperatura ΔT , subisce una variazione di lunghezza proporzionale a ΔT ed ad un coefficiente α , che dipende dal materiale:

$$\widetilde{\Delta z} - \Delta z = \alpha \Delta T \Delta z$$

per cui la deformazione assiale termica si determina come:

$$\varepsilon_{0t} = \frac{\widetilde{\Delta z} - \Delta z}{\Delta z} = \alpha \Delta T \quad (2.28)$$

Analogamente, si consideri il tratto di trave di lunghezza Δz , soggetto ad una variazione temperatura, tale che sul lato inferiore ($y = h_1 > 0$) la variazione di temperatura sia pari a ΔT_1 , mentre sul lato superiore ($y = -h_2 < 0$) la variazione di temperatura sia pari a ΔT_2 ; si assume inoltre che la variazione di temperatura vari linearmente lungo l'altezza totale della trave ($h = h_1 + h_2$):

$$\Delta T(y) = \frac{y(\Delta T_1 - \Delta T_2) + h_1\Delta T_2 + h_2\Delta T_1}{h}$$

La tipica fibra della trave, individuata dalla coordinata y nella sezione, subisce una deformazione assiale pari a:

$$\varepsilon_t(y) = \alpha \Delta T(y) = \alpha \frac{y(\Delta T_1 - \Delta T_2) + h_1\Delta T_2 + h_2\Delta T_1}{h} \quad (2.29)$$

che varia linearmente lungo l'altezza della trave. Tenendo conto della formula (2.8), si deduce che, per effetto della variazione termica, nella trave nasce una deformazione assiale ed una curvatura termica, definite come:

$$\varepsilon_{0t} = \alpha \frac{h_1\Delta T_2 + h_2\Delta T_1}{h} \quad c_t = \alpha \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{h} \quad (2.30)$$

In particolare, assumendo $\Delta T_1 = -\Delta T_2 = \Delta T/2$, si ha:

$$\varepsilon_{0t} = 0 \quad c_t = \alpha \frac{\Delta T}{h} \quad (2.31)$$

2.4 Problema dell'equilibrio elastico

In definitiva, le equazioni che governano il problema della trave sono le seguenti:

- congruenza

$$\varepsilon_0 = w'_0 \quad (2.32)$$

$$c = -v'' \quad (2.33)$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{0e} + \varepsilon_{0t} \quad (2.34)$$

$$c = c_e + c_t \quad (2.35)$$

- equilibrio

$$N' = -f \quad (2.36)$$

$$M'' = -q \quad (2.37)$$

- legame costitutivo

$$N = EA \varepsilon_{0e} \quad (2.38)$$

$$M = EI c_e \quad (2.39)$$

Per le (2.32), (2.34) e (2.38), la (2.36) diventa:

$$[EA (w'_0 - \varepsilon_{0t})]' = -f \quad (2.40)$$

Analogamente, per le (2.33), (2.35) e (2.39), la (2.37) diventa:

$$[EI (v'' + c_t)]'' = q \quad (2.41)$$

Le equazioni differenziali (2.40) e (2.41) rappresentano le equazioni del problema dell'equilibrio elastico della trave soggetta a sforzo normale ed a momento flettente, dette anche equazioni della linea elastica. Si evidenzia che tali equazioni sono completamente disaccoppiate; infatti il problema assiale si può risolvere tramite la (2.40) ignorando completamente il problema flessionale; analogamente, il problema flessionale si può risolvere tramite la (2.41) ignorando completamente il problema assiale.

In molti casi non sono presenti deformazioni termiche nella trave, per cui si ha $\varepsilon_0 = \varepsilon_{0e}$ e $c = c_e$.

Le deformazioni e le caratteristiche della sollecitazione per strutture sia isostatiche che iperstatiche possono essere determinate risolvendo le equazioni (2.40) e (2.41) con opportune condizioni al contorno.

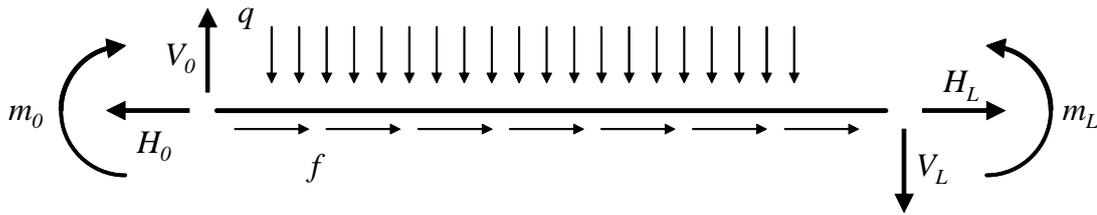


Figura 2.9: Trave libera nel piano soggetta a carichi distribuiti nel campo e concentrati alle estremità.

Si evidenzia che nel caso di travature isostatiche le equazioni dell'equilibrio elastico (2.32)-(2.39) si possono risolvere disaccoppiando il problema dell'equilibrio dalla cinematica. Infatti, per travi isostatiche, ovvero staticamente determinate è possibile determinare le caratteristiche della sollecitazione risolvendo le equazioni differenziali (2.36) e (2.37) considerando le opportune condizioni al contorno. Noti che siano lo sforzo normale ed il momento flettente si determinano la deformazione assiale e la curvatura elastica dalle equazioni di legame costitutivo (2.38) e (2.39). La deformazione assiale totale e la curvatura totale è quindi determinata tramite le relazioni (2.34) e (2.35). Infine integrando le equazioni differenziali (2.32) e (2.33) con opportune condizioni al contorno, si ricava la deformata della trave.

Nel caso di strutture iperstatiche non è possibile disaccoppiare il problema dell'equilibrio dalla cinematica, e devono essere risolte tramite le equazioni dell'equilibrio elastico (2.40) e (2.41).

2.5 Principio dei lavori virtuali

Si consideri una generica trave, per ipotesi libera nel piano, soggetta a carichi distribuiti assiali f e trasversali q ed ad azioni sulle sezioni terminali H_0, V_0, m_0 per $z = 0$ e H_L, V_L, m_L per $z = L$, come illustrato in figura 2.9.

Sulla trave si considerano:

- un sistema di caratteristiche della sollecitazione in equilibrio con le forze ap-

plicate, ovvero

$$\begin{aligned} N' &= -f \\ T' &= -q \\ M' &= T \end{aligned} \quad z \in]0, L[\quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} N(0) &= H_0 \\ T(0) &= V_0 \\ M(0) &= m_0 \end{aligned} \quad z = 0 \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} N(L) &= H_L \\ T(L) &= V_L \\ M(L) &= m_L \end{aligned} \quad z = L \quad (2.44)$$

- un campo di spostamenti congruente con le deformazioni, ovvero

$$\begin{aligned} w'_0 &= \varepsilon_0 \\ v' &= -\varphi \\ \varphi' &= c \end{aligned} \quad z \in]0, L[\quad (2.45)$$

Si evidenzia che non sussiste alcuna legame di tipo causa effetto tra le caratteristiche della sollecitazione equilibrate con i carichi esterni ed il campo di spostamenti congruenti con le deformazioni.

E' possibile calcolare ora il lavoro virtuale che le forze esterne applicate alla trave svolgono per gli spostamenti considerati. Si ottiene allora:

$$\begin{aligned} L_{ve} &= \int_0^L f w dz + H_L w(L) - H_0 w(0) + \\ &\int_0^L q v dz + V_L v(L) - V_0 v(0) + m_L \varphi(L) - m_0 \varphi(0) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Tenendo conto delle prime due equazioni di equilibrio delle (2.42), l'equazione (2.46) fornisce:

$$\begin{aligned} L_{ve} &= - \int_0^L N' w dz + H_L w(L) - H_0 w(0) + \\ &- \int_0^L T' v dz + V_L v(L) - V_0 v(0) + m_L \varphi(L) - m_0 \varphi(0) \end{aligned} \quad (2.47)$$

che integrata per parti diventa:

$$L_{ve} = \int_0^L N w' dz - [N(L)w(L) - N(0)w(0)] + H_L w(L) - H_0 w(0) + \quad (2.48)$$

$$\int_0^L T v' dz - [T(L)v(L) - T(0)v(0)] + V_L v(L) - V_0 v(0) + m_L \varphi(L) - m_0 \varphi(0)$$

Per le equazioni (2.43) e (2.44), la (2.48) fornisce:

$$L_{ve} = \int_0^L N w' dz + \int_0^L T v' dz + m_L \varphi(L) - m_0 \varphi(0)$$

che per la terza delle (2.42), integrando per parti e tenendo conto delle (2.43) e (2.44), fornisce:

$$L_{ve} = \int_0^L N w' dz + \int_0^L M' v' dz + m_L \varphi(L) - m_0 \varphi(0) \quad (2.49)$$

$$= \int_0^L N w' dz - \int_0^L M v'' dz + [M(L)v'(L) - M(0)v'(0)] + m_L \varphi(L) - m_0 \varphi(0)$$

$$= \int_0^L N w' dz - \int_0^L M v'' dz$$

Applicando le equazioni di congruenza (2.45), si ha:

$$L_{ve} = \int_0^L N \varepsilon_0 dz + \int_0^L M c dz \quad (2.50)$$

La quantità a secondo membro della (2.50) è il lavoro virtuale delle caratteristiche della sollecitazione per gli enti deformazione della trave. Tale quantità viene definita lavoro virtuale interno:

$$L_{ve} = \int_0^L N \varepsilon_0 dz + \int_0^L M c dz = L_{vi} \quad (2.51)$$

L'equazione (2.51) indica che il lavoro virtuale esterno di un sistema di forze equilibrato con le caratteristiche della sollecitazione per un campo di spostamenti congruenti con gli enti di deformazione è uguale al lavoro virtuale interno compiuto dalle sollecitazioni per le deformazioni.



Figura 2.10: Mensola caricata con una forza F sull'estremo libero

2.6 Esercizi

2.6.1 Esercizio 1

Si consideri la trave isostatica riportata in figura 2.10. In particolare, si affronta esclusivamente il problema flessionale, trascurando l'aspetto assiale. Vista l'isostaticità, la struttura può essere risolta seguendo due possibili procedure.

1^a procedura

Si risolve l'equazione di equilibrio (2.37):

$$M = Az + B$$

Le costanti di integrazione A e B si determinano imponendo opportune condizioni al contorno di tipo statico:

- Nodo A: non sono noti enti statici, ovvero non si conoscono i valori nè del taglio nè del momento flettente,
- Nodo B: sono noti entrambi gli enti statici

$$\begin{aligned} M(l) = 0 & \Rightarrow A l + B = 0 \\ T(l) = M'(l) = F & \Rightarrow A = F \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema di equazioni si ottiene:

$$A = F \quad B = -F l$$

e quindi

$$M = F(z - l)$$

Tramite l'equazione di legame (2.39) si valuta la curvatura:

$$c = c_e = \frac{M}{EI} = \frac{F}{EI}(z - l)$$

Nota la curvatura, l'inflessione si calcola integrando l'equazione differenziale (2.33):

$$v'' = -\frac{F}{EI} (z - l) \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{F}{2EI} \left(\frac{1}{3} z^3 - l z^2 \right) + Cz + D$$

Le costanti di integrazione C e D si determinano imponendo opportune condizioni al contorno di tipo cinematico:

- Nodo A: sono nulli i valori dello spostamento trasversale e della rotazione,

$$\begin{aligned} v(0) = 0 & \quad \Rightarrow \quad D = 0 \\ \varphi(0) = -v'(0) = 0 & \quad \Rightarrow \quad C = 0 \end{aligned}$$

- Nodo B: non sono noti i valori degli enti cinematici.

In definitiva la soluzione della struttura in oggetto è:

$$\begin{aligned} v &= -\frac{F}{2EI} \left(\frac{1}{3} z^3 - l z^2 \right) \\ \varphi &= \frac{F}{2EI} (z^2 - 2l z) \\ c &= \frac{F}{EI} (z - l) \\ M &= F(z - l) \\ T &= F \end{aligned}$$

2^a procedura

Si risolve l'equazione di equilibrio (2.41):

$$v = C_1 z^3 + C_2 z^2 + C_3 z + C_4$$

da cui si ricava:

$$\begin{aligned} \varphi &= -(3C_1 z^2 + 2C_2 z + C_3) \\ c &= -(6C_1 z + 2C_2) \\ M &= -EI (6C_1 z + 2C_2) \\ T &= -EI (6C_1) \end{aligned}$$

Le costanti di integrazione si determinano imponendo condizioni al contorno di tipo sia statico che cinematico. In particolare si ha:

- Nodo A: sono nulli i valori dello spostamento trasversale e della rotazione,

$$\begin{aligned} v(0) = 0 & \quad \Rightarrow \quad C_4 = 0 \\ \varphi(0) = -v'(0) = 0 & \quad \Rightarrow \quad C_3 = 0 \end{aligned}$$

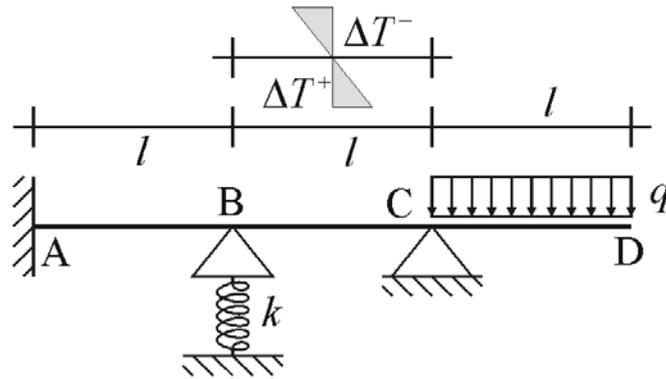


Figura 2.11: Schema della struttura dell'esercizio 2.

- Nodo B: sono noti entrambi gli enti statici

$$\begin{aligned} M(l) = 0 & \Rightarrow -EI(6C_1l + 2C_2) = 0 \\ T(l) = M'(l) = F & \Rightarrow -EI(6C_1) = F \end{aligned}$$

Risolvendo si ottiene:

$$C_1 = -\frac{F}{6EI} \quad C_2 = \frac{F}{2EI}l \quad C_3 = 0 \quad C_4 = 0$$

e quindi

$$v = -\frac{F}{2EI} \left(\frac{1}{3}z^3 - lz^2 \right)$$

2.6.2 Esercizio 2

Si determini la soluzione della struttura in figura 2.11 utilizzando l'equazione della linea elastica.

La struttura si compone di 3 tratti, per ognuno di questi tratti si applica l'equazione differenziale della linea elastica (2.41), assumendo EI costante e considerando una deformazione termica costante solo nel secondo tratto con $c_t = 2\alpha\Delta T/h$, essendo α il coefficiente di dilatazione termica del materiale ed h l'altezza della trave:

- primo tratto da A a B, sistema di riferimento z_1 con origine in A

$$EI v_1'''' = 0$$

- secondo tratto da B a C, sistema di riferimento z_2 con origine in B

$$EI v_2'''' = 0$$

- terzo tratto da C a D, sistema di riferimento z_3 con origine in C

$$EI v_3'''' = q$$

Le soluzioni delle 3 equazioni differenziali sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} v_1 &= A_1 z_1^3 + B_1 z_1^2 + C_1 z_1 + D_1 \\ v_2 &= A_2 z_2^3 + B_2 z_2^2 + C_2 z_2 + D_2 \\ v_3 &= A_3 z_3^3 + B_3 z_3^2 + C_3 z_3 + D_3 + q \frac{z_3^4}{24EI} \end{aligned}$$

da cui si ricava:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -v_1' = -(3A_1 z_1^2 + 2B_1 z_1 + C_1) \\ \varphi_2 &= -v_2' = -(3A_2 z_2^2 + 2B_2 z_2 + C_2) \\ \varphi_3 &= -v_3' = -\left(3A_3 z_3^2 + 2B_3 z_3 + C_3 + q \frac{z_3^3}{6EI}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= -EI v_1'' = -EI (6A_1 z_1 + 2B_1) \\ M_2 &= -EI (v_2'' + c_t) = -EI (6A_2 z_2 + 2B_2 + c_t) \\ M_3 &= -EI v_3'' = -EI \left(6A_3 z_3 + 2B_3 + q \frac{z_3^2}{2EI}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1 &= -EI v_1''' = -EI (6A_1) \\ T_2 &= -EI v_2''' = -EI (6A_2) \\ T_3 &= -EI v_3''' = -EI \left(6A_3 + q \frac{z_3}{EI}\right) \end{aligned}$$

Le costanti di integrazione $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2, A_3, B_3, C_3, D_3$ si determinano imponendo le opportune condizioni al contorno.

- Nodo A- nell'incastro si devono scrivere 2 condizioni di tipo cinematico, la prima sugli spostamenti verticali, la seconda condizione sulle rotazioni:

$$\begin{aligned} v_1(0) &= 0 \\ \varphi_1(0) &= 0 \end{aligned}$$

- Nodo B- in corrispondenza del carrello elastico in B si devono scrivere 4 condizioni al contorno, una sugli abbassamenti, una sulle rotazioni, una sul momento flettente ed una sul taglio:

$$\begin{aligned}v_1(l) &= v_2(0) \\ \varphi_1(l) &= \varphi_2(0) \\ M_1(l) &= M_2(0) \\ T_1(l) + kv_1(l) &= T_2(0)\end{aligned}$$

dove k è la rigidezza del vincolo elastico in B.

- Nodo C- per il vincolo in C devono essere scritte 4 equazioni:

$$\begin{aligned}v_2(l) &= 0 \\ v_3(0) &= 0 \\ \varphi_2(l) &= \varphi_3(0) \\ M_2(l) &= M_3(0)\end{aligned}$$

- Nodo D- in corrispondenza dell'estremo libero si scrivono 2 equazioni:

$$\begin{aligned}M_3(l) &= 0 \\ T_3(l) &= 0\end{aligned}$$

In definitiva si ottiene il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{aligned}D_1 &= 0 \\ C_1 &= 0 \\ A_1l^3 + B_1l^2 + C_1l + D_1 &= D_2 \\ 3A_1l^2 + 2B_1l + C_1 &= C_2 \\ 6A_1l + 2B_1 &= 2B_2 + c_t \\ 6A_1 - \frac{k}{EI}(A_1l^3 + B_1l^2 + C_1l + D_1) &= 6A_2 \\ A_2l^3 + B_2l^2 + C_2l + D_2 &= 0 \\ D_3 &= 0 \\ 3A_2l^2 + 2B_2l + C_2 &= C_3 \\ 6A_2l + 2B_2 + c_t &= 2B_3 \\ 6A_3l + 2B_3 + q\frac{l^2}{2EI} &= 0 \\ 6A_3 + q\frac{l}{EI} &= 0\end{aligned}$$

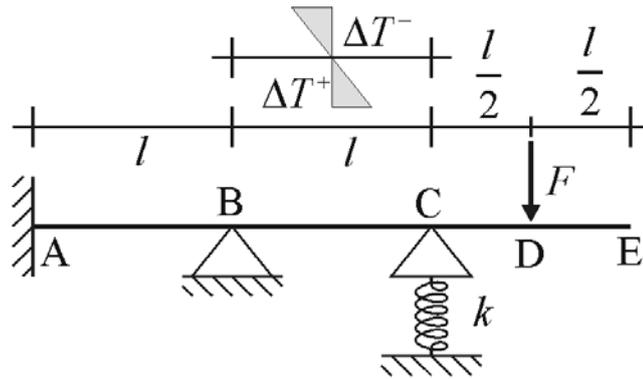


Figura 2.12: Schema della struttura dell'esercizio 3.

ovvero, in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 l^3 & l^2 & l & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 3l^2 & 2l & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 6l & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 6 + \beta l^3 & \beta l^2 & \beta l & \beta & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & l^3 & l^2 & l & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 3l^2 & 2l & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 6l & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6l & 2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{pmatrix}
 A_1 \\
 B_1 \\
 C_1 \\
 D_1 \\
 A_2 \\
 B_2 \\
 C_2 \\
 D_2 \\
 A_3 \\
 B_3 \\
 C_3 \\
 D_3
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 c_t \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 -c_t \\
 \frac{\gamma l}{2} \\
 \gamma
 \end{pmatrix}$$

dove $\beta = -k/EI$ e $\gamma = -ql/EI$.

2.6.3 Esercizio 3

Si determini la soluzione della struttura in figura 2.12 utilizzando l'equazione della linea elastica.

La struttura si compone di 4 tratti, per ognuno di questi tratti si applica l'equazione differenziale della linea elastica (2.41), assumendo EI costante e considerando una deformazione termica costante solo nel secondo tratto con $c_t = 2\alpha\Delta T/h$, essendo α il coefficiente di dilatazione termica del materiale ed h l'altezza della trave:

- primo tratto da A a B, sistema di riferimento z_1 con origine in A

$$EI v_1'''' = 0$$

- secondo tratto da B a C, sistema di riferimento z_2 con origine in B

$$EI v_2'''' = 0$$

- terzo tratto da C a D, sistema di riferimento z_3 con origine in C

$$EI v_3'''' = 0$$

- quarto tratto da D a E, sistema di riferimento z_4 con origine in D

$$EI v_4'''' = 0$$

Le soluzioni delle 3 equazioni differenziali sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} v_1 &= A_1 z_1^3 + B_1 z_1^2 + C_1 z_1 + D_1 \\ v_2 &= A_2 z_2^3 + B_2 z_2^2 + C_2 z_2 + D_2 \\ v_3 &= A_3 z_3^3 + B_3 z_3^2 + C_3 z_3 + D_3 \\ v_4 &= A_4 z_4^3 + B_4 z_4^2 + C_4 z_4 + D_4 \end{aligned}$$

da cui si ricava:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -v_1' = -(3A_1 z_1^2 + 2B_1 z_1 + C_1) \\ \varphi_2 &= -v_2' = -(3A_2 z_2^2 + 2B_2 z_2 + C_2) \\ \varphi_3 &= -v_3' = -(3A_3 z_3^2 + 2B_3 z_3 + C_3) \\ \varphi_4 &= -v_4' = -(3A_4 z_4^2 + 2B_4 z_4 + C_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= -EI v_1'' = -EI (6A_1 z_1 + 2B_1) \\ M_2 &= -EI (v_2'' + c_t) = -EI (6A_2 z_2 + 2B_2 + c_t) \\ M_3 &= -EI v_3'' = -EI (6A_3 z_3 + 2B_3) \\ M_4 &= -EI v_4'' = -EI (6A_4 z_4 + 2B_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1 &= -EI v_1''' = -EI (6A_1) \\ T_2 &= -EI v_2''' = -EI (6A_2) \\ T_3 &= -EI v_3''' = -EI (6A_3) \\ T_4 &= -EI v_4''' = -EI (6A_4) \end{aligned}$$

Le costanti di integrazione $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2, A_3, B_3, C_3, D_3, A_4, B_4, C_4, D_4$ si determinano imponendo le opportune condizioni al contorno.

- Nodo A:

$$\begin{aligned}v_1(0) &= 0 \\ \varphi_1(0) &= 0\end{aligned}$$

- Nodo B:

$$\begin{aligned}v_1(l) &= 0 \\ v_2(0) &= 0 \\ \varphi_1(l) &= \varphi_2(0) \\ M_1(l) &= M_2(0)\end{aligned}$$

- Nodo C:

$$\begin{aligned}v_2(l) &= v_3(0) \\ \varphi_2(l) &= \varphi_3(0) \\ M_2(l) &= M_3(0) \\ T_2(l) + kv_2(l) &= T_3(0)\end{aligned}$$

dove k è la rigidezza del vincolo elastico in C.

- Nodo D:

$$\begin{aligned}v_3(l) &= v_4(0) \\ \varphi_3(l) &= \varphi_4(0) \\ M_3(l) &= M_4(0) \\ T_3(l) &= T_4(0) + F\end{aligned}$$

- Nodo E:

$$\begin{aligned}M_4(l) &= 0 \\ T_4(l) &= 0\end{aligned}$$

In definitiva, esprimendo le rotazioni, i momenti flettenti ed i tagli in funzione delle derivate dell'inflessione dei singoli tratti, si ottiene un sistema di 16 equazioni che permette di determinare le 16 costanti di integrazione.

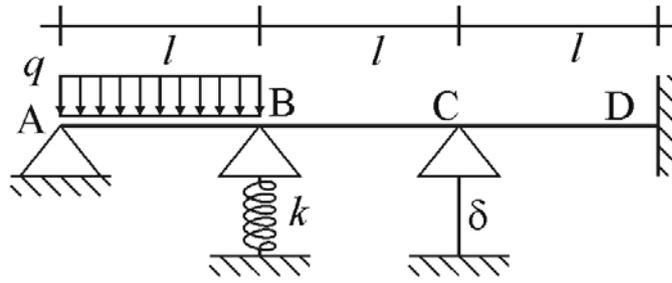


Figura 2.13: Schema della struttura dell'esercizio 4.

2.6.4 Esercizio 4

Si determini la soluzione della struttura in figura 2.13 utilizzando l'equazione della linea elastica.

La struttura si compone di 3 tratti, per ognuno di questi tratti si applica l'equazione differenziale della linea elastica (2.41), assumendo EI costante:

- primo tratto da A a B, sistema di riferimento z_1 con origine in A

$$EI v_1'''' = q$$

- secondo tratto da B a C, sistema di riferimento z_2 con origine in B

$$EI v_2'''' = 0$$

- terzo tratto da C a D, sistema di riferimento z_3 con origine in C

$$EI v_3'''' = 0$$

Le soluzioni delle 3 equazioni differenziali sono rispettivamente:

$$v_1 = A_1 z_1^3 + B_1 z_1^2 + C_1 z_1 + D_1 + q \frac{z_1^4}{24EI}$$

$$v_2 = A_2 z_2^3 + B_2 z_2^2 + C_2 z_2 + D_2$$

$$v_3 = A_3 z_3^3 + B_3 z_3^2 + C_3 z_3 + D_3$$

da cui si ricava:

$$\varphi_1 = -v_1' = - \left(3A_1 z_1^2 + 2B_1 z_1 + C_1 + q \frac{z_1^3}{6EI} \right)$$

$$\varphi_2 = -v_2' = - (3A_2 z_2^2 + 2B_2 z_2 + C_2)$$

$$\varphi_3 = -v_3' = - (3A_3 z_3^2 + 2B_3 z_3 + C_3)$$

$$M_1 = -EIv_1'' = -EI \left(6A_1z_1 + 2B_1 + q\frac{z_1^2}{2EI} \right)$$

$$M_2 = -EIv_2'' = -EI(6A_2z_2 + 2B_2)$$

$$M_3 = -EIv_3'' = -EI(6A_3z_3 + 2B_3)$$

$$T_1 = -EIv_1''' = -EI \left(6A_1 + q\frac{z_1}{EI} \right)$$

$$T_2 = -EIv_2''' = -EI(6A_2)$$

$$T_3 = -EIv_3''' = -EI(6A_3)$$

Le costanti di integrazione $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2, A_3, B_3, C_3, D_3$ si determinano imponendo le opportune condizioni al contorno.

- Nodo A:

$$\begin{aligned} v_1(0) &= 0 \\ M_1(0) &= 0 \end{aligned}$$

- Nodo B:

$$\begin{aligned} v_1(l) &= v_2(0) \\ \varphi_1(l) &= \varphi_2(0) \\ M_1(l) &= M_2(0) \\ T_1(l) + kv_1(l) &= T_2(0) \end{aligned}$$

dove k è la rigidezza del vincolo elastico in B.

- Nodo C:

$$\begin{aligned} v_2(l) &= \delta \\ v_3(0) &= \delta \\ \varphi_2(l) &= \varphi_3(0) \\ M_2(l) &= M_3(0) \end{aligned}$$

- Nodo D:

$$\begin{aligned} v_3(l) &= 0 \\ \varphi_3(l) &= 0 \end{aligned}$$

In definitiva, esprimendo le rotazioni, i momenti flettenti ed i tagli in funzione delle derivate dell'inflessione dei singoli tratti, si ottiene un sistema di 12 equazioni che permette di determinare le 12 costanti di integrazione.

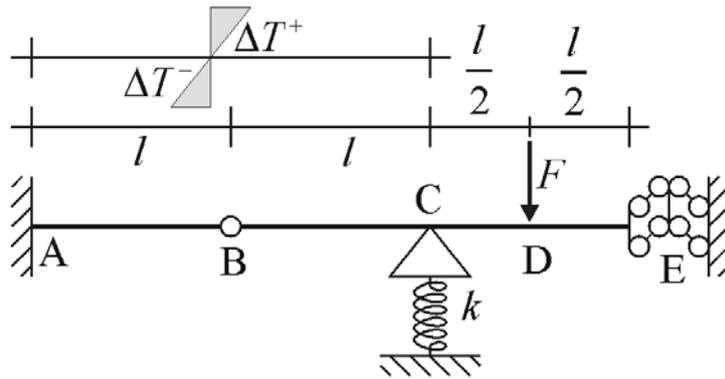


Figura 2.14: Schema della struttura dell'esercizio 4.

2.6.5 Esercizio 5

Si determini la soluzione della struttura in figura 2.14 utilizzando l'equazione della linea elastica.

La struttura si compone di 4 tratti, per ognuno di questi tratti si applica l'equazione differenziale della linea elastica (2.41), assumendo EI costante e considerando una deformazione termica costante solo nel secondo tratto con $c_t = 2\alpha\Delta T/h$, essendo α il coefficiente di dilatazione termica del materiale ed h l'altezza della trave:

- primo tratto da A a B, sistema di riferimento z_1 con origine in A

$$EI v_1'''' = 0$$

- secondo tratto da B a C, sistema di riferimento z_2 con origine in B

$$EI v_2'''' = 0$$

- terzo tratto da C a D, sistema di riferimento z_3 con origine in C

$$EI v_3'''' = 0$$

- quarto tratto da D a E, sistema di riferimento z_4 con origine in D

$$EI v_4'''' = 0$$

Le soluzioni delle 3 equazioni differenziali sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} v_1 &= A_1 z_1^3 + B_1 z_1^2 + C_1 z_1 + D_1 \\ v_2 &= A_2 z_2^3 + B_2 z_2^2 + C_2 z_2 + D_2 \\ v_3 &= A_3 z_3^3 + B_3 z_3^2 + C_3 z_3 + D_3 \\ v_4 &= A_4 z_4^3 + B_4 z_4^2 + C_4 z_4 + D_4 \end{aligned}$$

da cui si ricava:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -v_1' = -(3A_1 z_1^2 + 2B_1 z_1 + C_1) \\ \varphi_2 &= -v_2' = -(3A_2 z_2^2 + 2B_2 z_2 + C_2) \\ \varphi_3 &= -v_3' = -(3A_3 z_3^2 + 2B_3 z_3 + C_3) \\ \varphi_4 &= -v_4' = -(3A_4 z_4^2 + 2B_4 z_4 + C_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= -EI(v_1'' + c_t) = -EI(6A_1 z_1 + 2B_1 + c_t) \\ M_2 &= -EI(v_2'' + c_t) = -EI(6A_2 z_2 + 2B_2 + c_t) \\ M_3 &= -EIv_3'' = -EI(6A_3 z_3 + 2B_3) \\ M_4 &= -EIv_4'' = -EI(6A_4 z_4 + 2B_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1 &= -EIv_1''' = -EI(6A_1) \\ T_2 &= -EIv_2''' = -EI(6A_2) \\ T_3 &= -EIv_3''' = -EI(6A_3) \\ T_4 &= -EIv_4''' = -EI(6A_4) \end{aligned}$$

Le costanti di integrazione $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2, A_3, B_3, C_3, D_3, A_4, B_4, C_4, D_4$ si determinano imponendo le opportune condizioni al contorno.

- Nodo A:

$$\begin{aligned} v_1(0) &= 0 \\ \varphi_1(0) &= 0 \end{aligned}$$

- Nodo B:

$$\begin{aligned} v_1(l) &= v_2(0) \\ M_1(l) &= 0 \\ M_2(0) &= 0 \\ T_1(l) &= T_2(0) \end{aligned}$$

- Nodo C:

$$\begin{aligned}v_2(l) &= v_3(0) \\ \varphi_2(l) &= \varphi_3(0) \\ M_2(l) &= M_3(0) \\ T_2(l) + kv_2(l) &= T_3(0)\end{aligned}$$

dove k è la rigidezza del vincolo elastico in C.

- Nodo D:

$$\begin{aligned}v_3(l) &= v_4(0) \\ \varphi_3(l) &= \varphi_4(0) \\ M_3(l) &= M_4(0) \\ T_3(l) &= T_4(0) + F\end{aligned}$$

- Nodo E:

$$\begin{aligned}\varphi_4(l) &= 0 \\ T_4(l) &= 0\end{aligned}$$

In definitiva, esprimendo le rotazioni, i momenti flettenti ed i tagli in funzione delle derivate dell'inflexione dei singoli tratti, si ottiene un sistema di 16 equazioni che permette di determinare le 16 costanti di integrazione.

Capitolo 3

ANALISI DELLA DEFORMAZIONE

Lo studio della deformazione viene affrontato prescindendo dalle cause che l'hanno prodotta. Per deformazione s'intende il processo di cambiamento di forma del corpo (supposto continuo e deformabile).

3.1 Definizione di mezzo continuo e deformabile

In letteratura sono fornite diverse definizioni di corpo continuo, di seguito se ne riportano alcune:

- si suppone che il materiale costitutivo sia distribuito con continuità nel volume occupato dal corpo e che ivi riempra completamente lo spazio [MASE, *Meccanica dei continui*];
- un sistema materiale qualsiasi potrà essere riguardato come continuo qualora si identifichino i suoi punti materiali con i punti di una porzione dello spazio continuo occupata dal sistema in un determinato istante. Più precisamente, intenderemo come continuo un insieme di punti materiali, dotato di una misura d'insieme definito dalla massa m , supposta una funzione assolutamente continua alla quale resti così associata in ogni istante di tempo una massa specifica [BALDACCI, *Scienza delle costruzioni*];
- s'intende come corpo continuo una regione regolare dello spazio euclideo E , cioè un insieme aperto connesso di E , la cui frontiera sia costituita da un numero finito di superfici regolari [ASCIONE - GRIMALDI, *Meccanica dei continui*];

- un sistema materiale si dice continuo quando sussiste una corrispondenza bi-univoca tra i suoi punti ed i punti di un dominio C dello spazio occupato dal sistema in un dato istante [REGA - VESTRONI, *Elementi di meccanica dei solidi*];
- lo studio della meccanica dei solidi è affrontato da un punto di vista macroscopico, prescindendo dalla reale struttura discreta della materia ed assimilando il corpo solido ad un sistema materiale continuo. Questo si effettua con gli strumenti della meccanica dei solidi la quale opera a livello fenomenologico in quanto interpreta attraverso le proprie teorie, i fenomeni dell'esperienza, senza includere indagini a livello di costituenti della materia. Essa attribuisce, all'infinitesimo di materia le stesse proprietà riscontrabili nei volumi finiti di materia: con questo concetto la materia è continua [DI TOMMASO, *Fondamenti di scienza delle costruzioni*].

Un corpo si dice deformabile quando le posizioni relative dei suoi punti variano in seguito all'applicazione di agenti esterni. L'analisi della deformazione si occupa allora dello studio del cambiamento di posizione relativa tra i punti materiali nel passaggio da uno stato iniziale a quello attuale.

Nel seguito viene sviluppato il modello di deformazione dovuto a Cauchy¹, secondo il quale un moto è puramente rigido quando la distanza tra due qualsiasi punti del corpo non cambia durante il processo evolutivo. Così, si dirà che il corpo si deforma se e solo se la distanza tra i punti del corpo varia nel tempo.

3.2 Funzione cambiamento di configurazione

Si consideri un mezzo continuo Ω che nel tempo cambi configurazione. Così, detta C_o la configurazione del corpo Ω al tempo iniziale del moto $t = t_o$, sia C la configurazione di Ω al generico istante $t > t_o$. In figura 3.1 è riportato schematicamente il cambiamento di configurazione del corpo Ω .

Si indicano nel seguito con:

¹**Augustin-Louis Cauchy** (Parigi 1789 - Sceaux 1857), matematico francese. Studiò all'Ecole Polytechnique; esercitò per qualche tempo la professione di ingegnere, ma la fama dei suoi lavori sugli integrali definiti gli procurò una nomina presso l'Ecole Polytechnique, la Sorbona e il Collegio di Francia. Dal 1830 al 1838 visse in esilio per aver negato il giuramento a Luigi Filippo. Nel 1848 venne nominato professore alla Sorbona e ottenne l'esenzione dal giuramento da Napoleone III.

Cauchy fu uno dei maggiori matematici del XIX secolo: si distinse in particolare per aver conferito all'analisi caratteristiche che sono considerate tuttora fondamentali; verificò l'esistenza di funzioni ellittiche, mosse i primi passi in direzione di una teoria generale delle funzioni di variabile complessa e pose le basi per la convergenza delle serie. Perfezionò inoltre il metodo di integrazione delle equazioni differenziali lineari e si dedicò anche allo studio della propagazione della luce e alla teoria dell'elasticità.

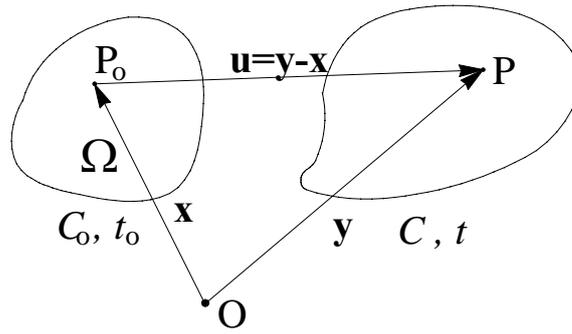


Figura 3.1: Moto del corpo continuo Ω . Configurazione iniziale C_0 e attuale C .

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad \text{il vettore posizione del generico punto materiale di } \Omega \text{ al tempo } t_0,$$

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} \quad \text{il vettore posizione dello stesso punto materiale di } \Omega \text{ al tempo } t,$$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \text{il vettore spostamento del punto materiale, tale che:}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{y} - \mathbf{x} \quad (3.1)$$

ovvero, in esplicito:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

e quindi

$$\begin{aligned} u_1 &= y_1 - x_1 \\ u_2 &= y_2 - x_2 \\ u_3 &= y_3 - x_3 \end{aligned} \quad (3.3)$$

L'equazione del moto del punto materiale è allora:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \quad (3.4)$$

3.2.1 Requisiti analitici per la funzione \mathbf{y}

La funzione vettoriale $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ deve soddisfare alcuni requisiti matematici per essere accettabile da un punto di vista meccanico.

Continuità. Si scelgano due punti qualsiasi dello spazio euclideo P' e P'' corrispondenti ai punti materiali del corpo Ω individuati dai vettori posizione \mathbf{x}' e \mathbf{x}'' nella configurazione iniziale C_o . A seguito della deformazione i punti Q' e Q'' , corrispondenti ai punti P' e P'' , saranno individuati dai vettori \mathbf{y}' e \mathbf{y}'' nella configurazione attuale C . Deve accadere che quando P' tende P'' allora Q' deve tendere Q'' . In formula:

$$\lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}''} \|\mathbf{y}' - \mathbf{y}''\| = 0 \quad (3.5)$$

Monodromia. Sia P un punto di Ω in C_o . A deformazione avvenuta si vuole che tale punto si trasformi in un unico punto in C . In altre parole si esclude che a due punti della configurazione deformata possano corrispondere un solo punto della configurazione iniziale. In definitiva si richiede che durante la deformazione non si creino fratture nel corpo ovvero trasformazioni non topologiche, capaci di trasformare punti interni in punti di frontiera.

Invertibilità locale. Si indica con \mathbf{F} il tensore gradiente di deformazione:

$$\mathbf{F} = \nabla \mathbf{y} \quad (3.6)$$

Assegnato che sia un sistema di riferimento cartesiano, la matrice associata al tensore \mathbf{F} avrà componenti:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} \\ y_{2,1} & y_{2,2} & y_{2,3} \\ y_{3,1} & y_{3,2} & y_{3,3} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Si nota un abuso di notazioni; infatti, per esemplificare il simbolismo, si è indicato con \mathbf{F} sia il tensore gradiente di deformazione che la sua matrice rappresentativa, ottenuta dal tensore una volta assegnata una base. Tale abuso di notazioni sarà effettuato anche nel seguito.

Si richiede ora che il tensore gradiente di deformazione abbia determinante diverso dallo zero:

$$\det \mathbf{F} \neq 0 \quad (3.8)$$

che assicura l'invertibilità locale della funzione $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$. E' quindi possibile ricavare a livello locale la relazione inversa della (3.4):

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}, t) \quad (3.9)$$

Si nota immediatamente che la condizione (3.8) implica

$$\det \mathbf{F} > 0 \quad (3.10)$$

Infatti nella configurazione iniziale C_o si ha che $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, per cui $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{y} = \nabla \mathbf{x} = \mathbf{I}$, dove \mathbf{I} è il tensore identità. Si ricava allora che in C_o $\det \mathbf{F} = \det \mathbf{I} = 1 > 0$. Dovendo essere soddisfatta la condizione (3.8) per ogni istante di tempo t , si ricava l'equazione (3.10).

Monodromia dell'inversa. Sia Q un punto di Ω in C . Si vuole che tale punto sia il trasformato di un unico punto in C_o . In altre parole si esclude che a due punti della configurazione indeformata possano corrispondere un solo punto della configurazione deformata. In definitiva si richiede che durante la deformazione non siano presenti nel corpo compenetrazioni di materia.

Derivabilità. Si suppone che la funzione $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ ovvero la sua inversa $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}, t)$ siano sufficientemente derivabili fino all'ordine richiesto nei successivi sviluppi.

3.2.2 Sistemi di riferimento

Il moto può essere descritto usando l'equazione del moto:

$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ e quindi utilizzare \mathbf{x} come variabile indipendente; in tale modo si adotta un *sistema materiale* di riferimento in quanto si segue il moto del singolo punto materiale. Durante il moto il sistema si deforma con il continuo. Il *sistema materiale* è detto anche lagrangiano ed è dovuto ad Eulero².

$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}, t)$ e quindi utilizzare \mathbf{y} come variabile indipendente; in tale modo si adotta un *sistema spaziale* di riferimento in quanto fornisce, assegnato un punto nello spazio, quale punto materiale transita per esso all'istante t . Il sistema di

²**Eulero** (Basilea 1707 - San Pietroburgo 1783), matematico svizzero, operò soprattutto nel campo della matematica pura; la sistematizzazione e la riformulazione dell'analisi che si trova nelle sue opere è alla base della matematica moderna e della teoria delle funzioni. Studiò all'università di Basilea come allievo del matematico svizzero Johann Bernoulli. Nel 1727 entrò a far parte dell'Accademia delle Scienze di San Pietroburgo dove fu nominato professore di fisica (1730) e poi di matematica (1733). Nel 1741 accolse la proposta del re di Prussia Federico il Grande e si trasferì all'Accademia delle Scienze di Berlino dove rimase fino al 1766, anno in cui fece ritorno a San Pietroburgo. Sebbene fosse ostacolato fin dall'età di 30 anni da una progressiva perdita della vista, Eulero redasse un gran numero di importanti opere matematiche e centinaia di appunti che provano la sua straordinaria produttività scientifica.

Eulero diede la prima trattazione completa dell'algebra, della teoria delle equazioni, della trigonometria e della geometria analitica. Si occupò di calcolo (compreso il calcolo delle variazioni), della teoria dei numeri, dei numeri immaginari. Sebbene fosse soprattutto un matematico, Eulero fornì anche notevoli contributi di astronomia, meccanica, ottica e acustica.

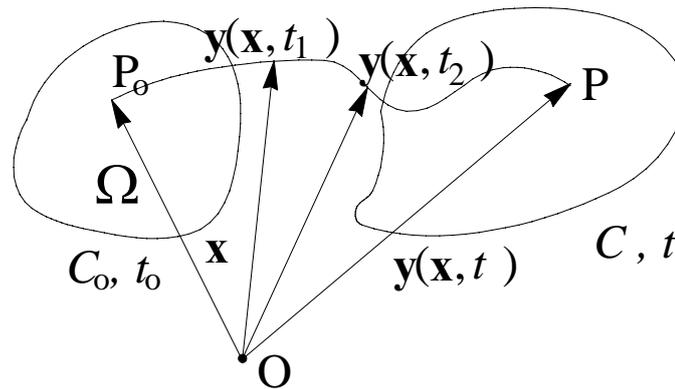


Figura 3.2: Sistema materiale di riferimento per il cambiamento di configurazione.

riferimento non si deforma in quanto collegato ai punti dello spazio fisso e non ai punti materiali del continuo. Il *sistema spaziale* è detto anche euleriano ed è dovuto a D’Alambert³.

Nelle figure 3.2 e 3.3 sono riportati schematicamente i due sistemi di riferimento introdotti.

Nel seguito viene utilizzato il sistema materiale per lo studio della deformazione del corpo. Si evidenzia sin da ora che qualora il corpo Ω sia soggetto a cambiamenti di configurazione infinitesimi, ovvero a deformazioni infinitesime, i due sistemi di riferimento tendono a coincidere.

³**Jean-Baptiste Le Rond, detto d’Alambert** (Parigi 1717-1783), fisico, matematico e filosofo francese. Fra i maggiori esponenti del pensiero illuministico francese, d’Alambert occupa un posto importante nella storia della letteratura, della meccanica, di cui è considerato uno dei fondatori, ma soprattutto in quella della matematica, dell’astronomia e della filosofia. Compì gli studi al Collège des Quatre Nations, fondato da Mazzarino e permeato di giansenismo: qui si dedicò allo studio del diritto e della teologia, che abbandonò ben presto per rivolgersi a quello della matematica. Le sue precoci pubblicazioni in questo campo gli valsero l’ingresso nel 1741, all’Académie des Sciences; tra il 1743 e il 1751 scrisse una serie d’importanti opere scientifiche. Eletto nel 1754 membro dell’Académie Française, ne divenne nel 1772 segretario a vita, declinando l’invito di Federico II di Prussia a presiedere all’Accademia di Berlino, sia perché non si riteneva degno di occupare un posto accademicamente superiore a quello di Eulero, il più grande matematico del tempo. Le sue opere principali trattano la meccanica dei corpi rigidi sui tre principi dell’inerzia, della composizione dei movimenti e dell’equilibrio tra due corpi; lo sviluppo dell’idrodinamica; la teoria generale dei venti; alcune memorie di argomento astronomico, dove stabilisce le equazioni del moto della Terra attorno al suo baricentro. Nello sviluppo matematico di questi problemi di meccanica d’Alambert s’imbatté nell’equazione che porta il suo nome, di cui fornisce lo studio completo fino all’integrale generale, e nel teorema fondamentale dell’algebra, di cui dà la prima dimostrazione parziale. In metafisica ritiene insolubili i problemi tradizionali di tale scienza, quali la natura dell’anima, il concetto dell’essere, l’unione dell’anima e del corpo.

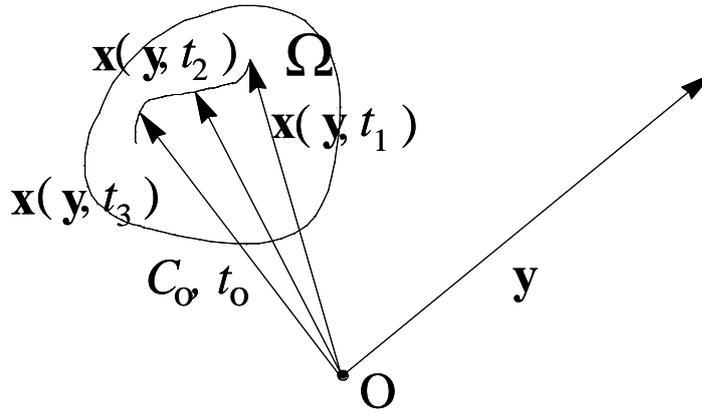


Figura 3.3: Sistema spaziale di riferimento per il cambiamento di configurazione.

3.3 Deformazione dell'intorno del punto

Si studia ora la deformazione che l'intorno I_P del generico punto P_o del corpo Ω in C_o subisce durante il cambiamento di configurazione (figura 3.4). A tale scopo si consideri un punto $Q_o \in I_P$. La posizione di Q_o rispetto a P_o è individuata dal vettore $d\mathbf{x}$. Per effetto del cambiamento di configurazione i punti P_o e Q_o si portano rispettivamente in P e Q . Nella configurazione attuale accade che la posizione di Q rispetto a P è individuata dal vettore $d\mathbf{y}$. Lo spostamento del punto Q_o è fornito dalla formula:

$$\mathbf{u}(Q_o) = \mathbf{u}(P_o) + d\mathbf{y} - d\mathbf{x} \quad (3.11)$$

dove $\mathbf{u}(P_o)$ rappresenta lo spostamento di traslazione rigida dell'intorno I_P . Poichè $d\mathbf{y}$ è il differenziale della funzione $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ nella variabile spaziale, si ha:

$$d\mathbf{y} = \nabla \mathbf{y} d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{x} \quad (3.12)$$

così che:

$$d\mathbf{y} - d\mathbf{x} = (\mathbf{F} - \mathbf{I})d\mathbf{x} \quad (3.13)$$

D'altra parte, poichè il differenziale è un operatore lineare, si ha:

$$d\mathbf{y} - d\mathbf{x} = d(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = d\mathbf{u} = \mathbf{H}d\mathbf{x} \quad (3.14)$$

essendo \mathbf{H} il gradiente di spostamento:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

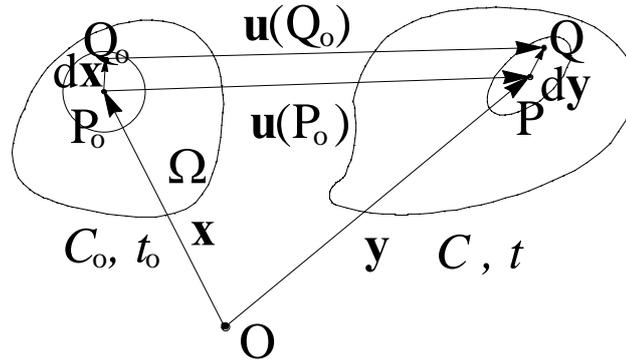


Figura 3.4: Deformazione dell'intorno del punto.

Dalle relazioni (3.13) e (3.14), risulta allora:

$$\mathbf{H} = \mathbf{F} - \mathbf{I} \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{F} = \mathbf{H} + \mathbf{I} \quad (3.16)$$

Ne consegue che l'equazione (3.11) assume la forma equivalente:

$$\mathbf{u}(Q_o) = \mathbf{u}(P_o) + \mathbf{H}d\mathbf{x} \quad (3.17)$$

ovvero, in esplicito:

$$\begin{aligned} u_1(Q_o) &= u_1(P_o) + u_{1,1}dx_1 + u_{1,2}dx_2 + u_{1,3}dx_3 \\ u_2(Q_o) &= u_2(P_o) + u_{2,1}dx_1 + u_{2,2}dx_2 + u_{2,3}dx_3 \\ u_3(Q_o) &= u_3(P_o) + u_{3,1}dx_1 + u_{3,2}dx_2 + u_{3,3}dx_3 \end{aligned} \quad (3.18)$$

che in forma matriciale si può riscrivere come:

$$\begin{Bmatrix} u_1(Q_o) \\ u_2(Q_o) \\ u_3(Q_o) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1(P_o) \\ u_2(P_o) \\ u_3(P_o) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

In definitiva, i tensori \mathbf{F} e \mathbf{H} caratterizzano la variazione di lunghezza ed orientamento del vettore infinitesimo $d\mathbf{x}$, e sono allora i responsabili della deformazione dell'intorno I_P , depurata del moto di traslazione rigida $\mathbf{u}(P_o)$. Si evidenzia che la relazione (3.12) dimostra che la deformazione del generico vettore $d\mathbf{x}$ è governata dall'operatore lineare \mathbf{F} . Ne consegue che durante la deformazione nell'intorno I_P rette vengono trasformate in rette con differente metrica ed inclinazione, piani in piani, sfere in ellissoidi, ecc.

3.3.1 Decomposizione polare

L'ipotesi di invertibilità locale della funzione $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ impone che sia verificata la condizione (3.10) di determinante positivo per il tensore gradiente di deformazione \mathbf{F} . Ciò permette di applicare il teorema di decomposizione polare, secondo il quale è possibile rappresentare \mathbf{F} come:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (3.20)$$

dove \mathbf{R} rappresenta un tensore di rotazione proprio, ed \mathbf{U} e \mathbf{V} sono tensori simmetrici definiti positivi. In particolare, \mathbf{R} gode delle classiche proprietà dei tensori ortogonali propri:

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I} \quad \det \mathbf{R} = 1 \quad (3.21)$$

mentre \mathbf{U} e \mathbf{V} sono i tensori destro e sinistro di deformazione, e sono definiti positivi, ovvero soddisfano le proprietà:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}\mathbf{n} \bullet \mathbf{n} &> 0 & \forall \mathbf{n} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{V}\mathbf{n} \bullet \mathbf{n} &> 0 & \forall \mathbf{n} \neq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Attraverso la decomposizione polare (3.20), la deformazione dell'intorno fornita dalla (3.12) diventa:

$$\begin{aligned} d\mathbf{y} &= \mathbf{F}d\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{U}d\mathbf{x} \\ d\mathbf{z} &= \mathbf{U}d\mathbf{x} \\ d\mathbf{y} &= \mathbf{R}d\mathbf{z} \end{aligned} \quad (3.23)$$

oppure

$$\begin{aligned} d\mathbf{y} &= \mathbf{F}d\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{R}d\mathbf{x} \\ d\mathbf{t} &= \mathbf{R}d\mathbf{x} \\ d\mathbf{y} &= \mathbf{V}d\mathbf{t} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Nel primo caso (3.23) il vettore infinitesimo $d\mathbf{x}$, e così tutto l'intorno I_P , viene prima deformato e poi ruotato; nel secondo caso (3.24) il vettore infinitesimo $d\mathbf{x}$, e così tutto l'intorno I_P , viene prima ruotato e poi deformato.

Si evidenzia allora che i tensori \mathbf{U} e \mathbf{V} sono responsabili della deformazione pura dell'intorno, e cioè del cambiamento di forma di I_P , mentre \mathbf{R} produce una rotazione rigida di I_P .

Nota che sia il tensore gradiente di deformazione \mathbf{F} , i tensori di deformazione pura \mathbf{U} e \mathbf{V} si determinano notando che:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^T\mathbf{F} &= (\mathbf{R}\mathbf{U})^T\mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{U}^2 \\ \mathbf{F}\mathbf{F}^T &= \mathbf{V}\mathbf{R}(\mathbf{V}\mathbf{R})^T = \mathbf{V}\mathbf{R}\mathbf{R}^T\mathbf{V} = \mathbf{V}^2 \end{aligned}$$

per cui si calcola:

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{F}} \qquad \mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{F} \mathbf{F}^T}$$

La radice quadrata dei tensori $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$ e $\mathbf{F} \mathbf{F}^T$ si effettua determinando la loro rappresentazione spettrale e facendo le radici quadrate degli autovalori. Si evidenzia a tale scopo che $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$ e $\mathbf{F} \mathbf{F}^T$ sono simmetrici, e quindi ammettono una rappresentazione spettrale a coefficiente reali:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^T \mathbf{F} &= f_1^U \mathbf{u}^1 \otimes \mathbf{u}^1 + f_2^U \mathbf{u}^2 \otimes \mathbf{u}^2 + f_3^U \mathbf{u}^3 \otimes \mathbf{u}^3 = \mathbf{U}^2 \\ \mathbf{F} \mathbf{F}^T &= f_1^V \mathbf{v}^1 \otimes \mathbf{v}^1 + f_2^V \mathbf{v}^2 \otimes \mathbf{v}^2 + f_3^V \mathbf{v}^3 \otimes \mathbf{v}^3 = \mathbf{V}^2 \end{aligned}$$

dove $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \mathbf{u}^3$ e f_1^U, f_2^U, f_3^U sono rispettivamente gli autovettori e gli autovalori di $\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2$, e $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3$ e f_1^V, f_2^V, f_3^V sono rispettivamente gli autovettori e gli autovalori di $\mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2$. Inoltre, poichè \mathbf{U} e \mathbf{V} , così come \mathbf{U}^2 e \mathbf{V}^2 , sono definiti positivi i loro autovalori devono essere positivi, per cui si scelgono le radici positive dei coefficienti della rappresentazione spettrale di $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$ e $\mathbf{F} \mathbf{F}^T$:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= g_1^U \mathbf{u}^1 \otimes \mathbf{u}^1 + g_2^U \mathbf{u}^2 \otimes \mathbf{u}^2 + g_3^U \mathbf{u}^3 \otimes \mathbf{u}^3 \\ \mathbf{V} &= g_1^V \mathbf{v}^1 \otimes \mathbf{v}^1 + g_2^V \mathbf{v}^2 \otimes \mathbf{v}^2 + g_3^V \mathbf{v}^3 \otimes \mathbf{v}^3 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} g_1^U &= \sqrt{f_1^U} & g_2^U &= \sqrt{f_2^U} & g_3^U &= \sqrt{f_3^U} \\ g_1^V &= \sqrt{f_1^V} & g_2^V &= \sqrt{f_2^V} & g_3^V &= \sqrt{f_3^V} \end{aligned}$$

Si determina ora la relazione che intercorre tra i due tensori di deformazione pura \mathbf{U} e \mathbf{V} :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^2 &= \mathbf{F}^T \mathbf{F} = (\mathbf{V} \mathbf{R})^T \mathbf{V} \mathbf{R} = \mathbf{R}^T \mathbf{V}^2 \mathbf{R} \\ \mathbf{V}^2 &= \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{R} \mathbf{U} (\mathbf{R} \mathbf{U})^T = \mathbf{R} \mathbf{U}^2 \mathbf{R}^T \end{aligned}$$

per cui \mathbf{U}^2 e \mathbf{V}^2 , così come \mathbf{U} e \mathbf{V} , differiscono tra loro di una rotazione rigida \mathbf{R} . Ne consegue che gli autovalori di \mathbf{U} e \mathbf{V} coincidono, mentre gli autovettori di \mathbf{U} e \mathbf{V} sono ruotati fra loro di \mathbf{R} :

$$\begin{aligned} g_1^U &= g_1^V & g_2^U &= g_2^V & g_3^U &= g_3^V \\ \mathbf{v}^1 &= \mathbf{R} \mathbf{u}^1 & \mathbf{v}^2 &= \mathbf{R} \mathbf{u}^2 & \mathbf{v}^3 &= \mathbf{R} \mathbf{u}^3 \end{aligned}$$

Per comprendere il significato meccanico delle quantità g_1^U, g_2^U e g_3^U si consideri un vettore parallelo a \mathbf{u}^1 di lunghezza $d\ell_o$. A seguito della deformazione dovuta al tensore \mathbf{U} si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \mathbf{u}^1 d\ell_o &= (g_1^U \mathbf{u}^1 \otimes \mathbf{u}^1 + g_2^U \mathbf{u}^2 \otimes \mathbf{u}^2 + g_3^U \mathbf{u}^3 \otimes \mathbf{u}^3) \mathbf{u}^1 d\ell_o \\ &= g_1^U d\ell_o (\mathbf{u}^1 \bullet \mathbf{u}^1) \mathbf{u}^1 = g_1^U d\ell_o \mathbf{u}^1 = d\ell \mathbf{u}^1 \end{aligned}$$

dove $d\ell$ rappresenta la lunghezza finale del vettore a seguito della deformazione. Si ricava allora che:

$$g_1^U = \frac{d\ell}{d\ell_o} = \frac{\text{lunghezza finale}}{\text{lunghezza iniziale}}$$

In definitiva, gli autovalori di \mathbf{U} e \mathbf{V} sono le variazioni di lunghezza specifiche che si hanno lungo le direzioni principali di deformazione pura.

Una volta determinato uno dei tensori di deformazione pura \mathbf{U} o \mathbf{V} , il tensore di rotazione \mathbf{R} si calcola come:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} \quad \text{oppure} \quad \mathbf{R} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{F} \quad (3.25)$$

3.3.2 Misure di deformazione

Esistono diverse misure di deformazione. Si consideri il vettore infinitesimo $d\mathbf{x}$ che a deformazione avvenuta si trasforma in $d\mathbf{y}$. Si definisce:

- **metrica del continuo indeformato:**

$$d\ell_o = \|d\mathbf{x}\| = \sqrt{d\mathbf{x} \bullet d\mathbf{x}} \quad (3.26)$$

- **metrica del continuo deformato:**

$$d\ell = \|d\mathbf{y}\| = \sqrt{d\mathbf{y} \bullet d\mathbf{y}} \quad (3.27)$$

- **metrica della deformazione:**

$$\varepsilon_G = \frac{d\ell^2 - d\ell_o^2}{d\ell_o^2} = \frac{d\mathbf{y} \bullet d\mathbf{y} - d\mathbf{x} \bullet d\mathbf{x}}{d\mathbf{x} \bullet d\mathbf{x}} \quad (3.28)$$

Tenendo conto della relazione (3.12), la metrica della deformazione vale:

$$\begin{aligned} \varepsilon_G &= \frac{\mathbf{F}d\mathbf{x} \bullet \mathbf{F}d\mathbf{x} - \mathbf{I}d\mathbf{x} \bullet d\mathbf{x}}{d\mathbf{x} \bullet d\mathbf{x}} = \frac{(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I})d\mathbf{x} \bullet d\mathbf{x}}{d\ell_o d\ell_o} \\ &= (\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}) \frac{d\mathbf{x}}{d\ell_o} \bullet \frac{d\mathbf{x}}{d\ell_o} = (\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I})\mathbf{n} \bullet \mathbf{n} \end{aligned} \quad (3.29)$$

dove \mathbf{n} è il versore di $d\mathbf{x}$.

Si definisce:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{U}^2 && \text{tensore destro di Cauchy-Green} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2 && \text{tensore sinistro di Cauchy-Green} \\ \mathbf{D} &= (\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I})/2 && \text{tensore di Green-Lagrange} \\ \mathbf{G} &= (\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1})/2 && \text{tensore di Almansi} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Sulla base delle definizioni (3.30), la metrica della deformazione ε_G determinata dalla (3.29), diventa:

$$\varepsilon_G = (\mathbf{C} - \mathbf{I})\mathbf{n} \bullet \mathbf{n} = 2\mathbf{D}\mathbf{n} \bullet \mathbf{n} \quad (3.31)$$

Nel seguito vengono introdotte le cosiddette misure ingegneristiche della deformazione.

Dilatazione lineare. Si definisce dilatazione lineare associata ad una prefissata direzione \mathbf{n} la quantità:

$$\Delta_\ell = \frac{d\ell - d\ell_o}{d\ell_o} = \frac{d\ell}{d\ell_o} - 1 \quad (3.32)$$

dove $d\ell_o$ è il modulo di un vettore infinitesimo disteso sulla direzione \mathbf{n} , e $d\ell$ è il modulo del vettore infinitesimo deformato di $d\ell_o\mathbf{n}$. Ricordando la formula (3.28) e tenendo conto della (3.31), la dilatazione lineare (3.32) si riscrive nella forma:

$$\Delta_\ell = \sqrt{2\mathbf{D}\mathbf{n} \bullet \mathbf{n} + 1} - 1 \quad (3.33)$$

Dilatazione angolare (scorrimento angolare). Si definisce dilatazione angolare, più frequentemente detta scorrimento angolare, associata a due prefissate direzioni \mathbf{n}^1 ed \mathbf{n}^2 la quantità:

$$\gamma_{\mathbf{n}^1\mathbf{n}^2} = \alpha_o - \alpha \quad (3.34)$$

dove α_o è l'angolo formato dai due versori \mathbf{n}^1 ed \mathbf{n}^2 , mentre α è l'angolo formato dai due versori \mathbf{m}^1 ed \mathbf{m}^2 trasformati di \mathbf{n}^1 ed \mathbf{n}^2 a seguito della deformazione. In figura 3.5 è riportato il caso piano. Si ha allora:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_o &= \mathbf{n}^1 \bullet \mathbf{n}^2 \\ \cos \alpha &= \mathbf{m}^1 \bullet \mathbf{m}^2 = \frac{\mathbf{F}\mathbf{n}^1 \bullet \mathbf{F}\mathbf{n}^2}{\|\mathbf{F}\mathbf{n}^1\| \|\mathbf{F}\mathbf{n}^2\|} = \frac{\mathbf{F}^T \mathbf{F}\mathbf{n}^1 \bullet \mathbf{n}^2}{\|\mathbf{F}\mathbf{n}^1\| \|\mathbf{F}\mathbf{n}^2\|} = \frac{\mathbf{C}\mathbf{n}^1 \bullet \mathbf{n}^2}{\|\mathbf{F}\mathbf{n}^1\| \|\mathbf{F}\mathbf{n}^2\|} \end{aligned}$$

Sulla base delle definizioni (3.30) e della formula (3.33) che fornisce la dilatazione lineare, semplici calcoli mostrano che:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}\mathbf{n}^1\| &= (\mathbf{F}\mathbf{n}^1 \bullet \mathbf{F}\mathbf{n}^1)^{\frac{1}{2}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F}\mathbf{n}^1 \bullet \mathbf{n}^1)^{\frac{1}{2}} \\ &= [(2\mathbf{D} + \mathbf{I})\mathbf{n}^1 \bullet \mathbf{n}^1]^{\frac{1}{2}} = [2\mathbf{D}\mathbf{n}^1 \bullet \mathbf{n}^1 + 1]^{\frac{1}{2}} = \Delta_1 + 1 \end{aligned}$$

Analogamente si deduce per la norma di $\mathbf{F}\mathbf{n}^2$. Si ottiene allora che:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{C}\mathbf{n}^1 \bullet \mathbf{n}^2}{(\Delta_1 + 1)(\Delta_2 + 1)}$$

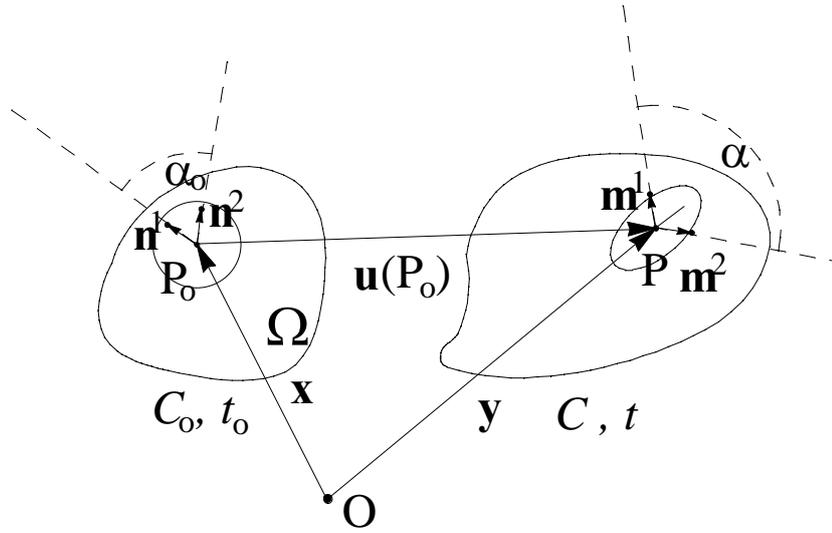


Figura 3.5: Scorrimento angolare.

Nel caso che $\alpha_o = \pi/2$ si ha:

$$\begin{aligned} \sin \gamma_{12} &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha \\ &= \frac{\mathbf{Cn}^1 \bullet \mathbf{n}^2}{(\Delta_1 + 1)(\Delta_2 + 1)} = \frac{2\mathbf{Dn}^1 \bullet \mathbf{n}^2}{(\Delta_1 + 1)(\Delta_2 + 1)} \end{aligned} \quad (3.35)$$

essendo $\mathbf{n}^1 \bullet \mathbf{n}^2 = 0$.

Dilatazione volumetrica (cubica). Si definisce dilatazione volumetrica o cubica la quantità:

$$\Delta_V = \frac{dV - dV_o}{dV_o} = \frac{dV}{dV_o} - 1 \quad (3.36)$$

essendo dV_o e dV la misura del volume infinitesimo prima e dopo la deformazione. Per valutare dV_o e dV si considera il sistema di riferimento principale di deformazione pura, definito dagli autovettori di \mathbf{U} : \mathbf{u}^1 , \mathbf{u}^2 , \mathbf{u}^3 . Indicando allora con $d\mathbf{x}^1 = d\ell_o \mathbf{u}^1$, $d\mathbf{x}^2 = d\ell_o \mathbf{u}^2$ e $d\mathbf{x}^3 = d\ell_o \mathbf{u}^3$ tre vettori infinitesimi giacenti lungo le direzioni principali, si ha:

$$dV_o = d\mathbf{x}^1 \times d\mathbf{x}^2 \bullet d\mathbf{x}^3 = \mathbf{u}^1 \times \mathbf{u}^2 \bullet \mathbf{u}^3 d\ell_o^3 = d\ell_o^3$$

ma anche

$$dV = d\mathbf{y}^1 \times d\mathbf{y}^2 \bullet d\mathbf{y}^3 = \mathbf{F}d\mathbf{x}^1 \times \mathbf{F}d\mathbf{x}^2 \bullet \mathbf{F}d\mathbf{x}^3 = \mathbf{F}\mathbf{u}^1 \times \mathbf{F}\mathbf{u}^2 \bullet \mathbf{F}\mathbf{u}^3 d\ell_o^3$$

che sostituite nella (3.36) fornisce:

$$\Delta_V = \frac{\mathbf{F}\mathbf{u}^1 \times \mathbf{F}\mathbf{u}^2 \bullet \mathbf{F}\mathbf{u}^3}{\mathbf{u}^1 \times \mathbf{u}^2 \bullet \mathbf{u}^3} - 1 = \det \mathbf{F} - 1 \quad (3.37)$$

Si evidenzia che il determinante è invariante rispetto al sistema di riferimento scelto, per cui la formula (3.37) per il calcolo della dilatazione cubica può essere utilizzata considerando un qualsiasi sistema di riferimento cartesiano.

Infine, si nota che nella configurazione iniziale, cioè quando $\mathbf{F} = \mathbf{I}$, la dilatazione volumetrica vale $\Delta_V = \det \mathbf{I} - 1 = 0$.

3.4 Deformazione infinitesima

Si suppone ora che, comunque scelto un sistema di riferimento, le componenti del gradiente di spostamento siano piccole, nel senso che:

$$|H_{ij}| = \vartheta \ll 1 \quad (3.38)$$

Si evidenzia che l'ipotesi di piccoli gradienti di spostamento implica automaticamente l'ipotesi di piccoli spostamenti. Naturalmente è necessario in qualche modo definire cosa si intende per piccoli spostamenti. Infatti, mentre le componenti del gradiente di spostamento sono quantità adimensionali, per cui la formula (3.38) è consistente, lo spostamento è una grandezza con dimensione ed il suo valore dipende dalla scala con la quale si misura. Una volta eliminati i moti rigidi del corpo, nel seguito si dirà piccolo lo spostamento \mathbf{u} quando soddisfa la relazione:

$$\left| \frac{u_i}{L} \right| = \vartheta \ll 1 \quad (3.39)$$

con L dimensione caratteristica di Ω , ad esempio L può essere il diametro minimo della sfera che contiene interamente Ω . Sia P_o un punto qualsiasi del corpo, lo spostamento di P_o si può calcolare, applicando il teorema della media, come:

$$|u_i(P_o)| = \left| \int_O^{P_o} H_{ij} dx_j \right| = |\overline{H}_{ij} d_j| < |\overline{H}_{ij} L| = \vartheta L \ll 1L$$

dove $\mathbf{d} = (P_o - O)$ con O punto fisso del corpo e \overline{H}_{ij} indica la media di H_{ij} lungo la linea $(P_o - O)$.

Si ipotizza allora che in tutte le formule finora introdotte siano trascurabili i termini con ordine di grandezza $o(\vartheta)$, e cioè gli infinitesimi di ordine superiore a ϑ . In altri termini si considerano solo i termini che sono lineari in \mathbf{H} . Per definire le misure di deformazione in modo consistente con l'ipotesi (3.38) considerata, è necessario riscrivere l'espressione delle misure di deformazione in funzione di \mathbf{H} , e

quindi trascurare i termini di ordine di infinitesimo superiore a quello di \mathbf{H} , ovvero linearizzare rispetto ad \mathbf{H} .

In particolare, tenendo conto delle formule (3.30), il tensore di deformazione finita di Green-Lagrange si approssima come:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}) = \boldsymbol{\varepsilon} + o(\vartheta) \cong \boldsymbol{\varepsilon}$$

dove

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (3.40)$$

è detto tensore di deformazione infinitesima e $o(\vartheta) = O(\|\mathbf{H}^T \mathbf{H}\|) = O(\vartheta^2)$. Si evidenzia che la formula (3.40) è lineare nel gradiente di spostamento.

Il tensore di deformazione puro \mathbf{U} scritto in termini di \mathbf{D} , e quindi di \mathbf{H} , assume la forma:

$$\mathbf{U} = (\mathbf{I} + 2\mathbf{D})^{1/2} = (\mathbf{I} + \mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H})^{1/2} \quad (3.41)$$

Allo scopo di determinare la consistente approssimazione di \mathbf{U} , si linearizza la (3.41) rispetto a \mathbf{D} e quindi rispetto ad \mathbf{H} . Indicando allora con $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, e $\mathbf{d}^1, \mathbf{d}^2, \mathbf{d}^3$ gli autovalori e gli autovettori di \mathbf{D} , si ha:

$$\mathbf{U} = (1 + 2\epsilon_1)^{1/2} \mathbf{d}^1 \otimes \mathbf{d}^1 + (1 + 2\epsilon_2)^{1/2} \mathbf{d}^2 \otimes \mathbf{d}^2 + (1 + 2\epsilon_3)^{1/2} \mathbf{d}^3 \otimes \mathbf{d}^3$$

Sviluppando in serie di Taylor i coefficienti di $\mathbf{d}^i \otimes \mathbf{d}^i$ con $i = 1, 2, 3$, e trascurando i termini di ordine superiore al primo, che equivale a linearizzare rispetto a ϵ_i , si ha:

$$(1 + 2\epsilon_i)^{1/2} \cong (1 + 2\epsilon_i)^{1/2} \Big|_{\epsilon_i=0} + \frac{1}{2} (1 + 2\epsilon_i)^{-1/2} \Big|_{\epsilon_i=0} 2\epsilon_i = 1 + \epsilon_i$$

per cui si ottiene:

$$\mathbf{U} \cong (1 + \epsilon_1) \mathbf{d}^1 \otimes \mathbf{d}^1 + (1 + \epsilon_2) \mathbf{d}^2 \otimes \mathbf{d}^2 + (1 + \epsilon_3) \mathbf{d}^3 \otimes \mathbf{d}^3 = \mathbf{I} + \mathbf{D}$$

che infine linearizzata rispetto a \mathbf{H} fornisce:

$$\mathbf{U} \cong \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.42)$$

Il tensore di rotazione poi si ottiene tramite la linearizzazione rispetto ad \mathbf{H} , della formula (3.25). Come nel caso precedente si linearizza inizialmente rispetto a \mathbf{D} e quindi rispetto ad \mathbf{H} . In tal caso si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{H})(\mathbf{I} + 2\mathbf{D})^{-1/2} \\ &= (\mathbf{I} + \mathbf{H}) \left[(1 + 2\epsilon_1)^{-1/2} \mathbf{d}^1 \otimes \mathbf{d}^1 + (1 + 2\epsilon_2)^{-1/2} \mathbf{d}^2 \otimes \mathbf{d}^2 + (1 + 2\epsilon_3)^{-1/2} \mathbf{d}^3 \otimes \mathbf{d}^3 \right] \end{aligned}$$

Sviluppando in serie di Taylor i coefficienti di $\mathbf{d}^i \otimes \mathbf{d}^i$ con $i = 1, 2, 3$, e trascurando i termini di ordine superiore al primo, che equivale a linearizzare rispetto a ϵ_i , si ha:

$$(1 + 2\epsilon_i)^{-1/2} \cong (1 + 2\epsilon_i)^{-1/2} \Big|_{\epsilon_i=0} - \frac{1}{2} (1 + 2\epsilon_i)^{-3/2} \Big|_{\epsilon_i=0} 2\epsilon_i = 1 - \epsilon_i$$

per cui si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\cong (\mathbf{I} + \mathbf{H}) [(1 - \epsilon_1)\mathbf{d}^1 \otimes \mathbf{d}^1 + (1 - \epsilon_2)\mathbf{d}^2 \otimes \mathbf{d}^2 + (1 - \epsilon_3)\mathbf{d}^3 \otimes \mathbf{d}^3] \\ &= (\mathbf{I} + \mathbf{H}) \left[\mathbf{I} - \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T\mathbf{H}) \right] \end{aligned}$$

che infine linearizzata rispetto a \mathbf{H} fornisce:

$$\mathbf{R} \cong \mathbf{I} + \mathbf{H} - \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{I} + \mathbf{W} \quad (3.43)$$

con $\mathbf{W} = \mathbf{H} - \boldsymbol{\varepsilon}$ parte emisimmetrica di \mathbf{H} .

3.4.1 Decomposizione additiva di \mathbf{H}

La formula (3.17) fornisce lo spostamento del generico punto Q_o dell'intorno di P_o . Decomponendo il gradiente di spostamento nelle sue parti simmetrica ed emisimmetrica, la (3.17) si riscrive come:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(Q_o) &= \mathbf{u}(P_o) + \mathbf{H}d\mathbf{x} \\ &= \mathbf{u}(P_o) + \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) d\mathbf{x} + \frac{1}{2}(\mathbf{H} - \mathbf{H}^T) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.44)$$

ovvero,

$$\mathbf{u}(Q_o) = \mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon}d\mathbf{x} + \mathbf{W}d\mathbf{x} \quad (3.45)$$

con

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) = \begin{bmatrix} u_{1,1} & \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) & \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) \\ \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) & u_{2,2} & \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) \\ \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) & \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) & u_{3,3} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} - \mathbf{H}^T) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(u_{1,2} - u_{2,1}) & \frac{1}{2}(u_{1,3} - u_{3,1}) \\ \frac{1}{2}(-u_{1,2} + u_{2,1}) & 0 & \frac{1}{2}(u_{2,3} - u_{3,2}) \\ \frac{1}{2}(-u_{1,3} + u_{3,1}) & \frac{1}{2}(-u_{2,3} + u_{3,2}) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Si evidenzia che nel ricavare la formula (3.45) non è stata fatta alcuna ipotesi di piccolezza. D'altra parte sotto l'ipotesi piccoli gradienti di spostamento, ricordando le (3.40) e (3.43), l'espressione (3.45) può essere interpretata come decomposizione additiva dello spostamento $\mathbf{u}(Q_o)$ in:

- $\mathbf{u}(P_o)$ spostamento rigido dell'intorno,
- $\mathbf{W} d\mathbf{x}$ rotazione rigida dell'intorno,
- $\boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{x}$ deformazione pura dell'intorno.

Alla stessa conclusione si può pervenire attraverso un ragionamento più semplice. Infatti, si consideri il tensore \mathbf{R} associato ad una rotazione intorno ad un asse di versore \mathbf{w} . Per effetto di una rotazione rigida, il vettore posizione $d\mathbf{x}$ si trasforma in $d\mathbf{y} = \mathbf{R} d\mathbf{x}$, così che lo spostamento del punto individuato dal vettore $d\mathbf{x}$ vale $\mathbf{u} = (\mathbf{R} - \mathbf{I}) d\mathbf{x}$. La matrice di rotazione \mathbf{R} , secondo la formula di Rodriguez, può essere rappresentata nella forma:

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin \phi \boldsymbol{\Omega} + (1 - \cos \phi) \boldsymbol{\Omega}^2 \quad (3.48)$$

essendo ϕ l'angolo di rotazione ed $\boldsymbol{\Omega}$ il tensore emisimmetrico associato al versore \mathbf{w} :

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Nell'ipotesi che il valore della rotazione ϕ sia sufficientemente piccolo rispetto all'unità, la matrice di rotazione \mathbf{R} può essere approssimata eseguendo lo sviluppo in serie a partire da $\phi = 0$, ed arrestando tale sviluppo al primo ordine; in definitiva si ottiene:

$$\mathbf{R} \simeq \mathbf{I} + \phi \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{I} + \mathbf{W}$$

avendo posto $\mathbf{W} = \phi \boldsymbol{\Omega}$.

Ne consegue che lo spostamento dovuto ad una rotazione infinitesima può essere valutato tramite la relazione:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{R} - \mathbf{I}) d\mathbf{x} = \mathbf{W} d\mathbf{x}$$

ovvero è definito dall'applicazione di una matrice emisimmetrica sul vettore posizione. In definitiva, si può concludere che un tensore emisimmetrico è responsabile del campo di spostamenti provocati da una rotazione infinitesima.

Secondo quanto sopra descritto, si deduce che il tensore emisimmetrico \mathbf{W} , definito dall'equazione (3.47), nell'ipotesi di piccolezza del gradiente di spostamento, corrisponde ad una rotazione rigida dell'intorno. Poichè, d'altra parte, l'intorno del generico punto subisce anche una variazione di forma, tale effetto deve essere imputato alla presenza del tensore simmetrico $\boldsymbol{\varepsilon}$, detto tensore di deformazione infinitesima.

3.4.2 Misure ingegneristiche di deformazione

Scelto un sistema di riferimento definito dai versori ortogonali $(\mathbf{k}^1, \mathbf{k}^2, \mathbf{k}^3)$, appare interessante determinare la relazione tra le componenti di $\boldsymbol{\varepsilon}$ e le misure di deformazione (3.33), (3.35) e (3.37), precedentemente introdotte. In altre parole si tratta di linearizzare rispetto ad \mathbf{H} le misure ingegneristiche di deformazione.

Dilatazione lineare. La dilatazione lineare la (3.33) si riscrive come:

$$\begin{aligned}\Delta_i &= [(H_{hk} + H_{kh} + H_{mh}H_{mk}) k_k^i k_h^i + 1]^{1/2} - 1 \\ &= (2H_{ii} + H_{mi}H_{mi} + 1)^{1/2} - 1\end{aligned}$$

che sviluppata in serie fino al termine lineare fornisce:

$$\begin{aligned}\Delta_i &\cong \left[(2H_{ii} + H_{mi}H_{mi} + 1)^{1/2} - 1 \right] \Big|_{\mathbf{H}=\mathbf{0}} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial H_{rs}} \left[(2H_{ii} + H_{mi}H_{mi} + 1)^{1/2} - 1 \right] \Big|_{\mathbf{H}=\mathbf{0}} H_{rs}\end{aligned}$$

ma

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial H_{rs}} \left[(2H_{ii} + H_{mi}H_{mi} + 1)^{1/2} - 1 \right] \Big|_{\mathbf{H}=\mathbf{0}} \\ &= \frac{1}{2} (2H_{ii} + H_{mi}H_{mi} + 1)^{-1/2} \left(2 \frac{\partial H_{ii}}{\partial H_{rs}} + 2 \frac{\partial H_{mi}}{\partial H_{rs}} H_{mi} \right) \Big|_{\mathbf{H}=\mathbf{0}} = \frac{\partial H_{ii}}{\partial H_{rs}} \Big|_{\mathbf{H}=\mathbf{0}}\end{aligned}$$

per cui

$$\Delta_i \cong \frac{\partial H_{ii}}{\partial H_{rs}} \Big|_{\mathbf{H}=\mathbf{0}} H_{rs} = H_{ii} = \varepsilon_{ii} \quad (3.50)$$

Dilatazione angolare (scorrimento angolare). Lo scorrimento angolare la (3.35) si riscrive nella forma:

$$\begin{aligned}(\Delta_i + 1) (\Delta_j + 1) \sin(\gamma_{ij}) &= (H_{hk} + H_{kh} + H_{mh}H_{mk}) k_k^i k_h^j \\ &= H_{ji} + H_{ij} + H_{mj}H_{mi}\end{aligned}$$

Per semplificare la procedura, si linearizzano separatamente il primo membro rispetto a Δ_i , Δ_j e γ_{ij} ed il secondo rispetto a \mathbf{H} :

$$\begin{aligned}(\Delta_i + 1) (\Delta_j + 1) \sin(\gamma_{ij}) &\cong \gamma_{ij} \\ H_{ji} + H_{ij} + H_{mj}H_{mi} &\cong H_{ji} + H_{ij} = 2\varepsilon_{ij}\end{aligned}$$

si ottiene infine:

$$\gamma_{ij} \cong 2\varepsilon_{ij} \quad (3.51)$$

In definitiva, si conclude che nella teoria linearizzata, ovvero sotto l'ipotesi di piccoli gradienti di spostamento, le componenti sulla diagonale principale del tensore di deformazione infinitesimo $\boldsymbol{\varepsilon}$ rappresentano le dilatazioni lineari lungo gli assi di riferimento, mentre le componenti fuori la diagonale principale di $\boldsymbol{\varepsilon}$ rappresentano la metà degli scorrimenti angolari tra gli assi di riferimento.

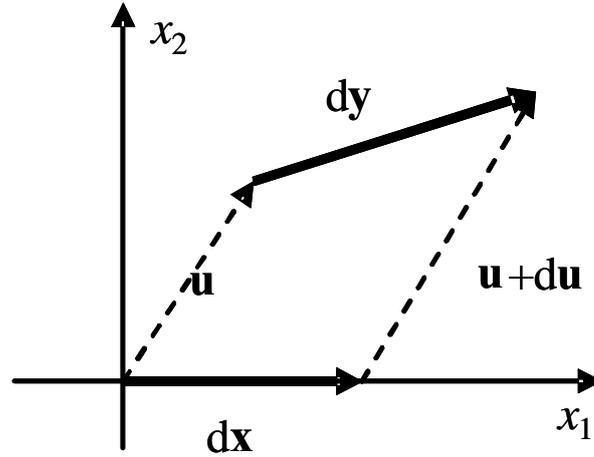


Figura 3.6: Interpretazione fisica delle componenti di deformazione: elementi sulla diagonale principale.

3.4.3 Interpretazione fisica delle componenti di deformazione

Nella sezione precedente si è dimostrato che le componenti sulla diagonale principale del tensore di deformazione sono dilatazioni lineari e che le componenti fuori diagonale sono metà degli scorrimenti angolari. A tale conclusione si può giungere seguendo un differente percorso basato sull'immediata interpretazione meccanica degli spostamenti dovuti al tensore di deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Facendo riferimento alla figura 3.6, si consideri inizialmente il vettore $d\mathbf{x} = \mathbf{k}^1 d\ell_0$, essendo \mathbf{k}^1 il versore dell'asse x_1 e $d\ell_0 = \|d\mathbf{x}\|$. A seguito della deformazione il vettore $d\mathbf{x}$ si trasforma nel vettore in $d\mathbf{y}$ caratterizzato da una lunghezza $d\ell = \|d\mathbf{y}\|$. Tramite semplici considerazioni si deduce:

$$d\mathbf{y} = \mathbf{F} d\mathbf{x} = (\mathbf{H} + \mathbf{I}) d\mathbf{x} \quad (3.52)$$

e quindi, in componenti:

$$d\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} d\ell_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\ell_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d\ell_0(1 + u_{1,1}) \\ d\ell_0 u_{2,1} \\ d\ell_0 u_{3,1} \end{Bmatrix} \quad (3.53)$$

essendo $dx_2 = d\ell_0$ e $dx_2 = dx_3 = 0$. La lunghezza del segmento deformato si

determina come:

$$\begin{aligned}
 dl &= \sqrt{dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2} \\
 &= dl_0 \sqrt{(1 + u_{1,1})^2 + u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2} \\
 &= dl_0 \sqrt{(1 + u_{1,1})^2 + u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2}
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Tenendo conto della piccolezza dei gradienti di spostamenti, i.e. $|u_{i,j}| \ll 1$, l'espressione della lunghezza del segmento deformato si può ottenere tramite lo sviluppo in serie di Taylor arrestato al termine lineare:

$$\begin{aligned}
 dl &= \left[dl_0 \sqrt{(1 + u_{1,1})^2 + u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2} \right]_{u_{i,j}=0} \\
 &+ \frac{\partial}{\partial u_{1,1}} \left[dl_0 \sqrt{(1 + u_{1,1})^2 + u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2} \right]_{u_{i,j}=0} u_{1,1} \\
 &+ \frac{\partial}{\partial u_{2,1}} \left[dl_0 \sqrt{(1 + u_{1,1})^2 + u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2} \right]_{u_{i,j}=0} u_{2,1} \\
 &+ \frac{\partial}{\partial u_{3,1}} \left[dl_0 \sqrt{(1 + u_{1,1})^2 + u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2} \right]_{u_{i,j}=0} u_{3,1} \\
 &= dl_0 (1 + u_{1,1}) = dl_0 (1 + \varepsilon_{11})
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Risolvendo la relazione (3.55) rispetto a ε_{11} , si ottiene:

$$\varepsilon_{11} = \frac{dl}{dl_0} - 1 \tag{3.56}$$

che, tenendo in conto della definizione (3.32), assicura che la componente $_{11}$ della matrice di deformazione infinitesima rappresenta la dilatazione lineare nella direzione di x_1 , i.e. $\varepsilon_{11} = \Delta_1$.

Analogamente, scegliendo come vettore $d\mathbf{x}$, il vettore infinitesimo disteso sull'asse x_2 , si ottiene $\varepsilon_{22} = \Delta_2$. Infine, scegliendo come vettore $d\mathbf{x}$, il vettore infinitesimo disteso sull'asse x_3 , si ottiene $\varepsilon_{33} = \Delta_3$.

In definitiva, si deduce che gli elementi sulla diagonale principale della matrice di deformazione infinitesima rappresentano le dilatazioni lineari lungo gli assi di riferimento.

Lo scorrimento angolare tra le direzioni ortogonali fra loro, x_1 ed x_2 , vale:

$$\gamma_{12} = \frac{\pi}{2} - \alpha = \theta_{12} + \theta_{21} \tag{3.57}$$

come rappresentato in figura 3.7. Facendo riferimento a tale figura, si considerino inizialmente il vettore $d\mathbf{x}^1 = \mathbf{k}^1 dl_{01}$ e $d\mathbf{x}^2 = \mathbf{k}^2 dl_{02}$. A seguito della deformazione i

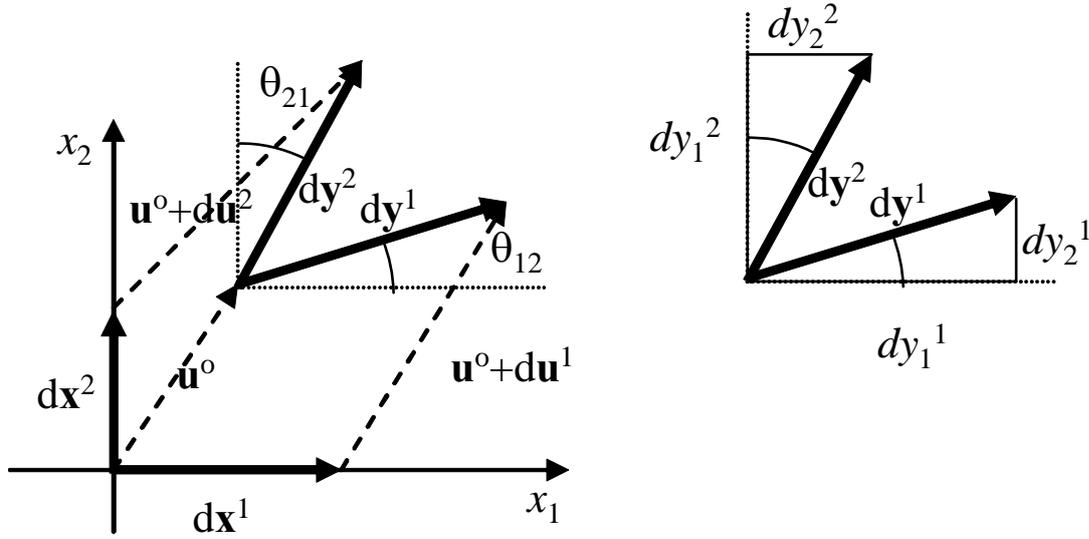


Figura 3.7: Interpretazione fisica delle componenti di deformazione: elementi fuori della diagonale principale.

vettori dx^1 e dx^2 si trasformano rispettivamente nei vettori in dy^1 e dy^2 . Tramite semplici considerazioni si deduce:

$$\begin{aligned} dy^1 &= dx^1 + \mathbf{H}dx^1 \\ dy^2 &= dx^2 + \mathbf{H}dx^2 \end{aligned} \quad (3.58)$$

In componenti, si ha:

$$dy^1 = \begin{Bmatrix} dl_{01} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dl_{01} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} dl_{01}(1 + u_{1,1}) \\ dl_{01}u_{2,1} \\ dl_{01}u_{3,1} \end{Bmatrix} \quad (3.59)$$

$$dy^2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ dl_{02} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ dl_{02} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} dl_{02}u_{1,2} \\ dl_{02}(1 + u_{2,2}) \\ dl_{01}u_{3,2} \end{Bmatrix} \quad (3.60)$$

La rotazione θ_{12} si determina come:

$$\theta_{12} = \arctan \frac{dy_2^1}{dy_1^1} = \arctan \frac{u_{2,1}}{1 + u_{1,1}} \quad (3.61)$$

Analogamente, per θ_{21} si ha:

$$\theta_{21} = \arctan \frac{dy_1^2}{dy_2^2} = \arctan \frac{u_{1,2}}{1 + u_{2,2}} \quad (3.62)$$

Tenendo conto della piccolezza dei gradienti di spostamenti, i.e. $|u_{i,j}| \ll 1$, le espressioni delle rotazioni θ_{12} e θ_{21} si possono ottenere tramite lo sviluppo in serie di Taylor arrestato al termine lineare:

$$\begin{aligned}\theta_{12} &= \left[\arctan \frac{u_{2,1}}{1 + u_{1,1}} \right]_{u_{i,j}=0} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial u_{1,1}} \left[\arctan \frac{u_{2,1}}{1 + u_{1,1}} \right]_{u_{i,j}=0} u_{1,1} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial u_{2,1}} \left[\arctan \frac{u_{2,1}}{1 + u_{1,1}} \right]_{u_{i,j}=0} u_{2,1} \\ &= u_{2,1} \\ \theta_{21} &= \left[\arctan \frac{u_{1,2}}{1 + u_{2,2}} \right]_{u_{i,j}=0} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial u_{1,2}} \left[\arctan \frac{u_{1,2}}{1 + u_{2,2}} \right]_{u_{i,j}=0} u_{1,2} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial u_{2,2}} \left[\arctan \frac{u_{1,2}}{1 + u_{2,2}} \right]_{u_{i,j}=0} u_{2,2} \\ &= u_{1,2}\end{aligned}$$

essendo

$$\frac{\partial}{\partial x} \arctan x = \frac{1}{1 + x^2}$$

Lo scorrimento angolare è allora:

$$\gamma_{12} = \theta_{12} + \theta_{21} = u_{2,1} + u_{1,2} = 2\varepsilon_{12} \quad (3.63)$$

per cui la componente ε_{12} del tensore di deformazione infinitesima $\boldsymbol{\varepsilon}$ rappresenta la metà dello scorrimento angolare tra le direzioni x_1 ed x_2 .

Analogamente, scegliendo due vettori distesi sugli assi x_1 ed x_3 , si ottiene $\gamma_{13} = 2\varepsilon_{13}$; ancora, scegliendo due vettori distesi sugli assi x_2 ed x_3 , si ottiene $\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23}$.

In definitiva, si deduce che gli elementi fuori della diagonale principale della matrice di deformazione infinitesima rappresentano gli scorrimenti angolari tra gli assi di riferimento.

E' molto importante anche saper determinare la dilatazione lineare lungo una generica direzione e lo scorrimento angolare tra due generiche direzioni tra loro ortogonali in funzione del tensore di deformazione infinitesima $\boldsymbol{\varepsilon}$.

A tale scopo si consideri l'intorno del punto P_o ; lo spostamento dovuto alla pura deformazione del punto Q_o individuato a partire da P_o dal vettore $d\mathbf{x}$, per la formula (3.45), vale:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{x} = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n} d\ell_o \quad (3.64)$$

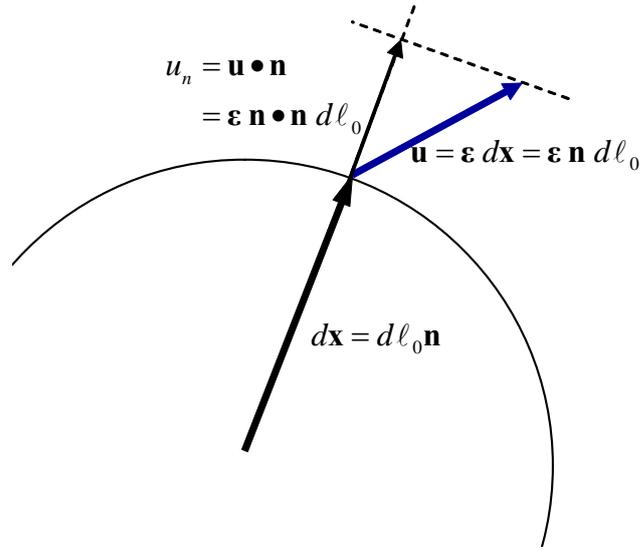


Figura 3.8: Valutazione della dilatazione lineare lungo la generica direzione.

essendo $dl_o = \|d\mathbf{x}\|$. La lunghezza finale del vettore $d\mathbf{x}$ sarà pari a $dl_o + u_n$, come mostrato in figura 3.8. Tenuto conto che $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$, per la (3.32) si ottiene:

$$\Delta_n = \frac{dl - dl_o}{dl_o} = \frac{dl_o + u_n - dl_o}{dl_o} = \frac{1}{dl_o} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \quad (3.65)$$

Con l'aiuto della figura 3.9, è possibile comprendere che lo scorrimento angolare γ_{nm} tra due direzioni \mathbf{n} ed \mathbf{m} , tali che $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0$, è fornito dalla relazione:

$$\gamma_{nm} = \theta_{nm} + \theta_{mn} = \frac{1}{dl_o} (u_m^n + u_n^m) = 2\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \quad (3.66)$$

3.4.4 Deformazioni e direzioni principali

Posto $d\mathbf{x} = \mathbf{n} \|d\mathbf{x}\|$, la quantità $\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n}$ rappresenta lo spostamento di pura deformazione per un punto a distanza unitaria da P_o . Per semplicità di notazione, si scrive $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n}$. Si pone allora il seguente problema: dato il tensore di deformazione infinitesimo $\boldsymbol{\varepsilon}$ si calcoli, se esiste, una direzione \mathbf{n} per la quale accade che lo spostamento di pura deformazione $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n}$ avviene lungo la direzione di \mathbf{n} . Quindi, si intende determinare la direzione \mathbf{n} che soddisfa la relazione:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n} = \varepsilon \mathbf{n}$$

che equivale a:

$$(\boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon \mathbf{I}) \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (3.67)$$

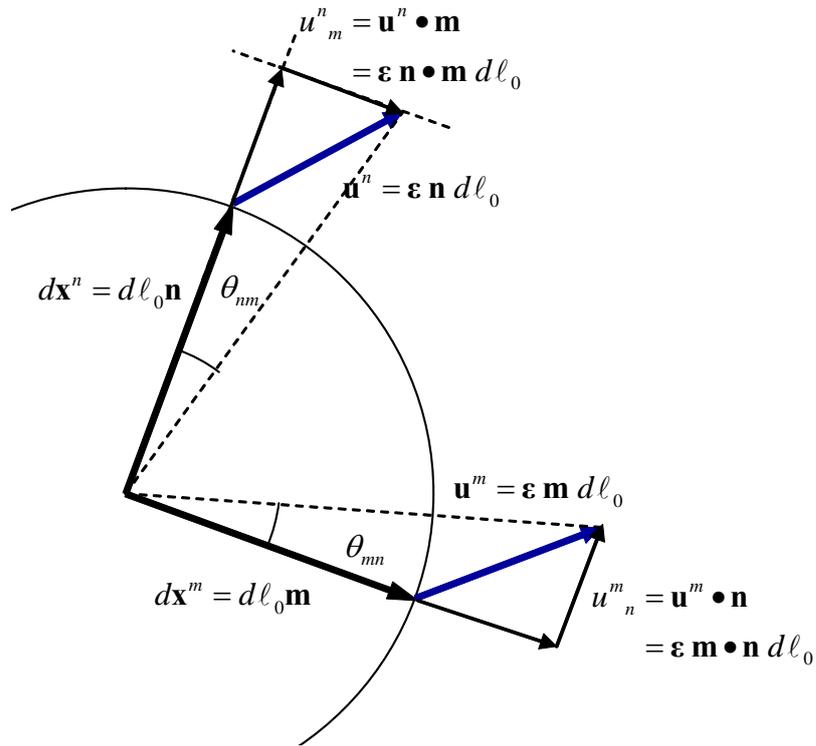


Figura 3.9: Valutazione dello scorrimento angolare tra due direzioni generiche ortogonali fra loro.

che consiste nel classico problema degli autovalori ed autovettori di $\boldsymbol{\epsilon}$. Il problema si discute come segue. Scelto un sistema di riferimento, la relazione (3.67) rappresenta un sistema di 3 equazioni algebriche nelle 3 incognite n_1 , n_2 ed n_3 . Il sistema è omogeneo, per cui ammette certamente la soluzione banale: $n_1 = n_2 = n_3 = 0$. Tale soluzione è l'unica soluzione del problema (3.67) qualora il determinante di $\boldsymbol{\epsilon} - \epsilon \mathbf{I}$ è diverso da zero. D'altra parte la soluzione banale è inaccettabile poichè \mathbf{n} deve avere norma unitaria. Per ammettere soluzioni diversa dalla banale dovrà allora accadere che:

$$\det(\boldsymbol{\epsilon} - \epsilon \mathbf{I}) = 0$$

che conduce all'equazione caratteristica nell'incognita ϵ :

$$-\epsilon^3 + J_1 \epsilon^2 - J_2 \epsilon + J_3 = 0 \quad (3.68)$$

dove J_1 , J_2 e J_3 sono invarianti della deformazione, ovvero non dipendono dal sistema di riferimento prescelto:

$$\begin{aligned} J_1 &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \\ J_2 &= \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{12}^2 - \varepsilon_{13}^2 - \varepsilon_{23}^2 \\ &= \frac{1}{2} [(\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 - \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2)] \\ J_3 &= \det \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned}$$

Vista la simmetria di $\boldsymbol{\varepsilon}$, l'equazione (3.68) ammette 3 soluzioni reali, ε_1 , ε_2 , ε_3 , che sono le deformazioni principali. Diversi casi possono accadere.

$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$. I tre autovalori sono distinti. Si sostituisce nel sistema (3.67) un autovalore alla volta, $\varepsilon = \varepsilon_1$, $\varepsilon = \varepsilon_2$, $\varepsilon = \varepsilon_3$. In tutti i casi, il rango della matrice $[\boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon \mathbf{I}]$ vale 2. Si risolvono le equazioni imponendo che la norma di \mathbf{n} sia unitaria. Si determinano così le tre direzioni principali, \mathbf{e}^1 , \mathbf{e}^2 , \mathbf{e}^3 , che è semplice mostrare siano ortogonali fra loro.

$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 = \varepsilon_3$. Due autovalori sono coincidenti. Il sistema (3.67) quando $\varepsilon = \varepsilon_1$ ha rango pari a 2. Risolvendo allora le equazioni ed imponendo che la norma di \mathbf{n} sia unitaria, si determina univocamente \mathbf{e}^1 . Quando $\varepsilon = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ il sistema di equazioni (3.67) ha rango pari a 1. Tutti i versori \mathbf{e}^2 , \mathbf{e}^3 appartenenti al piano ortogonale a \mathbf{e}^1 sono principali di deformazione.

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$. I tre autovalori sono coincidenti. Il sistema di equazioni ha rango nullo. Tutte le direzioni nello spazio sono principali di deformazione.

Si riportano di seguito alcune proprietà delle deformazioni e delle direzioni principali. Tali proprietà sono caratteristiche di tutti i problemi di autovalori ed autovettori.

- Se $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$ allora $\mathbf{e}^i \perp \mathbf{e}^j$. Infatti:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}^i \bullet \mathbf{e}^j &= \varepsilon_i \mathbf{e}^i \bullet \mathbf{e}^j \\ \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}^j \bullet \mathbf{e}^i &= \varepsilon_j \mathbf{e}^j \bullet \mathbf{e}^i \end{aligned}$$

sottraendo membro a membro, e ricordando la simmetria di $\boldsymbol{\varepsilon}$, si ha:

$$(\varepsilon_i - \varepsilon_j) \mathbf{e}^j \bullet \mathbf{e}^i = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}^i \bullet \mathbf{e}^j - \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}^j \bullet \mathbf{e}^i = 0$$

essendo $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$, deve allora accadere che $\mathbf{e}^i \bullet \mathbf{e}^j = 0$ e quindi $\mathbf{e}^i \perp \mathbf{e}^j$.

- Se $\varepsilon = \varepsilon_i = \varepsilon_j$ tutte le direzioni nel piano $\mathbf{e}^i \mathbf{e}^j$ sono principali. Infatti posto $\mathbf{e} = \alpha \mathbf{e}^i + \beta \mathbf{e}^j$ con $\|\mathbf{e}\| = 1$, si ha:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e} = \alpha \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}^i + \beta \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}^j = \alpha \varepsilon_i \mathbf{e}^i + \beta \varepsilon_j \mathbf{e}^j = \varepsilon (\alpha \mathbf{e}^i + \beta \mathbf{e}^j) = \varepsilon \mathbf{e}$$

- Le deformazioni principali contengono la massima e la minima possibile. Infatti, posto che sia $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$, si ha:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e} \bullet \mathbf{e} &= (\varepsilon_1 \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^1 + \varepsilon_2 \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^2 + \varepsilon_3 \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^3) \mathbf{e} \bullet \mathbf{e} \\
&\leq \varepsilon_1 (\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^3) \mathbf{e} \bullet \mathbf{e} \\
&= \varepsilon_1 [\mathbf{e}^1 (\mathbf{e}^1 \bullet \mathbf{e}) + \mathbf{e}^2 (\mathbf{e}^2 \bullet \mathbf{e}) + \mathbf{e}^3 (\mathbf{e}^3 \bullet \mathbf{e})] \bullet \mathbf{e} \\
&= \varepsilon_1 [\mathbf{e}^1 (\mathbf{e}^1 \bullet \mathbf{e}) \bullet \mathbf{e} + \mathbf{e}^2 (\mathbf{e}^2 \bullet \mathbf{e}) \bullet \mathbf{e} + \mathbf{e}^3 (\mathbf{e}^3 \bullet \mathbf{e}) \bullet \mathbf{e}] \\
&= \varepsilon_1 [(\mathbf{e}^1 \bullet \mathbf{e})^2 + (\mathbf{e}^2 \bullet \mathbf{e})^2 + (\mathbf{e}^3 \bullet \mathbf{e})^2] = \varepsilon_1 \quad \forall \mathbf{e}
\end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e} \bullet \mathbf{e} &= (\varepsilon_1 \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^1 + \varepsilon_2 \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^2 + \varepsilon_3 \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^3) \mathbf{e} \bullet \mathbf{e} \\
&\geq \varepsilon_3 (\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^3) \mathbf{e} \bullet \mathbf{e} \\
&= \varepsilon_3 [\mathbf{e}^1 (\mathbf{e}^1 \bullet \mathbf{e}) + \mathbf{e}^2 (\mathbf{e}^2 \bullet \mathbf{e}) + \mathbf{e}^3 (\mathbf{e}^3 \bullet \mathbf{e})] \bullet \mathbf{e} \\
&= \varepsilon_3 [\mathbf{e}^1 (\mathbf{e}^1 \bullet \mathbf{e}) \bullet \mathbf{e} + \mathbf{e}^2 (\mathbf{e}^2 \bullet \mathbf{e}) \bullet \mathbf{e} + \mathbf{e}^3 (\mathbf{e}^3 \bullet \mathbf{e}) \bullet \mathbf{e}] \\
&= \varepsilon_3 [(\mathbf{e}^1 \bullet \mathbf{e})^2 + (\mathbf{e}^2 \bullet \mathbf{e})^2 + (\mathbf{e}^3 \bullet \mathbf{e})^2] = \varepsilon_3 \quad \forall \mathbf{e}
\end{aligned}$$

3.4.5 Dilatazione cubica

La formula che fornisce la dilatazione cubica consistente con l'ipotesi di piccole deformazioni, si ricava considerando la deformazione di cubetto elementare i cui lati dx_1 , dx_2 e dx_3 sono distesi lungo le tre direzioni principali del tensore $\boldsymbol{\varepsilon}$. Il volume del cubetto elementare prima della deformazione vale:

$$dV_o = dx_1 dx_2 dx_3$$

Poichè durante la deformazione le direzioni principali restano tra loro ortogonali, ed indicando con ε_1 , ε_2 ed ε_3 le deformazioni principali di $\boldsymbol{\varepsilon}$, si ha:

$$\begin{aligned}
dV &= (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\
&\cong (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) dx_1 dx_2 dx_3
\end{aligned}$$

Allora la formula (3.36) fornisce:

$$\Delta_V \cong \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.69)$$

A quest'ultima formula si può pervenire anche considerando la variazione di volume della generica parte \mathcal{P} di Ω . Infatti, si ha:

$$\begin{aligned}
\delta V &= \int_{\partial \mathcal{P}} u_n dS = \int_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{u} \bullet \mathbf{n} dS = \int_{\mathcal{P}} \text{div}(\mathbf{u}) dV \\
&= \int_{\mathcal{P}} \text{tr} \nabla \mathbf{u} dV = \int_{\mathcal{P}} \text{tr} \mathbf{H} dV = \int_{\mathcal{P}} \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} dV
\end{aligned}$$

con \mathbf{n} normale uscente a $\partial\mathcal{P}$, ed essendo la parte emisimmetrica \mathbf{W} di \mathbf{H} a traccia nulla. Dovendo essere valida per ogni parte \mathcal{P} di Ω , per l'elementino di volume infinitesimo si ottiene la formula (3.69).

3.4.6 Deformazione media

La deformazione media in un corpo Ω si calcola come:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} \, dV = \frac{1}{2V} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \, dV$$

che espressa in termini di componenti, ed applicando il teorema della divergenza, diventa:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2V} \int_{\Omega} (u_{i,j} + u_{j,i}) \, dV = \frac{1}{2V} \int_{\partial\Omega} (u_i n_j + u_j n_i) \, dS$$

con \mathbf{n} normale uscente a $\partial\Omega$. In forma assoluta, si ha:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2V} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{u}) \, dS$$

In definitiva, la deformazione media può essere calcolata conoscendo solo i valori al contorno degli spostamenti.

3.4.7 Equazioni di compatibilità

Si è visto come sia possibile determinare tramite la relazione (3.40) il campo di deformazione infinitesima $\boldsymbol{\varepsilon}$ una volta assegnato il campo di spostamenti \mathbf{u} :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (3.70)$$

Si vuole ora vedere quando è possibile effettuare il procedimento inverso. Si intende sapere cioè se assegnato che sia il campo di deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}$ esiste un campo di spostamenti \mathbf{u} per il quale l'equazione (3.70) risulta verificata. In generale, comunque sia assegnata la deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}$ non è detto che esista un \mathbf{u} la cui parte simmetrica del gradiente sia proprio $\boldsymbol{\varepsilon}$, a meno che la $\boldsymbol{\varepsilon}$ assegnata non soddisfi delle condizioni che sono dette di compatibilità.

Per fissare le idee, si immagini di suddividere il corpo Ω in tanti piccoli cubetti e di attribuire a ciascuno di essi la deformazione corrispondente. A seguito di tale deformazione i cubetti si trasformano in parallelepipedi obliqui e quindi in generale non sarà più possibile ricostruire un corpo continuo tramite solo moti rigidi a meno che le deformazioni imposte non verifichino le condizioni di compatibilità. Quindi non si può assegnare una deformazione in modo completamente arbitrario in quanto

essa potrebbe condurre a configurazioni che presentano fratture o compenetrazioni di materia.

Condizione necessaria e sufficiente affinché un campo di deformazione ε sia compatibile è che siano soddisfatte le seguenti equazioni di compatibilità (interna):

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{12,32} - \varepsilon_{13,22} &= \varepsilon_{22,31} - \varepsilon_{23,21} \\
 \varepsilon_{12,33} - \varepsilon_{13,23} &= \varepsilon_{32,31} - \varepsilon_{33,21} \\
 \varepsilon_{22,33} - \varepsilon_{23,23} &= \varepsilon_{32,32} - \varepsilon_{33,22} \\
 \varepsilon_{11,32} - \varepsilon_{13,12} &= \varepsilon_{21,31} - \varepsilon_{23,11} \\
 \varepsilon_{11,33} - \varepsilon_{13,13} &= \varepsilon_{31,31} - \varepsilon_{33,11} \\
 \varepsilon_{11,22} - \varepsilon_{12,12} &= \varepsilon_{21,21} - \varepsilon_{22,11}
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

ovvero in forma compatta:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\varepsilon) = \mathbf{0} \tag{3.72}$$

cioè

$$E_{ijk}E_{lmn}\varepsilon_{jm,kn} = 0$$

dove E_{ijk} è il generico elemento del tensore di Ricci. Le (3.72) sono 9 equazioni di cui solo le 6 sopra riportate (3.71) sono linearmente indipendenti.

Nel seguito viene riportata la dimostrazione che le equazioni (3.71) sono condizione necessaria e sufficiente affinché un campo di deformazione ε sia compatibile.

Necessarietà. Se esiste un campo di spostamenti \mathbf{u} tali che $2\varepsilon = (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$ allora sono verificate le equazioni di congruenza. In forma esplicita, le equazioni di congruenza (3.70) sono:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= u_{1,1} & \varepsilon_{22} &= u_{2,2} & \varepsilon_{33} &= u_{3,3} \\
 2\varepsilon_{23} &= u_{2,3} + u_{3,2} & 2\varepsilon_{13} &= u_{1,3} + u_{3,1} & 2\varepsilon_{12} &= u_{1,2} + u_{2,1}
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

Derivando, in particolare si può scrivere:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11,22} &= u_{1,122} \\
 \varepsilon_{22,11} &= u_{2,211} \\
 2\varepsilon_{12,12} &= u_{1,212} + u_{2,112}
 \end{aligned}$$

per cui, usando il teorema di Schwartz, si deduce che:

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}$$

Generalizzando, se al posto dell'indice 1 si prende i ed al posto dell'indice 2 si prende j si ottiene:

$$\varepsilon_{ii,jj} + \varepsilon_{jj,ii} = 2\varepsilon_{ij,ij} \quad i, j = 1, 2, 3$$

ovvero si giunge alle equazioni (3.71)₃, (3.71)₅ e (3.71)₆.

Di nuovo, partendo dalle (3.73) e derivando si può ottenere:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11,23} &= u_{1,123} \\ 2\varepsilon_{23,11} &= u_{2,311} + u_{3,211} \\ 2\varepsilon_{13,12} &= u_{1,312} + u_{3,112} \\ 2\varepsilon_{12,13} &= u_{1,213} + u_{2,113}\end{aligned}$$

che implicano:

$$\begin{aligned}2\varepsilon_{23,11} + 2\varepsilon_{13,12} + 2\varepsilon_{12,13} &= u_{2,311} + u_{3,211} + u_{1,312} + u_{3,112} + u_{1,213} + u_{2,113} \\ &= 2u_{2,311} + 2u_{3,211} + 2u_{1,123} \\ &= 4\varepsilon_{23,11} + 2\varepsilon_{11,23}\end{aligned}$$

e cioè:

$$\varepsilon_{13,12} + \varepsilon_{12,13} - \varepsilon_{23,11} = \varepsilon_{11,23}$$

ovvero si giunge all'equazione (3.71)₄. Le equazioni (3.71)₁ e (3.71)₂ si ricavano in modo analogo.

Sufficienza. Assegnato un campo di deformazione ε , affinché esista un campo di spostamenti \mathbf{u} devono essere soddisfatte le equazioni di compatibilità (3.71). Per dimostrarlo, si calcola lo spostamento \mathbf{u} del generico punto P' , individuato dal vettore posizione \mathbf{x}' , a partire dallo spostamento \mathbf{u}^o di un prefissato punto P_o , individuato dal vettore posizione \mathbf{x}^o . Nel seguito, per semplificare le notazioni, si preferisce scrivere le formule in termini di componenti. Così si ha:

$$\begin{aligned}u_j &= u_j^o + \int_{P_o}^{P'} du_j = u_j^o + \int_{P_o}^{P'} u_{j,k} dx_k \\ &= u_j^o + \int_{P_o}^{P'} (\varepsilon_{jk} + W_{jk}) dx_k\end{aligned}\quad (3.74)$$

Deve allora accadere che, assegnato che sia il tensore di deformazione ε_{jk} , affinché esso sia compatibile deve essere possibile definire un campo W_{jk} che permetta di calcolare in modo univoco lo spostamento tramite integrazione lungo un qualsiasi percorso $P_o - P'$.

$$u_j = u_j^o + \int_{P_o}^{P'} \varepsilon_{jk} dx_k + \int_{P_o}^{P'} W_{jk} d(x_k - x'_k)\quad (3.75)$$

essendo $dx'_k = 0$. Integrando per parti l'ultimo termine della (3.75), si ha:

$$\begin{aligned} \int_{P_o}^{P'} W_{jk} d(x_k - x'_k) &= \left[W_{jk}(x_k - x'_k) \right]_{x'_k}^{x'_k} - \int_{P_o}^{P'} dW_{jk}(x_k - x'_k) \\ &= W'_{jk}(x'_k - x'_k) - W^o_{jk}(x'_k - x'_k) + \int_{P_o}^{P'} W_{jk,l}(x'_k - x_k) dx_l \\ &= W^o_{jk}(x'_k - x'_k) + \int_{P_o}^{P'} W_{jk,l}(x'_k - x_k) dx_l \end{aligned}$$

che sostituito di nuovo nella (3.75) fornisce:

$$\begin{aligned} u_j &= u_j^o + W^o_{jk}(x'_k - x_k^o) + \int_{P_o}^{P'} \varepsilon_{jk} dx_k + \int_{P_o}^{P'} W_{jk,l}(x'_k - x_k) dx_l \\ &= u_j^o + W^o_{jk}(x'_k - x_k^o) + \int_{P_o}^{P'} \left[W_{jk,l}(x'_k - x_k) + \varepsilon_{jl} \right] dx_l \end{aligned} \quad (3.76)$$

Essendo:

$$\begin{aligned} W_{jk,l} &= \frac{1}{2}(u_{j,kl} - u_{k,jl}) = \frac{1}{2}(u_{j,kl} - u_{k,jl}) + \frac{1}{2}(u_{l,jk} - u_{l,jk}) \\ &= \frac{1}{2}(u_{j,kl} + u_{l,jk}) - \frac{1}{2}(u_{k,jl} + u_{l,jk}) = \frac{1}{2}(u_{j,lk} + u_{l,jk}) - \frac{1}{2}(u_{k,lj} + u_{l,kj}) \\ &= \varepsilon_{jl,k} + \varepsilon_{kl,j} \end{aligned}$$

la (3.76) si riscrive come:

$$u_j = u_j^o + W^o_{jk}(x'_k - x_k^o) + \int_{P_o}^{P'} \left[(\varepsilon_{jl,k} + \varepsilon_{kl,j})(x'_k - x_k) + \varepsilon_{jl} \right] dx_l \quad (3.77)$$

Posto allora:

$$U_{jl} = (x'_k - x_k)(\varepsilon_{jl,k} + \varepsilon_{kl,j}) + \varepsilon_{jl}$$

si deduce che condizione necessaria e sufficiente affinché u_j sia indipendente dal percorso seguito è:

$$U_{jl,i} = U_{ji,l}$$

Allora:

$$\begin{aligned} U_{jl,i} &= \left[(x'_k - x_k)(\varepsilon_{jl,k} + \varepsilon_{kl,j}) + \varepsilon_{jl} \right]_{,i} \\ &= \varepsilon_{jl,i} + (x'_k - x_k)(\varepsilon_{jl,ki} + \varepsilon_{kl,ji}) - \delta_{ki}(\varepsilon_{jl,k} - \varepsilon_{kl,j}) \\ &= \varepsilon_{jl,i} + (x'_k - x_k)(\varepsilon_{jl,ki} + \varepsilon_{kl,ji}) - \varepsilon_{jl,i} + \varepsilon_{il,j} \\ &= \varepsilon_{il,j} + (x'_k - x_k)(\varepsilon_{jl,ki} + \varepsilon_{kl,ji}) \end{aligned}$$

d'altra parte:

$$U_{ji,l} = \varepsilon_{li,j} + (x'_k - x_k)(\varepsilon_{ji,kl} + \varepsilon_{ki,jl})$$

La condizione $U_{jl,i} = U_{ji,l}$ diventa allora:

$$\varepsilon_{il,j} + (x'_k - x_k)(\varepsilon_{jl,ki} + \varepsilon_{kl,ji}) = \varepsilon_{li,j} + (x'_k - x_k)(\varepsilon_{ji,kl} + \varepsilon_{ki,jl})$$

che per la simmetria di ε equivale a:

$$\varepsilon_{jl,ki} + \varepsilon_{kl,ji} = \varepsilon_{ji,kl} + \varepsilon_{ki,jl}$$

ovvero

$$\varepsilon_{lj,ki} + \varepsilon_{kl,ji} = \varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{ki,jl}$$

che conducono alle (3.71).

3.4.8 Esercizio sulla deformazione

In una lastra piana soggetta a deformazione omogenea sono note le dilatazioni lineari:

$$\Delta_1 = 1e^{-3} \quad \Delta_2 = -3e^{-3} \quad \Delta_3 = 2e^{-3}$$

lungo le direzioni \mathbf{n}^1 , \mathbf{n}^2 ed \mathbf{n}^3 , rispettivamente, con

$$\mathbf{n}^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{n}^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{n}^3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (3.78)$$

Determinare la massima dilatazione lineare.

Soluzione

Poichè la dilatazione lineare lungo la direzione \mathbf{n} è determinata dalla formula:

$$\Delta_n = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \quad (3.79)$$

deve accadere che:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \varepsilon_{11} \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} + \varepsilon_{22} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + 2\varepsilon_{12}) \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{22} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \varepsilon_{22}\end{aligned}\quad (3.82)$$

Quindi si ha:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= 1e^{-3} \\ \frac{1}{2}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + 2\varepsilon_{12}) &= -3e^{-3} \\ \varepsilon_{22} &= 2e^{-3}\end{aligned}\quad (3.83)$$

Tenendo conto della prima e della terza delle (3.83), la seconda delle (3.83) fornisce:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(-6e^{-3} - 1e^{-3} - 2e^{-3}) = -4.5e^{-3}$$

In definitiva, la matrice di deformazione infinitesima vale:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & -4.5 \\ -4.5 & 2 \end{bmatrix} e^{-3}$$

Un ben noto teorema dimostra che la dilatazione lineare massima Δ_{\max} coincide con la più grande deformazione principale ovvero con il massimo autovalore del tensore di deformazione:

$$\Delta_{\max} = \max \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \} \quad (3.84)$$

Le deformazioni principali si determinano risolvendo il seguente problema degli autovettori e degli autovalori:

$$\begin{aligned}\varepsilon \mathbf{n} &= \lambda \mathbf{n} \\ (\varepsilon - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{n} &= \mathbf{0}\end{aligned}\quad (3.85)$$

ovvero, in esplicito:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \lambda & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Per assicurare l'esistenza di soluzioni differenti da quella banale deve accadere:

$$\det \begin{bmatrix} 1e^{-3} - \lambda & -4.5e^{-3} \\ -4.5e^{-3} & 2e^{-3} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

e quindi:

$$(1e^{-3} - \lambda) (2e^{-3} - \lambda) - 4.5^2 e^{-6} = 0$$

ovvero:

$$\lambda^2 - 3\lambda * 10^{-3} - 18.25e^{-6} = 0 \quad (3.86)$$

Risolvendo l'equazione (3.86), si ottiene:

$$\lambda = \frac{(3 \pm \sqrt{9 + 4 * 18.25}) e^{-3}}{2} = \frac{(3 \pm 9.06) e^{-3}}{2}$$

Per si ha:

$$\lambda_1 = 6.03e^{-3} \quad , \quad \lambda_2 = -3.03e^{-3}$$

In definitiva la dilatazione massima vale:

$$\Delta_{\max} = 6.03e^{-3} \quad (3.87)$$

Capitolo 4

ANALISI DELLA TENSIONE

L'analisi della tensione viene affrontata scrivendo le equazioni di equilibrio del corpo Ω nella configurazione corrente. Per semplificare tale analisi, nel seguito si considera l'ipotesi di piccoli spostamenti (3.38). Si assume cioè che gli spostamenti di Ω sono di ordine di grandezza trascurabile rispetto alla dimensione del corpo. In tal modo si può confondere la configurazione deformata con quella indeformata. Ne consegue che le equazioni di equilibrio possono essere scritte direttamente sulla configurazione indeformata, che coincide con quella deformata.

Si suppone inoltre che sul corpo possano agire due soli tipi di forze:

- \mathbf{p} forze superficiali (o di contatto), ovvero forze per unità di superficie, così che la forza elementare vale $\mathbf{p} dS$;
- \mathbf{b} forze di massa (o di volume, o azioni a distanza), ovvero forze per unità di volume, così che la forza elementare vale $\mathbf{b} dV$.

Il sistema di forze agenti sul corpo deve essere equilibrato e quindi sussistono le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{p} dS + \int_{\Omega} \mathbf{b} dV \\ \mathbf{0} &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{p} dS + \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{b} dV\end{aligned}\tag{4.1}$$

dove \mathbf{x} è il vettore posizione di un generico punto del corpo Ω . Le (4.1) sono le classiche sei Equazioni Cardinali della Statica espresse in forma vettoriale, e cioè rispettivamente le equazioni di equilibrio alla traslazione e le equazioni di equilibrio alla rotazione.

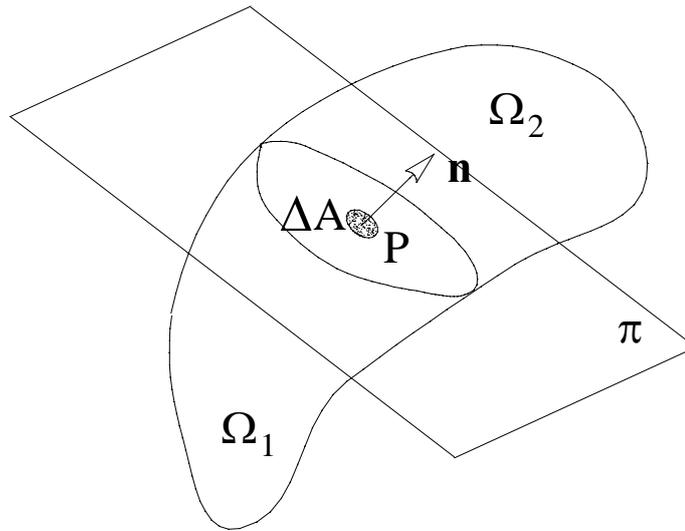


Figura 4.1: Solido separato in due parti tramite un piano π .

4.1 Concetto di tensione in un punto

Si consideri il corpo Ω ed un piano π di normale \mathbf{n} secante Ω . Il piano π taglia Ω in due parti che sono denotate con Ω_1 ed Ω_2 tali che:

$$\begin{aligned}\Omega_1 \cup \Omega_2 &= \Omega \\ \Omega_1 \cap \Omega_2 &= \emptyset\end{aligned}$$

come mostrato in figura 4.1.

Poichè il corpo è in equilibrio, cioè valgono le equazioni (4.1), allora ogni sua parte dovrà essere in equilibrio. Così, in particolare sia Ω_1 che Ω_2 devono essere in equilibrio. Naturalmente, in generale potrà accadere che le forze di superficie \mathbf{p} e di volume \mathbf{b} assegnate non soddisfino le condizioni di equilibrio solo su Ω_1 e solo su Ω_2 , ovvero:

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &\neq \int_{\partial\Omega_1} \mathbf{p} \, dS + \int_{\Omega_1} \mathbf{b} \, dV & \mathbf{0} &\neq \int_{\partial\Omega_1} \mathbf{x} \times \mathbf{p} \, dS + \int_{\Omega_1} \mathbf{x} \times \mathbf{b} \, dV \\ \mathbf{0} &\neq \int_{\partial\Omega_2} \mathbf{p} \, dS + \int_{\Omega_2} \mathbf{b} \, dV & \mathbf{0} &\neq \int_{\partial\Omega_2} \mathbf{x} \times \mathbf{p} \, dS + \int_{\Omega_2} \mathbf{x} \times \mathbf{b} \, dV\end{aligned}$$

dove $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 = \partial\Omega$. Se ne deduce allora che attraverso la superficie di taglio $\pi \cap \Omega$ devono agire azioni mutue tra Ω_1 ed Ω_2 che ripristinino l'equilibrio.

Sia ΔA la generica area contenente il tipico punto P che giace sulla superficie di taglio $\pi \cap \Omega$, le azioni di scambio sono una forza $\Delta \mathbf{F}$ ed una coppia $\Delta \mathbf{M}$ calcolata

rispetto a P . Si assume allora che:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A} &= \mathbf{t}^n \\ \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{M}}{\Delta A} &= \mathbf{0}\end{aligned}\quad (4.2)$$

In altre parole al tendere a zero di ΔA tendono a zero anche $\Delta \mathbf{F}$ e $\Delta \mathbf{M}$, ma quest'ultima più rapidamente. Occorre inoltre osservare che il limite deve essere calcolato opportunamente, ossia ΔA tende a P in maniera omotetica (tutto il contorno di ΔA tende a P con la stessa velocità).

Il vettore \mathbf{t}^n è la tensione nel punto P sulla giacitura \mathbf{n} normale al piano π . La tensione dipende da P , cioè da \mathbf{x} vettore posizione di P , e da \mathbf{n} :

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$$

in cui si omette l'apice n per semplicità di notazione.

4.2 Teoremi di Cauchy

4.2.1 Teorema di azione e reazione o di reciprocità

Si vuole dimostrare la seguente relazione:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{n}) \quad (4.3)$$

All'uopo si pensi di estrarre da un corpo in equilibrio il volumetto elementare \mathcal{P} , di frontiera $\partial \mathcal{P}$, mostrato in figura 4.2 (il cui centro sia individuato dal vettore \mathbf{x}): esso è un parallelepipedo rettangolo a base quadrata di lato ε e di altezza ε^2 .

Si indichino con Γ^+ , Γ^- e Γ^ℓ rispettivamente la base superiore, quella inferiore e la superficie laterale e siano inoltre V ed A il volume e l'area di \mathcal{P} . Sussistono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\partial \mathcal{P} &= \Gamma^+ \cup \Gamma^- \cup \Gamma^\ell \\ V &= \varepsilon^4 \\ A(\Gamma^+) &= A(\Gamma^-) = \varepsilon^2 \\ A(\Gamma^\ell) &= 4\varepsilon^3\end{aligned}$$

L'equazione di equilibrio alla traslazione per il volumetto \mathcal{P} è:

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \int_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{t} \, dA + \int_V \mathbf{b} \, dV \\ &= \int_{\Gamma^+} \mathbf{t}^+ \, dA + \int_{\Gamma^-} \mathbf{t}^- \, dA + \int_{\Gamma^\ell} \mathbf{t}^\ell \, dA + \int_V \mathbf{b} \, dV\end{aligned}$$

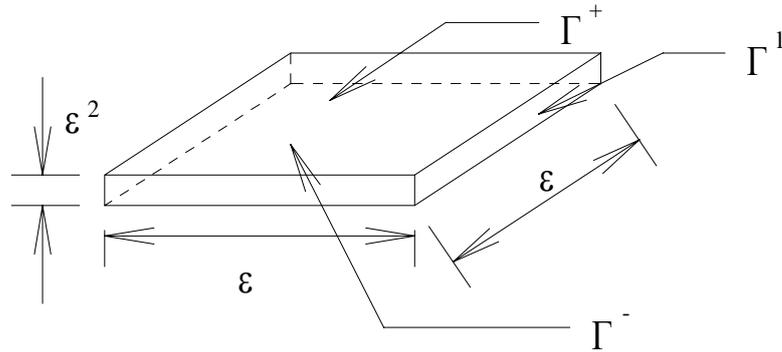


Figura 4.2: Parte \mathcal{P} di forma parallelepipeda del corpo Ω .

Applicando allora il teorema della media si ottiene:

$$\mathbf{0} = \bar{\mathbf{b}}\varepsilon^4 + \bar{\mathbf{t}}^+\varepsilon^2 + \bar{\mathbf{t}}^-\varepsilon^2 + 4\bar{\mathbf{t}}^\ell\varepsilon^3$$

dove $\bar{\mathbf{b}}$ e $\bar{\mathbf{t}}$ rappresentano la media delle forze di volume e della tensione. Dividendo per ε^2 e facendo il limite per ε che tende a zero si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} (\bar{\mathbf{b}}\varepsilon^4 + \bar{\mathbf{t}}^+\varepsilon^2 + \bar{\mathbf{t}}^-\varepsilon^2 + 4\bar{\mathbf{t}}^\ell\varepsilon^3) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\bar{\mathbf{b}}\varepsilon^2 + \bar{\mathbf{t}}^+ + \bar{\mathbf{t}}^- + 4\bar{\mathbf{t}}^\ell\varepsilon) \\ &= \mathbf{t}^+ + \mathbf{t}^- \end{aligned}$$

ovvero

$$\mathbf{t}^+ = -\mathbf{t}^- \quad (4.4)$$

dove i valori delle tensioni non sono più medi perchè nel limite per ε che tende a 0, si va a considerare il valore locale della tensione nel punto P , e non più quello medio calcolato su una superficie finita. Infine, ricordando che le superfici Γ^+ e Γ^- hanno normale opposta, se ne deduce che l'equazione (4.4) equivale alla (4.3).

4.2.2 Teorema di rappresentazione o del tetraedro

Il teorema del tetraedro è il teorema fondamentale di Cauchy. Esso fornisce la dipendenza esplicita della tensione \mathbf{t} dalla normale \mathbf{n} e cioè fornisce l'applicazione mediante cui si definisce \mathbf{t} assegnata che sia una giacitura \mathbf{n} . In particolare, in un qualsiasi punto P del corpo Ω , il teorema dimostra che l'applicazione che fornisce \mathbf{t} in funzione di \mathbf{n} è lineare del tipo:

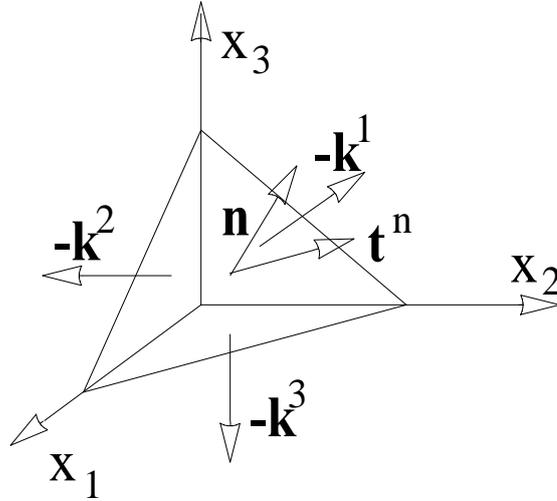


Figura 4.3: Tetraedro di Cauchy.

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (4.5)$$

dove $\boldsymbol{\sigma}$ è detto tensore delle tensioni.

Si consideri il tetraedro in figura 4.3. Scelto il sistema di riferimento ortogonale definito dai versori $(\mathbf{k}^1, \mathbf{k}^2, \mathbf{k}^3)$ ed avente per origine P (punto interno del corpo in equilibrio) il tetraedro è ottenuto dall'insieme dei punti delimitati dai piani coordinati e da un piano inclinato avente per normale \mathbf{n} , così che questa normale abbia tutte le componenti positive. Le facce del tetraedro definite dai piani coordinati hanno normali opposte ai versori coordinati $\mathbf{k}^1, \mathbf{k}^2, \mathbf{k}^3$. Si indicano allora con $\mathbf{t}^1, \mathbf{t}^2$ e \mathbf{t}^3 le tensioni sulle facce di normale $\mathbf{k}^1, \mathbf{k}^2, \mathbf{k}^3$. Analogamente A_1, A_2 ed A_3 sono le aree delle facce ortogonali a $\mathbf{k}^1, \mathbf{k}^2, \mathbf{k}^3$. Il vettore tensione agente sulla giacitura \mathbf{n} è \mathbf{t}^n ed agisce su un'area A_n . Applicando il teorema di reciprocità, per l'equilibrio alla traslazione deve essere:

$$\int_{\Delta V} \mathbf{b} dV + \int_{A_n} \mathbf{t}^n dA + \int_{A_1} -\mathbf{t}^1 dA + \int_{A_2} -\mathbf{t}^2 dA + \int_{A_3} -\mathbf{t}^3 dA = \mathbf{0}$$

Applicando ora il teorema della media si ha:

$$\bar{\mathbf{b}} \Delta V + \bar{\mathbf{t}}^n A_n - \bar{\mathbf{t}}^1 A_1 - \bar{\mathbf{t}}^2 A_2 - \bar{\mathbf{t}}^3 A_3 = \mathbf{0} \quad (4.6)$$

Ricordando che:

$$\begin{aligned} A_1 &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}^1) A_n = n_1 A_n \\ A_2 &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}^2) A_n = n_2 A_n \\ A_3 &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}^3) A_n = n_3 A_n \end{aligned}$$

e che il volume del tetraedro vale:

$$V = \frac{hA_n}{3}$$

dove h è l'altezza del tetraedro, relativa alla faccia di normale \mathbf{n} , dividendo per A_n l'equazione di bilancio (4.6) si ha:

$$\frac{\bar{\mathbf{b}}h}{3} + \bar{\mathbf{t}}^n - \bar{\mathbf{t}}^1 n_1 - \bar{\mathbf{t}}^2 n_2 - \bar{\mathbf{t}}^3 n_3 = \mathbf{0}$$

Al tendere di h a zero il tetraedro coinciderà con il punto P , ed i valori medi tendono a valori puntuali:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\bar{\mathbf{b}}h}{3} + \bar{\mathbf{t}}^n - \bar{\mathbf{t}}^1 n_1 - \bar{\mathbf{t}}^2 n_2 - \bar{\mathbf{t}}^3 n_3 \right\} \\ &= \mathbf{t}^n - \mathbf{t}^1 n_1 - \mathbf{t}^2 n_2 - \mathbf{t}^3 n_3 \end{aligned}$$

Se ne deduce che la tensione nel punto P sulla faccia di normale \mathbf{n} si calcola come:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^n &= \mathbf{t}^1 n_1 + \mathbf{t}^2 n_2 + \mathbf{t}^3 n_3 \\ &= \mathbf{t}^1 (\mathbf{k}^1 \bullet \mathbf{n}) + \mathbf{t}^2 (\mathbf{k}^2 \bullet \mathbf{n}) + \mathbf{t}^3 (\mathbf{k}^3 \bullet \mathbf{n}) \\ &= (\mathbf{t}^1 \otimes \mathbf{k}^1) \mathbf{n} + (\mathbf{t}^2 \otimes \mathbf{k}^2) \mathbf{n} + (\mathbf{t}^3 \otimes \mathbf{k}^3) \mathbf{n} \\ &= (\mathbf{t}^1 \otimes \mathbf{k}^1 + \mathbf{t}^2 \otimes \mathbf{k}^2 + \mathbf{t}^3 \otimes \mathbf{k}^3) \mathbf{n} \\ &= \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \end{aligned}$$

In altre parole, indicando le componenti di $\mathbf{t}^1, \mathbf{t}^2, \mathbf{t}^3$ con:

$$\mathbf{t}^1 = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{t}^2 = \begin{Bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{32} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{t}^3 = \begin{Bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

l'equazione (??) in componenti diventa:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} t_1^n \\ t_2^n \\ t_3^n \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} n_1 + \begin{Bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{32} \end{Bmatrix} n_2 + \begin{Bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} n_3 \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Concludendo, assegnata la giacitura \mathbf{n} in un punto, la tensione in quel punto e per quella giacitura, è fornita dalla relazione (4.5), dove il tensore delle tensioni è dato da:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}^1 \otimes \mathbf{k}^1 + \mathbf{t}^2 \otimes \mathbf{k}^2 + \mathbf{t}^3 \otimes \mathbf{k}^3$$

Nel sistema definito dai versori $\mathbf{k}^1, \mathbf{k}^2, \mathbf{k}^3$ il tensore delle tensioni ha nove componenti σ_{ij} , dette componenti speciali della tensione:

$$\sigma_{ij} = \boldsymbol{\sigma} \bullet (\mathbf{k}^i \otimes \mathbf{k}^j) = (\mathbf{t}^k \otimes \mathbf{k}^k) \bullet (\mathbf{k}^i \otimes \mathbf{k}^j) = (\mathbf{t}^k \bullet \mathbf{k}^i) (\mathbf{k}^k \bullet \mathbf{k}^j) = (\mathbf{t}^k \bullet \mathbf{k}^i) \delta_{kj} = \mathbf{t}^j \bullet \mathbf{k}^i \quad (4.8)$$

La componente σ_{ij} rappresenta la componente in direzione \mathbf{k}^i della tensione agente nella giacitura di normale \mathbf{k}^j .

4.3 Equazioni d'equilibrio

Si consideri una parte \mathcal{P} di Ω ; per l'equilibrio alla traslazione deve essere:

$$\int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{t} \, dA + \int_{\mathcal{P}} \mathbf{b} \, dV = \mathbf{0}$$

ed applicando il teorema di rappresentazione della tensione e quindi il teorema della divergenza, si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \int_{\partial\mathcal{P}} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \, dA + \int_{\mathcal{P}} \mathbf{b} \, dV \\ &= \int_{\mathcal{P}} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \, dV + \int_{\mathcal{P}} \mathbf{b} \, dV \\ &= \int_{\mathcal{P}} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \, dV \end{aligned} \quad (4.9)$$

L'equazione (4.9) deve essere verificata per ogni possibile parte $\mathcal{P} \subseteq \Omega$, allora si può applicare il lemma di localizzazione di Dubois-Raimond, e la (4.9) conduce all'equazione di equilibrio indefinito:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (4.10)$$

che in componenti:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$$

Si imponga ora l'equilibrio alla rotazione della parte $\mathcal{P} \subseteq \Omega$:

$$\int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{x} \times \mathbf{t} \, dA + \int_{\mathcal{P}} \mathbf{x} \times \mathbf{b} \, dV = \mathbf{0}$$

ovvero in componenti:

$$\begin{aligned}
0 &= E_{ijk} \left[\int_{\partial P} x_j t_k dA + \int_P x_j b_k dV \right] \\
&= E_{ijk} \left[\int_{\partial P} x_j \sigma_{kh} n_h dA + \int_P x_j b_k dV \right] \\
&= E_{ijk} \int_P \left[(x_j \sigma_{kh})_{,h} + x_j b_k \right] dV \\
&= E_{ijk} \int_P (x_j \sigma_{kh,h} + \delta_{jh} \sigma_{kh} + x_j b_k) dV \\
&= E_{ijk} \int_P [(x_j \sigma_{kh,h} + x_j b_k) + \delta_{jh} \sigma_{kh}] dV \\
&= E_{ijk} \int_P [(x_j \sigma_{kh,h} + x_j b_k) + \sigma_{kj}] dV
\end{aligned}$$

Dovendo essere verificato l'equilibrio $\forall P \subseteq \Omega$, per il lemma di localizzazione di Dubois-Raimond si ha:

$$E_{ijk} [(x_j \sigma_{kh,h} + x_j b_k) + \sigma_{kj}] = 0$$

e tenendo conto del risultato precedente:

$$E_{ijk} \sigma_{kj} = 0$$

che in forma esplicita si scrivono come:

$$\begin{aligned}
\sigma_{32} - \sigma_{23} &= 0 \\
\sigma_{13} - \sigma_{31} &= 0 \\
\sigma_{21} - \sigma_{12} &= 0
\end{aligned}$$

ovvero

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (4.11)$$

Queste condizioni permettono di ridurre a 6 le quantità necessarie alla conoscenza di $\boldsymbol{\sigma}$.

L'equazione vettoriale di equilibrio indefinito (4.10) e la condizione di simmetria del tensore delle tensioni (4.11) possono essere ricavate ricorrendo ad una procedura classica di carattere meno matematico ma più meccanico di quella sopra proposta. Si consideri infatti il parallelepipedo rappresentato in figura 4.4.

Sulle sei facce del parallelepipedo agiscono le tensioni calcolate sui piani coordinati. Si evidenzia che sulla faccia parallela al piano $x_1 = \Delta x_1$ agisce una tensione media pari al valore della tensione media $\bar{\mathbf{t}}^1$ sul piano $x_1 = 0$, incrementata di $\overline{\Delta \mathbf{t}}^1$.

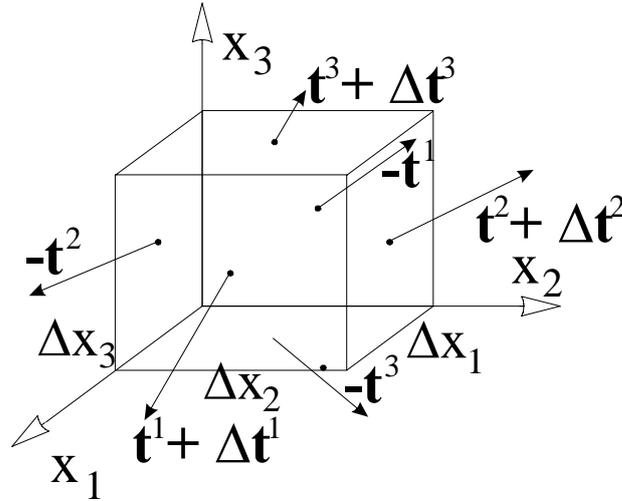


Figura 4.4: Parallelepipedo soggetto alle tensioni sui piani coordinati.

Analogamente, sulla faccia parallela al piano $x_2 = \Delta x_2$ agisce una tensione media pari al valore della tensione media \bar{t}^2 sul piano $x_2 = 0$, incrementata di $\overline{\Delta t}^2$; e così anche sulla faccia parallela al piano $x_3 = \Delta x_3$ agisce una tensione media pari al valore della tensione media \bar{t}^3 sul piano $x_3 = 0$, incrementata di $\overline{\Delta t}^3$. Nella tabella che segue sono riportati le tensioni che agiscono sui sei piani e le aree corrispondenti:

piano	normale	tensione	area	forza
$x_1 = 0$	$-\mathbf{k}^1$	$-\bar{t}^1$	$\Delta x_2 \Delta x_3$	$-\bar{t}^1 \Delta x_2 \Delta x_3$
$x_1 = \Delta x_1$	\mathbf{k}^1	$\bar{t}^1 + \overline{\Delta t}^1$	$\Delta x_2 \Delta x_3$	$(\bar{t}^1 + \overline{\Delta t}^1) \Delta x_2 \Delta x_3$
$x_2 = 0$	$-\mathbf{k}^2$	$-\bar{t}^2$	$\Delta x_1 \Delta x_3$	$-\bar{t}^2 \Delta x_1 \Delta x_3$
$x_2 = \Delta x_2$	\mathbf{k}^2	$\bar{t}^2 + \overline{\Delta t}^2$	$\Delta x_1 \Delta x_3$	$(\bar{t}^2 + \overline{\Delta t}^2) \Delta x_1 \Delta x_3$
$x_3 = 0$	$-\mathbf{k}^3$	$-\bar{t}^3$	$\Delta x_1 \Delta x_2$	$-\bar{t}^3 \Delta x_1 \Delta x_2$
$x_3 = \Delta x_3$	\mathbf{k}^3	$\bar{t}^3 + \overline{\Delta t}^3$	$\Delta x_1 \Delta x_2$	$(\bar{t}^3 + \overline{\Delta t}^3) \Delta x_1 \Delta x_2$

L'equilibrio alla traslazione del parallelepipedo fornisce la seguente equazione:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{0} = & -\bar{t}^1 \Delta x_2 \Delta x_3 + (\bar{t}^1 + \overline{\Delta t}^1) \Delta x_2 \Delta x_3 \\
 & -\bar{t}^2 \Delta x_1 \Delta x_3 + (\bar{t}^2 + \overline{\Delta t}^2) \Delta x_1 \Delta x_3 \\
 & -\bar{t}^3 \Delta x_1 \Delta x_2 + (\bar{t}^3 + \overline{\Delta t}^3) \Delta x_1 \Delta x_2 + \bar{\mathbf{b}} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Dividendo tutto per $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ si ottiene:

$$\mathbf{0} = \frac{\overline{\Delta \mathbf{t}}^1}{\Delta x_1} + \frac{\overline{\Delta \mathbf{t}}^2}{\Delta x_2} + \frac{\overline{\Delta \mathbf{t}}^3}{\Delta x_3} + \overline{\mathbf{b}} \quad (4.13)$$

che, nel limite per $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \Delta x_3 \rightarrow 0$ fornisce l'espressione:

$$\mathbf{0} = \frac{\partial \mathbf{t}^1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{t}^2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{t}^3}{\partial x_3} + \mathbf{b} \quad (4.14)$$

equivalente alla (4.10).

Sia P il centro del parallelepipedo di coordinate $\Delta x_1/2, \Delta x_2/2, \Delta x_3/2$, e siano $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3$ i vettori che individuano da P i centri delle facce del parallelepipedo:

$$\mathbf{x}^1 = \frac{\Delta x_1}{2} \mathbf{k}^1 \quad \mathbf{x}^2 = \frac{\Delta x_2}{2} \mathbf{k}^2 \quad \mathbf{x}^3 = \frac{\Delta x_3}{2} \mathbf{k}^3 \quad (4.15)$$

L'equilibrio alla rotazione del parallelepipedo intorno al punto P fornisce la seguente equazione:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = & (-\mathbf{x}^1) \times (-\overline{\mathbf{t}}^1) \Delta x_2 \Delta x_3 + \mathbf{x}^1 \times (\overline{\mathbf{t}}^1 + \overline{\Delta \mathbf{t}}^1) \Delta x_2 \Delta x_3 + \\ & (-\mathbf{x}^2) \times (-\overline{\mathbf{t}}^2) \Delta x_1 \Delta x_3 + \mathbf{x}^2 \times (\overline{\mathbf{t}}^2 + \overline{\Delta \mathbf{t}}^2) \Delta x_1 \Delta x_3 + \\ & (-\mathbf{x}^3) \times (-\overline{\mathbf{t}}^3) \Delta x_1 \Delta x_2 + \mathbf{x}^3 \times (\overline{\mathbf{t}}^3 + \overline{\Delta \mathbf{t}}^3) \Delta x_1 \Delta x_2 \end{aligned} \quad (4.16)$$

ovvero

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = & 2\mathbf{x}^1 \times \overline{\mathbf{t}}^1 \Delta x_2 \Delta x_3 + \mathbf{x}^1 \times \overline{\Delta \mathbf{t}}^1 \Delta x_2 \Delta x_3 + \\ & 2\mathbf{x}^2 \times \overline{\mathbf{t}}^2 \Delta x_1 \Delta x_3 + \mathbf{x}^2 \times \overline{\Delta \mathbf{t}}^2 \Delta x_1 \Delta x_3 + \\ & 2\mathbf{x}^3 \times \overline{\mathbf{t}}^3 \Delta x_1 \Delta x_2 + \mathbf{x}^3 \times \overline{\Delta \mathbf{t}}^3 \Delta x_1 \Delta x_2 \\ = & \mathbf{k}^1 \times \overline{\mathbf{t}}^1 \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 + \mathbf{k}^1 \times \overline{\Delta \mathbf{t}}^1 \frac{\Delta x_1}{2} \Delta x_2 \Delta x_3 + \\ & \mathbf{k}^2 \times \overline{\mathbf{t}}^2 \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 + \mathbf{k}^2 \times \overline{\Delta \mathbf{t}}^2 \frac{\Delta x_1}{2} \Delta x_2 \Delta x_3 + \\ & \mathbf{k}^3 \times \overline{\mathbf{t}}^3 \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 + \mathbf{k}^3 \times \overline{\Delta \mathbf{t}}^3 \frac{\Delta x_1}{2} \Delta x_2 \Delta x_3 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Dividendo tutto per $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$, nel limite per $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \Delta x_3 \rightarrow 0$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = & \mathbf{k}^1 \times \mathbf{t}^1 + \mathbf{k}^2 \times \mathbf{t}^2 + \mathbf{k}^3 \times \mathbf{t}^3 \quad (4.18) \\ = & \begin{vmatrix} \mathbf{k}^1 & \mathbf{k}^2 & \mathbf{k}^3 \\ 1 & 0 & 0 \\ \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{k}^1 & \mathbf{k}^2 & \mathbf{k}^3 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{k}^1 & \mathbf{k}^2 & \mathbf{k}^3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \\ = & (-\mathbf{k}^2 \sigma_{31} + \mathbf{k}^3 \sigma_{21}) + (\mathbf{k}^1 \sigma_{32} - \mathbf{k}^3 \sigma_{12}) + (-\mathbf{k}^1 \sigma_{23} + \mathbf{k}^2 \sigma_{13}) \\ = & \mathbf{k}^1 (\sigma_{32} - \sigma_{23}) + \mathbf{k}^2 (-\sigma_{31} + \sigma_{13}) + \mathbf{k}^3 (\sigma_{21} - \sigma_{12}) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\sigma_{32} &= \sigma_{23} \\ \sigma_{31} &= \sigma_{13} \\ \sigma_{21} &= \sigma_{12}\end{aligned}\tag{4.19}$$

che equivale alla (4.11).

Osservazioni:

- L'equazione $div\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ vale nei punti interni del corpo e quindi nell'insieme aperto di Ω . Sulla frontiera deve accadere che le tensioni emergenti $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$ siano pari alle forze \mathbf{p} di superficie applicate:

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{p} \quad \text{su } \partial\Omega\tag{4.20}$$

- In virtù della simmetria di $\boldsymbol{\sigma}$ si può enunciare il principio di reciprocità: la componente secondo la retta orientata \mathbf{m} del vettore tensione agente sulla superficie di normale \mathbf{n} è uguale alla componente del vettore tensione agente sulla superficie di normale \mathbf{m} secondo la retta orientata \mathbf{n} :

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) \bullet \mathbf{m} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} \bullet \mathbf{m} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{m} \bullet \mathbf{n} = \mathbf{t}(\mathbf{m}) \bullet \mathbf{n}$$

In particolare, le tensioni tangenziali agenti su due piani mutuamente ortogonali e dirette normalmente allo spigolo comune sono uguali ed entrambe dirette verso lo spigolo o in senso opposto.

- Le equazioni indefinite di equilibrio, la simmetria del tensore delle tensioni e le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned}div\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} &= \mathbf{0} & \text{in} & \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^T & \text{in} & \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} &= \mathbf{p} & \text{su} & \partial\Omega\end{aligned}\tag{4.21}$$

sono necessarie ma non sufficienti per la definizione dello stato tensionale di un corpo sul quale agiscono forze di volume \mathbf{b} e forze di superficie \mathbf{p} . Generalmente l'equazione (4.21)₂ è omessa poichè il tensore delle tensioni è preso implicitamente simmetrico.

4.4 Direzioni e Tensioni principali

Si vuole ora determinare se esistono ed, in caso affermativo, quali sono le giaciture \mathbf{n} per le quali la tensione associata è parallela ad \mathbf{n} ; si intende cioè indagare sulla possibilità di soluzione dell'equazione:

$$\mathbf{t}^n = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \sigma\mathbf{n}$$

Si tratta cioè di risolvere il seguente sistema algebrico:

$$(\boldsymbol{\sigma} - \sigma \mathbf{I}) \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (4.22)$$

Affinché questo problema abbia soluzione non banale deve essere:

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \sigma \mathbf{I}) = 0$$

si ottiene allora l'equazione:

$$-\sigma^3 + J_1\sigma^2 - J_2\sigma + J_3 = 0 \quad (4.23)$$

che si chiama equazione caratteristica o secolare, introdotta da Lagrange in meccanica celeste. Questa equazione ammette soluzione reale perché $\boldsymbol{\sigma}$ è simmetrico. I coefficienti dell'equazione caratteristica (4.23) J_1 , J_2 e J_3 sono detti invarianti di tensione, sono cioè indipendenti dal sistema di riferimento. Infatti, il problema delle tensioni e direzioni principali ha soluzione indipendente dal sistema di riferimento e quindi i coefficienti dell'equazione (4.23) non possono variare con il riferimento scelto. In particolare, si ha:

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \\ J_2 &= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2 \\ &= \frac{1}{2} [(\text{tr} \boldsymbol{\sigma})^2 - (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}^2)] \\ J_3 &= \det \boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \quad (4.24)$$

La soluzione dell'equazione caratteristica fornisce le tre tensioni principali, che vengono ordinate in modo tale che $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Diversi casi possono accadere.

$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. I tre autovalori sono distinti. Si sostituisce nel sistema (4.22) un autovalore alla volta, $\sigma = \sigma_1$, $\sigma = \sigma_2$, $\sigma = \sigma_3$. In tutti i casi, il rango della matrice $[\boldsymbol{\sigma} - \sigma \mathbf{I}]$ vale 2. Si risolvono le equazioni imponendo che la norma di \mathbf{n} sia unitaria. Si determinano così le tre direzioni principali, \mathbf{s}^1 , \mathbf{s}^2 , \mathbf{s}^3 , che è semplice mostrare siano ortogonali fra loro.

$\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$. Due autovalori sono coincidenti. Il sistema (4.22) quando $\sigma = \sigma_1$ ha rango pari a 2. Risolvendo allora le equazioni ed imponendo che la norma di \mathbf{n} sia unitaria, si determina univocamente \mathbf{s}^1 . Quando $\sigma = \sigma_2 = \sigma_3$ il sistema di equazioni (4.22) ha rango pari a 1. Tutti i versori \mathbf{s}^2 , \mathbf{s}^3 appartenenti al piano ortogonale a \mathbf{s}^1 sono principali di tensione.

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. I tre autovalori sono coincidenti. Il sistema di equazioni ha rango nullo. Tutte le direzioni nello spazio sono principali di tensione.

Analogamente a quanto evidenziato nel caso delle deformazioni e direzioni principali di deformazione, si riportano alcune proprietà fondamentali delle tensioni e delle direzioni principali di tensione.

- Se $\sigma_i \neq \sigma_j$ allora $\mathbf{s}^i \perp \mathbf{s}^j$. Infatti:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} \mathbf{s}^i \bullet \mathbf{s}^j &= \sigma_i \mathbf{s}^i \bullet \mathbf{s}^j \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{s}^j \bullet \mathbf{s}^i &= \sigma_j \mathbf{s}^j \bullet \mathbf{s}^i\end{aligned}$$

sottraendo membro a membro, e ricordando la simmetria di $\boldsymbol{\sigma}$, si ha:

$$(\sigma_i - \sigma_j) \mathbf{s}^j \bullet \mathbf{s}^i = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{s}^i \bullet \mathbf{s}^j - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{s}^j \bullet \mathbf{s}^i = 0$$

essendo $\sigma_i \neq \sigma_j$, deve allora accadere che $\mathbf{s}^i \bullet \mathbf{s}^j = 0$ e quindi $\mathbf{s}^i \perp \mathbf{s}^j$.

- Se $\sigma = \sigma_i = \sigma_j$ tutte le direzioni nel piano $\mathbf{s}^i \mathbf{s}^j$ sono principali. Infatti posto $\mathbf{s} = \alpha \mathbf{s}^i + \beta \mathbf{s}^j$ con $\|\mathbf{s}\| = 1$, si ha:

$$\mathbf{t}(\mathbf{s}) = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{s} = \alpha \boldsymbol{\sigma} \mathbf{s}^i + \beta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{s}^j = \alpha \sigma_i \mathbf{s}^i + \beta \sigma_j \mathbf{s}^j = \sigma (\alpha \mathbf{s}^i + \beta \mathbf{s}^j) = \sigma \mathbf{s}$$

- Le tensioni principali contengono la massima e la minima possibile. Infatti, posto che sia $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, si ha:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} \mathbf{s} \bullet \mathbf{s} &= (\sigma_1 \mathbf{s}^1 \otimes \mathbf{s}^1 + \sigma_2 \mathbf{s}^2 \otimes \mathbf{s}^2 + \sigma_3 \mathbf{s}^3 \otimes \mathbf{s}^3) \mathbf{s} \bullet \mathbf{s} \\ &\leq \sigma_1 (\mathbf{s}^1 \otimes \mathbf{s}^1 + \mathbf{s}^2 \otimes \mathbf{s}^2 + \mathbf{s}^3 \otimes \mathbf{s}^3) \mathbf{s} \bullet \mathbf{s} \\ &= \sigma_1 [\mathbf{s}^1 (\mathbf{s}^1 \bullet \mathbf{s}) + \mathbf{s}^2 (\mathbf{s}^2 \bullet \mathbf{s}) + \mathbf{s}^3 (\mathbf{s}^3 \bullet \mathbf{s})] \bullet \mathbf{s} \\ &= \sigma_1 [\mathbf{s}^1 (\mathbf{s}^1 \bullet \mathbf{s}) \bullet \mathbf{s} + \mathbf{s}^2 (\mathbf{s}^2 \bullet \mathbf{s}) \bullet \mathbf{s} + \mathbf{s}^3 (\mathbf{s}^3 \bullet \mathbf{s}) \bullet \mathbf{s}] \\ &= \sigma_1 [(\mathbf{s}^1 \bullet \mathbf{s})^2 + (\mathbf{s}^2 \bullet \mathbf{s})^2 + (\mathbf{s}^3 \bullet \mathbf{s})^2] = \sigma_1 \quad \forall \mathbf{s}\end{aligned}$$

Analogo ragionamento per σ_3 .

4.5 Deviatore di tensione

E' possibile decomporre il tensore di tensione $\boldsymbol{\sigma}$ nel modo seguente:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^S + \boldsymbol{\sigma}^D \tag{4.25}$$

dove:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^S &= \sigma_m \mathbf{I} = \frac{1}{3} (tr \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} && \text{è la parte sferica della tensione} \\ \boldsymbol{\sigma}^D &= \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^S && \text{è la parte deviatorica della tensione}\end{aligned}$$

e $\sigma_m = (tr\boldsymbol{\sigma})/3$ è la tensione media, ovvero la pressione idrostatica.

Per la parte sferica della tensione $\boldsymbol{\sigma}^S$ banalmente si ha che tutte le direzioni sono principali, essendo $\boldsymbol{\sigma}^S$ un tensore diagonale con componenti tutte uguali tra loro. Per quanto riguarda la parte deviatorica della tensione $\boldsymbol{\sigma}^D$ accade che $\sigma_{ij}^D = \sigma_{ij}$ $\forall i \neq j$, per cui nel riferimento principale si ha $\sigma_{ij} = 0$ e quindi anche $\sigma_{ij}^D = 0$, ne consegue che le direzioni principali di $\boldsymbol{\sigma}^D$ coincidono con quelle di $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^D &= \sigma_1 \mathbf{s}^1 \otimes \mathbf{s}^1 + \sigma_2 \mathbf{s}^2 \otimes \mathbf{s}^2 + \sigma_3 \mathbf{s}^3 \otimes \mathbf{s}^3 - \sigma_m \mathbf{I} \\ &= (\sigma_1 - \sigma_m) \mathbf{s}^1 \otimes \mathbf{s}^1 + (\sigma_2 - \sigma_m) \mathbf{s}^2 \otimes \mathbf{s}^2 + (\sigma_3 - \sigma_m) \mathbf{s}^3 \otimes \mathbf{s}^3 \\ &= \sigma_1^D \mathbf{s}^1 \otimes \mathbf{s}^1 + \sigma_2^D \mathbf{s}^2 \otimes \mathbf{s}^2 + \sigma_3^D \mathbf{s}^3 \otimes \mathbf{s}^3\end{aligned}$$

Gli autovalori di $\boldsymbol{\sigma}^D$ valgono allora $\sigma_1^D = \sigma_1 - \sigma_m$, $\sigma_2^D = \sigma_2 - \sigma_m$ e $\sigma_3^D = \sigma_3 - \sigma_m$.

Sulla base delle definizioni (4.24), gli invarianti primo della parte sferica e della parte deviatorica dello sforzo valgono:

$$J_1^S = tr\boldsymbol{\sigma}^S = tr \left[\frac{1}{3}(tr\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} \right] = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = J_1 \quad (4.26)$$

$$J_1^D = tr(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^S) = tr\boldsymbol{\sigma} - tr\boldsymbol{\sigma}^S = tr\boldsymbol{\sigma} - tr\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (4.27)$$

Analogamente, sempre per le (4.24) gli invarianti secondo della parte sferica e della parte deviatorica dello sforzo valgono:

$$J_2^S = \sigma_1^S \sigma_2^S + \sigma_1^S \sigma_3^S + \sigma_2^S \sigma_3^S = 3(\sigma_m)^2 \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned}J_2^D &= \sigma_1^D \sigma_2^D + \sigma_1^D \sigma_3^D + \sigma_2^D \sigma_3^D \quad (4.29) \\ &= (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m) + (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m) + (\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m) \\ &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3 - 2\sigma_m(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + 3\sigma_m \sigma_m \\ &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3 - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \\ &= J_2 - \frac{1}{3}J_1^2\end{aligned}$$

che sviluppando i calcoli diventa:

$$\begin{aligned}J_2^D &= -\frac{1}{3}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3)] \quad (4.30) \\ &= -\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]\end{aligned}$$

4.6 Stato tensionale piano

Si definisce piano lo stato tensionale per il quale avviene che la tensione \mathbf{t} appartiene sempre ad uno stesso piano, detto piano delle tensioni, indipendentemente dalla giacitura \mathbf{n} scelta.

Condizione necessaria e sufficiente affinché lo stato tensionale sia piano è che un autovalore di $\boldsymbol{\sigma}$ sia nullo; in tal caso poi la giacitura del piano delle tensioni coincide con l'autovettore dell'autovalore nullo.

Necessarietà: se lo stato tensionale è piano allora almeno un autovalore è nullo.

Sia \mathbf{e} la normale al piano delle tensioni e \mathbf{t} una qualsiasi tensione appartenente per ipotesi al piano delle tensioni, ne segue che:

$$\mathbf{t} \perp \mathbf{e} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{t} \bullet \mathbf{e} = 0$$

per cui si può scrivere

$$\mathbf{0} = (\mathbf{e} \bullet \mathbf{t}) \mathbf{e} = (\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) \mathbf{t} = \mathbf{P} \mathbf{t} \quad \forall \mathbf{t} \quad (4.31)$$

avendo posto $\mathbf{P} = \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}$. Il teorema di rappresentazione della tensione (4.5) implica:

$$\mathbf{P} \mathbf{t} = \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{n}$$

che dovendo valere per ogni \mathbf{n} impone:

$$\mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$$

Utilizzando quindi la rappresentazione spettrale del tensore delle tensioni, si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P} [\sigma_1 (\mathbf{s}^1 \otimes \mathbf{s}^1) + \sigma_2 (\mathbf{s}^2 \otimes \mathbf{s}^2) + \sigma_3 (\mathbf{s}^3 \otimes \mathbf{s}^3)] \\ &= (\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) [\sigma_1 (\mathbf{s}^1 \otimes \mathbf{s}^1) + \sigma_2 (\mathbf{s}^2 \otimes \mathbf{s}^2) + \sigma_3 (\mathbf{s}^3 \otimes \mathbf{s}^3)] \\ &= \sigma_1 (\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) (\mathbf{s}^1 \otimes \mathbf{s}^1) + \sigma_2 (\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) (\mathbf{s}^2 \otimes \mathbf{s}^2) + \sigma_3 (\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) (\mathbf{s}^3 \otimes \mathbf{s}^3) \\ &= \sigma_1 (\mathbf{e} \bullet \mathbf{s}^1) (\mathbf{e} \otimes \mathbf{s}^1) + \sigma_2 (\mathbf{e} \bullet \mathbf{s}^2) (\mathbf{e} \otimes \mathbf{s}^2) + \sigma_3 (\mathbf{e} \bullet \mathbf{s}^3) (\mathbf{e} \otimes \mathbf{s}^3) \end{aligned} \quad (4.32)$$

L'ultima relazione scritta è equivalente a:

$$\sigma_1 (\mathbf{e} \bullet \mathbf{s}^1) = \sigma_2 (\mathbf{e} \bullet \mathbf{s}^2) = \sigma_3 (\mathbf{e} \bullet \mathbf{s}^3) = 0 \quad (4.33)$$

Si evidenzia che le quantità $\eta_1 = (\mathbf{e} \bullet \mathbf{s}^1)$, $\eta_2 = (\mathbf{e} \bullet \mathbf{s}^2)$ e $\eta_3 = (\mathbf{e} \bullet \mathbf{s}^3)$ non possono essere tutte nulle, in quanto se così fosse non esisterebbe nessun vettore \mathbf{e} a norma unitaria ortogonale al piano delle tensioni; ciò sarebbe contrario a quanto dichiarato nelle ipotesi iniziale che assicuravano l'esistenza di un piano delle tensioni. Se ne deduce allora che almeno una delle tre tensioni principali debba essere nulla.

In generale si possono presentare tre casi:

a) *stato tensionale nullo:* tutte le direzioni \mathbf{e} soddisfano la condizione di stato piano

$$\begin{aligned} \sigma_1 = 0 &\implies \eta_1 \neq 0 \\ \sigma_2 = 0 &\implies \eta_2 \neq 0 \implies \mathbf{t} = \mathbf{0} \\ \sigma_3 = 0 &\implies \eta_3 \neq 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

b) *Stato tensionale monoassiale*: due autovalori sono nulli

$$\begin{aligned} \sigma_1 \neq 0 &\implies \eta_1 = 0 \\ \sigma_2 = 0 & \\ \sigma_3 = 0 & \implies \mathbf{t} = (\mathbf{t} \bullet \mathbf{s}^1) \mathbf{s}^1 \end{aligned} \quad (4.35)$$

c) *Stato tensionale biassiale o piano*: solo un autovalore è nullo

$$\begin{aligned} \sigma_1 = 0 & \\ \sigma_2 \neq 0 &\implies \eta_2 = 0 \implies (\mathbf{t} \bullet \mathbf{s}^1) = 0 \\ \sigma_3 \neq 0 &\implies \eta_3 = 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Sufficienza: se almeno un autovalore è nullo allora lo stato tensionale è piano.

Sia, per esempio, $\sigma_1 = 0$. La tensione per una giacitura \mathbf{n} vale:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = [\sigma_2 (\mathbf{s}^2 \otimes \mathbf{s}^2) + \sigma_3 (\mathbf{s}^3 \otimes \mathbf{s}^3)] \mathbf{n} \\ &= \sigma_2 \mathbf{s}^2 (\mathbf{s}^2 \bullet \mathbf{n}) + \sigma_3 \mathbf{s}^3 (\mathbf{s}^3 \bullet \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Quindi, qualsiasi sia \mathbf{n} , la tensione ha componenti solo nel piano $\mathbf{s}^2 \mathbf{s}^3$. Ne consegue che esiste un piano che contiene la tensione, la cui giacitura coincide con l'autovettore corrispondente all'autovalore nullo.

4.7 Cerchi di Mohr

4.7.1 Costruzione dei cerchi di Mohr

Si assuma come sistema di riferimento quello costituito dalle direzioni $\mathbf{s}^1 \mathbf{s}^2 \mathbf{s}^3$ principali di $\boldsymbol{\sigma}$ ed una giacitura qualsiasi \mathbf{n} . La tensione ad essa relativa sarà:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{Bmatrix}$$

Decomponendo la tensione appena calcolata in due componenti σ_n e τ_n , rispettivamente paralleli ed ortogonali ad \mathbf{n} , si ottiene:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \mathbf{t} \bullet \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \mathbf{n} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{Bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \\ \tau_n^2 &= \mathbf{t} \bullet \mathbf{t} - \sigma_n^2 = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \sigma_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - \sigma_n^2 \end{aligned}$$

Se a queste relazioni si aggiunge la condizione che la norma di \mathbf{n} sia unitaria si ottiene il seguente sistema lineare di equazioni:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \sigma_n \\ \tau_n^2 + \sigma_n^2 \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

nelle incognite n_1^2 , n_2^2 ed n_3^2 , che risolto fornisce:

$$n_1^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \quad (4.39)$$

$$n_2^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)} \quad (4.40)$$

$$n_3^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \quad (4.41)$$

Nota che la matrice a primo membro dell'equazione (4.38) è la trasposta della matrice di Vandermonde.

Si discute inizialmente il caso particolare in cui \mathbf{n} sia ortogonale alla direzione di \mathbf{s}^1 e cioè tale che $n_1 = 0$. In tal modo si individua la stella di piani intorno all'asse principale \mathbf{s}^1 . Dovendo essere nullo il numeratore a secondo membro dell'equazione (4.39) si ottiene:

$$\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) = 0$$

Sviluppando il prodotto si ha:

$$0 = \tau_n^2 + \sigma_n^2 + \sigma_2\sigma_3 - \sigma_n(\sigma_2 + \sigma_3)$$

aggiungendo e sottraendo la quantità $(\sigma_2 + \sigma_3)^2/4$, si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= \tau_n^2 + \sigma_n^2 - \sigma_n(\sigma_2 + \sigma_3) + \left[\frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right]^2 - \frac{1}{4}(\sigma_2 + \sigma_3)^2 + \sigma_2\sigma_3 \\ &= \tau_n^2 + \left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right]^2 - \frac{1}{4}(\sigma_2 + \sigma_3)^2 + \sigma_2\sigma_3 \end{aligned}$$

ovvero

$$\left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right]^2 + \tau_n^2 = \frac{1}{4}(\sigma_2 - \sigma_3)^2 \quad (4.42)$$

Analogamente per $n_2 = 0$ deve annullarsi il numeratore a secondo membro dell'equazione (4.40). Si ha allora:

$$\left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right]^2 + \tau_n^2 = \frac{1}{4}(\sigma_3 - \sigma_1)^2 \quad (4.43)$$

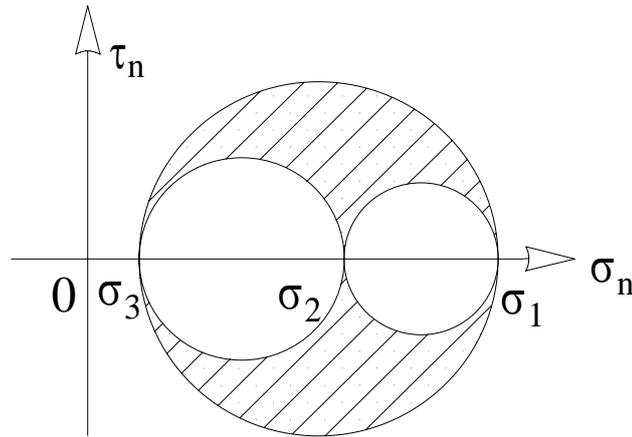


Figura 4.5: Cerchi di Mohr: la parte tratteggiata rappresenta l'arbelo di Mohr.

Infine, per $n_3 = 0$ deve annullarsi il numeratore a secondo membro dell'equazione (4.41) e quindi si ottiene:

$$\left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right]^2 + \tau_n^2 = \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \quad (4.44)$$

Le equazioni (4.42), (4.43) e (4.44) altro non sono che le equazioni dei cerchi di Mohr¹, riportati in figura 4.5, i cui raggi R_i e centri C_i sono:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) & C_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \\ R_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) & C_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \\ R_3 &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) & C_3 &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Senza perdere di generalità si pone ora che le tensioni principali siano ordinate così che $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Ricordando che $n_i^2 \geq 0$, dalle formule (4.39), (4.40) e (4.41) ne segue che:

$$\begin{aligned} n_1^2 &= \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \geq 0 \implies \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) \geq 0 \\ n_2^2 &= \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)} \geq 0 \implies \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_3) \leq 0 \\ n_3^2 &= \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \geq 0 \implies \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) \geq 0 \end{aligned}$$

¹**Christian Otto Mohr** (Wessalburen 1835-Dresda 1918), ingegnere ferroviario tedesco, risolse difficili problemi costruttivi mediante l'introduzione di nuovi metodi per il calcolo degli sforzi nelle travature reticolari.

e quindi che:

$$\begin{aligned} \left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right]^2 + \tau_n^2 &\geq \frac{1}{4}(\sigma_2 - \sigma_3)^2 \\ \left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right]^2 + \tau_n^2 &\leq \frac{1}{4}(\sigma_3 - \sigma_1)^2 \\ \left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right]^2 + \tau_n^2 &\geq \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \end{aligned} \quad (4.46)$$

In definitiva, l'insieme delle coppie (σ_n, τ_n) ammissibili per un assegnato versore \mathbf{n} sono tutte e sole quelle alle quali corrispondono i punti interni al cerchio di raggio R_2 e centro C_2 ed esterni agli altri due. L'insieme ammissibile delle coppie (σ_n, τ_n) è spesso detto in letteratura *arbelo*² di Mohr.

Si osserva che:

- l'insieme $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ contiene la massima e la minima tensione normale σ_n :

$$\sigma_{n_{\min}} = \sigma_3$$

$$\sigma_{n_{\max}} = \sigma_1$$

- la massima tensione tangenziale vale:

$$\tau_{\max} = \max \frac{1}{2} \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (4.47)$$

- mediante i cerchi di Mohr è possibile determinare la tensione \mathbf{t} secondo una qualsiasi giacitura attraverso una procedura grafica riportata nel seguito, nel caso di stato tensionale piano.

4.7.2 Utilizzazione del cerchio Mohr nel caso piano

Per lo stato tensionale piano, il tensore delle tensioni nel riferimento definito dai versori $\mathbf{k}^1, \mathbf{k}^2, \mathbf{e}$, con \mathbf{k}^1 e \mathbf{k}^2 giacenti nel piano delle tensioni, ha una rappresentazione del tipo:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

²*ἀρβηλος*: trincetto, lama d'acciaio curva, senza manico, affilatissima ed aguzza, ad un sol taglio, di cui si serve il calzolaio per tagliare il cuoio delle scarpe.

da cui si può isolare un tensore simmetrico del secondo ordine, che con abuso di notazione, nel seguito viene denotato anch'esso con $\boldsymbol{\sigma}$, la cui matrice rappresentativa è:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Questo tensore può essere decomposto nella sua parte sferica, e cioè idrostatica, e nella sua parte deviatorica:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^D + \boldsymbol{\sigma}^S$$

con

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^S &= \left(\frac{1}{2} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \right) \mathbf{I} = \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \mathbf{I} = \sigma_m \mathbf{I} \\ \boldsymbol{\sigma}^D &= \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^S \end{aligned}$$

avendo posto $\sigma_m = (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2$. La parte deviatorica di $\boldsymbol{\sigma}$ è caratterizzata dalla proprietà di avere traccia nulla:

$$\text{tr} \boldsymbol{\sigma}^D = 0$$

Il tensore $\boldsymbol{\sigma}$ e le sue parti, sferica e deviatorica, ammettono le seguenti rappresentazioni spettrali:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \sigma_1 \mathbf{s}^1 \otimes \mathbf{s}^1 + \sigma_2 \mathbf{s}^2 \otimes \mathbf{s}^2 \\ \boldsymbol{\sigma}^S &= \sigma_m (\mathbf{s}^1 \otimes \mathbf{s}^1 + \mathbf{s}^2 \otimes \mathbf{s}^2) \\ \boldsymbol{\sigma}^D &= s_1 \mathbf{s}^1 \otimes \mathbf{s}^1 + s_2 \mathbf{s}^2 \otimes \mathbf{s}^2 \end{aligned} \quad (4.50)$$

Tenendo conto delle relazioni precedentemente scritte, si ha:

$$\text{tr} \boldsymbol{\sigma}^D = 0 \implies s_1 + s_2 = 0 \implies s_1 = -s_2 = s$$

per cui si può scrivere:

$$\boldsymbol{\sigma}^D = s (\mathbf{s}^1 \otimes \mathbf{s}^1 - \mathbf{s}^2 \otimes \mathbf{s}^2) = s \mathbf{J}$$

dove \mathbf{J} è un tensore di riflessione rispetto all'asse \mathbf{s}^1 . Infatti, l'effetto di \mathbf{J} su un vettore \mathbf{v} è quello di una riflessione:

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{J}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{Bmatrix} \quad (4.51)$$

Così, se \mathbf{v} ruota in senso antiorario di un angolo α allora $\mathbf{J}\mathbf{v}$ ruota in senso orario della stessa quantità; se si è solidali con \mathbf{v} allora si vede ruotare $\mathbf{J}\mathbf{v}$ di una quantità 2α in senso orario.

Il tensore delle tensioni si riscrive nella forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^S + \boldsymbol{\sigma}^D = \sigma_m \mathbf{I} + s \mathbf{J}$$

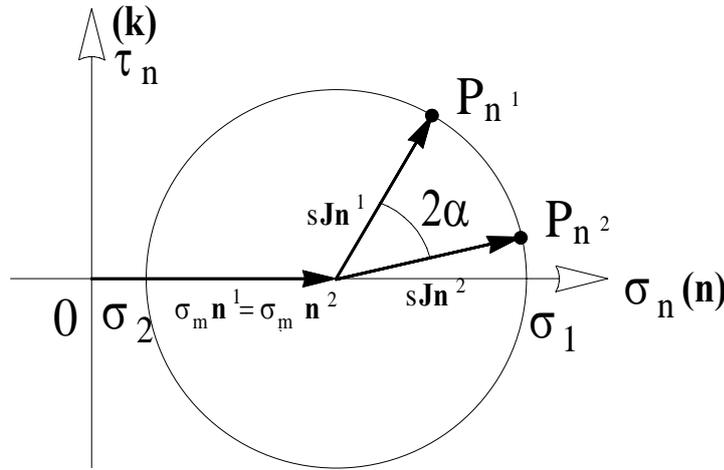


Figura 4.6: Cerchio di Mohr per stati tensionali piani.

La tensione associata alla normale \mathbf{n} vale:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}^S \mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{n} = \sigma_m \mathbf{In} + s \mathbf{Jn} = \sigma_m \mathbf{n} + s \mathbf{Jn} \quad (4.52)$$

se ora si riporta il vettore \mathbf{t}^n al variare di \mathbf{n} in un riferimento \mathbf{n}, \mathbf{k} ($\mathbf{n} \bullet \mathbf{k} = 0$) solidale con \mathbf{n} si osserva che, mentre $\sigma_m \mathbf{n}$ è costante al variare di \mathbf{n} , il vettore $s \mathbf{Jn}$ descrive un cerchio di raggio s , per cui \mathbf{t} giace sul cerchio di raggio s e centro in σ_m . In figura 4.6 il versore \mathbf{n} per passare dalla direzione $\mathbf{n} = \mathbf{n}^1$ alla direzione $\mathbf{n} = \mathbf{n}^2$ ruota in senso antiorario di un angolo α , mentre il vettore $\mathbf{Jn}|_{\mathbf{n}=\mathbf{n}^1}$ si trasforma in $\mathbf{Jn}|_{\mathbf{n}=\mathbf{n}^2}$ ruotando in senso orario dell'angolo 2α .

Il cerchio di Mohr può essere utilizzato per ricavare la tensione relativa ad una giacitura \mathbf{m} , noti che siano il cerchio e la tensione relativa ad una giacitura \mathbf{n} . Infatti, sulla base delle proprietà appena esposte, se il versore \mathbf{m} è il ruotato del versore \mathbf{n} di un angolo α in senso antiorario, allora il vettore \mathbf{Jm} è ruotato di 2α in senso orario rispetto ad \mathbf{Jn} . Con l'aiuto della figura 4.7, se ne deduce che se si vuole conoscere la tensione secondo una giacitura \mathbf{m} diversa da \mathbf{n} si conduce allora dal punto P_n , rappresentativo della tensione secondo la giacitura \mathbf{n} , una retta parallela ad \mathbf{m} e dall'intersezione con il cerchio di Mohr, così trovata, si conduce a sua volta una retta parallela ad \mathbf{n} . Il secondo punto d'intersezione di questa retta con il cerchio di Mohr è il punto P_m rappresentativo della tensione secondo la giacitura \mathbf{m} .

4.8 Tensione tangenziale ottaedrale

Si consideri un punto P del mezzo continuo Ω , nel quale sia completamente definito il tensore delle tensioni $\boldsymbol{\sigma}$. Si assuma come sistema di riferimento quello costituito

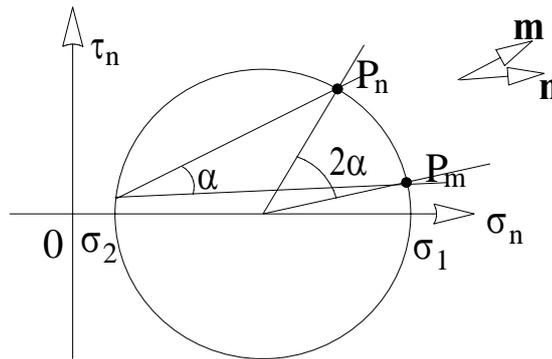


Figura 4.7: Uso del cerchio di Mohr.

dalle direzioni $\mathbf{s}^1 \mathbf{s}^2 \mathbf{s}^3$ principali di $\boldsymbol{\sigma}$ così che:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Si definisce giacitura ottaedrale la trisettrice \mathbf{n}^{ott} dell'angolo solido definito dagli assi $\mathbf{s}^1, \mathbf{s}^2, \mathbf{s}^3$:

$$\mathbf{n}^{ott} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{s}^1 + \mathbf{s}^2 + \mathbf{s}^3)$$

La tensione ottaedrale \mathbf{t}^{ott} valutata sulla giacitura ottaedrale è:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{ott} &= \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}^{ott} = \frac{1}{\sqrt{3}} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{s}^1 + \mathbf{s}^2 + \mathbf{s}^3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} (\mathbf{s}^1 + \mathbf{s}^2 + \mathbf{s}^3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_1 \mathbf{s}^1 + \sigma_2 \mathbf{s}^2 + \sigma_3 \mathbf{s}^3) \end{aligned} \quad (4.53)$$

La componente di \mathbf{t}^{ott} lungo la trisettrice \mathbf{n}^{ott} del angolo solido $\mathbf{s}^1 \mathbf{s}^2 \mathbf{s}^3$ è nota come tensione normale ottaedrale:

$$\begin{aligned} \sigma^{ott} &= \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}^{ott} \bullet \mathbf{n}^{ott} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_1 \mathbf{s}^1 + \sigma_2 \mathbf{s}^2 + \sigma_3 \mathbf{s}^3) \bullet \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{s}^1 + \mathbf{s}^2 + \mathbf{s}^3) \\ &= \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Analogamente si definisce tensione tangenziale ottaedrale τ^{ott} la componente della tensione ottaedrale sul piano ortogonale ad \mathbf{n}^{ott} :

$$\begin{aligned}
\tau^{ott} &= \sqrt{\mathbf{t}^{ott} \bullet \mathbf{t}^{ott} - (\sigma^{ott})^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2} \\
&= \frac{1}{3} \sqrt{3(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_1\sigma_3)} \\
&= \frac{1}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma_2\sigma_3} \\
&= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \tag{4.55}
\end{aligned}$$

Ricordando le definizioni (4.24):

$$\begin{aligned}
J_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\
J_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 \tag{4.56}
\end{aligned}$$

la formula (4.55) diventa:

$$\tau^{ott} = \sqrt{\frac{1}{3}(J_1^2 - 2J_2) - \frac{1}{9}J_1^2} = \sqrt{-\frac{2}{3}\left(J_2 - \frac{1}{3}J_1^2\right)} \tag{4.57}$$

che, per l'espressione (4.29), fornisce:

$$\tau^{ott} = \sqrt{-\frac{2}{3}J_2^D} \tag{4.58}$$

Capitolo 5

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

Nei capitoli precedenti è stato affrontato lo studio dei continui deformabili prendendo in esame separatamente i due aspetti: quello cinematico e quello statico. Si è pervenuti in tal modo alla definizione dei due aspetti fondamentali della congruenza e dell'equilibrio per un corpo continuo¹.

¹**Bernoulli**, famiglia di famosi matematici e scienziati originaria di Anversa, ma stabilitasi a Basilea verso la fine del sec. XVI. Tra i suoi membri meritano particolare citazione Jacques I, il fratello Jean I e il figlio di questi Daniel I.

Jacques (Basilea 1654-1705), professore di matematica all'Università di Basilea, col fratello Jean sviluppò ulteriormente il calcolo infinitesimale, introdotto da Leibniz e Newton, indicandone numerose applicazioni alla meccanica e alla geometria in una serie di memorie apparse negli *Acta Eruditorum*. Tra esse è particolarmente nota quella del 1690 in cui per primo suggerì il nome di *calculus integralis* per quello che Leibniz aveva chiamato *calculus summatorius*, nome poi adottato dallo stesso Leibniz: in tale memoria Jacques applicava il "calcolo" allo studio della curva isocrona, una delle curve note fino ad allora solo per via geometrica. Su altre curve furono estremamente chiarificatrici le memorie di Jacques; tra esse: la catenaria, che tanta importanza avrà nella scienza delle costruzioni; la lemniscata, curva a forma di 8 o di nastro annodato (*lemniscus*) che da Bernoulli prese nome; la spirale logaritmica, di cui scoprì la caratteristica proprietà di riprodursi identicamente dopo ognuna di molte trasformazioni geometriche. Altri importanti contributi di Jacques all'analisi sono lo studio e la soluzione del problema degli isoperimetri; la soluzione del problema della brachistocrona, proposto dal fratello Jean, che costituisce un esempio di applicazione del calcolo variazionale; l'introduzione delle coordinate polari nella geometria analitica; lo studio della somma delle potenze dei numeri naturali per cui introdusse i numeri di Bernoulli. Jacques è altresì l'autore del primo completo trattato di calcolo delle probabilità (*Ars Coniectandi*, *Arte delle congetture*), pubblicato postumo nel 1713 a cura del nipote Nicolas I e nel quale è enunciata e dimostrata la legge dei grandi numeri, nota anche come teorema di Bernoulli.

Jean (Basilea 1667-1748), fratello minore di Jacques, gli succedette alla cattedra di Basilea dopo aver insegnato a Groninga. Di carattere ambizioso, ebbe clamorose controversie per motivi di priorità con molti colleghi, compresi il fratello Jacques e il figlio Daniel. Si interessò di medicina, chimica e astronomia, oltre che di analisi matematica, e contribuì a diffondere il nuovo calcolo anche attraverso la sua corrispondenza con i più grandi matematici europei. Il suo ricchissimo

A questo punto, sulla base delle sole condizioni di congruenza e d'equilibrio, è possibile formulare una relazione di grande generalità, assai importante nella Meccanica dei continui deformabili, detta *Identità Fondamentale della Meccanica*, o più spesso *Principio dei Lavori Virtuali* (PLV).

Il Principio dei Lavori Virtuali costituisce il legame fondamentale tra la condizione d'equilibrio e quella di congruenza consentendo di mettere in luce le caratteristiche di dualità tra l'equilibrio e la congruenza, dualità che costituisce una circostanza di notevole rilievo dal punto di vista applicativo.

5.1 Identità fondamentale della meccanica

L'enunciato dell'Identità Fondamentale della Meccanica o Principio dei Lavori Virtuali è il seguente: in un sistema deformabile in equilibrio, il lavoro virtuale esterno (L_{ve}) è uguale a quello interno (L_{vi}) per qualunque insieme di spostamenti virtuali (infinitesimi) compatibili con la continuità del corpo.

Tale affermazione si dimostra come segue. Si consideri un corpo Ω con frontiera $\partial\Omega = \partial_f\Omega \cup \partial_u\Omega$ con $\partial_f\Omega \cap \partial_u\Omega = \emptyset$. Siano assegnate le forze di volume \mathbf{b} in Ω , le forze di superficie $\hat{\mathbf{p}}$ su $\partial_f\Omega$, e gli spostamenti $\hat{\mathbf{u}}$ su $\partial_u\Omega$.

Si suppone che tutte le forze attive e reattive agenti sul corpo soddisfino le equazioni cardinali della statica:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \int_{\Omega} \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial_f\Omega} \mathbf{p} \, dA + \int_{\partial_u\Omega} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \, dA \\ \mathbf{0} &= \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial_f\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{p} \, dA + \int_{\partial_u\Omega} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \, dA \end{aligned}$$

epistolario offre un quadro straordinario dell'attività scientifica all'alba del sec. XVIII. Tra i suoi allievi vi furono Eulero e il marchese de L'Hospital, autore, sulla base di lettere e annotazioni di Jean, del primo completo trattato di calcolo infinitesimale (1696). Come il fratello Jacques, si occupò di molti problemi celebri del suo tempo, tra i quali lo studio dell'equazione differenziale, nota come equazione di Bernoulli, di cui nel 1697 pubblicò un metodo di risoluzione; inoltre il suo studio sulle funzioni esponenziali e sui loro rapporti con i logaritmi, che verrà completato da Eulero, lo fanno ritenere il fondatore di tale argomento.

Daniel I (Groninga 1700-Basilea 1782), figlio di Jean, fu amico di Eulero; insegnò matematica a Pietroburgo (1725-33) e successivamente botanica, anatomia e fisica a Basilea. La sua opera comprende numerosi studi sul calcolo delle probabilità, che applicò a problemi di economia, medicina e astronomia. Si occupò inoltre di fisica-matematica studiando il problema delle corde vibranti, assai dibattuto in quei tempi (completamente risolto poi da d'Alembert), ed espose i primi principi della teoria cinetica dei gas. Il suo nome rimane essenzialmente legato agli studi di idrodinamica, alla cui base è il teorema sulla conservazione dell'energia nel moto dei fluidi, pubblicato nell'opera *Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii* (1738; *Idrodinamica, ovvero commentari intorno alle forze e ai moti dei fluidi*).

ed inoltre che le tensioni $\boldsymbol{\sigma}$ soddisfino le equazioni di equilibrio (4.21):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} &= \mathbf{0} & \text{in } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \mathbf{p} & \text{su } \partial_f \Omega \end{aligned} \quad (5.1)$$

avendo implicitamente inteso che $\boldsymbol{\sigma}$ è un tensore simmetrico. Si assegni inoltre un campo di spostamenti \mathbf{u} congruente con un campo di deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}$, ovvero si suppone che le deformazioni soddisfino l'equazione di congruenza:

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{\varepsilon} &= \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} &= \hat{\mathbf{u}} & \text{su } \partial_u \Omega \end{aligned} \quad (5.2)$$

Si evidenzia che non è stata supposta alcuna relazione tra il sistema di forze ed il campo di spostamenti. In altri termini, il sistema delle forze e quello degli spostamenti non sono legati fra loro da alcun nesso di tipo causa-effetto.

Il lavoro virtuale delle forze applicate con gli spostamenti considerati vale:

$$\begin{aligned} L_{ve} &= \int_{\Omega} \mathbf{b} \bullet \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{p} \bullet \mathbf{u} \, dA + \int_{\partial_u \Omega} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \mathbf{u} \, dA \\ &= \int_{\Omega} b_i u_i \, dV + \int_{\partial_f \Omega} p_i u_i \, dA + \int_{\partial_u \Omega} \sigma_{ij} n_j u_i \, dA \end{aligned} \quad (5.3)$$

Tenendo presente le equazioni di equilibrio (5.1), si ha:

$$\begin{aligned} L_{ve} &= \int_{\Omega} -\sigma_{ij,j} u_i \, dV + \int_{\partial \Omega} \sigma_{ij} n_j u_i \, dA = \int_{\Omega} -\sigma_{ij,j} u_i \, dV + \int_{\partial \Omega} \sigma_{ij} u_i n_j \, dA \\ &= \int_{\Omega} -\sigma_{ij,j} u_i \, dV + \int_{\Omega} (\sigma_{ij} u_i)_{,j} \, dV = \int_{\Omega} [(\sigma_{ij} u_i)_{,j} - \sigma_{ij,j} u_i] \, dV \\ &= \int_{\Omega} [\sigma_{ij,j} u_i + \sigma_{ij} u_{i,j} - \sigma_{ij,j} u_i] \, dV = \int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{i,j} \, dV = \\ &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} (\nabla \mathbf{u})_{ij} \, dV = \int_{\Omega} \sigma_{ij} (\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{W})_{ij} \, dV = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \, dV \\ &= L_{vi} \end{aligned}$$

In definitiva, si deduce che:

$$L_{ve} = L_{vi} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\Omega} \mathbf{b} \bullet \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{p} \bullet \mathbf{u} \, dA + \int_{\partial_u \Omega} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \mathbf{u} \, dA = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} \, dV \quad (5.4)$$

Si evidenzia che sia nell'enunciato che nella dimostrazione, il PLV è indipendente dalle proprietà meccaniche del materiale ed è dunque valido per qualunque mezzo continuo deformabile indipendentemente dalla sua natura.

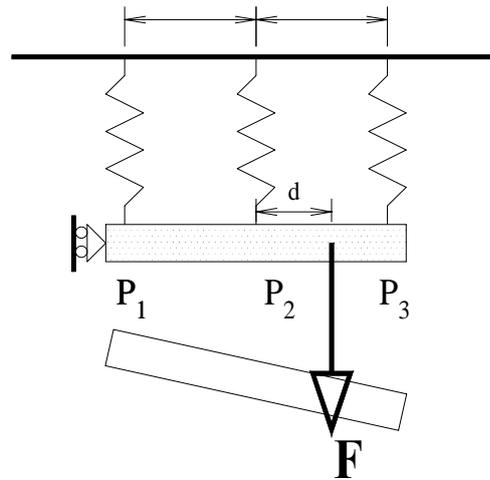


Figura 5.1: Corpo rigido vincolato tramite 3 molle elastiche verticali.

In particolare, per moti rigidi il PLV si riformula nel modo seguente: il lavoro virtuale esterno (L_{ve}) compiuto da un sistema di forze in equilibrio per un qualunque spostamento rigido infinitesimo del corpo sul quale agiscono tali forze è identicamente nullo. Infatti, essendo il moto rigido, deve accadere che il tensore di deformazione sia nullo in ogni punto del corpo, i.e. $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$. Ne consegue che il lavoro virtuale interno è nullo, i.e. $L_{vi} = 0$. Dall'identità fondamentale (5.4) se ne ricava $L_{ve} = 0$.

5.1.1 Esempio

Si consideri il corpo rigido mostrato in figura 5.1 soggetto ad una forza verticale F , vincolato tramite 3 molle parallele e verticali, e da un carrello orizzontale.

Gli spostamenti congruenti del corpo rigido sono quelli di traslazione verticale v e di rotazione ϕ intorno al punto medio del corpo. Gli spostamenti dei punti P_1 , P_2 e P_3 rispettivamente valgono:

$$\begin{aligned} v_1 &= v - a\phi \\ v_2 &= v \\ v_3 &= v + a\phi \end{aligned} \tag{5.5}$$

essendo a la distanza tra le molle. Si evidenzia che le quantità v_1 , v_2 e v_3 rappresentano gli allungamenti delle molle elastiche, ovvero delle deformazioni.

Le equazioni di equilibrio alla traslazione verticale ed alla rotazione intorno a P_2

in esplicito assumono la forma:

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 + F_3 \\ M &= -F_1 a + F_3 a \end{aligned} \quad (5.6)$$

avendo indicato con F_i $i = 1, 2, 3$ la forza esercitata sul punto P_i dalla i -esima molla, e con $M = F d$. Si evidenzia che F_i rappresenta una tensione interna ed è intesa diretta verso l'alto.

Per il semplice sistema considerato, il lavoro virtuale delle forze applicate con gli spostamenti considerati vale:

$$L_{ve} = F v + M \phi \quad (5.7)$$

Tenuto conto delle equazioni di equilibrio, l'espressione (5.7) assume la forma:

$$\begin{aligned} L_{ve} &= (F_1 + F_2 + F_3) v + (-F_1 a + F_3 a) \phi \\ &= F_1 (v - a \phi) + F_2 (v) + F_3 (v + a \phi) \\ &= F_1 v_1 + F_2 v_2 + F_3 v_3 \\ &= L_{vi} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Per il semplice problema considerato resta allora verificata l'Identità Fondamentale della Meccanica, ovvero il lavoro virtuale esterno eguaglia il lavoro virtuale interno.

5.2 Principio degli spostamenti virtuali

Di definisce variazione di spostamento ammissibile $\delta \mathbf{u}$ la differenza tra due qualsiasi spostamenti ammissibili, e.g. \mathbf{u} e \mathbf{v} :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} : \quad & 2\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \quad , \quad \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \text{ su } \partial_u \Omega \\ \mathbf{v} : \quad & 2\boldsymbol{\eta} = \nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T \quad , \quad \mathbf{v} = \hat{\mathbf{u}} \text{ su } \partial_u \Omega \end{aligned}$$

e quindi:

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{u} : \quad 2\delta \boldsymbol{\varepsilon} = 2(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\varepsilon}) = \nabla \delta \mathbf{u} + \nabla \delta \mathbf{u}^T \quad , \quad \delta \mathbf{u} = 0 \text{ su } \partial_u \Omega$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché \mathbf{b} , $\hat{\mathbf{p}}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ siano in equilibrio è che

$$\delta L_{ve} = \int_{\Omega} \mathbf{b} \bullet \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial_f \Omega} \hat{\mathbf{p}} \bullet \delta \mathbf{u} \, dA = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \bullet \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dV = \delta L_{vi} \quad (5.9)$$

comunque presi $\delta \mathbf{u}$ e $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ congruenti.

Necessarietà. Se \mathbf{b} , $\hat{\mathbf{p}}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ sono in equilibrio e $\delta\mathbf{u}$, $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ sono congruenti allora vale l'equazione (5.9). La dimostrazione segue immediatamente applicando l'identità fondamentale della meccanica (5.4) per il campo di spostamenti congruenti $\delta\mathbf{u}$.

Sufficienza. Se vale l'equazione (5.9) per ogni possibile $\delta\mathbf{u}$, $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ congruenti allora \mathbf{b} , $\hat{\mathbf{p}}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ sono in equilibrio. Per dimostrarlo, si consideri inizialmente il lavoro virtuale interno:

$$\begin{aligned}\delta L_{vi} &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \bullet \delta\boldsymbol{\varepsilon} \, dV = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \bullet \nabla \delta\mathbf{u} \, dV \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \bullet \delta\mathbf{u} \, dV + \int_{\partial_f \Omega} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \delta\mathbf{u} \, dA\end{aligned}$$

che dovendo essere per ipotesi uguale al lavoro virtuale esterno, per la (5.9) conduce all'espressione:

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \bullet \delta\mathbf{u} \, dV + \int_{\partial_f \Omega} (\hat{\mathbf{p}} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \bullet \delta\mathbf{u} \, dA = 0$$

che, per l'arbitrarietà di $\delta\mathbf{u}$, fornisce le equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} &= \mathbf{0} && \text{in } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \hat{\mathbf{p}} && \text{su } \partial_f \Omega\end{aligned}$$

5.2.1 Esempio

Si consideri ancora il corpo rigido mostrato in figura 5.1. Le deformazioni congruenti v_1 , v_2 e v_3 con i parametri di spostamento v e ϕ sono definite dalle relazioni (5.5).

I lavori virtuali esterno ed interno, tenuto conto delle equazioni di congruenza (5.5), valgono rispettivamente:

$$\begin{aligned}L_{ve} &= F v + M \phi \\ L_{vi} &= F_1 (v - a \phi) + F_2 (v) + F_3 (v + a \phi)\end{aligned}$$

Si impone ora valido il principio dei lavori virtuali ovvero:

$$L_{ve} = L_{vi}$$

da cui ne consegue:

$$F v + M \phi = F_1 (v - a \phi) + F_2 (v) + F_3 (v + a \phi)$$

che dovendo valere per ogni possibile valore di v e di ϕ , fornisce le equazioni di equilibrio alla traslazione verticale ed alla rotazione intorno a P_2 :

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 + F_3 \\ M &= -F_1 a + F_3 a \end{aligned} \quad (5.10)$$

In definitiva, assicurata la congruenza delle deformazioni, il principio degli spostamenti virtuali fornisce le giuste equazioni di equilibrio.

5.3 Principio delle forze virtuali

Si definisce variazione di forze e tensioni ammissibile $\delta \mathbf{b}$, $\delta \hat{\mathbf{p}}$ e $\delta \boldsymbol{\sigma}$, la differenza tra due qualsiasi sistemi di forze e tensioni in equilibrio, e.g. \mathbf{b} , $\hat{\mathbf{p}}$, $\boldsymbol{\sigma}$ e \mathbf{f} , $\hat{\mathbf{q}}$, \mathbf{S} :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}, \hat{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\sigma} : & \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad , \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \hat{\mathbf{p}} \text{ su } \partial_f \Omega \\ \mathbf{f}, \hat{\mathbf{q}}, \mathbf{S} : & \quad \operatorname{div} \mathbf{S} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{S} \mathbf{n} = \hat{\mathbf{q}} \text{ su } \partial_f \Omega \end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{b} &= \mathbf{f} - \mathbf{b} \\ \delta \hat{\mathbf{p}} &= \hat{\mathbf{q}} - \hat{\mathbf{p}} \quad : \quad \operatorname{div} \delta \boldsymbol{\sigma} + \delta \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad , \quad \delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \delta \hat{\mathbf{p}} \text{ su } \partial_f \Omega \\ \delta \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{S} - \boldsymbol{\sigma} \end{aligned}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché \mathbf{u} ed $\boldsymbol{\varepsilon}$ siano congruenti è che:

$$\begin{aligned} \delta L_{ve} &= \int_{\Omega} \delta \mathbf{b} \bullet \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial_f \Omega} \delta \hat{\mathbf{p}} \bullet \mathbf{u} \, dA + \int_{\partial_u \Omega} \delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \hat{\mathbf{u}} \, dA \\ &= \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} \, dV = \delta L_{vi} \end{aligned} \quad (5.11)$$

comunque presi $\delta \mathbf{b}$, $\delta \hat{\mathbf{p}}$ e $\delta \boldsymbol{\sigma}$ in equilibrio.

Necessarietà. Se \mathbf{u} , $\boldsymbol{\varepsilon}$ sono congruenti e $\delta \mathbf{b}$, $\delta \hat{\mathbf{p}}$ e $\delta \boldsymbol{\sigma}$ sono in equilibrio allora vale l'equazione (5.11). La dimostrazione segue immediatamente applicando l'identità fondamentale della meccanica (5.4) per il campo di forze e tensioni in equilibrio $\delta \mathbf{b}$, $\delta \hat{\mathbf{p}}$ e $\delta \boldsymbol{\sigma}$.

Sufficienza. Se vale l'equazione (5.11) per ogni possibile $\delta \mathbf{b}$, $\delta \hat{\mathbf{p}}$ e $\delta \boldsymbol{\sigma}$ in equilibrio allora \mathbf{u} ed $\boldsymbol{\varepsilon}$ sono congruenti. Per dimostrarlo, si consideri inizialmente il lavoro virtuale esterno:

$$\begin{aligned}
\delta L_{ve} &= \int_{\Omega} \delta \mathbf{b} \bullet \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial_f \Omega} \delta \widehat{\mathbf{p}} \bullet \mathbf{u} \, dA + \int_{\partial_u \Omega} \delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \widehat{\mathbf{u}} \, dA \\
&= - \int_{\Omega} \operatorname{div} \delta \boldsymbol{\sigma} \bullet \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial_f \Omega} \delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \mathbf{u} \, dA + \int_{\partial_u \Omega} \delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \widehat{\mathbf{u}} \, dA \\
&= \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\sigma} \bullet \nabla \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial \Omega} \delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \mathbf{u} \, dA \\
&\quad + \int_{\partial_f \Omega} \delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \mathbf{u} \, dA + \int_{\partial_u \Omega} \delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \widehat{\mathbf{u}} \, dA \\
&= \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\sigma} \bullet \nabla \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial_u \Omega} \delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet (\widehat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \, dA
\end{aligned}$$

che dovendo essere per ipotesi uguale al lavoro virtuale interno, per la (5.11) conduce all'espressione:

$$\int_{\partial_u \Omega} \delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet (\widehat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \, dA + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\sigma} \bullet (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T - 2\boldsymbol{\varepsilon}) \, dV = 0$$

che, per l'arbitrarietà di $\delta \boldsymbol{\sigma}$ equilibrato con $\delta \mathbf{b}$ e $\delta \widehat{\mathbf{p}}$, fornisce le equazioni di congruenza:

$$\begin{aligned}
2\boldsymbol{\varepsilon} &= \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T && \text{in } \Omega \\
\mathbf{u} &= \widehat{\mathbf{u}} && \text{su } \partial_u \Omega
\end{aligned}$$

5.3.1 Esempio

Si consideri ancora il corpo rigido mostrato in figura 5.1. Le tensioni interne F_1 , F_2 ed F_3 in equilibrio con le forze esterne F ed M soddisfano l'equazione (5.6), per si ha:

$$\begin{aligned}
F_2 &= F - 2F_3 + M/a \\
F_1 &= F_3 - M/a
\end{aligned} \tag{5.12}$$

I lavori virtuali esterno ed interno valgono rispettivamente:

$$L_{ve} = F v + M \phi \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}
L_{vi} &= F_1 v_1 + F_2 v_2 + F_3 v_3 \\
&= (F_3 - M/a) v_1 + (F + M/a - 2F_3) v_2 + F_3 v_3 \\
&= F v_2 + M (v_2 - v_1) / a + F_3 (v_1 + v_3 - 2v_2)
\end{aligned}$$

Eguagliando il lavoro virtuale esterno con quello interno si ottiene:

$$F v + M \phi = F_3 (v_1 + v_3 - 2v_2) - M (v_1 + v_2) / a + F v_2$$

che dovendo essere valida per ogni possibile valore di F ed M , fornisce:

$$\begin{aligned} 0 &= (v_1 + v_3 - 2v_2) \\ v &= v_2 \\ \phi &= -(v_1 + v_2) / a \end{aligned} \tag{5.14}$$

Risolvendo il sistema (5.14) rispetto alle incognite v_1 , v_2 e v_3 si ha:

$$\begin{aligned} v_1 &= v - a\phi \\ v_2 &= v \\ v_3 &= v + a\phi \end{aligned} \tag{5.15}$$

che rappresentano le equazioni di congruenza del semplice sistema meccanico considerato.

In definitiva, assicurato l'equilibrio delle tensioni con le forze esterne, il principio delle forze virtuali fornisce le giuste equazioni di congruenza.

Capitolo 6

LEGAME COSTITUTIVO

6.1 Introduzione

L'*Analisi della deformazione* tratta esclusivamente un problema di tipo cinematico, ovvero geometrico: determinare le relazioni tra spostamenti e deformazioni che assicurano la congruenza, e cioè la compatibilità cinematica.

L'*Analisi della Tensione* tratta esclusivamente un problema di tipo statico: determinare le relazioni tra forze esterne e tensioni che assicurano l'equilibrio.

Il *Principio dei Lavori Virtuali*, che ha carattere statico e cinematico, consente di correlare gli aspetti duali dell'equilibrio e della congruenza.

Si evidenzia allora che in nessuna delle relazioni ricavate precedentemente si è tenuto conto della natura del materiale che costituisce il corpo: le equazioni di congruenza, quelle d'equilibrio e il principio dei lavori virtuali valgono infatti per qualunque mezzo continuo a prescindere dalla natura del materiale.

Appare allora necessario, da un punto di vista fisico, determinare le relazioni che permettano di tener conto dell'effettivo comportamento del materiale che costituisce il corpo da studiare.

Storicamente il primo ad intuire la necessità, appena esposta, di porre in gioco la natura del materiale fu Galileo¹ (1638) quantunque egli si curasse più della resistenza

¹**Galileo Galilei** (Pisa 1564 - Arcetri, Firenze 1642), fisico, astronomo e filosofo della natura italiano; assieme all'astronomo tedesco Keplero diede inizio alla rivoluzione scientifica culminata nell'opera di Isaac Newton. Galileo ricevette la prima formazione culturale presso i monaci di Vallombrosa; nel 1580 si iscrisse alla facoltà di medicina dell'università di Pisa, ma il maturare di nuovi interessi per la filosofia e la matematica lo spinse ad abbandonare gli studi intrapresi e a dedicarsi a queste discipline. Nel periodo successivo lavorò ad alcuni scritti sull'idrostatica e sui moti naturali, che non furono pubblicati. Nel 1589 divenne professore di matematica a Pisa, dove iniziò la critica del pensiero aristotelico. Nel 1592 ottenne la cattedra di matematica all'università di Padova, dove rimase per diciotto anni.

Galileo inventò un "compasso" geometrico-militare per calcolare la soluzione di problemi balistici, e realizzò numerosi esperimenti che lo condussero alla scoperta delle leggi che regolano la caduta

dei solidi che non della loro deformabilità. Galileo trattava infatti, i corpi come indeformabili.

Robert Hooke² (1678) pubblicò un trattato dal nome (in forma d'anagramma) "CEIINOSSSTTUV" in cui appare una primordiale legge di proporzionalità tra forze e spostamenti. Dopo due anni svelò la soluzione dell'anagramma da lui stesso proposto in "UT TENSIO SIC VIS" ovvero l'estensione è proporzionale alla forza. La legge di Hooke generalizzata a stati di tensione e di deformazione non monoassiale è dovuta infine a Cauchy (1828) che postulò una relazione che fornisce il tensore delle tensioni come funzione ad un sol valore del gradiente di spostamento:

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(\nabla \mathbf{u})$$

Sotto l'ipotesi di piccole deformazioni si richiede inoltre che del gradiente di \mathbf{u} conti solo la sua parte simmetrica $\boldsymbol{\varepsilon}$, che esprime la deformazione pura, e non la parte emisimmetrica \mathbf{W} , che governa le rotazioni infinitesime. In altre parole si assume:

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (6.1)$$

I materiali che seguono questa legge sono detti *elastici secondo Cauchy*, quando dopo un qualsiasi percorso deformativo, all'annullarsi delle tensioni corrisponde l'annullarsi delle deformazioni

libera dei gravi; studiò il moto dei pendoli e alcuni problemi di meccanica. L'invenzione del cannocchiale, nel 1609, rappresentò una svolta nella sua attività scientifica. Per la sua critica alla teoria di Aristotele sulla perfezione dei cieli venne condannato dall'Inquisizione al carcere a vita, rapidamente commutato negli arresti domiciliari permanenti ad Arcetri.

²**Robert Hooke** (Freshwater, isola di Wight 1635 - Londra 1703), scienziato britannico, fornì importanti contributi in diversi settori scientifici, ma è noto principalmente per le sue ricerche sull'elasticità. Conclusi gli studi presso l'università di Oxford, divenne assistente del fisico Robert Boyle, col quale collaborò alla costruzione della macchina pneumatica. Nel 1662 ottenne l'incarico di curatore degli esperimenti alla Royal Society, dove proseguì la sua attività di ricerca; tre anni dopo gli fu assegnata la cattedra di geometria al Gresham College di Oxford. Dopo il grande incendio di Londra, avvenuto nel 1666, Hooke venne nominato topografo della città e progettò diversi edifici, tra i quali la Montague House e il Bethlehem Hospital.

Hooke anticipò alcune delle maggiori scoperte e invenzioni dell'epoca, ma non riuscì a portare a termine molte delle sue ricerche. Enunciò la teoria del moto planetario, che inquadrò come problema di meccanica, e intuì, anche se non sviluppò matematicamente, la teoria fondamentale sulla cui base Isaac Newton formulò la legge di gravitazione universale. Importanti contributi forniti da Hooke comprendono l'esposizione corretta della teoria dell'elasticità, secondo cui un corpo elastico si deforma in proporzione alla forza che agisce su di esso, e un'accurata analisi della natura della combustione. Utilizzò per primo la molla a bilanciere nella regolazione degli orologi e condusse al microscopio importanti ricerche sulle cellule vegetali.

6.2 Materiali elastici secondo Green

Sia Γ_ε una curva nello spazio a 6 dimensioni della deformazione. Si denoti poi con ε^i la deformazione corrispondente al punto iniziale della curva Γ_ε , ε^f la deformazione corrispondente al punto finale della curva Γ_ε e con $\delta\varepsilon$ una variazione infinitesima di deformazione a partire dal generico valore ε .

Indicando con α l'ascissa curvilinea della curva Γ_ε tale che:

$$\alpha^i \leq \alpha \leq \alpha^f \quad \varepsilon(\alpha^i) = \varepsilon^i \quad \varepsilon(\alpha^f) = \varepsilon^f$$

la variazione $\delta\varepsilon$ si ottiene come:

$$\delta\varepsilon(\alpha) = \frac{\partial\varepsilon(\alpha)}{\partial\alpha} d\alpha$$

Il lavoro di deformazione per unità di volume per un processo deformativo lungo Γ_ε è fornito da:

$$W_{\Gamma_\varepsilon} = \int_{\Gamma_\varepsilon} \boldsymbol{\sigma}(\varepsilon) \bullet \delta\varepsilon = \int_{\Gamma_\varepsilon} \sigma_{ij}(\varepsilon) \delta\varepsilon_{ij} \quad (6.2)$$

In generale può accadere che il lavoro di deformazione dipende non solo da ε^i ed ε^f ma anche dal particolare percorso seguito Γ_ε .

Un materiale si dice *elastico secondo Green* o *iperelastico* se il lavoro interno W_{Γ_ε} dipende solo dalla deformazione iniziale e dalla deformazione finale e non dal particolare percorso seguito Γ_ε (Green³, 1839). In tale caso la quantità da integrare nell'equazione (6.2) deve essere un differenziale esatto:

$$\boldsymbol{\sigma}(\varepsilon) \bullet \delta\varepsilon = \delta\varphi(\varepsilon) \quad (6.3)$$

ovvero deve esistere una funzione di stato $\varphi(\varepsilon)$, che assume il nome di *densità di energia di deformazione* o *potenziale elastico*, tale che:

$$W_{\Gamma_\varepsilon} = \int_{\Gamma_\varepsilon} \boldsymbol{\sigma}(\varepsilon) \bullet \delta\varepsilon = \int_{\Gamma_\varepsilon} \delta\varphi(\varepsilon) = \int_{\varepsilon^i}^{\varepsilon^f} \delta\varphi(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon^f) - \varphi(\varepsilon^i) \quad (6.4)$$

E' altresì evidente che qualora Γ_ε è una curva chiusa, ovvero $\varepsilon^f = \varepsilon^i$, deve accadere che:

$$\oint_{\Gamma_\varepsilon} \delta\varphi(\varepsilon) = 0$$

³**George Green** (Sneiton, Nottingham, 1793-1841), matematico inglese, diede notevoli contributi alla fisica-matematica. Gli si deve l'introduzione del termine "potenziale".

Il teorema di Green permette di trasformare un integrale doppio in un integrale curvilineo; ha importanza, oltre che per ragioni teoriche, anche perché interviene in numerose questioni di fisica-matematica.

La variazione del potenziale elastico φ vale:

$$\delta\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \nabla_{\boldsymbol{\varepsilon}}\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) \bullet \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial\varphi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij} \quad (6.5)$$

e quindi, tendo conto della (6.3) si ha:

$$\boldsymbol{\sigma} = \nabla_{\boldsymbol{\varepsilon}}\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad , \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial\varphi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial\varepsilon_{ij}} \quad (6.6)$$

Si conclude allora dalla (6.6) che il tensore delle tensioni si ottiene come gradiente dell'energia di deformazione φ rispetto al tensore di deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Si consideri ora il differenziale esatto:

$$\delta(\boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\sigma} \bullet \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \delta\boldsymbol{\sigma} \quad (6.7)$$

Poiché $\boldsymbol{\sigma} \bullet \delta\boldsymbol{\varepsilon}$ è un differenziale esatto anche $\boldsymbol{\varepsilon} \bullet \delta\boldsymbol{\sigma}$ deve essere un differenziale esatto. Deve esistere allora una seconda funzione di stato $\psi(\boldsymbol{\sigma})$, che prende il nome di *potenziale elastico complementare*, per la quale accade che:

$$\delta\psi(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \delta\boldsymbol{\sigma} = \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} \quad (6.8)$$

D'altra parte la variazione del potenziale elastico complementare vale:

$$\delta\psi(\boldsymbol{\sigma}) = \nabla_{\boldsymbol{\sigma}}\psi(\boldsymbol{\sigma}) \bullet \delta\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial\psi(\boldsymbol{\sigma})}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij} \quad (6.9)$$

Confrontando la (6.8) con la (6.9) si ottiene:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_{\boldsymbol{\sigma}}\psi(\boldsymbol{\sigma}) \quad , \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial\psi(\boldsymbol{\sigma})}{\partial\sigma_{ij}} \quad (6.10)$$

e cioè il tensore delle deformazioni si ottiene come gradiente dell'energia complementare ψ rispetto al tensore delle tensioni $\boldsymbol{\sigma}$. Tenuto conto delle espressioni (6.5) e (6.9), la relazione (6.7) si riscrive nella forma:

$$\delta(\boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\varepsilon}) = \delta\varphi + \delta\psi = \delta(\varphi + \psi) \quad (6.11)$$

che integrata, posto che sia $\varphi(\mathbf{0}) = \psi(\mathbf{0}) = 0$, fornisce:

$$\boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} = \varphi + \psi \quad (6.12)$$

nota come *eguaglianza di Legendre*.

In definitiva, la conoscenza di φ o di ψ definisce completamente il comportamento meccanico del corpo in quanto consente di correlare tensioni e deformazioni tramite le relazioni (6.6) o (6.10).

Si evidenzia che il materiale elastico è capace di subire deformazioni che svaniscono rimuovendo le forze applicate.

6.3 Corpo elastico lineare

Un materiale si definisce elastico lineare quando il legame costitutivo elastico risulta essere anche lineare, ossia la relazione tra le tensioni $\boldsymbol{\sigma}$ e le deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}$ è lineare.

Nell'ipotesi di piccoli (gradienti di) spostamenti anche le componenti ε_{ij} del tensore di deformazione saranno piccole $|\varepsilon_{ij}| = \vartheta \ll 1$; supponendo ora che $\varphi(\boldsymbol{\varepsilon})$ sia un funzionale sufficientemente regolare così da poter essere sviluppato in serie di potenze (di McLaurin) si ha:

$$\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varphi(\mathbf{0}) + \frac{\partial\varphi(\mathbf{0})}{\partial\varepsilon_{ij}}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{0})}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{hk}}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{hk} + O(\vartheta^3) \approx \varphi_0 + \sigma_{ij}^0\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\mathcal{C}_{ijhk}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{hk} \quad (6.13)$$

dove:

- $\varphi_0 = \varphi(\mathbf{0})$ è l'energia di deformazione nello stato indeformato,
- $\sigma_{ij}^0 = \partial\varphi(\mathbf{0})/\partial\varepsilon_{ij}$ è il tensore delle tensioni nello stato indeformato,
- $\mathcal{C}_{ijhk} = \frac{\partial^2\varphi(\mathbf{0})}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{hk}}$ sono le costanti elastiche del materiale indipendenti da $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Il tensore del quarto ordine \mathcal{C} prende il nome di *tensore di elasticità* o *tensore elastico del materiale*.

Supponendo che il materiale abbia uno stato naturale caratterizzato dalle seguenti condizioni:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \quad \varphi_0 = 0 \quad \boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{0} \quad (6.14)$$

lo sviluppo in serie (6.13) si semplifica nella forma:

$$\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\mathcal{C}_{ijhk}\varepsilon_{hk}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\mathcal{C}[\boldsymbol{\varepsilon}] \bullet \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6.15)$$

ovvero, l'energia di deformazione φ è il prodotto interno di $\boldsymbol{\varepsilon}$ per il tensore \mathcal{C} applicato ad $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Si osserva che per la simmetria di $\boldsymbol{\varepsilon}$ si ha:

$$\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{0})}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{hk}} = \frac{\partial^2\varphi(\mathbf{0})}{\partial\varepsilon_{ji}\partial\varepsilon_{hk}} = \frac{\partial^2\varphi(\mathbf{0})}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kh}} \quad (6.16)$$

e quindi:

$$\mathcal{C}_{ijhk} = \mathcal{C}_{ijkh} = \mathcal{C}_{jihk} \quad (6.17)$$

Questa proprietà definisce le *simmetrie minori* del tensore elastico \mathcal{C} che riduce le componenti indipendenti di \mathcal{C} da 81 a 36. Poiché poi si è ipotizzata l'esistenza di un potenziale φ , dal quale \mathcal{C} discende, per il teorema di Schwarz, si ha:

$$\frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{0})}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{hk}} = \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{0})}{\partial \varepsilon_{hk} \partial \varepsilon_{ij}} \quad (6.18)$$

e quindi

$$\mathcal{C}_{ijhk} = \mathcal{C}_{hkij} \quad (6.19)$$

Questa proprietà definisce la *simmetria maggiore* del tensore elastico \mathcal{C} che riduce ulteriormente le componenti indipendenti di \mathcal{C} da 36 a 21.

E' da ricordare poi che un corpo si dice *omogeneo* se le componenti di \mathcal{C} non variano da punto a punto.

Una volta scelta la forma di rappresentazione (6.15) per l'energia di deformazione, il tensore delle tensioni si calcola utilizzando l'equazione (6.6) come:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} [\mathcal{C}_{lmhk} \varepsilon_{lm} \varepsilon_{hk}] = \frac{1}{2} \mathcal{C}_{lmhk} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} [\varepsilon_{lm} \varepsilon_{hk}] \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{C}_{lmhk} [\delta_{lmij} \varepsilon_{hk} + \delta_{hkij} \varepsilon_{lm}] = \frac{1}{2} [\mathcal{C}_{ijhk} \varepsilon_{hk} + \mathcal{C}_{lmij} \varepsilon_{lm}] \\ &= \frac{1}{2} [\mathcal{C}_{ijhk} \varepsilon_{hk} + \mathcal{C}_{ijlm} \varepsilon_{lm}] = \mathcal{C}_{ijhk} \varepsilon_{hk} \end{aligned} \quad (6.20)$$

dove:

$$\delta_{ijhk} = \begin{cases} 1 & \text{se } ij = hk \\ 0 & \text{se } ij \neq hk \end{cases}$$

è un delta di Kronecker del quarto ordine. La formula (6.20) equivale alla relazione:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C} [\boldsymbol{\varepsilon}] \quad (6.21)$$

Si osserva che la relazione (6.20) ovvero (6.21) corrisponde a sei equazioni scalari lineari:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{1111} & \mathcal{C}_{1122} & \mathcal{C}_{1133} & \mathcal{C}_{1123} & \mathcal{C}_{1113} & \mathcal{C}_{1112} \\ \mathcal{C}_{2211} & \mathcal{C}_{2222} & \mathcal{C}_{2233} & \mathcal{C}_{2223} & \mathcal{C}_{2213} & \mathcal{C}_{2212} \\ \mathcal{C}_{3311} & \mathcal{C}_{3322} & \mathcal{C}_{3333} & \mathcal{C}_{3323} & \mathcal{C}_{3313} & \mathcal{C}_{3312} \\ \mathcal{C}_{2311} & \mathcal{C}_{2322} & \mathcal{C}_{2333} & \mathcal{C}_{2323} & \mathcal{C}_{2313} & \mathcal{C}_{2312} \\ \mathcal{C}_{1311} & \mathcal{C}_{1322} & \mathcal{C}_{1333} & \mathcal{C}_{1323} & \mathcal{C}_{1313} & \mathcal{C}_{1312} \\ \mathcal{C}_{1211} & \mathcal{C}_{1222} & \mathcal{C}_{1233} & \mathcal{C}_{1223} & \mathcal{C}_{1213} & \mathcal{C}_{1212} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{vmatrix} \quad (6.22)$$

Tenendo conto della (6.21), l'energia di deformazione fornita dalla formula (6.15) si riscrive anche nella forma:

$$\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6.23)$$

da cui, tenendo conto dell'eguaglianza di Legendre (6.12), si ricava che:

$$\psi(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} - \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} = \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (6.24)$$

Invertendo la relazione (6.21) e sostituendola nella (6.24) si ottiene:

$$\psi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \mathcal{S} \boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\sigma} \quad (6.25)$$

con $\mathcal{S} = \mathcal{C}^{-1}$, *tensore di deformabilità*.

Le quantità $\varphi(\boldsymbol{\varepsilon})$ e $\psi(\boldsymbol{\sigma})$ rappresentano la densità di energia immagazzinata nel corpo deformato. Queste quantità rappresentano cioè l'energia per unità di volume che il corpo restituisce al sistema per tornare al suo stato naturale indeformato. E' presumibile che tale energia sia positiva, nel senso che per tornare allo stato indeformato il corpo ceda energia al sistema e non ne assorba da esso; perché ciò accada deve essere:

$$\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \mathcal{C} [\boldsymbol{\varepsilon}] \bullet \boldsymbol{\varepsilon} > 0 \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} \neq \mathbf{0} \quad (6.26)$$

In altre parole \mathcal{C} deve essere definito positivo e questo è vero se e solo se il determinante e tutti i minori principali di \mathcal{C} sono positivi. Il verificarsi di questa condizione assicura anche l'invertibilità di \mathcal{C} .

6.4 Simmetrie materiali

Si è appena visto che nel caso di materiali elastici lineari il tensore elastico \mathcal{C} è definito da 21 costanti elastiche. Si vogliono ora classificare i materiali in funzione di particolari proprietà, chiamate *simmetrie materiali*.

Si consideri l'intorno $\mathcal{I}(P)$ di un punto P . Sia \mathbf{x} il vettore posizione che individua il generico punto $Q \in \mathcal{I}(P)$ ed \mathbf{u} indichi lo spostamento del punto Q . Per l'equazione di congruenza (3.40), la deformazione in Q vale:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (6.27)$$

Si ruoti poi l'intorno $\mathcal{I}(P)$ con centro in P , così da individuare un intorno $\mathcal{I}^*(P)$ ruotato di $\mathcal{I}(P)$ tramite un tensore di rotazione \mathbf{Q} . Il generico punto $Q^* \in \mathcal{I}^*(P)$ sia individuato dal vettore \mathbf{x}^* ruotato di \mathbf{x} , i.e. $\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}\mathbf{x}$. Si evidenzia che si è ruotato solo l'intorno geometrico $\mathcal{I}(P)$, e non un insieme di punti materiali del corpo con le sue proprietà. Siano i punti di $\mathcal{I}^*(P)$ soggetti a spostamenti \mathbf{u}^* ruotati di \mathbf{u} , i.e. $\mathbf{u}^* = \mathbf{Q}\mathbf{u}$. Il gradiente degli spostamenti \mathbf{u}^* vale:

$$(\nabla \mathbf{u}^*)_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j^*} u_i^* = \frac{\partial}{\partial x_j^*} (Q_{ik} u_k) = Q_{ik} \frac{\partial}{\partial x_j^*} u_k = Q_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial x_j^*} = Q_{ik} (\nabla \mathbf{u})_{km} Q_{jm} \quad (6.28)$$

da cui si ricava:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{Q}^T \quad (6.29)$$

Per l'equazione costitutiva (6.21), alle deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}$ ed $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ sono associati rispettivamente i tensori delle tensioni $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C}[\boldsymbol{\varepsilon}]$ e $\boldsymbol{\sigma}^* = \mathcal{C}[\boldsymbol{\varepsilon}^*]$. Si dice che \mathbf{Q} è una *trasformazione di simmetria* per il materiale se accade che:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q}^T \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6.30)$$

ovvero se, per ogni possibile deformazione, la tensione corrispondente della deformazione ruotata eguaglia la ruotata della tensione associata alla deformazione iniziale:

$$\mathcal{C}[\mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{Q}^T] = \mathbf{Q}\mathcal{C}[\boldsymbol{\varepsilon}]\mathbf{Q}^T \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6.31)$$

L'insieme di tutti i tensori \mathbf{Q} che, per un dato materiale, soddisfano la proprietà appena enunciata prende il nome di *gruppo di simmetria* per il materiale e si indica con \mathcal{G} .

Si evidenzia che \mathcal{G} soddisfa le seguenti proprietà di gruppo:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \in \mathcal{G} & \implies \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T \in \mathcal{G} \\ \mathbf{Q}, \mathbf{P} \in \mathcal{G} & \implies \mathbf{QP} \in \mathcal{G} \end{aligned} \quad (6.32)$$

Tali proprietà si verificano come segue:

$$1. \quad \mathbf{Q} \in \mathcal{G} \implies \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T \in \mathcal{G}$$

Dalla (6.31) si ricava:

$$\mathbf{Q}^T \mathcal{C}[\mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{Q}^T] \mathbf{Q} = \mathcal{C}[\boldsymbol{\varepsilon}]$$

e quindi

$$\mathbf{Q}^T \mathcal{C}[\mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{Q}^T] \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathcal{C}[\boldsymbol{\varepsilon}] \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathcal{C}[\boldsymbol{\varepsilon}]$$

allora, posto $\mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{Q}^T = \boldsymbol{\eta}$, ovvero $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\eta} \mathbf{Q}$, si ha:

$$\mathcal{C}[\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\eta} \mathbf{Q}] = \mathbf{Q}^T \mathcal{C}[\mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{Q}^T] \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \mathcal{C}[\boldsymbol{\eta}] \mathbf{Q}$$

da cui si deduce che $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1} \in \mathcal{G}$.

$$2. \quad \mathbf{Q}, \mathbf{P} \in \mathcal{G} \implies \mathbf{QP} \in \mathcal{G}$$

Applicando la (6.31) si ha:

$$\mathcal{C}[\boldsymbol{\varepsilon}] = \mathbf{P}^T \mathcal{C}[\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{P}^T] \mathbf{P}$$

ed anche

$$\mathcal{C}[\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{P}^T] = \mathbf{Q}^T \mathcal{C}[\mathbf{Q}(\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{P}^T)\mathbf{Q}^T] \mathbf{Q}$$

Combinando le ultime due relazioni si ottiene:

$$\mathcal{C}[\boldsymbol{\varepsilon}] = \mathbf{P}^T \mathbf{Q}^T \mathcal{C}[\mathbf{Q}(\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{P}^T)\mathbf{Q}^T] \mathbf{QP} = (\mathbf{QP})^T \mathcal{C}[(\mathbf{QP})\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{QP})^T] (\mathbf{QP})$$

da cui si deduce che $\mathbf{QP} \in \mathcal{G}$.

Il più piccolo sottogruppo di tensori ortogonali che sono trasformazioni di simmetria per un materiale contiene almeno $\{I, -I\}$ ed è relativo ai materiali anisotropi.

6.4.1 Materiali monoclini ed ortotropi

Si esamina ora il caso di materiali che ammettono un piano di simmetria: essi sono detti *monoclini*. Si assuma come piano di simmetria il piano individuato da due versori \mathbf{e}^1 e \mathbf{e}^2 ortogonali ad un versore \mathbf{e}^3 . In tal caso, il gruppo di simmetria materiale è:

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{I}, -\mathbf{I}, \mathbf{P}^3\}$$

dove nel riferimento $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$:

$$\mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Si calcoli allora il tensore di deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ nel caso che $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^3$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^* &= \mathbf{P}^3 \boldsymbol{\varepsilon} (\mathbf{P}^3)^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & -\varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & -\varepsilon_{23} \\ -\varepsilon_{13} & -\varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.33)$$

Le componenti del tensore delle tensioni $\boldsymbol{\sigma}^*$ sono allora:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^* &= \mathcal{C}_{1111}\varepsilon_{11} + \mathcal{C}_{1122}\varepsilon_{22} + \mathcal{C}_{1133}\varepsilon_{33} - 2\mathcal{C}_{1123}\varepsilon_{23} - 2\mathcal{C}_{1113}\varepsilon_{13} + 2\mathcal{C}_{1112}\varepsilon_{12} \\ \sigma_{22}^* &= \mathcal{C}_{2211}\varepsilon_{11} + \mathcal{C}_{2222}\varepsilon_{22} + \mathcal{C}_{2233}\varepsilon_{33} - 2\mathcal{C}_{2223}\varepsilon_{23} - 2\mathcal{C}_{2213}\varepsilon_{13} + 2\mathcal{C}_{2212}\varepsilon_{12} \\ \sigma_{33}^* &= \mathcal{C}_{3311}\varepsilon_{11} + \mathcal{C}_{3322}\varepsilon_{22} + \mathcal{C}_{3333}\varepsilon_{33} - 2\mathcal{C}_{3323}\varepsilon_{23} - 2\mathcal{C}_{3313}\varepsilon_{13} + 2\mathcal{C}_{3312}\varepsilon_{12} \\ \sigma_{23}^* &= \mathcal{C}_{2311}\varepsilon_{11} + \mathcal{C}_{2322}\varepsilon_{22} + \mathcal{C}_{2333}\varepsilon_{33} - 2\mathcal{C}_{2323}\varepsilon_{23} - 2\mathcal{C}_{2313}\varepsilon_{13} + 2\mathcal{C}_{2312}\varepsilon_{12} \\ \sigma_{13}^* &= \mathcal{C}_{1311}\varepsilon_{11} + \mathcal{C}_{1322}\varepsilon_{22} + \mathcal{C}_{1333}\varepsilon_{33} - 2\mathcal{C}_{1323}\varepsilon_{23} - 2\mathcal{C}_{1313}\varepsilon_{13} + 2\mathcal{C}_{1312}\varepsilon_{12} \\ \sigma_{12}^* &= \mathcal{C}_{1211}\varepsilon_{11} + \mathcal{C}_{1222}\varepsilon_{22} + \mathcal{C}_{1233}\varepsilon_{33} - 2\mathcal{C}_{1223}\varepsilon_{23} - 2\mathcal{C}_{1213}\varepsilon_{13} + 2\mathcal{C}_{1212}\varepsilon_{12} \end{aligned} \quad (6.34)$$

D'altra parte, il ruotato tramite \mathbf{P}^3 del tensore delle tensioni $\boldsymbol{\sigma}$ è:

$$\boldsymbol{\sigma}^\diamond = \mathbf{P}^3 \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{P}^3)^T = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & -\sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & -\sigma_{23} \\ -\sigma_{13} & -\sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \quad (6.35)$$

che per il legame costitutivo, in esplicito fornisce:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{\diamond} &= \mathcal{C}_{1111}\varepsilon_{11} + \mathcal{C}_{1122}\varepsilon_{22} + \mathcal{C}_{1133}\varepsilon_{33} + 2\mathcal{C}_{1123}\varepsilon_{23} + 2\mathcal{C}_{1113}\varepsilon_{13} + 2\mathcal{C}_{1112}\varepsilon_{12} \quad (6.36) \\
\sigma_{22}^{\diamond} &= \mathcal{C}_{2211}\varepsilon_{11} + \mathcal{C}_{2222}\varepsilon_{22} + \mathcal{C}_{2233}\varepsilon_{33} + 2\mathcal{C}_{2223}\varepsilon_{23} + 2\mathcal{C}_{2213}\varepsilon_{13} + 2\mathcal{C}_{2212}\varepsilon_{12} \\
\sigma_{33}^{\diamond} &= \mathcal{C}_{3311}\varepsilon_{11} + \mathcal{C}_{3322}\varepsilon_{22} + \mathcal{C}_{3333}\varepsilon_{33} + 2\mathcal{C}_{3323}\varepsilon_{23} + 2\mathcal{C}_{3313}\varepsilon_{13} + 2\mathcal{C}_{3312}\varepsilon_{12} \\
\sigma_{23}^{\diamond} &= -(\mathcal{C}_{2311}\varepsilon_{11} + \mathcal{C}_{2322}\varepsilon_{22} + \mathcal{C}_{2333}\varepsilon_{33} + 2\mathcal{C}_{2323}\varepsilon_{23} + 2\mathcal{C}_{2313}\varepsilon_{13} + 2\mathcal{C}_{2312}\varepsilon_{12}) \\
\sigma_{13}^{\diamond} &= -(\mathcal{C}_{1311}\varepsilon_{11} + \mathcal{C}_{1322}\varepsilon_{22} + \mathcal{C}_{1333}\varepsilon_{33} + 2\mathcal{C}_{1323}\varepsilon_{23} + 2\mathcal{C}_{1313}\varepsilon_{13} + 2\mathcal{C}_{1312}\varepsilon_{12}) \\
\sigma_{12}^{\diamond} &= \mathcal{C}_{1211}\varepsilon_{11} + \mathcal{C}_{1222}\varepsilon_{22} + \mathcal{C}_{1233}\varepsilon_{33} + 2\mathcal{C}_{1223}\varepsilon_{23} + 2\mathcal{C}_{1213}\varepsilon_{13} + 2\mathcal{C}_{1212}\varepsilon_{12}
\end{aligned}$$

Se \mathbf{P}^3 appartiene al gruppo di simmetrie materiali, deve verificarsi l'eguaglianza $\sigma^* = \sigma^{\diamond}$, che in componenti fornisce:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{C}_{1111}\varepsilon_{11} + \mathcal{C}_{1122}\varepsilon_{22} + \mathcal{C}_{1133}\varepsilon_{33} - 2\mathcal{C}_{1123}\varepsilon_{23} - 2\mathcal{C}_{1113}\varepsilon_{13} + 2\mathcal{C}_{1112}\varepsilon_{12} \\
&= \mathcal{C}_{1111}\varepsilon_{11} + \mathcal{C}_{1122}\varepsilon_{22} + \mathcal{C}_{1133}\varepsilon_{33} + 2\mathcal{C}_{1123}\varepsilon_{23} + 2\mathcal{C}_{1113}\varepsilon_{13} + 2\mathcal{C}_{1112}\varepsilon_{12} \\
&\mathcal{C}_{2211}\varepsilon_{11} + \mathcal{C}_{2222}\varepsilon_{22} + \mathcal{C}_{2233}\varepsilon_{33} - 2\mathcal{C}_{2223}\varepsilon_{23} - 2\mathcal{C}_{2213}\varepsilon_{13} + 2\mathcal{C}_{2212}\varepsilon_{12} \\
&= \mathcal{C}_{2211}\varepsilon_{11} + \mathcal{C}_{2222}\varepsilon_{22} + \mathcal{C}_{2233}\varepsilon_{33} + 2\mathcal{C}_{2223}\varepsilon_{23} + 2\mathcal{C}_{2213}\varepsilon_{13} + 2\mathcal{C}_{2212}\varepsilon_{12} \\
&\mathcal{C}_{3311}\varepsilon_{11} + \mathcal{C}_{3322}\varepsilon_{22} + \mathcal{C}_{3333}\varepsilon_{33} - 2\mathcal{C}_{3323}\varepsilon_{23} - 2\mathcal{C}_{3313}\varepsilon_{13} + 2\mathcal{C}_{3312}\varepsilon_{12} \\
&= \mathcal{C}_{3311}\varepsilon_{11} + \mathcal{C}_{3322}\varepsilon_{22} + \mathcal{C}_{3333}\varepsilon_{33} + 2\mathcal{C}_{3323}\varepsilon_{23} + 2\mathcal{C}_{3313}\varepsilon_{13} + 2\mathcal{C}_{3312}\varepsilon_{12} \\
&\mathcal{C}_{2311}\varepsilon_{11} + \mathcal{C}_{2322}\varepsilon_{22} + \mathcal{C}_{2333}\varepsilon_{33} - 2\mathcal{C}_{2323}\varepsilon_{23} - 2\mathcal{C}_{2313}\varepsilon_{13} + 2\mathcal{C}_{2312}\varepsilon_{12} \\
&= -(\mathcal{C}_{2311}\varepsilon_{11} + \mathcal{C}_{2322}\varepsilon_{22} + \mathcal{C}_{2333}\varepsilon_{33} + 2\mathcal{C}_{2323}\varepsilon_{23} + 2\mathcal{C}_{2313}\varepsilon_{13} + 2\mathcal{C}_{2312}\varepsilon_{12}) \\
&\mathcal{C}_{1311}\varepsilon_{11} + \mathcal{C}_{1322}\varepsilon_{22} + \mathcal{C}_{1333}\varepsilon_{33} - 2\mathcal{C}_{1323}\varepsilon_{23} - 2\mathcal{C}_{1313}\varepsilon_{13} + 2\mathcal{C}_{1312}\varepsilon_{12} \\
&= -(\mathcal{C}_{1311}\varepsilon_{11} + \mathcal{C}_{1322}\varepsilon_{22} + \mathcal{C}_{1333}\varepsilon_{33} + 2\mathcal{C}_{1323}\varepsilon_{23} + 2\mathcal{C}_{1313}\varepsilon_{13} + 2\mathcal{C}_{1312}\varepsilon_{12}) \\
&\mathcal{C}_{1211}\varepsilon_{11} + \mathcal{C}_{1222}\varepsilon_{22} + \mathcal{C}_{1233}\varepsilon_{33} - 2\mathcal{C}_{1223}\varepsilon_{23} - 2\mathcal{C}_{1213}\varepsilon_{13} + 2\mathcal{C}_{1212}\varepsilon_{12} \\
&= \mathcal{C}_{1211}\varepsilon_{11} + \mathcal{C}_{1222}\varepsilon_{22} + \mathcal{C}_{1233}\varepsilon_{33} + 2\mathcal{C}_{1223}\varepsilon_{23} + 2\mathcal{C}_{1213}\varepsilon_{13} + 2\mathcal{C}_{1212}\varepsilon_{12}
\end{aligned}$$

che possono verificarsi se e solo se:

$$\mathcal{C}_{1123} = \mathcal{C}_{1113} = \mathcal{C}_{2223} = \mathcal{C}_{2213} = \mathcal{C}_{3323} = \mathcal{C}_{3313} = \mathcal{C}_{1223} = \mathcal{C}_{1213} = 0 \quad (6.37)$$

In definitiva, si osservi che per essere il materiale monoclinico, devono essere nulle le 8 costanti elastiche specificate nelle relazioni (6.37), se ne deduce allora che per materiali monoclinici le costanti elastiche necessarie alla definizione di \mathbf{C} si riducono a 13.

Si esamini ora il caso in cui il materiale ammetta due piani di simmetria e si supponga che il gruppo di simmetria sia fornito da:

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{I}, -\mathbf{I}, \mathbf{P}^3, \mathbf{P}^2\}$$

dove nel riferimento $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per la seconda proprietà dei gruppi, si ha che se $\mathbf{P}^2 \in \mathcal{G}$ e $\mathbf{P}^3 \in \mathcal{G}$ anche $\mathbf{P}^2\mathbf{P}^3 \in \mathcal{G}$; infatti, nel riferimento $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$ si ottiene:

$$\mathbf{P}^2\mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{P}^1$$

Se ne deduce che se il materiale ammette due piani di simmetria ne ammette anche un terzo; in questo caso il materiale è detto *triclinico* o *ortotropo*. Per i materiali triclinici deve accadere che:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{C}_{1123} = \mathcal{C}_{1113} = \mathcal{C}_{2223} = \mathcal{C}_{2213} \\ &= \mathcal{C}_{3323} = \mathcal{C}_{3313} = \mathcal{C}_{1223} = \mathcal{C}_{1213} \\ &= \mathcal{C}_{1112} = \mathcal{C}_{2212} = \mathcal{C}_{3312} = \mathcal{C}_{1323} \end{aligned} \quad (6.38)$$

ovvero il numero delle costanti elastiche necessarie alla definizione di \mathcal{C} si riduce ulteriormente di 4 unità passando da 13 a 9.

Imponendo ulteriori condizioni di simmetria il numero delle costanti elastiche indipendenti si riduce sempre più. Il più ampio gruppo di simmetria possibile, cui corrisponde il minimo numero di costanti elastiche, è costituito dall'insieme di tutti i tensori di rotazione. In tal caso il materiale è detto isotropo, ed ha uguale risposta per ogni direzione.

6.5 Isotropia

Un materiale isotropo ha le stesse proprietà elastiche in ogni direzione: ciò equivale a dire che l'energia elastica e quella complementare non dipendono dalle direzioni lungo le quali agiscono le tensioni principali. Per determinare il legame costitutivo di un materiale isotropo possono essere sviluppati due procedimenti, entrambi basati sull'utilizzo del concetto di invarianza dell'energia complementare al variare delle direzioni principali di tensioni, fissati che siano i valori delle tensioni principali $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

6.5.1 Direzioni principali

Per un materiale isotropo l'energia complementare dipende solo dai valori principali di tensione ed è indipendente dalle direzioni lungo le quali tali valori principali agiscono. Scelto allora un qualsiasi sistema principale di tensione, la (6.25) fornisce:

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{\sigma}) &= \frac{1}{2} \mathcal{S}[\boldsymbol{\sigma}] \bullet \boldsymbol{\sigma} = \psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{S}_{1111} \sigma_1^2 + \mathcal{S}_{2222} \sigma_2^2 + \mathcal{S}_{3333} \sigma_3^2 + 2\mathcal{S}_{1122} \sigma_1 \sigma_2 + 2\mathcal{S}_{1133} \sigma_1 \sigma_3 + 2\mathcal{S}_{2233} \sigma_2 \sigma_3)\end{aligned}\quad (6.39)$$

Poichè il materiale è isotropo, deve accadere che scambiando $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ tra di loro, l'energia complementare di deformazione non deve cambiare:

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{\sigma}) &= \frac{1}{2} (\mathcal{S}_{1111} \sigma_1^2 + \mathcal{S}_{2222} \sigma_2^2 + \mathcal{S}_{3333} \sigma_3^2 + 2\mathcal{S}_{1122} \sigma_1 \sigma_2 + 2\mathcal{S}_{1133} \sigma_1 \sigma_3 + 2\mathcal{S}_{2233} \sigma_2 \sigma_3) \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{S}_{1111} \sigma_2^2 + \mathcal{S}_{2222} \sigma_3^2 + \mathcal{S}_{3333} \sigma_1^2 + 2\mathcal{S}_{1122} \sigma_2 \sigma_3 + 2\mathcal{S}_{1133} \sigma_2 \sigma_1 + 2\mathcal{S}_{2233} \sigma_3 \sigma_1) \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{S}_{1111} \sigma_3^2 + \mathcal{S}_{2222} \sigma_1^2 + \mathcal{S}_{3333} \sigma_2^2 + 2\mathcal{S}_{1122} \sigma_3 \sigma_1 + 2\mathcal{S}_{1133} \sigma_3 \sigma_2 + 2\mathcal{S}_{2233} \sigma_1 \sigma_2)\end{aligned}\quad (6.40)$$

Affinchè le eguaglianze (6.40) siano verificate, i coefficienti elastici devono soddisfare la relazione:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{1111} &= \mathcal{S}_{2222} = \mathcal{S}_{3333} = \frac{1}{E} \\ \mathcal{S}_{1122} &= \mathcal{S}_{1133} = \mathcal{S}_{2233} = -\frac{\nu}{E}\end{aligned}\quad (6.41)$$

dove E è il modulo di Young e ν è il rapporto di Poisson. In definitiva l'energia complementare per un materiale isotropo è:

$$\psi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3)]\quad (6.42)$$

e dipende solo da due costanti elastiche.

Ricordando le espressioni del primo e del secondo invariante di tensione J_1, J_2 :

$$\begin{aligned}J_1 &= \boldsymbol{\sigma} \bullet \mathbf{I} \\ J_2 &= \frac{1}{2} [(\boldsymbol{\sigma} \bullet \mathbf{I})^2 - \boldsymbol{\sigma}^2 \bullet \mathbf{I}]\end{aligned}\quad (6.43)$$

si riconosce che:

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 &= J_1^2 - 2J_2 \\ \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3 &= J_2\end{aligned}$$

per cui l'energia complementare (6.42) si riscrive nella forma equivalente:

$$\begin{aligned}
 \psi(\boldsymbol{\sigma}) &= \frac{1}{2E} [J_1^2 - 2(1 + \nu) J_2] \\
 &= \frac{1}{2E} [(\sigma_{ii})^2 - (1 + \nu) ((\sigma_{ii})^2 - \sigma_{ij}\sigma_{ji})] \\
 &= \frac{1}{2E} [(1 + \nu) \sigma_{ij}\sigma_{ji} - \nu (\sigma_{ii})^2]
 \end{aligned} \tag{6.44}$$

6.5.2 Invarianti di tensione

Per definire l'espressione dell'energia complementare di deformazione si può utilizzare la proprietà fondamentale degli invarianti di tensione J_1 J_2 J_3 . Infatti, come già evidenziato tali quantità non variano al variare del sistema di riferimento (invarianti rispetto al sistema di riferimento). Se ne deduce allora che per un materiale isotropo appare necessario e sufficiente che l'energia elastica complementare sia funzione solo di J_1 J_2 J_3 :

$$\psi(\boldsymbol{\sigma}) = \psi(J_1, J_2, J_3) \tag{6.45}$$

Volendo poi scegliere un legame di tipo lineare tra la tensione e la deformazione, l'energia complementare deve al più contenere termini quadratici della tensione. Ne consegue che ψ è indipendente dal terzo invariante, invariante cubico, è funzione quadratica di J_1 , invariante lineare, ed è funzione lineare di J_2 , invariante quadratico:

$$\psi(\boldsymbol{\sigma}) = \psi(J_1, J_2) = C_0 J_1^2 + C_1 J_2 \tag{6.46}$$

dove C_0 e C_1 sono costanti elastiche. Tenuto conto delle relazioni (6.43), l'espressione (6.46) prende la forma esplicita:

$$\begin{aligned}
 \psi(\boldsymbol{\sigma}) &= C_0 (\sigma_{ii})^2 + \frac{1}{2} C_1 [(\sigma_{ii})^2 - \sigma_{ij}\sigma_{ij}] \\
 &= \frac{1}{2} [(2C_0 + C_1) (\sigma_{ii})^2 - C_1 \sigma_{ij}\sigma_{ij}]
 \end{aligned} \tag{6.47}$$

Posto:

$$2C_0 + C_1 = -\frac{\nu}{E} \quad C_1 = -\frac{1 + \nu}{E}$$

si verifica facilmente che l'espressione (6.47) equivale alla formula (6.44).

6.5.3 Legame tensione-deformazione

Il tensore di deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}$ si calcola derivando l'energia complementare (6.44):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{kl} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} \psi(\boldsymbol{\sigma}) \\
&= \frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} \left\{ \frac{1}{2E} [(1 + \nu) \sigma_{ij} \sigma_{ji} - \nu (\sigma_{ii})^2] \right\} \\
&= \frac{1}{2E} \frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} \{ (1 + \nu) \sigma_{ij} \sigma_{ji} - \nu (\sigma_{ii})^2 \} \\
&= \frac{1}{2E} \{ (1 + \nu) (\sigma_{ij} \delta_{jikl} + \sigma_{ji} \delta_{ijkl}) - 2\nu (\sigma_{ii}) \delta_{ikl} \} \\
&= \frac{1}{2E} \{ (1 + \nu) (\sigma_{lk} + \sigma_{lk}) - 2\nu (\sigma_{ii}) \delta_{kl} \} \\
&= \frac{1}{E} \{ (1 + \nu) \sigma_{lk} - \nu (\sigma_{ii}) \delta_{kl} \}
\end{aligned}$$

e quindi

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \boldsymbol{\sigma} - \nu (\boldsymbol{\sigma} \bullet \mathbf{I}) \mathbf{I}] \quad (6.48)$$

che rappresenta la relazione inversa della (6.21) per il caso di materiale isotropo. Il tensore di deformabilità vale:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \mathcal{I} - \nu (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})] \quad (6.49)$$

con \mathcal{I} tensore unitario del quarto ordine. In forma matriciale esplicita, la relazione deformazione-tensione (6.48) è:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (6.50)$$

Per ricavare la relazione inversa della (6.48) si opera come segue:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \mathbf{I} &= \left\{ \frac{1}{E} [(1 + \nu) \boldsymbol{\sigma} - \nu(\boldsymbol{\sigma} \bullet \mathbf{I})\mathbf{I}] \right\} \bullet \mathbf{I} \\
 &= \frac{1}{E} (1 + \nu) \boldsymbol{\sigma} \bullet \mathbf{I} - \frac{1}{E} \nu (\boldsymbol{\sigma} \bullet \mathbf{I}) \mathbf{I} \bullet \mathbf{I} \\
 &= \frac{(1 + \nu)}{E} \boldsymbol{\sigma} \bullet \mathbf{I} - 3 \frac{\nu}{E} (\boldsymbol{\sigma} \bullet \mathbf{I}) \\
 &= \frac{1 - 2\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} \bullet \mathbf{I}
 \end{aligned} \tag{6.51}$$

per cui

$$\boldsymbol{\sigma} \bullet \mathbf{I} = \frac{E}{1 - 2\nu} \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \mathbf{I} \tag{6.52}$$

Sostituendo l'espressione (6.52) nella (6.48) si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \boldsymbol{\sigma} - \nu \frac{E}{1 - 2\nu} (\boldsymbol{\varepsilon} \bullet \mathbf{I}) \mathbf{I} \right] \\
 &= \frac{1}{E} (1 + \nu) \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\boldsymbol{\varepsilon} \bullet \mathbf{I}) \mathbf{I}
 \end{aligned}$$

da cui si ricava:

$$\frac{1}{E} (1 + \nu) \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\boldsymbol{\varepsilon} \bullet \mathbf{I}) \mathbf{I}$$

e quindi:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1 + \nu} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} (\boldsymbol{\varepsilon} \bullet \mathbf{I}) \mathbf{I} \tag{6.53}$$

ovvero, in componenti:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \delta_{ij} \tag{6.54}$$

Il tensore elastico del materiale isotropo ha allora la seguente forma di rappresentazione:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C} &= \frac{E}{1 + \nu} \mathcal{I} + \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \\
 &= 2G\mathcal{I} + \frac{2\nu G}{1 - 2\nu} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}
 \end{aligned} \tag{6.55}$$

dove la quantità:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

è il modulo elastico a taglio, spesso denominata prima costante di Lamè⁴. Si introduce anche la seconda costante di Lamè come:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}$$

E' immediato verificare, applicando la formula (6.48) ovvero la formula (6.53), che per materiali isotropi le direzioni principali di tensione coincidono con le direzioni principali di deformazione.

6.5.4 Definita positività

Il legame tensione - deformazione appena discusso è noto come *legge di Hooke* anche se è dovuto fondamentalmente a *Navier*⁵. La definita positività di φ e ψ implica:

$$\psi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)] > 0 \quad \forall \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \neq 0$$

che equivale a richiedere che la matrice dei coefficienti elastici che fornisce le deformazioni principali in funzione delle tensioni principali:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix}$$

sia definita positiva e cioè:

$$\frac{1}{E} > 0 \quad , \quad \frac{1}{E^2} (1 - \nu^2) > 0 \quad , \quad \frac{1}{E^3} (1 - 2\nu^3 - 3\nu^2) > 0$$

per cui devono essere verificate le seguenti disequaglianze:

$$E > 0 \quad 1 - \nu^2 > 0 \quad (1 + \nu)^2 (1 - 2\nu) > 0 \quad (6.56)$$

Le disequaglianze (6.56) equivalgono alle condizioni:

$$E > 0 \quad , \quad -1 < \nu < \frac{1}{2} \quad (6.57)$$

⁴**Gabriel Lamé** (Tours 1795-Parigi 1870). matematico, fisico e ingegnere minerario francese, trascorse un decennio in Russia per conto del governo francese. Insegnò quindi fisica all'École Polytechnique (1832-44) e calcolo delle probabilità alla Sorbona (dal 1848). Svolse importanti ricerche sulla teoria dell'elasticità e introdusse l'uso delle coordinate curvilinee in fisica matematica. Si interessò anche di teoria dei numeri.

⁵**Claude-Louis-Marie Navier** (Digione 1785-Parigi 1836), ingegnere francese, contribuì a fondare la scienza delle costruzioni, occupandosi in molti scritti della teoria dell'elasticità, del carico di punta, della flessione. Raccolse le sue lezioni nel testo, rimasto famoso, *Leçons sur l'application de la mécanique* (1826). Progettò uno dei ponti parigini sulla Senna.

6.5.5 Determinazione delle costanti elastiche

Per determinare sperimentalmente le costanti elastiche che caratterizzano il comportamento dei materiali, si sviluppano semplici prove di laboratorio. La prima prova che viene effettuata sui materiali è la cosiddetta prova di trazione. Si sottopone il provino, generalmente di forma cilindrica, ad uno stato tensionale monoassiale costante:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^1$$

così che la deformazione corrispondente, per la formula (6.48), vale:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^1 - \nu (\sigma \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^1 \bullet \mathbf{I}) \mathbf{I}] \\ &= \frac{(1 + \nu) \sigma}{E} \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^1 - \frac{\nu \sigma}{E} \mathbf{I} \\ &= \frac{\sigma}{E} \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^1 - \frac{\nu \sigma}{E} \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^2 - \frac{\nu \sigma}{E} \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^3 \end{aligned}$$

e quindi

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma}{E} \quad \varepsilon_{22} = -\frac{\nu \sigma}{E} \quad \varepsilon_{33} = -\frac{\nu \sigma}{E}$$

si ricava allora il modulo di Young come:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_{11}}$$

Si evidenzia che E ha le dimensioni di una tensione. Il rapporto di Poisson si determina poi come:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}$$

Poichè per la (6.57) è $E > 0$, quando il provino è soggetto ad una sollecitazione di trazione, i.e. $\sigma > 0$, si ha $\varepsilon_{11} > 0$ e cioè il materiale risponde con una estensione in direzione \mathbf{e}^1 . D'altra parte, esperienze di laboratorio hanno mostrato che per effetto della trazione in direzione \mathbf{e}^1 il provino si contrae in direzione ortogonale, e quindi sperimentalmente si verifica in generale che il coefficiente di Poisson è maggiore di zero, i.e. $\nu > 0$. Fanno eccezione gli auxetici, materiali innovativi sviluppati in laboratori (Portland, USA), per applicazioni soprattutto mediche. Gli auxetici⁶ sono caratterizzati da coefficienti di Poisson negativi; per cui, soggetti a trazione, si dilatano trasversalmente a causa della loro particolare microstruttura, come schematicamente mostrato in figura 6.1.

Per quanto riguarda la determinazione di ν può essere più agevole calcolarlo come:

$$\nu = 1 - \frac{E}{2G}$$

⁶ $\alpha\nu\xi\eta$ accrescimento.

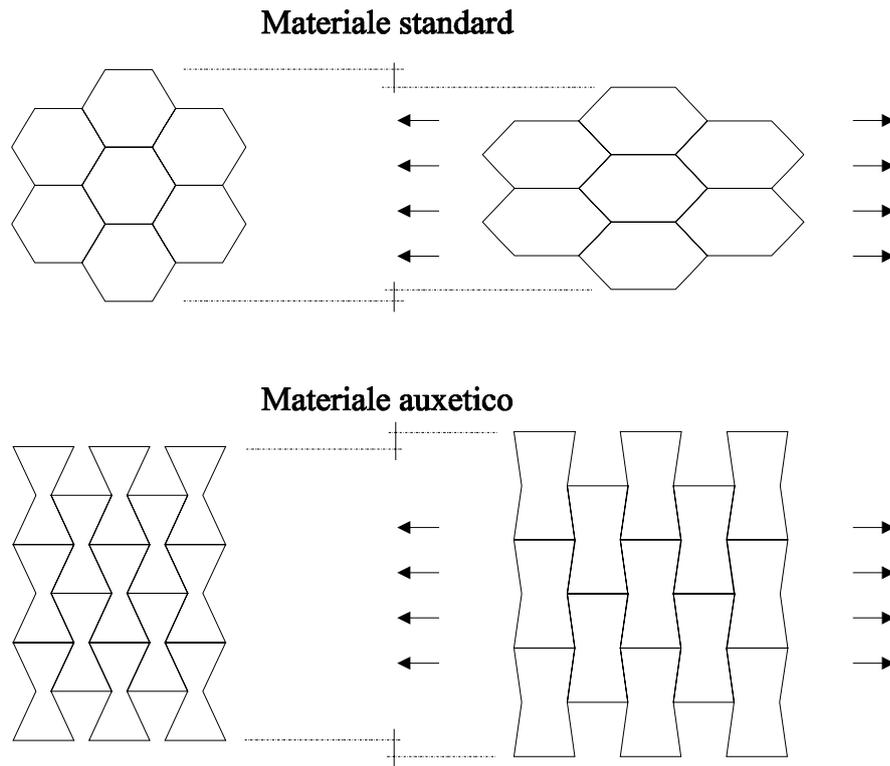


Figura 6.1: Schema microstrutturale di un materiale standard ed uno auxetico.

dove ovviamente si suppone di aver preventivamente determinato G . Per fare ciò si considera il provino soggetto a tensione di puro taglio:

$$\boldsymbol{\sigma} = \tau (\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^1)$$

così che la deformazione associata vale:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{(1 + \nu) \tau}{E} (\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^1)$$

ovvero

$$\varepsilon_{12} = \frac{(1 + \nu) \tau}{E} = \frac{1}{2G} \tau$$

da cui si ricava il modulo elastico a taglio

$$2G = \frac{\tau}{\varepsilon_{12}}$$

Capitolo 7

PROBLEMA DELL'EQUILIBRIO ELASTICO

Si consideri un corpo deformabile Ω soggetto ad un sistema di sollecitazione $S = \{\mathbf{b}, \mathbf{p}, \hat{\mathbf{u}}\}$, costituito da forze di volume \mathbf{b} in Ω , forze di superficie \mathbf{p} sulla parte di frontiera $\partial_f \Omega \subseteq \partial \Omega$ e a spostamenti assegnati $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}$ sulla rimanente parte di frontiera $\partial_u \Omega \subseteq \partial \Omega$, tale che $\partial_f \Omega \cup \partial_u \Omega = \partial \Omega$ con $\partial_f \Omega \cap \partial_u \Omega = \emptyset$.

Si suppone che:

- il corpo sia costituito da materiale elastico lineare,
- che gli spostamenti indotti dalle sollecitazioni esterne agenti sul corpo siano piccoli, nel senso che $|u_{i,j}| \ll 1$.

Il problema dell'equilibrio elastico \mathcal{P} consiste nel determinare per il corpo Ω soggetto alla sollecitazione S la tripletta, detta *stato elastico*, $s = \{\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}\}$ costituita dal:

- vettore degli spostamenti \mathbf{u} (3 incognite),
- dal tensore simmetrico delle deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}$ (6 incognite),
- dal tensore simmetrico delle tensioni $\boldsymbol{\sigma}$ (6 incognite).

A fronte delle 15 funzioni incognite da determinare, sono state scritte nei capitoli precedenti le equazioni di campo:

- congruenza (3.40) [6 equazioni]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad \text{in } \Omega \quad (7.1)$$

- equilibrio (4.10) [3 equazioni]:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega \quad (7.2)$$

- legame costitutivo (6.21) [6 equazioni]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C} [\boldsymbol{\varepsilon}] \quad \text{in } \Omega \quad (7.3)$$

Le 15 equazioni di campo sono completate con le seguenti condizioni:

- equilibrio (4.20):

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{p} \quad \text{su } \partial_f \Omega \quad (7.4)$$

- compatibilità:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{su } \partial_u \Omega \quad (7.5)$$

Il problema dell'equilibrio elastico così formulato è detto di tipo misto in quanto su una parte della frontiera di Ω è assegnato il carico $\hat{\mathbf{p}}$, mentre sulla restante parte è assegnato lo spostamento $\hat{\mathbf{u}}$.

Si evidenzia che tutte le equazioni che governano il problema dell'equilibrio elastico \mathcal{P} sono lineari. Si dimostra che la soluzione del problema dell'equilibrio elastico esiste ed è unica. La dimostrazione dell'esistenza della soluzione non è semplice e non viene qui riportata. L'unicità della soluzione è invece dimostrata di seguito.

7.1 Principio di sovrapposizione degli effetti

Sulla base delle ipotesi di piccoli gradienti di spostamento e legame costitutivo elastico lineare, introdotte nel formulare il problema dell'equilibrio elastico \mathcal{P} governato dalle equazioni (7.1)-(7.5), vale il principio di sovrapposizione degli effetti: gli spostamenti, le deformazioni e le tensioni prodotti da più sistemi di sollecitazioni esterne agenti contemporaneamente sono uguali, rispettivamente, alla somma degli spostamenti, delle deformazioni e delle tensioni prodotte dai singoli sistemi di sollecitazione, pensati agenti separatamente.

Si consideri il corpo Ω soggetto a due sistemi di sollecitazioni esterne:

$$\begin{aligned} S^1 &= (\mathbf{b}^1 \text{ in } \Omega, \mathbf{p}^1 \text{ su } \partial_f \Omega, \hat{\mathbf{u}}^1 \text{ su } \partial_u \Omega) \\ S^2 &= (\mathbf{b}^2 \text{ in } \Omega, \mathbf{p}^2 \text{ su } \partial_f \Omega, \hat{\mathbf{u}}^2 \text{ su } \partial_u \Omega) \end{aligned}$$

Si indichino con $s^1 = \{\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\varepsilon}^1, \boldsymbol{\sigma}^1\}$ ed $s^2 = \{\mathbf{u}^2, \boldsymbol{\varepsilon}^2, \boldsymbol{\sigma}^2\}$ gli stati elastici soluzione dei problemi dell'equilibrio elastico \mathcal{P}^1 e \mathcal{P}^2 corrispondenti rispettivamente ai casi di

sollecitazione S^1 ed S^2 :

$$\begin{aligned}
 s^1 = \{\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\varepsilon}^1, \boldsymbol{\sigma}^1\} & : \quad \boldsymbol{\varepsilon}^1 = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}^1 + (\nabla \mathbf{u}^1)^T) & \text{in } \Omega \\
 & \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^1 + \mathbf{b}^1 = \mathbf{0} & \text{in } \Omega \\
 & \quad \boldsymbol{\sigma}^1 = \mathcal{C}[\boldsymbol{\varepsilon}^1] & \text{in } \Omega \\
 & \quad \boldsymbol{\sigma}^1 \mathbf{n} = \mathbf{p}^1 & \text{su } \partial_f \Omega \\
 & \quad \mathbf{u}^1 = \widehat{\mathbf{u}}^1 & \text{su } \partial_u \Omega
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

$$\begin{aligned}
 s^2 = \{\mathbf{u}^2, \boldsymbol{\varepsilon}^2, \boldsymbol{\sigma}^2\} & : \quad \boldsymbol{\varepsilon}^2 = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}^2 + (\nabla \mathbf{u}^2)^T) & \text{in } \Omega \\
 & \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^2 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{0} & \text{in } \Omega \\
 & \quad \boldsymbol{\sigma}^2 = \mathcal{C}[\boldsymbol{\varepsilon}^2] & \text{in } \Omega \\
 & \quad \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{n} = \mathbf{p}^2 & \text{su } \partial_f \Omega \\
 & \quad \mathbf{u}^2 = \widehat{\mathbf{u}}^2 & \text{su } \partial_u \Omega
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

Poichè il problema dell'equilibrio elastico è governato da un sistema di equazioni differenziali di tipo lineare, sommando membro a membro le rispettive equazioni riportate (7.6) e (7.7), si ha:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon}^1 + \boldsymbol{\varepsilon}^2 &= \frac{1}{2}(\nabla(\mathbf{u}^1 + \mathbf{u}^2) + \nabla(\mathbf{u}^1 + \mathbf{u}^2)^T) & \text{in } \Omega \\
 \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^1 + \boldsymbol{\sigma}^2) + \mathbf{b}^1 + \mathbf{b}^2 &= \mathbf{0} & \text{in } \Omega \\
 (\boldsymbol{\sigma}^1 + \boldsymbol{\sigma}^2) &= \mathcal{C}[\boldsymbol{\varepsilon}^1 + \boldsymbol{\varepsilon}^2] & \text{in } \Omega \\
 (\boldsymbol{\sigma}^1 + \boldsymbol{\sigma}^2) \mathbf{n} &= \mathbf{p}^1 + \mathbf{p}^2 & \text{su } \partial_f \Omega \\
 \mathbf{u}^1 + \mathbf{u}^2 &= \widehat{\mathbf{u}}^1 + \widehat{\mathbf{u}}^2 & \text{su } \partial_u \Omega
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

Supponendo allora che i due sistemi di sollecitazione esterna agiscono contemporaneamente, il corpo Ω è soggetto a:

$$S = S^1 + S^2 = (\mathbf{b}^1 + \mathbf{b}^2 \text{ in } \Omega, \mathbf{p}^1 + \mathbf{p}^2 \text{ su } \partial_f \Omega, \widehat{\mathbf{u}}^1 + \widehat{\mathbf{u}}^2 \text{ su } \partial_u \Omega) \tag{7.9}$$

La soluzione $s = \{\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}\}$ del problema dell'equilibrio elastico $\mathcal{P} = \mathcal{P}^1 + \mathcal{P}^2$, relativo al corpo Ω soggetto alla sollecitazione $S = S^1 + S^2$, deve soddisfare le equazioni (7.8) e quindi deve accadere che:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^1 + \mathbf{u}^2, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^1 + \boldsymbol{\varepsilon}^2, \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^1 + \boldsymbol{\sigma}^2 \tag{7.10}$$

ovvero $s = s^1 + s^2$.

Si evidenzia ancora che il principio di sovrapposizione degli effetti sussiste in virtù della linearità degli operatori differenziali coinvolti nelle equazioni di congruenza, di equilibrio e del legame costitutivo.

7.2 Unicità della soluzione del problema dell'equilibrio elastico

La dimostrazione dell'unicità della soluzione del problema dell'equilibrio elastico è dovuta a Kirchhoff¹. Si supponga che ad un particolare sistema di sollecitazione S siano associate, come soluzioni del problema dell'equilibrio elastico \mathcal{P} , due stati elastici:

$$S \quad \Rightarrow \quad s^1 = \{\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\varepsilon}^1, \boldsymbol{\sigma}^1\} \quad e \quad s^2 = \{\mathbf{u}^2, \boldsymbol{\varepsilon}^2, \boldsymbol{\sigma}^2\}$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, lo stato elastico differenza:

$$s^* = \{\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\varepsilon}^*, \boldsymbol{\sigma}^*\} = s^1 - s^2 = \{\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2, \boldsymbol{\varepsilon}^1 - \boldsymbol{\varepsilon}^2, \boldsymbol{\sigma}^1 - \boldsymbol{\sigma}^2\}$$

è associato ad un sistema di sollecitazione S^* nullo, corrispondente cioè a forze di volume nulle, a forze di superficie nulle su $\partial_f \Omega$ ed a spostamenti assegnati nulli su $\partial_u \Omega$.

Si applichi ora il principio dei lavori virtuali, relativamente allo stato di sollecitazione effettivo S^* , e di tensione e di deformazione effettivi s^* .

Poichè lo stato di sollecitazione S^* è nullo, allora il lavoro virtuale esterno è nullo.

$$L_{ve} = 0 \tag{7.11}$$

Il lavoro virtuale interno vale:

$$L_{vi} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^* \bullet \boldsymbol{\varepsilon}^* dV = \int_{\Omega} \mathcal{C} [\boldsymbol{\varepsilon}^*] \bullet \boldsymbol{\varepsilon}^* dV = \int_{\Omega} \mathcal{C} [\boldsymbol{\varepsilon}^1 - \boldsymbol{\varepsilon}^2] \bullet (\boldsymbol{\varepsilon}^1 - \boldsymbol{\varepsilon}^2) dV \tag{7.12}$$

¹**Gustav Robert Kirchhoff** (Königsberg, oggi Kaliningrad 1824 - Berlino 1887), fisico tedesco. Conclusi gli studi all'università di Königsberg, divenne professore di fisica alle università di Breslavia, Heidelberg e Berlino. In collaborazione con il chimico tedesco Robert Wilhelm Bunsen, mise a punto un moderno spettroscopio che permetteva di riconoscere un elemento in base all'analisi della luce emessa o assorbita; le ricerche dei due scienziati culminarono nella scoperta di due nuovi elementi: il cesio e il rubidio.

Kirchhoff condusse inoltre importanti indagini sul trasferimento di calore per irraggiamento e, nell'ambito dell'elettricità, enunciò le due semplici regole (note come principi di Kirchhoff) che permettono il calcolo delle intensità di corrente elettrica lungo i singoli rami di un circuito. Sviluppò anche studi fondamentali sulla teoria dell'elasticità, ed in particolare sulla modellazione di piastre e gusci.

Eguagliando il lavoro virtuale esterno (7.11) con quello interno (7.12) si ottiene:

$$0 = \int_{\Omega} \mathcal{C} [\boldsymbol{\varepsilon}^1 - \boldsymbol{\varepsilon}^2] \bullet (\boldsymbol{\varepsilon}^1 - \boldsymbol{\varepsilon}^2) dV \quad (7.13)$$

D'altra parte, nella definizione del legame costitutivo si è supposto che il tensore di elasticità \mathcal{C} fosse definito positivo (6.26), per cui deve accadere che:

$$\mathcal{C} [\boldsymbol{\varepsilon}^1 - \boldsymbol{\varepsilon}^2] \bullet (\boldsymbol{\varepsilon}^1 - \boldsymbol{\varepsilon}^2) > 0 \quad \forall (\boldsymbol{\varepsilon}^1 - \boldsymbol{\varepsilon}^2) \neq \mathbf{0} \quad (7.14)$$

Confrontando la relazione (7.13) con la (7.14) se ne deduce che i campi di deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}^1$ ed $\boldsymbol{\varepsilon}^2$ corrispondenti al medesimo sistema di sollecitazione S non devono differire l'uno dall'altro, ovvero deve accadere che $\boldsymbol{\varepsilon}^1 = \boldsymbol{\varepsilon}^2$. Per l'equazione del legame costitutivo (7.3), allora si ha:

$$\boldsymbol{\sigma}^1 = \mathcal{C} [\boldsymbol{\varepsilon}^1] = \mathcal{C} [\boldsymbol{\varepsilon}^2] = \boldsymbol{\sigma}^2 \quad (7.15)$$

Così anche, i campi di spostamenti \mathbf{u}^1 ed \mathbf{u}^2 che corrispondono alla stessa deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}^1 = \boldsymbol{\varepsilon}^2$ possono al più differire di un moto rigido del corpo Ω . Nel caso specifico considerato, ove si è supposto che su una parte di frontiera $\partial_u \Omega$ siano assegnati gli spostamenti, non sono possibili moti rigidi di Ω per cui si ha che $\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^2$.

7.3 Teorema di Clapeyron

Si pone ora il problema di voler valutare l'energia elastica di deformazione immagazzinata in un corpo Ω soggetto all'assegnato sistema di sollecitazione S . Tale energia è fornita direttamente dalla formula:

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega} \varphi dV = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathcal{C} [\boldsymbol{\varepsilon}] \bullet \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (7.16)$$

Il teorema che segue fu dimostrato da Clapeyron², e si enuncia come segue:

Il lavoro di deformazione di un solido elastico lineare sollecitato da forze agenti staticamente è pari alla metà del lavoro che tali forze compirebbero per gli spostamenti effettivi se conservassero costantemente la loro intensità finale.

Si applichi il principio dei lavori virtuali considerando come sistema di spostamento, di deformazione e di tensione lo stato elastico $s = \{\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}\}$ soluzione del

²**Benoit-Paul-Emile Clapeyron** (Parigi 1799- 1864), ingegnere e fisico francese. Tra il 1820 e il 1830 fu a Pietroburgo, professore alla Scuola superiore dei lavori pubblici. Di ritorno in Francia, si occupò di costruzioni stradali e ferroviarie, di macchine termiche e soprattutto di scienza delle costruzioni e teoria meccanica del calore.

problema dell'equilibrio elastico \mathcal{P} . In questo caso si ha:

$$\begin{aligned} L_{ve} &= \int_{\Omega} \mathbf{b} \bullet \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{p} \bullet \mathbf{u} \, dA + \int_{\partial_u \Omega} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \hat{\mathbf{u}} \, dA \\ L_{vi} &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} \, dV = \int_{\Omega} \mathcal{C}[\boldsymbol{\varepsilon}] \bullet \boldsymbol{\varepsilon} \, dV \end{aligned}$$

Uguagliando il lavoro virtuale esterno con il lavoro virtuale interno si ottiene:

$$\int_{\Omega} \mathbf{b} \bullet \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{p} \bullet \mathbf{u} \, dA + \int_{\partial_u \Omega} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \hat{\mathbf{u}} \, dA = \int_{\Omega} \mathcal{C}[\boldsymbol{\varepsilon}] \bullet \boldsymbol{\varepsilon} \, dV \quad (7.17)$$

Confrontando l'espressione dell'energia interna fornita dalla (7.16) con la formula ricavata dall'applicazione del principio dei lavori virtuali (7.17) si perviene all'equazione:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} \mathbf{b} \bullet \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{p} \bullet \mathbf{u} \, dA + \int_{\partial_u \Omega} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \hat{\mathbf{u}} \, dA \right]$$

7.4 Teorema di Betti

Siano $S^1 = \{\mathbf{b}^1, \mathbf{p}^1, \hat{\mathbf{u}}^1\}$ ed $S^2 = \{\mathbf{b}^2, \mathbf{p}^2, \hat{\mathbf{u}}^2\}$ due differenti sistemi di sollecitazioni agenti sul medesimo corpo Ω e siano $s^1 = \{\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\varepsilon}^1, \boldsymbol{\sigma}^1\}$ ed $s^2 = \{\mathbf{u}^2, \boldsymbol{\varepsilon}^2, \boldsymbol{\sigma}^2\}$ i due stati elastici soluzioni dei corrispondenti problemi dell'equilibrio elastico.

Betti dimostrò che:

Il lavoro L^{12} compiuto dal sistema di sollecitazione S^1 per gli spostamenti \mathbf{u}^2 provocati da un secondo sistema di sollecitazione S^2 è uguale al lavoro L^{21} compiuto dal sistema S^2 per gli spostamenti \mathbf{u}^1 provocati dal sistema S^1 .

In formula:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{b}^1 \bullet \mathbf{u}^2 \, dV + \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{p}^1 \bullet \mathbf{u}^2 \, dA + \int_{\partial_u \Omega} \boldsymbol{\sigma}^1 \mathbf{n} \bullet \mathbf{u}^2 \, dA \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{b}^2 \bullet \mathbf{u}^1 \, dV + \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{p}^2 \bullet \mathbf{u}^1 \, dA + \int_{\partial_u \Omega} \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{n} \bullet \mathbf{u}^1 \, dA \end{aligned} \quad (7.18)$$

Il teorema di Betti³ si dimostra ricorrendo al principio dei lavori virtuali. Infatti, si ha:

³**Enrico Betti** (Pistoia 1823-Pisa 1892), matematico italiano. Professore dal 1867 all'Università di Pisa, deputato (1862) e senatore (1884). Fondatore della scuola italiana di matematica, fu maestro di U. Dini, L. Bianchi, V. Volterra. Studiò inizialmente problemi di algebra e la teoria delle funzioni ellittiche, sviluppò e chiarì la teoria delle equazioni di E. Galois dando dimostrazioni per risultati che vi erano solo enunciati. In seguito diede notevoli contributi anche alla fisica matematica, in particolare alla teoria dell'elasticità.

$$\begin{aligned}
L^{12} &= \int_{\Omega} \mathbf{b}^1 \bullet \mathbf{u}^2 dV + \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{p}^1 \bullet \mathbf{u}^2 dA + \int_{\partial_u \Omega} \boldsymbol{\sigma}^1 \mathbf{n} \bullet \mathbf{u}^2 dA \quad (7.19) \\
&= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^1 \bullet \boldsymbol{\varepsilon}^2 dV = \int_{\Omega} \mathcal{C} [\boldsymbol{\varepsilon}^1] \bullet \boldsymbol{\varepsilon}^2 dV \\
&= \int_{\Omega} \mathcal{C} [\boldsymbol{\varepsilon}^2] \bullet \boldsymbol{\varepsilon}^1 dV = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^2 \bullet \boldsymbol{\varepsilon}^1 dV \\
&= \int_{\Omega} \mathbf{b}^2 \bullet \mathbf{u}^1 dV + \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{p}^2 \bullet \mathbf{u}^1 dA + \int_{\partial_u \Omega} \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{n} \bullet \mathbf{u}^1 dA = L^{21}
\end{aligned}$$

Si evidenzia che nella dimostrazione del teorema di Betti si è utilizzata la proprietà di simmetria maggiore del tensore elastico \mathcal{C} , ovvero il materiale deve essere iperelastico.

Il teorema di Betti si può dimostrare anche calcolando l'energia immagazzinata nel corpo Ω . Infatti, si supponga che Ω sia soggetto a due storie di carico:

1. agisce solo la sollecitazione S^1 e successivamente agisce anche S^2 ,
2. agisce solo la sollecitazione S^2 e successivamente agisce anche S^1 .

L'energia calcolata nei due casi sarà:

$$\begin{aligned}
E' &= \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} \mathbf{b}^1 \bullet \mathbf{u}^1 dV + \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{p}^1 \bullet \mathbf{u}^1 dA + \int_{\partial_u \Omega} \boldsymbol{\sigma}^1 \mathbf{n} \bullet \mathbf{u}^1 dA \right] \quad (7.20) \\
&+ \int_{\Omega} \mathbf{b}^1 \bullet \mathbf{u}^2 dV + \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{p}^1 \bullet \mathbf{u}^2 dA + \int_{\partial_u \Omega} \boldsymbol{\sigma}^1 \mathbf{n} \bullet \mathbf{u}^2 dA \\
&+ \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} \mathbf{b}^2 \bullet \mathbf{u}^2 dV + \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{p}^2 \bullet \mathbf{u}^2 dA + \int_{\partial_u \Omega} \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{n} \bullet \mathbf{u}^2 dA \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E'' &= \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} \mathbf{b}^2 \bullet \mathbf{u}^2 dV + \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{p}^2 \bullet \mathbf{u}^2 dA + \int_{\partial_u \Omega} \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{n} \bullet \mathbf{u}^2 dA \right] \quad (7.21) \\
&+ \int_{\Omega} \mathbf{b}^2 \bullet \mathbf{u}^1 dV + \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{p}^2 \bullet \mathbf{u}^1 dA + \int_{\partial_u \Omega} \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{n} \bullet \mathbf{u}^1 dA \\
&+ \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} \mathbf{b}^1 \bullet \mathbf{u}^1 dV + \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{p}^1 \bullet \mathbf{u}^1 dA + \int_{\partial_u \Omega} \boldsymbol{\sigma}^1 \mathbf{n} \bullet \mathbf{u}^1 dA \right]
\end{aligned}$$

Poichè il materiale che compone il corpo è iperelastico, le due energie devono assumere lo stesso valore, da cui si deduce l'equazione (7.18).

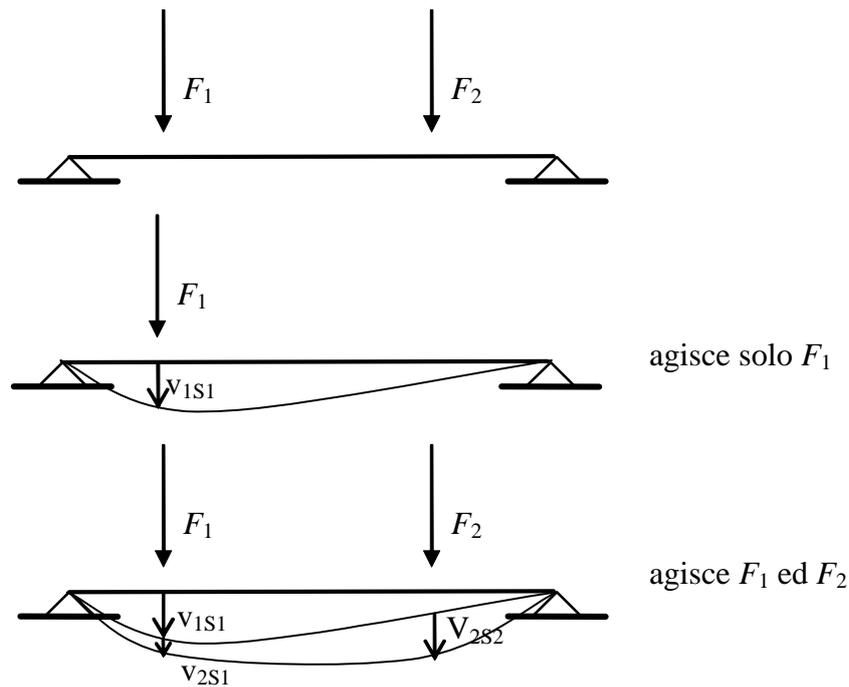


Figura 7.1: Teorema di Betti.

Allo scopo di rendere più chiare le espressioni (7.20) e (7.21), si considera una trave soggetta a due forze F_1 ed F_2 , come illustrato in figura 7.1.

Per effetto della forza F_1 la sezione $S1$ subisce uno spostamento v_{1S1} . L'energia elastica immagazzinata dal sistema vale per il teorema di Clapeyron:

$$E'_1 = \frac{1}{2} F_1 v_{1S1} \quad (7.22)$$

Quindi, successivamente agisce la forza F_2 . La sezione $S1$ subisce un ulteriore spostamento v_{2S1} , mentre la sezione $S2$ subisce lo spostamento v_{2S2} . L'energia elastica immagazzinata dal sistema, per il teorema di Clapeyron, vale:

$$E'_2 = F_1 v_{2S1} + \frac{1}{2} F_2 v_{2S2} \quad (7.23)$$

L'energia totale si determina sommando le quantità calcolate tramite le (7.22) e (7.23):

$$E' = E'_1 + E'_2 = \frac{1}{2} F_1 v_{1S1} + F_1 v_{2S1} + \frac{1}{2} F_2 v_{2S2} \quad (7.24)$$

Analogamente applicando prima la forza F_2 e poi la forza F_1 , l'energia vale:

$$E'' = \frac{1}{2} F_2 v_{2S2} + F_2 v_{1S2} + \frac{1}{2} F_1 v_{1S1} \quad (7.25)$$

Da cui il teorema di Betti:

$$E' = E'' \quad \Rightarrow \quad F_1 v_{2S1} = F_2 v_{1S2} \quad (7.26)$$

7.4.1 Teorema di Betti generalizzato

Il teorema di Betti viene generalizzato considerando nei due sistemi di sollecitazioni S^1 ed S^2 agenti sul corpo Ω anche delle possibili distorsioni $\boldsymbol{\delta}^1$ e $\boldsymbol{\delta}^2$, così che $S^1 = \{\mathbf{b}^1, \mathbf{p}^1, \hat{\mathbf{u}}^1, \boldsymbol{\delta}^1\}$ ed $S^2 = \{\mathbf{b}^2, \mathbf{p}^2, \hat{\mathbf{u}}^2, \boldsymbol{\delta}^2\}$. Come nel caso precedente siano $s^1 = \{\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\varepsilon}^1, \boldsymbol{\sigma}^1\}$ ed $s^2 = \{\mathbf{u}^2, \boldsymbol{\varepsilon}^2, \boldsymbol{\sigma}^2\}$ i due stati elastici soluzioni dei corrispondenti problemi dell'equilibrio elastico.

Il lavoro virtuale che le forze del sistema \mathbf{S}^1 compiono per gli spostamenti dello stato elastico s^2 , vale:

$$\begin{aligned} L^{12} &= \int_{\Omega} \mathbf{b}^1 \cdot \mathbf{u}^2 dv + \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{u}^2 dA + \int_{\partial_u \Omega} \boldsymbol{\sigma}^1 \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{u}}^2 dA \\ &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^2 dv = \int_{\Omega} \mathcal{C} [\boldsymbol{\varepsilon}^1 - \boldsymbol{\delta}^1] \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^2 dv \end{aligned} \quad (7.27)$$

essendo $\boldsymbol{\varepsilon}^1 - \boldsymbol{\delta}^1$ la deformazione elastica presente nello stato s^1 .

Analogamente, il lavoro virtuale che le forze del sistema \mathbf{S}^2 compiono per gli spostamenti dello stato elastico s^1 , vale:

$$\begin{aligned} L^{21} &= \int_{\Omega} \mathbf{b}^2 \cdot \mathbf{u}^1 dv + \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{p}^2 \cdot \mathbf{u}^1 dA + \int_{\partial_u \Omega} \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{u}}^1 dA \\ &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^1 dv = \int_{\Omega} \mathcal{C} [\boldsymbol{\varepsilon}^2 - \boldsymbol{\delta}^2] \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^1 dv \end{aligned} \quad (7.28)$$

Sottraendo membro a membro le (7.27) e (7.28) si ottiene:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \mathbf{b}^1 \cdot \mathbf{u}^2 dv + \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{u}^2 dA + \int_{\partial_u \Omega} \boldsymbol{\sigma}^1 \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{u}}^2 dA \\ &- \int_{\Omega} \mathbf{b}^2 \cdot \mathbf{u}^1 dv - \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{p}^2 \cdot \mathbf{u}^1 dA - \int_{\partial_u \Omega} \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{u}}^1 dA \\ &= \int_{\Omega} \mathcal{C} [\boldsymbol{\varepsilon}^1 - \boldsymbol{\delta}^1] \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^2 dv - \int_{\Omega} \mathcal{C} [\boldsymbol{\varepsilon}^2 - \boldsymbol{\delta}^2] \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^1 dv \end{aligned} \quad (7.29)$$

Sommando e sottraendo al secondo membro la stessa quantità si ha:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \mathcal{C} [\boldsymbol{\varepsilon}^1 - \boldsymbol{\delta}^1] \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^2 dv - \int_{\Omega} \mathcal{C} [\boldsymbol{\varepsilon}^2 - \boldsymbol{\delta}^2] \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^1 dv & (7.30) \\
&= \int_{\Omega} \mathcal{C} \boldsymbol{\varepsilon}^1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^2 dv - \int_{\Omega} \mathcal{C} \boldsymbol{\delta}^1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^2 dv - \int_{\Omega} \mathcal{C} \boldsymbol{\varepsilon}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^1 dv + \int_{\Omega} \mathcal{C} \boldsymbol{\delta}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^1 dv \\
&\quad + \int_{\Omega} \mathcal{C} \boldsymbol{\delta}^2 \cdot \boldsymbol{\delta}^1 dv - \int_{\Omega} \mathcal{C} \boldsymbol{\delta}^1 \cdot \boldsymbol{\delta}^2 dv \\
&= \int_{\Omega} \mathcal{C} [\boldsymbol{\varepsilon}^1 - \boldsymbol{\delta}^1] \cdot \boldsymbol{\delta}^2 dv - \int_{\Omega} \mathcal{C} [\boldsymbol{\varepsilon}^2 - \boldsymbol{\delta}^2] \cdot \boldsymbol{\delta}^1 dv
\end{aligned}$$

Confrontando la (7.29) con la (7.30) si ottiene:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \mathbf{b}^1 \cdot \mathbf{u}^2 dv + \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{u}^2 dA + \int_{\partial_u \Omega} \boldsymbol{\sigma}^1 \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{u}}^2 dA - \int_{\Omega} \mathcal{C} [\boldsymbol{\varepsilon}^1 - \boldsymbol{\delta}^1] \cdot \boldsymbol{\delta}^2 dv & (7.31) \\
&= \int_{\Omega} \mathbf{b}^2 \cdot \mathbf{u}^1 dv + \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{p}^2 \cdot \mathbf{u}^1 dA + \int_{\partial_u \Omega} \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{u}}^1 dA - \int_{\Omega} \mathcal{C} [\boldsymbol{\varepsilon}^2 - \boldsymbol{\delta}^2] \cdot \boldsymbol{\delta}^1
\end{aligned}$$

che equivale a:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \mathbf{b}^1 \cdot \mathbf{u}^2 dv + \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{u}^2 dA + \int_{\partial_u \Omega} \boldsymbol{\sigma}^1 \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{u}}^2 dA - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \boldsymbol{\delta}^2 dv & (7.32) \\
&= \int_{\Omega} \mathbf{b}^2 \cdot \mathbf{u}^1 dv + \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{p}^2 \cdot \mathbf{u}^1 dA + \int_{\partial_u \Omega} \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{u}}^1 dA - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \boldsymbol{\delta}^1
\end{aligned}$$

7.4.2 Linee di influenza

Le linee di influenza sono una particolare applicazione del teorema di Betti generalizzato al problema delle travature.

Si consideri il caso in cui il sistema di sollecitazione S^1 consista in una forza applicata F^1 ed una distorsione Δ^1 , mentre il sistema S^2 consista in una forza applicata F^2 ed una distorsione Δ^2 ; si consideri inoltre per la trave solo il problema flessionale, per cui per spostamento si intende l'inflessione v e per tensione il momento flettente M . Il teorema di Betti generalizzato (7.32) prende la forma:

$$F^1 v^2 - M^1 \Delta^2 = F^2 v^1 - M^2 \Delta^1 \quad (7.33)$$

Per evidenziare l'utilità del teorema di Betti generalizzato, nella forma espressa dalla (7.33), si consideri il problema di voler determinare lo spostamento v^1 di una sezione A della trave, per effetto della forza $F^1 = 1$ applicata nella sezione B . A tale scopo si pone $\Delta^1 = 0$. Inoltre, si pone $F^2 = 1$ applicata nella sezione A con $\Delta^2 = 0$. La formula (7.33) si semplifica in:

$$v^2 = v^1 \quad (7.34)$$

In altri termini, spostamento v^1 della sezione A della trave per effetto della forza unitaria $F^1 = 1$ in B è uguale allo spostamento v^2 provocato dalla forza unitaria $F^2 = 1$ applicata nella sezione A . Al variare della sezione B di applicazione della forza unitaria F^1 , il valore dello spostamento in A varia ed assume il valore dello spostamento che avviene nella sezione B dove è applicata la forza F^1 . In definitiva, il diagramma dello spostamento in A provocato da una forza unitaria comunque posizionata lungo la linea d'asse della trave è uguale al diagramma dello spostamento provocato da una forza unitaria applicata nella sezione B . Tale diagramma viene comunemente indicato come la linea di influenza dello spostamento in A dovuto ad una forza unitaria viaggiante.

Applicando tale procedura a differenti situazioni si possono determinare le linee di influenza di varie grandezze, di notevole interesse applicativo.

In generale, si assume il sistema S^1 come sistema effettivo in cui l'ente sollecitante sia mobile (ente viaggiante), ed il sistema S^2 come sistema ausiliario nel quale determinare il diagramma equivalente.

1. Determinare la linea d'influenza dello spostamento v^1 di una sezione A della trave, per effetto della forza viaggiante $F^1 = 1$. A tale scopo si pone $\Delta^1 = 0$. Inoltre, si pone $F^2 = 0$ applicata nella sezione A con $\Delta^2 = 0$. La formula (7.33) si semplifica in:

$$v^2 = v^1 \quad (7.35)$$

La linea d'influenza dello spostamento v^1 della sezione A della trave per effetto della forza unitaria viaggiante è uguale all'inflessione v^2 provocato dalla forza unitaria F^2 applicata nella sezione A .

1. Determinare la linea d'influenza del momento flettente M^1 di una sezione A della trave, per effetto della forza viaggiante $F^1 = 1$. A tale scopo si pone $\Delta^1 = 0$. Inoltre, si pone $F^2 = 0$ e $\Delta^2 = \Delta\varphi^2 = 1$ in A . La formula (7.33) si semplifica in:

$$v^2 = M^1 \quad (7.36)$$

La linea d'influenza del momento flettente M^1 della sezione A della trave per effetto della forza unitaria viaggiante è uguale all'inflessione v^2 provocato dalla distorsione $\Delta^2 = \Delta\varphi^2 = 1$ applicata nella sezione A .

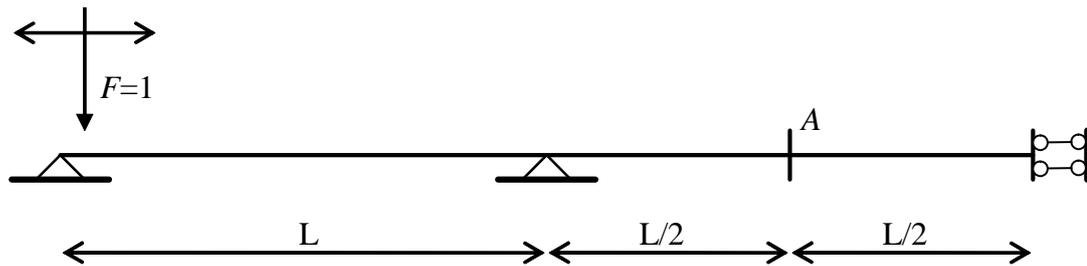


Figura 7.2: Linea d'influenza dello spostamento per la trave continua.

7.4.3 Esercizi sulle linee di influenza

Esercizio 1

Si intende determinare la linea d'influenza dello spostamento della sezione A della trave riportata in figura 7.2, per effetto di una forza viaggiante.

Sulla base dell'equazione (7.35) il valore dello spostamento nella sezione A provocato dalla forza unitaria F è uguale allo spostamento della sezione nella quale agisce la forza F per effetto di una forza unitaria applicata in corrispondenza della sezione A . Ne consegue che la linea d'influenza cercata è fornita dalla deformata ottenuta nello schema riportato in figura 7.2.

Esercizio 2

Per la trave considerata nell'esercizio precedente si determini la linea d'influenza del momento flettente nella sezione A per effetto della forza unitaria viaggiante $F = 1$. Per l'equazione (7.36), il valore del momento flettente nella sezione A provocato dalla forza unitaria F è uguale allo spostamento della sezione nella quale agisce la forza F per effetto di una distorsione angolare $\Delta\varphi = 1$ applicata in corrispondenza della sezione A .

7.5 Equazioni di Navier

Le equazioni di Navier forniscono la formulazione agli spostamenti per il problema dell'equilibrio elastico di un corpo isotropo.

Sostituendo le equazioni di congruenza (7.1) nelle relazioni costitutive per un materiale isotropo (6.54), si ottiene:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \frac{E}{2(1+\nu)}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}(u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3})\delta_{ij} \quad (7.37) \\ &= \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda(u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3})\delta_{ij}\end{aligned}$$

avendo posto

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad , \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

Tenuto conto delle (7.37), le equazioni indefinite di equilibrio (7.2), assumono la forma esplicita:

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma_{ij,j} + b_i \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} [\mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda(u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3})\delta_{ij}] + b_i \\ &= \mu(u_{i,jj} + u_{j,ij}) + \lambda(u_{1,1j} + u_{2,2j} + u_{3,3j})\delta_{ij} + b_i \\ &= \mu u_{i,jj} + (\mu + \lambda) u_{j,ji} + b_i \\ &= \mu \Delta u_i + (\mu + \lambda) (div \mathbf{u})_{,i} + b_i \end{aligned}$$

In definitiva si ottiene l'equazione di Navier:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla div \mathbf{u} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (7.38)$$

completata con le solite condizioni al contorno (7.4) e (7.5), che si riscrivono come:

$$\left[\frac{E}{2(1+\nu)} \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) + \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} (\mathbf{I} \bullet \nabla \mathbf{u}) \mathbf{I} \right] \mathbf{n} = \mathbf{p} \quad \begin{array}{l} su \quad \partial_f \Omega \\ su \quad \partial_u \Omega \end{array} \quad (7.39)$$

Si chiamano infine *soluzioni universali* i campi di spostamento \mathbf{u} soluzione di un problema dell'equilibrio elastico con forze esterne nulle ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$, $\mathbf{p} = \mathbf{0}$), per le quali accade che l'equazione di Navier (7.38) sia soddisfatta nel senso:

$$\mathbf{u} : \begin{cases} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \nabla div \mathbf{u} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Tali soluzioni sono dette universali in quanto pure cambiando i moduli elastici del materiale, legati a μ e λ , esse non cambiano.

Capitolo 8

PRINCIPI VARIAZIONALI

Alcune idee primitive delle teorie variazionali erano già presenti negli scritti di Aristotele nel 300 a.c., dove si parlava di "velocità virtuali". Tali idee furono successivamente riprese da Galileo nel sedicesimo secolo, e quindi messe a punto da Jean Bernoulli, che nel 1717 formulò il principio dei lavori virtuali.

Le prime applicazioni del calcolo delle variazioni e delle formulazioni variazionali hanno riguardato il classico problema isoperimetrico: trovare la curva chiusa di assegnata lunghezza che racchiude la massima area. Nel 1696 Jean Bernoulli propose invece il problema della brachistocrona: tra tutte le curve che uniscono due punti, trovare quella che descrive il più rapido moto di una particella soggetta al campo gravitazionale. Soluzioni di questi problemi furono presentate da alcuni tra i più grandi matematici del tempo, tra cui anche Leibniz e Newton.

Nel 1832, Eulero, a soli 25 anni, presentò "la soluzione generale del problema isoperimetrico". Nel suo lavoro si trovano alcuni concetti fondamentali della formulazione variazionale. Un grande impeto allo sviluppo della meccanica variazionale è presente nella corrispondenza scritta da Lagrange, a 19 anni, indirizzata ad Eulero.

Una solida base matematica per la teoria variazionale è stata sviluppata nel diciottesimo e diciannovesimo secolo, in particolare da Legendre, Jacobi e Weierstrass.

I principi variazionali consentono di definire una formulazione equivalente del problema dell'equilibrio elastico. Essi trasformano la formulazione classica del problema differenziale in una formulazione detta integrale o debole. Dato un corpo Ω su cui agiscono forze di volume \mathbf{b} in Ω , forze di superficie \mathbf{p} su $\partial_f\Omega$ e assegnati spostamenti $\hat{\mathbf{u}}$ su $\partial_u\Omega$, il problema dell'equilibrio elastico consiste nel determinare lo stato elastico $s = \{\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}\}$ che soddisfa le equazioni di campo (7.1)-(7.3):

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{\varepsilon} &= \nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T \\ \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} &= \mathbf{0} && \text{in } \Omega \\ \mathcal{C}[\boldsymbol{\varepsilon}] &= \boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \tag{8.1}$$

e di bordo (7.4)-(7.5):

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \hat{\mathbf{u}} && \text{su } \partial_u \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \mathbf{p} && \text{su } \partial_f \Omega \end{aligned} \quad (8.2)$$

8.1 Energia potenziale totale

Si definisce energia potenziale interna del corpo Ω l'integrale su tutto il volume della densità di energia interna φ :

$$\bar{\Phi}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_{\Omega} \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) dV = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (8.3)$$

Nel caso in cui siano implicitamente soddisfatte l'equazione di congruenza (8.1)₁ e l'equazione del legame costitutivo (8.1)₃, l'energia potenziale interna (8.3) assume la forma:

$$\Phi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathcal{C}[\nabla^s \mathbf{u}] \bullet \nabla^s \mathbf{u} dV \quad (8.4)$$

dove $\nabla^s \cdot$ indica l'operatore parte simmetrica del gradiente, i.e.:

$$\nabla^s \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) = \boldsymbol{\varepsilon}$$

Si definisce poi energia potenziale delle forze applicate la quantità:

$$\Lambda(\mathbf{u}) = - \int_{\Omega} \mathbf{b} \bullet \mathbf{u} dV - \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{p} \bullet \mathbf{u} dA \quad (8.5)$$

L'energia potenziale totale del sistema è definita come la somma dell'energia potenziale interna del corpo (8.4) e dell'energia potenziale delle forze (8.5):

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}) &= \Phi(\mathbf{u}) + \Lambda(\mathbf{u}) && (8.6) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathcal{C}[\nabla^s \mathbf{u}] \bullet \nabla^s \mathbf{u} dV - \int_{\Omega} \mathbf{b} \bullet \mathbf{u} dV - \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{p} \bullet \mathbf{u} dA \end{aligned}$$

8.1.1 Stazionarietà dell'energia potenziale totale

Il teorema di stazionarietà dell'energia potenziale totale assicura che: condizione necessaria e sufficiente affinché un campo di spostamenti \mathbf{u} che soddisfi l'equazione di bordo (8.2)₁, sia soluzione del problema dell'equilibrio elastico, è che l'energia potenziale totale attinga un punto di stazionarietà proprio in \mathbf{u} . In formule:

$$\mathbf{u} \text{ soluzione} \quad \iff \quad \delta \Pi(\mathbf{u}) = 0 \quad / \quad (8.2)_1 \quad (8.7)$$

Necessarietà. Se \mathbf{u} è soluzione delle equazioni (8.1) e (8.2), allora l'energia potenziale totale è stazionaria:

$$\mathbf{u} \text{ soluzione} \quad \Longrightarrow \quad \delta\Pi(\mathbf{u}) = 0 \quad / \quad (8.2)_1$$

Per dimostrare tale affermazione si calcola la variazione del funzionale Π definito nella (8.6), facendo uso dei concetti riportati in Appendice A. A tale scopo sia $\delta\mathbf{u}$ un campo variazione degli spostamenti, tale che $\delta\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$ con α parametro reale, con $\delta\mathbf{u} = 0$ su $\delta_u\Omega$. La variazione dell'energia potenziale totale relativa alla configurazione \mathbf{u} si calcola come:

$$\begin{aligned} \delta\Pi(\mathbf{u}) &= \alpha \left\{ \frac{d}{d\alpha} \Pi(\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}) \right\}_{\alpha=0} \\ &= \alpha \left\{ \frac{d}{d\alpha} \Phi(\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}) + \frac{d}{d\alpha} \Lambda(\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}) \right\}_{\alpha=0} \end{aligned} \quad (8.8)$$

Per quanto riguarda la variazione dell'energia potenziale interna, si ha:

$$\begin{aligned} \delta\Phi(\mathbf{u}) &= \alpha \left\{ \frac{d}{d\alpha} \Phi(\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}) \right\}_{\alpha=0} \\ &= \alpha \left\{ \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathcal{C}[\nabla^s(\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v})] \bullet \nabla^s(\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}) \, dV \right] \right\}_{\alpha=0} \\ &= \alpha \frac{d}{d\alpha} \left\{ \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathcal{C}[\nabla^s\mathbf{u}] \bullet \nabla^s\mathbf{u} \, dV + \frac{\alpha^2}{2} \int_{\Omega} \mathcal{C}[\nabla^s\mathbf{v}] \bullet \nabla^s\mathbf{v} \, dV \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha \int_{\Omega} \mathcal{C}[\nabla^s\mathbf{u}] \bullet \nabla^s\mathbf{v} \, dV \right] \right\}_{\alpha=0} \\ &= \alpha \left\{ \alpha \int_{\Omega} \mathcal{C}[\nabla^s\mathbf{v}] \bullet \nabla^s\mathbf{v} \, dV + \int_{\Omega} \mathcal{C}[\nabla^s\mathbf{u}] \bullet \nabla^s\mathbf{v} \, dV \right\}_{\alpha=0} \\ &= \alpha \int_{\Omega} \mathcal{C}[\nabla^s\mathbf{u}] \bullet \nabla^s\mathbf{v} \, dV \\ &= \int_{\Omega} \mathcal{C}[\nabla^s\mathbf{u}] \bullet \nabla^s\delta\mathbf{u} \, dV \end{aligned}$$

mentre la variazione dell'energia potenziale delle forze vale:

$$\begin{aligned}
\delta\Lambda(\mathbf{u}) &= \alpha \left\{ \frac{d}{d\alpha} \Lambda(\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}) \right\}_{\alpha=0} \\
&= \alpha \left\{ \frac{d}{d\alpha} \left[- \int_{\Omega} \mathbf{b} \bullet (\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}) \, dV - \int_{\partial_f\Omega} \mathbf{p} \bullet (\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}) \, dA \right] \right\}_{\alpha=0} \\
&= \alpha \left\{ - \int_{\Omega} \mathbf{b} \bullet \mathbf{v} \, dV - \int_{\partial_f\Omega} \mathbf{p} \bullet \mathbf{v} \, dA \right\} \\
&= - \int_{\Omega} \mathbf{b} \bullet \delta\mathbf{u} \, dV - \int_{\partial_f\Omega} \mathbf{p} \bullet \delta\mathbf{u} \, dA
\end{aligned}$$

In definitiva si ha:

$$\delta\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathcal{C}[\nabla^s \mathbf{u}] \bullet \nabla^s \delta\mathbf{u} \, dV - \int_{\Omega} \mathbf{b} \bullet \delta\mathbf{u} \, dV - \int_{\partial_f\Omega} \mathbf{p} \bullet \delta\mathbf{u} \, dA \quad (8.9)$$

Tenuto conto che tutte le equazioni (8.1) e (8.2) sono soddisfatte, ed applicando il teorema della divergenza, i.e. integrando per parti, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\delta\Pi(\mathbf{u}) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \bullet \nabla^s \delta\mathbf{u} \, dV - \int_{\Omega} \mathbf{b} \bullet \delta\mathbf{u} \, dV - \int_{\partial_f\Omega} \mathbf{p} \bullet \delta\mathbf{u} \, dA \quad (8.10) \\
&= - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \bullet \delta\mathbf{u} \, dV + \int_{\partial_f\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \mathbf{p}) \bullet \delta\mathbf{u} \, dA
\end{aligned}$$

Pertanto, poichè in particolare sono soddisfatte per ipotesi iniziale le equazioni di equilibrio (8.1)₂ e (8.2)₂ la relazione (8.10) fornisce:

$$\delta\Pi(\mathbf{u}) = 0 \quad (8.11)$$

per cui la tesi resta dimostrata.

Sufficienza. Ipotizzando che le equazioni (8.1)₁ e (8.1)₃ siano implicitamente soddisfatte, se il campo di spostamenti \mathbf{u} che verifica la condizione di bordo (8.2)₁ rappresenta una condizione di stazionarietà per l'energia potenziale totale, allora è soluzione del problema dell'equilibrio elastico:

$$\mathbf{u} \text{ soluzione} \quad \Longleftarrow \quad \delta\Pi(\mathbf{u}) = 0 \quad / \quad (8.2)_1$$

La tesi si dimostra agevolmente ripercorrendo al contrario la dimostrazione della necessarietà sopra riportata. Si impone la stazionarietà per l'energia potenziale totale eguagliando a zero la relazione (8.10) per ogni possibile variazione del campo di spostamenti:

$$\delta\Pi(\mathbf{u}) = - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \bullet \delta\mathbf{u} \, dV + \int_{\partial_f\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \mathbf{p}) \bullet \delta\mathbf{u} \, dA = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u} \quad (8.12)$$

Per l'arbitrarietà di $\delta \mathbf{u}$, se ne deduce allora che devono valere le equazioni:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} &= \mathbf{0} && \text{in } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \mathbf{p} &= \mathbf{0} && \text{su } \partial_f \Omega \end{aligned}$$

ovvero sussistono le equazioni di equilibrio (8.1)₂ e (8.2)₂, così che tutte le equazioni che governano il problema dell'equilibrio elastico sono soddisfatte, risultando quindi verificata la tesi.

8.1.2 Minimo dell'energia potenziale totale

Si dimostra inoltre il *teorema di minimo dell'energia potenziale totale* dedotto da Green nel 1839. Quest'ultimo assicura che: condizione necessaria e sufficiente affinché un campo di spostamenti \mathbf{u} che soddisfa le equazioni di congruenza e del legame costitutivo, e cioè che verifica le equazioni (8.1)₁, (8.1)₃ e (8.2)₁, sia soluzione del problema dell'equilibrio elastico, è che l'energia potenziale totale attinga un punto di minimo proprio in \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} \text{ soluzione} \quad \Longleftrightarrow \quad \Pi(\mathbf{u}) \leq \Pi(\bar{\mathbf{u}}) \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \quad / \quad (8.2)_1 \quad (8.13)$$

dove $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \delta \mathbf{u}$ è un generico campo di spostamenti ammissibili.

Necessarietà. Se \mathbf{u} è soluzione delle equazioni (8.1) e (8.2), allora l'energia potenziale totale è minima.

L'energia potenziale interna Φ relativa allo stato $\delta \mathbf{u}$ è:

$$\begin{aligned} \Phi(\delta \mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathcal{C}[\nabla^s \bar{\mathbf{u}} - \nabla^s \mathbf{u}] \bullet (\nabla^s \bar{\mathbf{u}} - \nabla^s \mathbf{u}) \, dV && (8.14) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ \mathcal{C}[\nabla^s \bar{\mathbf{u}}] \bullet \nabla^s \bar{\mathbf{u}} + \mathcal{C}[\nabla^s \mathbf{u}] \bullet \nabla^s \mathbf{u} - 2\mathcal{C}[\nabla^s \mathbf{u}] \bullet \nabla^s \bar{\mathbf{u}} \} \, dV \\ &= \Phi(\bar{\mathbf{u}}) + \Phi(\mathbf{u}) - \int_{\Omega} \mathcal{C}[\nabla^s \mathbf{u}] \bullet \nabla^s \bar{\mathbf{u}} \, dV \\ &= \Phi(\bar{\mathbf{u}}) + \Phi(\mathbf{u}) - \int_{\Omega} \mathcal{C}[\nabla^s \mathbf{u}] \bullet (\nabla^s \mathbf{u} + \nabla^s \delta \mathbf{u}) \, dV \\ &= \Phi(\bar{\mathbf{u}}) - \Phi(\mathbf{u}) - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \bullet \nabla^s \delta \mathbf{u} \, dV \end{aligned}$$

avendo tenuto conto delle (8.1)₁ e (8.1)₃. La differenza di energia potenziale del sistema in $\bar{\mathbf{u}}$ ed \mathbf{u} si calcola come:

$$\begin{aligned} \Pi(\bar{\mathbf{u}}) - \Pi(\mathbf{u}) &= \Phi(\bar{\mathbf{u}}) - \Phi(\mathbf{u}) + \Lambda(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) && (8.15) \\ &= \Phi(\delta \mathbf{u}) + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \bullet \nabla^s \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\Omega} \mathbf{b} \bullet \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{p} \bullet \delta \mathbf{u} \, dA \\ &= \Phi(\delta \mathbf{u}) - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \bullet \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial_f \Omega} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \mathbf{p}) \bullet \delta \mathbf{u} \, dA \end{aligned}$$

Essendo, per ipotesi iniziale, soddisfatte tutte le equazioni (8.1) e (8.2) allora si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\partial_f \Omega} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \mathbf{p}) \bullet \delta \mathbf{u} \, dA &= 0 \\ \int_{\Omega} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \bullet \delta \mathbf{u} \, dV &= 0 \end{aligned} \quad (8.16)$$

per cui

$$\Pi(\bar{\mathbf{u}}) - \Pi(\mathbf{u}) = \Phi(\delta \mathbf{u})$$

Poichè $\Phi(\delta \mathbf{u}) > 0$ per ogni $\delta \mathbf{u}$ tale che $\nabla^s \delta \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ essendo il legame definito positivo, il campo di spostamenti \mathbf{u} soluzione del problema dell'equilibrio elastico rappresenta un punto di minimo per Π .

Sufficienza. Se \mathbf{u} è soluzione delle equazioni (8.1)₁, (8.1)₃ e (8.2)₁ e l'energia potenziale totale è minima, allora \mathbf{u} è soluzione del problema dell'equilibrio elastico.

Sulla base delle ipotesi iniziali, l'equazione (8.15) fornisce:

$$\begin{aligned} \Pi(\bar{\mathbf{u}}) - \Pi(\mathbf{u}) &= \Phi(\delta \mathbf{u}) - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \bullet \delta \mathbf{u} \, dV \\ &\quad + \int_{\partial_f \Omega} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \mathbf{p}) \bullet \delta \mathbf{u} \, dA > 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \neq 0 \end{aligned}$$

Poichè $\delta \mathbf{u} = \alpha \mathbf{v}$, si può scrivere:

$$\begin{aligned} \Pi(\bar{\mathbf{u}}) - \Pi(\mathbf{u}) &= \Phi(\alpha \mathbf{v}) + \\ &\quad \int_{\partial_f \Omega} \alpha (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \mathbf{p}) \bullet \mathbf{v} \, dA - \int_{\Omega} \alpha (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \bullet \mathbf{v} \, dV \\ &= \alpha^2 \Phi(\mathbf{v}) \\ &\quad + \alpha \left[\int_{\partial_f \Omega} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \mathbf{p}) \bullet \mathbf{v} \, dA - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \bullet \mathbf{v} \, dV \right] \\ &> 0 \end{aligned} \quad (8.17)$$

Posto allora

$$\Phi(\mathbf{v}) = c > 0$$

$$q = \left[\int_{\partial_f \Omega} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \mathbf{p}) \bullet \mathbf{v} \, dA - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \bullet \mathbf{v} \, dV \right]$$

l'equazione (8.17) si riscrive nella forma equivalente:

$$\alpha(\alpha c + q) > 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (8.18)$$

Tre sono i possibili casi:

$q < 0$ la (8.18) può essere violata per $0 < \alpha \leq -q/c$;

$q > 0$ la (8.18) può essere violata per $-q/c \leq \alpha < 0$;

$q = 0$ la (8.18) non può essere violata per alcun valore di α .

L'unico caso compatibile con le ipotesi è quindi quello relativo a $q = 0$. Per l'arbitrarietà di \mathbf{v} se ne deduce allora che devono valere le equazioni (8.1)₂ e (8.2)₂, ovvero sussistono le equazioni di equilibrio, risultando così verificata la tesi.

8.2 Energia complementare

Si definisce energia complementare del corpo Ω l'integrale su tutto il corpo della densità di energia complementare ψ diminuita del lavoro compiuto dalle tensioni reattive per gli spostamenti imposti:

$$\begin{aligned} \underline{\Psi}(\boldsymbol{\sigma}) &= \int_{\Omega} \psi(\boldsymbol{\sigma}) dV - \int_{\partial_u \Omega} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \hat{\mathbf{u}} dA \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathcal{S}[\boldsymbol{\sigma}] \bullet \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{\partial_u \Omega} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \hat{\mathbf{u}} dA \end{aligned} \quad (8.19)$$

8.2.1 Stazionarietà dell'energia complementare

Il teorema di stazionarietà dell'energia complementare assicura che: condizione necessaria e sufficiente affinché uno stato tensionale $\boldsymbol{\sigma}$ in equilibrio con i carichi esterni \mathbf{b} e \mathbf{p} , e cioè che verifica le equazioni (8.1)₂ e (8.2)₂, sia soluzione del problema dell'equilibrio elastico, è che l'energia potenziale complementare attinga un punto di stazionarietà proprio in $\boldsymbol{\sigma}$. In formule:

$$\boldsymbol{\sigma} \text{ soluzione} \quad \Longleftrightarrow \quad \delta \Psi(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad / \quad (8.1)_2 \quad (8.2)_2 \quad (8.20)$$

Necessarietà. Se $\boldsymbol{\sigma}$ è soluzione delle equazioni (8.1) e (8.2), allora l'energia complementare è stazionaria:

$$\boldsymbol{\sigma} \text{ soluzione} \quad \Longrightarrow \quad \delta \Psi(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad / \quad (8.1)_2 \quad (8.2)_2$$

Per dimostrare tale affermazione si calcola la variazione del funzionale Ψ definito nella (8.19). A tale scopo sia $\delta \boldsymbol{\sigma}$ un campo variazione delle tensioni autoequilibrato, i.e. in equilibrio con carichi nulli, tale che $\delta \boldsymbol{\sigma} = \alpha \mathbf{S}$ con α parametro

reale. La variazione dell'energia complementare relativa alla configurazione $\boldsymbol{\sigma}$ si calcola come:

$$\begin{aligned}
\delta\Psi(\boldsymbol{\sigma}) &= \alpha \left\{ \frac{d}{d\alpha} \Psi(\boldsymbol{\sigma} + \alpha\mathbf{S}) \right\}_{\alpha=0} & (8.21) \\
&= \alpha \left\{ \frac{d}{d\alpha} \left[\int_{\Omega} \psi(\boldsymbol{\sigma} + \alpha\mathbf{S}) dV - \int_{\partial_u\Omega} (\boldsymbol{\sigma} + \alpha\mathbf{S}) \mathbf{n} \bullet \hat{\mathbf{u}} dA \right] \right\}_{\alpha=0} \\
&= \alpha \left\{ \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathcal{S}[\boldsymbol{\sigma} + \alpha\mathbf{S}] \bullet (\boldsymbol{\sigma} + \alpha\mathbf{S}) dV \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_{\partial_u\Omega} (\boldsymbol{\sigma} + \alpha\mathbf{S}) \mathbf{n} \bullet \hat{\mathbf{u}} dA \right] \right\}_{\alpha=0} \\
&= \alpha \left\{ \alpha \int_{\Omega} \mathcal{S}[\mathbf{S}] \bullet \mathbf{S} dV + \int_{\Omega} \mathcal{S}[\boldsymbol{\sigma}] \bullet \mathbf{S} dV - \int_{\partial_u\Omega} \mathbf{S} \mathbf{n} \bullet \hat{\mathbf{u}} dA \right\}_{\alpha=0} \\
&= \int_{\Omega} \mathcal{S}[\boldsymbol{\sigma}] \bullet \delta\boldsymbol{\sigma} dV - \int_{\partial_u\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \hat{\mathbf{u}} dA
\end{aligned}$$

Tenuto conto che tutte le equazioni (8.1) e (8.2) sono soddisfatte ed applicando il teorema della divergenza, i.e. integrando per parti, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\delta\Psi(\boldsymbol{\sigma}) &= \int_{\Omega} \mathcal{S}[\boldsymbol{\sigma}] \bullet \delta\boldsymbol{\sigma} dV - \int_{\partial_u\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \hat{\mathbf{u}} dA & (8.22) \\
&= \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \delta\boldsymbol{\sigma} dV - \int_{\partial_u\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \hat{\mathbf{u}} dA \\
&= \int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{u} \bullet \delta\boldsymbol{\sigma} dV - \int_{\partial_u\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \hat{\mathbf{u}} dA \\
&= - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \delta\boldsymbol{\sigma}) \bullet \mathbf{u} dV + \int_{\partial\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \mathbf{u} dA - \int_{\partial_u\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \hat{\mathbf{u}} dA \\
&= - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \delta\boldsymbol{\sigma}) \bullet \mathbf{u} dV + \int_{\partial_f\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \mathbf{u} dA
\end{aligned}$$

Pertanto, poichè per ipotesi iniziale il campo $\delta\boldsymbol{\sigma}$ di variazione delle tensioni deve risultare autoequilibrato, i.e. devono valere le equazioni:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \delta\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{0} & \text{in } \Omega & & (8.23) \\
\delta\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \mathbf{0} & \text{su } \partial_f\Omega &
\end{aligned}$$

la relazione (8.22) fornisce

$$\delta\Psi(\boldsymbol{\sigma}) = 0$$

per cui la tesi resta dimostrata.

Sufficienza. Ipotizzando implicitamente soddisfatta l'equazione (8.1)₃, se il campo di tensioni $\boldsymbol{\sigma}$ che verifica le condizioni di equilibrio (8.1)₂ e (8.2)₂ rappresenta una condizione di stazionarietà per l'energia complementare, allora è soluzione del problema dell'equilibrio elastico:

$$\boldsymbol{\sigma} \text{ soluzione} \quad \Longleftrightarrow \quad \delta\Psi(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad / \quad (8.1)_2 \quad (8.2)_2$$

La tesi si dimostra agevolmente imponendo la stazionarietà del funzionale Ψ , i.e. eguagliando a zero la relazione (8.22) per ogni possibile variazione del campo di tensione:

$$\delta\Psi(\boldsymbol{\sigma}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} \bullet \delta\boldsymbol{\sigma} \, dV - \int_{\partial_u\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \, \mathbf{n} \bullet \hat{\mathbf{u}} \, dA = 0 \quad \forall \delta\boldsymbol{\sigma} \quad (8.24)$$

Poichè $\delta\boldsymbol{\sigma}$ rappresenta un generico campo di variazione delle tensioni autoequilibrato devono valere le (8.23); sfruttando il teorema della divergenza e vista la simmetria del tensore $\delta\boldsymbol{\sigma}$ è possibile scrivere:

$$\begin{aligned} \int_{\partial_u\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \, \mathbf{n} \bullet \hat{\mathbf{u}} \, dA &= \int_{\partial_u\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \, \mathbf{n} \bullet \hat{\mathbf{u}} \, dA - \int_{\partial\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \, \mathbf{n} \bullet \mathbf{u} \, dA + \int_{\partial\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \, \mathbf{n} \bullet \mathbf{u} \, dA \\ &= \int_{\partial_u\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \, \mathbf{n} \bullet (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \, dA + \int_{\partial\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \, \mathbf{n} \bullet \mathbf{u} \, dA \\ &= \int_{\partial_u\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \, \mathbf{n} \bullet (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \, dA + \int_{\Omega} (\operatorname{div} \delta\boldsymbol{\sigma}) \bullet \mathbf{u} \, dV \\ &\quad + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \bullet \delta\boldsymbol{\sigma} \, dV \\ &= \int_{\partial_u\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \, \mathbf{n} \bullet (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \, dA + \int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{u} \bullet \delta\boldsymbol{\sigma} \, dV \end{aligned}$$

Pertanto la (8.24) si riscrive come:

$$\delta\Psi(\boldsymbol{\sigma}) = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon} - \nabla^s \mathbf{u}) \bullet \delta\boldsymbol{\sigma} \, dV + \int_{\partial_u\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \, \mathbf{n} \bullet (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \, dA = 0 \quad \forall \delta\boldsymbol{\sigma}$$

Vista l'arbitrarietà di $\delta\boldsymbol{\sigma}$ ne discende la validità della (8.1)₁ e (8.2)₁, i.e. il rispetto delle condizioni di congruenza, risultando così dimostrata la tesi.

8.2.2 Minimo dell'energia complementare

Il *teorema del minimo dell'energia complementare*, dedotto da Colonnetti¹ nel 1912, assicura che: condizione necessaria e sufficiente affinché uno stato tensionale $\boldsymbol{\sigma}$ in

¹**Gustavo Colonnetti** (Torino 1886-1968) ingegnere italiano. Professore di scienza delle costruzioni per lunghi anni al Politecnico di Torino, di cui fu anche rettore, ha lasciato numerosi trattati su diversi aspetti dell'ingegneria civile, tra cui *La statica delle costruzioni* (1928). Fu presidente del Consiglio Nazionale delle Ricerche dal 1945 al 1956.

equilibrio con i carichi esterni \mathbf{b} e \mathbf{p} e che soddisfa l'equazione del legame costitutivo, e cioè che verifica le equazioni (8.1)₂, (8.1)₃ e (8.2)₂, sia soluzione del problema dell'equilibrio elastico, è che l'energia potenziale complementare attinga un punto di minimo proprio in $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\boldsymbol{\sigma} \text{ soluzione} \quad \Longleftrightarrow \quad \Psi(\boldsymbol{\sigma}) \leq \Psi(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) \quad \forall \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad / \quad (8.1)_2 \quad (8.2)_2$$

dove $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} + \delta\boldsymbol{\sigma}$ è un generico campo di tensioni ammissibili ottenuto a partire da $\boldsymbol{\sigma}$ per il tramite di un campo di variazione autoequilibrato $\delta\boldsymbol{\sigma}$.

Necessarietà. Se $\boldsymbol{\sigma}$ è soluzione delle equazioni (8.1) e (8.2), allora l'energia complementare è minima. L'energia complementare Ψ del corpo relativa allo stato tensionale $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ si scrive come:

$$\begin{aligned} \Psi(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) &= \int_{\Omega} \psi(\boldsymbol{\sigma} + \delta\boldsymbol{\sigma}) \, dV - \int_{\partial_u \Omega} (\boldsymbol{\sigma} + \delta\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{n} \bullet \hat{\mathbf{u}} \, dA \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathcal{S}[\boldsymbol{\sigma} + \delta\boldsymbol{\sigma}] \bullet (\boldsymbol{\sigma} + \delta\boldsymbol{\sigma}) \, dV - \int_{\partial_u \Omega} (\boldsymbol{\sigma} + \delta\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{n} \bullet \hat{\mathbf{u}} \, dA \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\mathcal{S}[\boldsymbol{\sigma}] \bullet \boldsymbol{\sigma} + \mathcal{S}[\delta\boldsymbol{\sigma}] \bullet \delta\boldsymbol{\sigma} + 2\mathcal{S}[\boldsymbol{\sigma}] \bullet \delta\boldsymbol{\sigma}] \, dV \\ &\quad - \int_{\partial_u \Omega} (\boldsymbol{\sigma} + \delta\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{n} \bullet \hat{\mathbf{u}} \, dA \\ &= \Psi(\boldsymbol{\sigma}) + \Psi(\delta\boldsymbol{\sigma}) + \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} \, dV \end{aligned}$$

La differenza di energia complementare del sistema calcolata in $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ vale allora:

$$\Psi(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) - \Psi(\boldsymbol{\sigma}) = \Psi(\delta\boldsymbol{\sigma}) + \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} \, dV \quad (8.25)$$

Essendo, per ipotesi iniziale, soddisfatte tutte le equazioni (8.1) e (8.2), sfruttando il teorema della divergenza e ricordando che $\delta\boldsymbol{\sigma}$ rappresenta un campo di variazione delle tensioni autoequilibrato, si ha:

$$\begin{aligned} \Psi(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) - \Psi(\boldsymbol{\sigma}) &= \Psi(\delta\boldsymbol{\sigma}) + \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \bullet \nabla^s \mathbf{u} \, dV \\ &= \int_{\Omega} \psi(\delta\boldsymbol{\sigma}) \, dV - \int_{\Omega} \text{div} \delta\boldsymbol{\sigma} \bullet \mathbf{u} \, dV \\ &\quad + \int_{\partial_f \Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \mathbf{u} \, dA + \int_{\partial_u \Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \, dA \\ &= \int_{\Omega} \psi(\delta\boldsymbol{\sigma}) \, dV \end{aligned}$$

Essendo il legame definito positivo si ha che $\int_{\Omega} \psi(\delta\boldsymbol{\sigma}) dV > 0$ per ogni $\delta\boldsymbol{\sigma} \neq \mathbf{0}$ risultando dimostrata la tesi, i.e. $\boldsymbol{\sigma}$ soluzione del problema dell'equilibrio elastico rappresenta un punto di minimo per Ψ .

Sufficienza. Se $\boldsymbol{\sigma}$ è soluzione delle equazioni (8.1)₂, (8.1)₃ e (8.2)₂ e l'energia complementare è minima, allora $\boldsymbol{\sigma}$ è soluzione del problema dell'equilibrio elastico. Si dimostra a partire dalla relazione (8.25). Infatti, sulla base delle ipotesi iniziali, la (8.25) fornisce:

$$\begin{aligned}
\Psi(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) - \Psi(\boldsymbol{\sigma}) &= \int_{\Omega} \psi(\delta\boldsymbol{\sigma}) dV + \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_{\partial_u \Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \hat{\mathbf{u}} dA \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \mathbf{u} dA - \int_{\partial\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \mathbf{u} dA \\
&= \int_{\Omega} \psi(\delta\boldsymbol{\sigma}) dV + \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_{\partial_u \Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \hat{\mathbf{u}} dA \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \mathbf{u} dA - \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \bullet \nabla \mathbf{u} dV \\
&\quad \quad \quad - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \delta\boldsymbol{\sigma}) \bullet \mathbf{u} dV \\
&= \int_{\Omega} \psi(\delta\boldsymbol{\sigma}) dV + \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \bullet (\boldsymbol{\varepsilon} - \nabla^s \mathbf{u}) dV \\
&\quad - \int_{\partial_u \Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) dA + \int_{\partial_f \Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet \mathbf{u} dA \\
&= \int_{\Omega} \psi(\delta\boldsymbol{\sigma}) dV + \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \bullet (\boldsymbol{\varepsilon} - \nabla^s \mathbf{u}) dV \\
&\quad \quad \quad - \int_{\partial_u \Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \bullet (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) dA
\end{aligned}$$

Scelto $\delta\boldsymbol{\sigma} = \alpha \mathbf{S} \neq \mathbf{0}$ con α parametro reale, deve risultare per ipotesi:

$$\alpha^2 \int_{\Omega} \psi(\mathbf{S}) dV + \alpha \left[\int_{\Omega} \mathbf{S} \bullet (\boldsymbol{\varepsilon} - \nabla^s \mathbf{u}) dV - \int_{\partial_u \Omega} \mathbf{S} \mathbf{n} \bullet (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) dA \right] > 0 \quad (8.26)$$

Posto allora

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \psi(\mathbf{S}) dV = c > 0 \\
q &= \left[\int_{\Omega} \mathbf{S} \bullet (\boldsymbol{\varepsilon} - \nabla^s \mathbf{u}) dV - \int_{\partial_u \Omega} \mathbf{S} \mathbf{n} \bullet (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) dA \right]
\end{aligned}$$

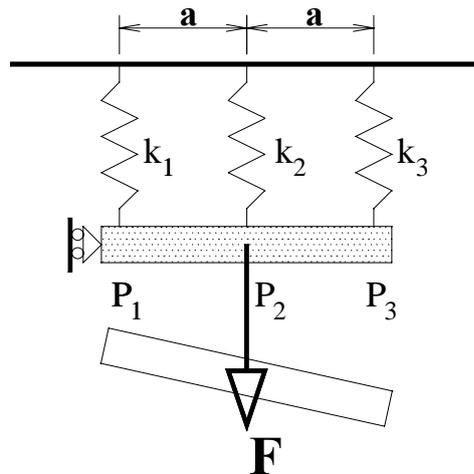


Figura 8.1: Corpo rigido vincolato tramite 3 molle elastiche verticali.

l'equazione (8.26) diviene:

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha c + q) &> 0 \\ c &> 0 \end{aligned} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (8.27)$$

Tre sono i possibili casi:

$q < 0$ la (8.27) può essere violata per $0 < \alpha \leq -q/c$;

$q > 0$ la (8.27) può essere violata per $-q/c \leq \alpha < 0$;

$q = 0$ la (8.27) non può essere violata per alcun valore di α .

L'unico caso compatibile con le ipotesi è quindi quello relativo a $q = 0$. Per l'arbitrarietà di \mathbf{S} , se ne deduce che devono valere le equazioni $(8.1)_1$ e $(8.2)_1$ ovvero sussistono le equazioni di congruenza, risultando così verificata la tesi.

8.3 Esempi esplicativi

8.3.1 Esempio n. 1

Si consideri il corpo rigido mostrato in figura 8.1 soggetto ad una forza verticale F , vincolato tramite 3 molle indefinitamente elastiche parallele e verticali, e da un carrello orizzontale.

Gli spostamenti congruenti del corpo rigido sono quelli di traslazione verticale v e di rotazione ϕ intorno al punto medio del corpo. Gli spostamenti dei punti P_1 , P_2

e P_3 rispettivamente valgono:

$$\begin{aligned}v_1 &= v - a\phi \\v_2 &= v \\v_3 &= v + a\phi\end{aligned}\tag{8.28}$$

essendo a la distanza tra le molle. Si evidenzia che le quantità v_1 , v_2 e v_3 rappresentano gli allungamenti delle molle elastiche, ovvero delle deformazioni.

Le equazioni di equilibrio alla traslazione verticale ed alla rotazione intorno a P_2 in esplicito assumono la forma:

$$\begin{aligned}F &= F_1 + F_2 + F_3 \\0 &= F_1a - F_3a\end{aligned}\tag{8.29}$$

avendo indicato con F_i $i = 1, 2, 3$ la forza esercitata sul punto P_i dalla i -esima molla elastica. Si evidenzia che F_i rappresenta una tensione interna.

Il legame costitutivo definisce la relazione tra la forza F_i e lo spostamento v_i . In conformità con la legge di Hooke si assume una relazione lineare tra la forza reattiva della molla e lo spostamento:

$$\begin{aligned}F_1 &= k_1v_1 \\F_2 &= k_2v_2 \\F_3 &= k_3v_3\end{aligned}\tag{8.30}$$

con k_1 , k_2 e k_3 rigidezza delle molle verticali.

Le relazioni (8.28), (8.29) e (8.30) rappresentano rispettivamente le equazioni di congruenza, di equilibrio e del legame costitutivo relative al problema dell'equilibrio elastico in esame.

Soluzione diretta

La soluzione di tale problema si ottiene risolvendo le 8 equazioni nelle 8 incognite $v_1, v_2, v_3, v, \phi, F_1, F_2, F_3$. In particolare, sostituendo le (8.30) nelle (8.29), e tenendo conto delle (8.28), si ha:

$$\begin{aligned}F &= k_1(v - a\phi) + k_2v + k_3(v + a\phi) \\0 &= k_1(v - a\phi) - k_3(v + a\phi)\end{aligned}\tag{8.31}$$

La soluzione del sistema di equazioni (8.31) è:

$$\begin{aligned}v &= F \frac{k_1 + k_3}{4k_1k_3 + k_2k_1 + k_2k_3} \\ \phi &= F \frac{k_1 - k_3}{a(4k_1k_3 + k_2k_1 + k_2k_3)}\end{aligned}\tag{8.32}$$

per cui, tramite le (8.28) si ha:

$$\begin{aligned} v_1 &= 2k_3 \frac{F}{4k_1k_3 + k_2k_1 + k_2k_3} \\ v_2 &= F \frac{k_1 + k_3}{4k_1k_3 + k_2k_1 + k_2k_3} \\ v_3 &= 2k_1 \frac{F}{4k_1k_3 + k_2k_1 + k_2k_3} \end{aligned} \quad (8.33)$$

che per le (8.30) forniscono:

$$\begin{aligned} F_1 &= 2k_1k_3 \frac{F}{4k_1k_3 + k_2k_1 + k_2k_3} \\ F_2 &= k_2F \frac{k_1 + k_3}{4k_1k_3 + k_2k_1 + k_2k_3} \\ F_3 &= 2k_3k_1 \frac{F}{4k_1k_3 + k_2k_1 + k_2k_3} \end{aligned} \quad (8.34)$$

In questo modo si determina completamente la soluzione del semplice problema dell'equilibrio elastico considerato.

Energia potenziale totale

Il campo di deformazioni v_1 , v_2 e v_3 soddisfa le equazioni di congruenza (8.28), per cui l'energia potenziale totale del sistema vale:

$$\begin{aligned} \Pi(v, \phi) &= \frac{1}{2} (k_1v_1^2 + k_2v_2^2 + k_3v_3^2) - Fv_2 \\ &= \frac{1}{2} [k_1(v - a\phi)^2 + k_2v^2 + k_3(v + a\phi)^2] - Fv \end{aligned} \quad (8.35)$$

Poichè la funzione (8.35) è quadratica, il punto di minimo si determina imponendo la condizione di stazionarietà rispetto ai parametri v, ϕ :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \Pi(v, \phi)}{\partial v} = k_1(v - a\phi) + k_2v + k_3(v + a\phi) - F \\ 0 &= \frac{\partial \Pi(v, \phi)}{\partial \phi} = -ak_1(v - a\phi) + ak_3(v + a\phi) \end{aligned} \quad (8.36)$$

Si nota che il sistema di equazioni (8.36) ottenuto minimizzando l'energia potenziale totale coincide con il sistema (8.31) determinato tramite l'approccio diretto.

Energia complementare

Il campo di tensioni F_1 , F_2 e F_3 soddisfa le equazioni di equilibrio (8.29), che forniscono:

$$\begin{aligned} F_2 &= F - 2F_1 \\ F_3 &= F_1 \end{aligned} \quad (8.37)$$

L'energia complementare del sistema vale allora:

$$\begin{aligned} \Psi(F_1) &= \frac{1}{2} \left(\frac{F_1^2}{k_1} + \frac{F_2^2}{k_2} + \frac{F_3^2}{k_3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{F_1^2}{k_1} + \frac{(F - 2F_1)^2}{k_2} + \frac{F_1^2}{k_3} \right] \end{aligned} \quad (8.38)$$

La stazionarietà della funzione quadratica (8.38) ne fornisce il punto di minimo:

$$0 = \frac{\partial \Psi(F_1)}{\partial F_1} = \frac{F_1}{k_1} - \frac{2(F - 2F_1)}{k_2} + \frac{F_1}{k_3} \quad (8.39)$$

Risolviendo la (8.39) e quindi tenendo conto delle (8.37) si ottengono le (8.34).

8.3.2 Esempio n. 2

Si consideri il sistema di aste connesse riportato in figura 8.2 e caricato con il carico P . Si assume che le aste 1 e 3 siano della stessa lunghezza ma comunque con caratteristiche elastiche differenti. Assumendo inoltre che il materiale delle aste sia elastico lineare, la tensione in ciascuna di esse è in relazione con la deformazione secondo la legge di Hooke scritta in forma monodimensionale:

$$\sigma = \varepsilon E \quad (8.40)$$

Sotto l'azione del carico P il sistema subirà una deformazione schematicamente rappresentata in figura, in cui si nota una componente di spostamento verticale v ed una orizzontale u del punto di applicazione del carico stesso. Le deformazioni delle tre aste valgono allora rispettivamente:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sqrt{(L_2 + v)^2 + (L_2 \tan \theta + u)^2}}{L_1} - 1 \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sqrt{(L_2 + v)^2 + u^2}}{L_2} - 1 \\ \varepsilon_3 &= \frac{\sqrt{(L_2 + v)^2 + (L_2 \tan \theta - u)^2}}{L_1} - 1 \end{aligned} \quad (8.41)$$

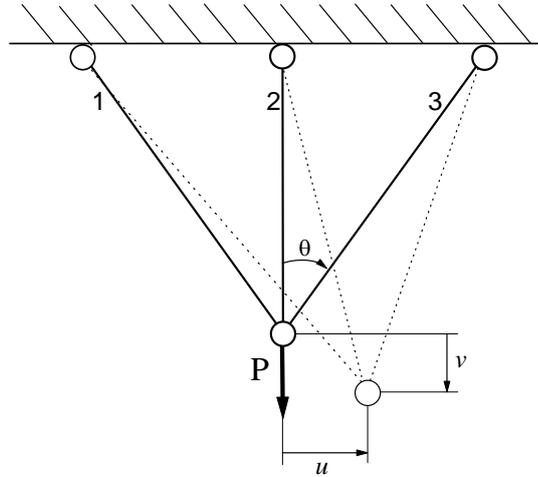


Figura 8.2: Sistema di aste connesse; A_i : area dell'elemento i ; L_i : lunghezza dell'elemento i ; $L_1 = L_3$.

Considerando valida l'ipotesi di piccoli spostamenti, le precedenti possono essere semplificate trascurando i quadrati di u e di v ed approssimando al primo ordine:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &\simeq \sqrt{1 + 2\frac{L_2(v + u \tan \theta)}{L_1^2}} - 1 \approx \frac{L_2(v + u \tan \theta)}{L_1^2} \\ \varepsilon_2 &\simeq \frac{v}{L_2} \\ \varepsilon_3 &\simeq \sqrt{1 + 2\frac{L_2(v - u \tan \theta)}{L_1^2}} - 1 \approx \frac{L_2(v - u \tan \theta)}{L_1^2}\end{aligned}\quad (8.42)$$

D'altra parte le condizioni di equilibrio a traslazione verticale ed orizzontale si scrivono rispettivamente:

$$\begin{aligned}P &= A_1\sigma_1 \cos \theta + A_2\sigma_2 + A_3\sigma_3 \cos \theta \\ 0 &= -A_1\sigma_1 \sin \theta + A_3\sigma_3 \sin \theta\end{aligned}\quad (8.43)$$

essendo $\sigma_i = E_i\varepsilon_i$.

Le relazioni (8.40), (8.42) e (8.43) rappresentano rispettivamente le equazioni del legame costitutivo, di congruenza e di equilibrio relative al problema dell'equilibrio elastico in esame.

Soluzione diretta

La soluzione di tale problema si ottiene risolvendo le 8 equazioni nelle 8 incognite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, u, v, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. In particolare, sostituendo le (8.40) nelle (8.43), e tenendo conto delle (8.42), si ha:

$$\begin{aligned}
 P &= A_1 E_1 \frac{L_2(v + u \tan \theta)}{L_1^2} \cos \theta + A_2 E_2 \frac{v}{L_2} + \\
 &\quad A_3 E_3 \frac{L_2(v - u \tan \theta)}{L_1^2} \cos \theta \\
 0 &= -A_1 E_1 \frac{L_2(v + u \tan \theta)}{L_1^2} \sin \theta + \\
 &\quad A_3 E_3 \frac{L_2(v - u \tan \theta)}{L_1^2} \sin \theta
 \end{aligned} \tag{8.44}$$

Osservando che $L_2 = L_1 \cos \theta$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{PL_2(A_3 E_3 - A_1 E_1)}{[4A_1 E_1 A_3 E_3 \cos^3 \theta + A_2 E_2] \tan \theta} \\
 v &= \frac{PL_2(A_3 E_3 + A_1 E_1)}{[4A_1 E_1 A_3 E_3 \cos^3 \theta + A_2 E_2]}
 \end{aligned} \tag{8.45}$$

per cui tramite le (8.42) è possibile ottenere $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ed ε_3 , che per le (8.40) forniscono σ_1, σ_2 e σ_3 . In questo modo si determina completamente la soluzione del problema dell'equilibrio elastico proposto.

Energia potenziale totale

Il campo di deformazioni $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ed ε_3 soddisfa le equazioni di congruenza (8.42), per cui l'energia potenziale totale del sistema vale:

$$\begin{aligned}
 \Pi(u, v) &= \frac{1}{2}(E_1 A_1 L_1 \varepsilon_1^2 + E_2 A_2 L_2 \varepsilon_2^2 + E_3 A_3 L_3 \varepsilon_3^2) - Pv \\
 &= \frac{1}{2}[E_1 A_1 L_1 \frac{L_2^2}{L_1^4} (v + u \tan \theta)^2 + E_2 A_2 L_2 \frac{v^2}{L_2^2} + \\
 &\quad E_3 A_3 L_1 \frac{L_2^2}{L_1^4} (v - u \tan \theta)^2] - Pv
 \end{aligned} \tag{8.46}$$

Imponendo quindi la condizione di stazionarietà rispetto ai parametri u e v si ottiene:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial \Pi(u, v)}{\partial u} = E_1 A_1 L_2^2 \frac{(v + u \tan \theta)}{L_1^3} \tan \theta - & (8.47) \\
 & \quad E_3 A_3 L_2^2 \frac{(v - u \tan \theta)}{L_1^3} \tan \theta \\
 0 &= \frac{\partial \Pi(u, v)}{\partial v} = E_1 A_1 L_2^2 \frac{(v + u \tan \theta)}{L_1^3} + E_2 A_2 L_2 \frac{v}{L_2^2} + \\
 & \quad E_3 A_3 L_2^2 \frac{(v - u \tan \theta)}{L_1^3} - P
 \end{aligned}$$

Si nota che il sistema di equazioni (8.47) ottenuto imponendo la stazionarietà dell'energia potenziale totale Π , coincide con il sistema (8.44) determinato tramite l'approccio diretto.

Energia complementare

Il campo di tensioni σ_1 , σ_2 e σ_3 soddisfa le equazioni di equilibrio (8.43) che forniscono:

$$\begin{aligned}
 \sigma_3 &= A_1 \sigma_1 / A_3 & (8.48) \\
 \sigma_2 &= \frac{P - 2A_1 \sigma_1 \cos \theta}{A_2}
 \end{aligned}$$

L'energia complementare del sistema vale allora:

$$\begin{aligned}
 \Psi(\sigma_1) &= \frac{1}{2} (A_1 L_1 \frac{\sigma_1^2}{E_1} + A_2 L_2 \frac{\sigma_2^2}{E_2} + A_3 L_3 \frac{\sigma_3^2}{E_3}) & (8.49) \\
 &= \frac{1}{2} \left[A_1 L_1 \frac{\sigma_1^2}{E_1} + L_2 \frac{(P - 2A_1 \sigma_1 \cos \theta)^2}{E_2 A_2} + L_3 \frac{A_1^2 \sigma_1^2}{E_3 A_3} \right]
 \end{aligned}$$

Imponendo la condizione di stazionarietà si ottiene:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial \Psi(\sigma_1)}{\partial \sigma_1} = A_1 L_1 \frac{\sigma_1}{E_1} - 2A_1 L_2 \cos \theta \frac{(P - 2A_1 \sigma_1 \cos \theta)}{E_2 A_2} & (8.50) \\
 & \quad + L_3 \frac{A_1^2 \sigma_1}{E_3 A_3}
 \end{aligned}$$

Risolvendo la (8.50) e quindi tenendo conto delle (8.48), si ottengono le medesime tensioni ricavabili per via diretta.

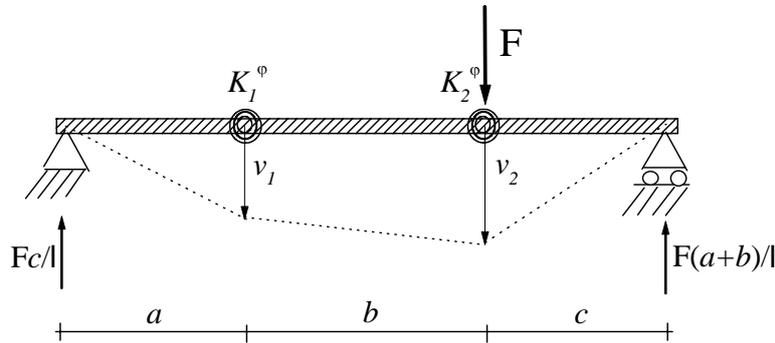


Figura 8.3: Trave rigida appoggiata-appoggiata con elasticità concentrata. $\ell = a + b + c$.

8.3.3 Esempio n. 3

Si consideri la trave appoggiata-appoggiata riportata in figura 8.3 caricata con la forza verticale F . La trave si assume rigida a meno di due zone ad elasticità concentrata in cui la coppia resistente M_i si assume proporzionale alla rotazione relativa $\Delta\varphi_i$ a mezzo della costante elastica K_i^φ secondo lo schema classico di molle indefinitivamente elastiche:

$$M_i = K_i^\varphi \Delta\varphi_i \quad i=1,2 \quad (8.51)$$

Sotto l'azione del carico F il sistema subisce una deformazione schematicamente rappresentata in figura e la cui condizione di congruenza è manifesta ad esempio negli spostamenti verticali v_1 e v_2 . Le deformazioni delle zone ad elasticità concentrata valgono allora:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_1 &= \frac{v_1}{a} - \frac{v_2 - v_1}{b} \\ \Delta\varphi_2 &= \frac{v_2}{c} + \frac{v_2 - v_1}{b} \end{aligned} \quad (8.52)$$

D'altra parte le condizioni di equilibrio nei punti 1 e 2 si scrivono come:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{Fc}{\ell}a \\ M_2 &= \frac{F(a+b)}{\ell}c \end{aligned} \quad (8.53)$$

Le relazioni (8.51), (8.52) e (8.53) rappresentano rispettivamente le equazioni del legame costitutivo, di congruenza e di equilibrio relative al problema dell'equilibrio elastico in esame.

Soluzione diretta

La soluzione di tale problema si ottiene risolvendo le 6 equazioni nelle 6 incognite $v_1, v_2, M_1, M_2, \Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2$. In particolare sostituendo le (8.51) nelle (8.53), e tenendo conto delle (8.52), si ha:

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{a} - \frac{v_2 - v_1}{b} &= \frac{Fc}{\ell K_1^\varphi}a \\ \frac{v_2}{c} + \frac{v_2 - v_1}{b} &= \frac{F(a+b)}{\ell K_2^\varphi}c \end{aligned} \quad (8.54)$$

Risolvendo rispetto a v_1 e v_2 si ottiene:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{Fc^2a}{\ell} \left[\frac{a+b}{\ell K_2^\varphi} + \frac{ca^2 + lab}{K_1^\varphi(a+b)cl} \right] \\ v_2 &= \frac{Fc^2}{\ell^2} \left[\frac{a^2}{K_1^\varphi} + \frac{(a+b)^2}{K_2^\varphi} \right] \end{aligned} \quad (8.55)$$

per cui tramite le (8.52) è possibile ottenere $\Delta\varphi_1$ e $\Delta\varphi_2$, che per le (8.51) forniscono M_1 e M_2 . In questo modo si determina completamente la soluzione del problema dell'equilibrio elastico proposto.

Energia potenziale totale

Il campo di deformazioni $\Delta\varphi_1$ e $\Delta\varphi_2$ soddisfa la congruenza per cui l'energia potenziale totale del sistema vale:

$$\begin{aligned} \Pi(v_1, v_2) &= \frac{1}{2} [M_1\Delta\varphi_1 + M_2\Delta\varphi_2] - Fv_2 \\ &= \frac{1}{2} [K_1^\varphi\Delta\varphi_1^2 + K_2^\varphi\Delta\varphi_2^2] - Fv_2 \\ &= \frac{1}{2} \left[K_1^\varphi \left(\frac{v_1}{a} - \frac{v_2 - v_1}{b} \right)^2 + K_2^\varphi \left(\frac{v_2}{c} + \frac{v_2 - v_1}{b} \right)^2 \right] - Fv_2 \end{aligned} \quad (8.56)$$

Imponendo quindi la condizione di stazionarietà rispetto ai parametri v_1 e v_2 si ottiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \Pi(v_1, v_2)}{\partial v_1} = \frac{K_1^\varphi(a+b)}{ab} \left(\frac{v_1}{a} - \frac{v_2 - v_1}{b} \right) - \frac{K_2^\varphi}{b} \left(\frac{v_2}{c} + \frac{v_2 - v_1}{b} \right) \\ 0 &= \frac{\partial \Pi(v_1, v_2)}{\partial v_2} = -\frac{K_1^\varphi}{b} \left(\frac{v_1}{a} - \frac{v_2 - v_1}{b} \right) + \frac{K_2^\varphi(c+b)}{bc} \left(\frac{v_2}{c} + \frac{v_2 - v_1}{b} \right) - F \end{aligned} \quad (8.57)$$

Si nota che le (8.57) ottenute imponendo la stazionarietà dell'energia potenziale totale Π , sono equivalenti alle (8.54) determinate tramite l'approccio diretto.

Energia complementare

Il campo di tensioni M_1, M_2 soddisfa le condizioni di equilibrio (8.53) che forniscono:

$$M_2 = M_1 + \frac{Fbc}{\ell} \quad (8.58)$$

L'energia complementare del sistema vale allora:

$$\begin{aligned} \Psi(M_1) &= \frac{1}{2} \left[\frac{M_1^2}{K_1^\varphi} + \frac{M_2^2}{K_2^\varphi} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{M_1^2}{K_1^\varphi} + \frac{\left(M_1 + \frac{Fbc}{\ell} \right)^2}{K_2^\varphi} \right] \end{aligned} \quad (8.59)$$

Imponendo la condizione di stazionarietà si ottiene:

$$0 = \frac{\partial \Psi(M_1)}{\partial M_1} = \frac{M_1}{K_1^\varphi} + \frac{M_1 + \frac{Fbc}{\ell}}{K_2^\varphi} \quad (8.60)$$

Risolvendo la (8.60) e quindi tenendo conto della (8.58) si ottengono le medesime tensioni ricavabili per via diretta.

Capitolo 9

GEOMETRIA DELLE SUPERFICI PIANE

9.1 Definizioni

Sia \mathcal{A} una regione chiusa e limitata dello spazio bidimensionale R^2 e sia $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2$ una base ortonormale che definisce un sistema di riferimento con origine O . Il generico punto $P \in \mathcal{A}$, individuato dal vettore posizione ad esso associato $\mathbf{x}(P)$, nel sistema di riferimento scelto ha coordinate (x_1, x_2) tali che:

$$\mathbf{x}(P) = x_1\mathbf{e}^1 + x_2\mathbf{e}^2$$

Si definiscono per la superficie piana \mathcal{A} , le seguenti caratteristiche geometriche: **Area** e si indica con A la misura della regione \mathcal{A} ($A = \text{mis}[\mathcal{A}]$)

$$A = \int_{\mathcal{A}} dA \quad (9.1)$$

Vettore Momento Statico e si indica con \mathbf{S}

$$\mathbf{S} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{x} dA \quad (9.2a)$$

Tensore di Inerzia e si indica con \mathbf{J}

$$\mathbf{J} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} dA \quad (9.3)$$

Baricentro G il cui vettore posizione si indica con \mathbf{x}_g

$$\mathbf{x}_g = \frac{1}{A} \mathbf{S} \quad (9.4)$$

E' chiaro che per quanto concerne l'area della superficie piana c'è un abuso di notazione, in quanto è indicato con A sia la superficie piana che la sua misura, ovvero l'area.

Le componenti del vettore \mathbf{S} rappresentano i valori del momento statico lungo la direzione rispettivamente \mathbf{e}^1 ed \mathbf{e}^2 , e si ottengono dalle relazioni $S_1 = \mathbf{S} \bullet \mathbf{e}^1$ ed $S_2 = \mathbf{S} \bullet \mathbf{e}^2$. Il momento statico in direzione \mathbf{n} si ricava come:

$$S_n = \int_A \mathbf{x} \bullet \mathbf{n} \, dA = \mathbf{S} \bullet \mathbf{n} \quad (9.5)$$

Le componenti del tensore di inerzia rappresentano:

- $J_{11} = \mathbf{J} \bullet (\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^1)$ momento di inerzia in direzione \mathbf{e}^1
- $J_{22} = \mathbf{J} \bullet (\mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^2)$ momento di inerzia in direzione \mathbf{e}^2
- $J_{12} = \mathbf{J} \bullet (\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^2)$ prodotto o momento centrifugo di inerzia in direzione $\mathbf{e}^1 \mathbf{e}^2$
- $J_{21} = \mathbf{J} \bullet (\mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^1)$ prodotto o momento centrifugo di inerzia in direzione $\mathbf{e}^2 \mathbf{e}^1$

E' immediato verificare che $J_{12} = J_{21}$ e quindi il tensore \mathbf{J} è simmetrico ($\mathbf{J} = \mathbf{J}^T$). Il momento di inerzia lungo la generica direzione \mathbf{n} vale:

$$J_{nn} = \int_A (\mathbf{x} \bullet \mathbf{n}) (\mathbf{x} \bullet \mathbf{n}) \, dA = \int_A (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) \bullet (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \, dA = \mathbf{J} \bullet (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \quad (9.6)$$

così analogamente il prodotto di inerzia lungo le direzioni $\mathbf{n} \mathbf{m}$ si ottiene come:

$$J_{nm} = \int_A (\mathbf{x} \bullet \mathbf{n}) (\mathbf{x} \bullet \mathbf{m}) \, dA = \int_A (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) \bullet (\mathbf{n} \otimes \mathbf{m}) \, dA = \mathbf{J} \bullet (\mathbf{n} \otimes \mathbf{m}) \quad (9.7)$$

La simmetria del tensore d'inerzia \mathbf{J} assicura che $J_{nm} = J_{mn}$.

9.2 Determinazione delle caratteristiche geometriche

Il calcolo delle caratteristiche geometriche, a partire dalle definizioni (9.1), (9.2a), (9.3) e (9.4), spesso anche per figure semplici non è agevole. Si propone allora un metodo basato sull'idea che una figura geometrica è completamente ed univocamente definita una volta nota la sua frontiera. Si intende quindi trasformare gli integrali di campo in integrali sulla frontiera, che spesso sono di più semplice determinazione. A tale scopo si nota che:

$$\int_{\partial A} (\mathbf{x} \bullet \mathbf{n}) \, ds = \int_A \operatorname{div} \mathbf{x} \, dA = 2A \quad (9.8)$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\mathcal{A}} (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) \bullet \mathbf{n} \, ds &= \int_{\mathcal{A}} \operatorname{div} (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) \, dA & (9.9) \\
 &= \int_{\mathcal{A}} [(\nabla \mathbf{x}) \mathbf{x} + \mathbf{x} (\operatorname{div} \mathbf{x})] \, dA \\
 &= \int_{\mathcal{A}} (\mathbf{x} + 2\mathbf{x}) \, dA = 3 \mathbf{S}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\mathcal{A}} (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) \bullet \mathbf{n} \, ds &= \int_{\mathcal{A}} \operatorname{div} (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) \, dA & (9.10) \\
 &= \int_{\mathcal{A}} [(\nabla \mathbf{x}) \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} (\nabla \mathbf{x})^T + \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} (\operatorname{div} \mathbf{x})] \, dA \\
 &= \int_{\mathcal{A}} [\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} + 2\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}] \, dA = 4 \mathbf{J}
 \end{aligned}$$

essendo \mathbf{n} la normale uscente ad \mathcal{A} e

$$\begin{aligned}
 (\nabla \mathbf{x})_{ij} &= x_{i,j} = \delta_{ij} \\
 \operatorname{div} \mathbf{x} &= x_{i,i} = 2
 \end{aligned}$$

ove gli indici ripetuti si intendono sommati.

Dalle equazioni (9.8), (9.9) e (9.10) si ricava allora:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\partial\mathcal{A}} (\mathbf{x} \bullet \mathbf{n}) \, ds \quad (9.11)$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{3} \int_{\partial\mathcal{A}} (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) \bullet \mathbf{n} \, ds \quad (9.12)$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{4} \int_{\partial\mathcal{A}} (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) \bullet \mathbf{n} \, ds \quad (9.13)$$

Le (9.11), (9.12) e (9.13) risultano particolarmente utili per il calcolo delle caratteristiche geometriche nel caso di una figura poligonale definita dai suoi n vertici \mathbf{x}^i ($i = 1, \dots, n$), con numerazione consecuzionale in senso antiorario (vedi figura 9.1). In questo caso gli integrali circuitali si determinano come somma degli integrali di linea per ogni tratto di frontiera che collega due vertici. Allora le (9.11), (9.12) e (9.13) si scrivono nella forma:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\mathbf{x}^i}^{\mathbf{x}^{i+1}} (\mathbf{x} \bullet \mathbf{n}) \, ds \quad (9.14)$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \int_{\mathbf{x}^i}^{\mathbf{x}^{i+1}} (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) \bullet \mathbf{n} \, ds \quad (9.15)$$

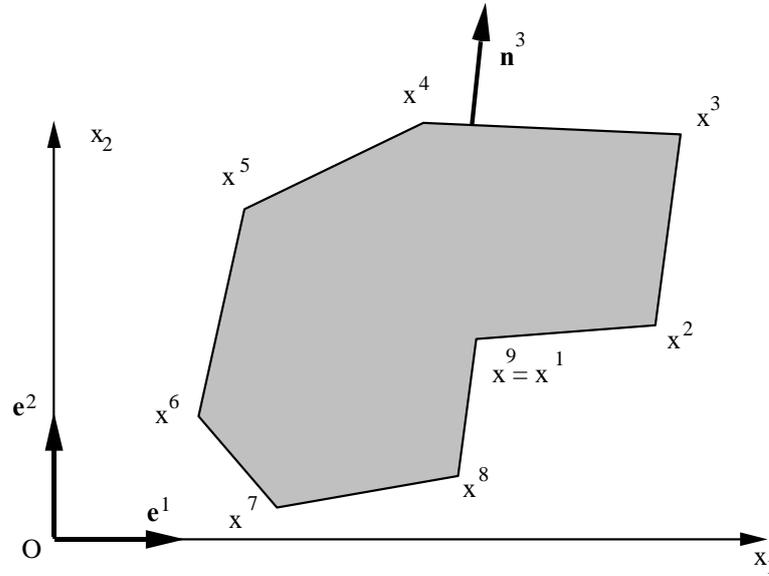


Figura 9.1: Figura piana poligonale.

$$\mathbf{J} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \int_{\mathbf{x}^i}^{\mathbf{x}^{i+1}} (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) \bullet \mathbf{n} \, ds \quad (9.16)$$

dove $\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^1$. Il termine $\mathbf{x} \bullet \mathbf{n}$ per ogni lato del poligono è un valore costante e rappresenta la distanza tra la retta congiungente i vertici associati al lato dal punto origine del riferimento. L' i -esimo lato della poligonale, individuato dai vertici \mathbf{x}^i e \mathbf{x}^{i+1} , ha lunghezza λ^i , definita come:

$$\lambda^i = \|\mathbf{x}^{i+1} - \mathbf{x}^i\| = \sqrt{(x_1^{i+1} - x_1^i)^2 + (x_2^{i+1} - x_2^i)^2} \quad (9.17)$$

con $\|\bullet\|$ norma in \mathcal{R}^2 , ed \mathbf{n}^i normale uscente alla figura. Essendo il generico punto dell' i -esimo lato individuato dal vettore:

$$\mathbf{x} = \nu \mathbf{x}^i + (1 - \nu) \mathbf{x}^{i+1} \quad 0 \leq \nu \leq 1$$

le (9.14), (9.15) e (9.16) possono essere scritte nella forma:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}^i \bullet \mathbf{n}^i) \lambda^i \quad (9.18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}^i \bullet \mathbf{n}^i) \int_0^1 [\nu \mathbf{x}^i + (1 - \nu) \mathbf{x}^{i+1}] \lambda^i \, d\nu \\ &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}^i \bullet \mathbf{n}^i) (\mathbf{x}^i + \mathbf{x}^{i+1}) \lambda^i \end{aligned} \quad (9.19)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}^i \bullet \mathbf{n}^i) \int_0^1 [\nu^2 \mathbf{x}^i \otimes \mathbf{x}^i + \nu(1-\nu) (\mathbf{x}^i \otimes \mathbf{x}^{i+1} + \mathbf{x}^{i+1} \otimes \mathbf{x}^i) \\
&\quad + (1-\nu)^2 \mathbf{x}^{i+1} \otimes \mathbf{x}^{i+1}] \lambda^i d\nu \quad (9.20) \\
&= \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}^i \bullet \mathbf{n}^i) \left[\mathbf{x}^i \otimes \mathbf{x}^i + \frac{1}{2} (\mathbf{x}^i \otimes \mathbf{x}^{i+1} + \mathbf{x}^{i+1} \otimes \mathbf{x}^i) + \mathbf{x}^{i+1} \otimes \mathbf{x}^{i+1} \right] \lambda^i
\end{aligned}$$

Posto allora

$$\alpha^i = \lambda^i (\mathbf{x}^i \bullet \mathbf{n}^i) = \lambda^i (x_1^i n_1^i + x_2^i n_2^i)$$

con

$$n_1^i = \frac{x_2^{i+1} - x_2^i}{\lambda^i}, \quad n_2^i = -\frac{x_1^{i+1} - x_1^i}{\lambda^i}$$

le caratteristiche geometriche, espresse in componenti, valgono:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha^i \quad (9.21)$$

$$S_1 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \alpha^i (x_1^i + x_1^{i+1}) \quad (9.22)$$

$$S_2 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \alpha^i (x_2^i + x_2^{i+1})$$

$$J_{11} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n \alpha^i (x_1^i x_1^i + x_1^i x_1^{i+1} + x_1^{i+1} x_1^{i+1}) \quad (9.23)$$

$$J_{22} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n \alpha^i (x_2^i x_2^i + x_2^i x_2^{i+1} + x_2^{i+1} x_2^{i+1})$$

$$J_{12} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n \alpha^i \left[x_1^i x_2^i + \frac{1}{2} (x_1^i x_2^{i+1} + x_2^i x_1^{i+1}) + x_1^{i+1} x_2^{i+1} \right]$$

9.3 Teoremi di trasporto di Huygens

Huygens¹ affrontò il problema della valutazione delle caratteristiche inerziali di un corpo al variare del sistema di riferimento. Il cambio del sistema di riferimento

¹**Christiaan Huygens** (L'Aia 1629-1695), fisico, matematico e astronomo olandese. Figlio del poeta Constantijn, fu chiamato a far parte nel 1666 dell'Académie des Sciences. Trasferitosi a Parigi, vi rimase fino al 1681 con una pensione concessagli da Luigi XIV. Subì l'influenza del pensiero di Cartesio anche se su singole questioni ebbe modo di esprimere alcune decise critiche alle

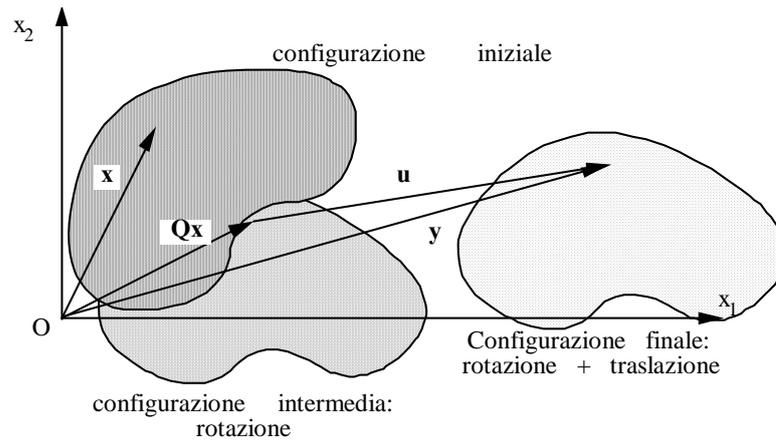


Figura 9.2: Teoremi di trasporto.

consiste nel considerare un moto rigido relativo tra il sistema e la figura \mathcal{A} . Tale moto rigido in generale è caratterizzato da una rotazione intorno all'origine del sistema di riferimento e da una traslazione. Così il generico punto $P \in \mathcal{A}$, individuato dal vettore di posizione $\mathbf{x}(P)$, per effetto del moto suddetto occupa la nuova posizione $\mathbf{y}(P)$:

$$\mathbf{y}(P) = \mathbf{Q} \mathbf{x}(P) + \mathbf{u} \quad (9.24)$$

con \mathbf{Q} ed \mathbf{u} rispettivamente tensore di rotazione e vettore di traslazione del moto, come schematicamente riportato in figura 9.2. Il tensore \mathbf{Q} , denominato tensore ortogonale, gode delle classiche proprietà:

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I} \quad \det\mathbf{Q} = 1$$

Il tensore \mathbf{Q} si può ottenere come la restrizione ad \mathcal{R}^2 di un tensore ortogonale \mathbf{R} di \mathcal{R}^3 che ha la seguente forma di rappresentazione:

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin \phi \mathbf{W} + (1 - \cos \phi) \mathbf{W}^2 \quad (9.25)$$

dove ϕ è l'angolo di rotazione e \mathbf{W} è il tensore emisimmetrico associato al vettore

teorie del filosofo francese. Diede i suoi più significativi contributi nel campo della meccanica (leggi dell'urto e dei centri d'oscillazione) e in quello dell'ottica. I suoi studi sui centri di oscillazione, svolti in stretto collegamento con la sua attività di costruttore di orologi, sono esposti nell'opera *Horologium oscillatorium* (1673) e rappresentano il suo più valido contributo allo sviluppo della meccanica.

assiale $\mathbf{e}^3 = \mathbf{e}^1 \times \mathbf{e}^2$. In esplicito la matrice di rotazione in \mathcal{R}^3 si scrive come:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin \phi \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (1 - \cos \phi) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.26)$$

Nel seguito allora si indica con \mathbf{Q} la sottomatrice definita dalle prime due righe e due colonne della matrice \mathbf{R} ottenuta nella (9.26):

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (9.27)$$

Per effetto del moto rigido le quantità geometriche definite al paragrafo precedente variano. In particolare per il vettore momento statico si ha:

$$\mathbf{S}' = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{y} \, dA = \int_{\mathcal{A}} (\mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}) \, dA = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{Q} \mathbf{x} \, dA + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{u} \, dA = \mathbf{Q} \mathbf{S} + A \mathbf{u} \quad (9.28)$$

Svolgendo lo stesso calcolo per la determinazione del tensore di inerzia si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}' &= \int_{\mathcal{A}} \mathbf{y} \otimes \mathbf{y} \, dA = \int_{\mathcal{A}} (\mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}) \otimes (\mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}) \, dA \\ &= \int_{\mathcal{A}} (\mathbf{Q} \mathbf{x}) \otimes (\mathbf{Q} \mathbf{x}) \, dA + \int_{\mathcal{A}} (\mathbf{Q} \mathbf{x}) \otimes \mathbf{u} \, dA + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{u} \otimes (\mathbf{Q} \mathbf{x}) \, dA + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \, dA \\ &= \mathbf{Q} \mathbf{J} \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} (\mathbf{S} \otimes \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \otimes \mathbf{S}) \mathbf{Q}^T + A \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \end{aligned} \quad (9.29)$$

Le formule (9.28) e (9.29) sono state ottenute considerando il caso in cui la figura subisce una rotazione e quindi una traslazione rispetto al sistema di riferimento. Evidentemente non si perviene allo stesso risultato quando al contrario agisce prima la traslazione e poi la rotazione. Infatti in questo caso il moto rigido del generico punto $P \in \mathcal{A}$ è espresso dalla equazione:

$$\mathbf{y}(P) = \mathbf{Q} [\mathbf{x}(P) + \mathbf{v}] \quad (9.30)$$

e le formule che forniscono il vettore momento statico ed il tensore di inerzia sono:

$$\mathbf{S}' = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{y} \, dA = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{Q} (\mathbf{x} + \mathbf{v}) \, dA = \mathbf{Q} (\mathbf{S} + A \mathbf{v}) \quad (9.31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}' &= \int_{\mathcal{A}} \mathbf{y} \otimes \mathbf{y} \, dA = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{Q} (\mathbf{x} + \mathbf{v}) \otimes \mathbf{Q} (\mathbf{x} + \mathbf{v}) \, dA \\ &= \mathbf{Q} (\mathbf{J} + \mathbf{S} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{S} + A \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \mathbf{Q}^T \end{aligned} \quad (9.32)$$

Si nota che la (9.24) equivale alla (9.30), e quindi le (9.28) e (9.29) coincidono rispettivamente con le (9.31) e (9.32), quando $\mathbf{u} = \mathbf{Q} \mathbf{v}$.

In particolare, per $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ovvero quando il moto rigido è esclusivamente rotazionale, le (9.28) e (9.31) e le (9.29) e (9.32) si specializzano in:

$$\mathbf{S}' = \mathbf{Q} \mathbf{S} \quad (9.33)$$

$$\mathbf{J}' = \mathbf{Q} \mathbf{J} \mathbf{Q}^T \quad (9.34)$$

Nel caso di moto rigido puramente di traslazione, ovvero quando $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, le (9.28) e (9.31) e le (9.29) e (9.32), con $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, forniscono:

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S} + A \mathbf{v} \quad (9.35)$$

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J} + \mathbf{S} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{S} + A \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \quad (9.36)$$

ed in particolare per $\mathbf{u} = -\mathbf{x}_g$, ovvero quando si intende spostare la figura piana in modo tale che il baricentro coincida con l'origine del sistema di riferimento, le (9.35) e (9.36) diventano:

$$\mathbf{S}' = \mathbf{0} \quad (9.37)$$

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J} - A \mathbf{x}_g \otimes \mathbf{x}_g \quad (9.38)$$

Le (9.37) e (9.38) forniscono in definitiva il vettore momento statico ed il tensore di inerzia riferiti ad un sistema baricentrico, una volta che siano note tali quantità per un sistema di riferimento che differisce rispetto a quello baricentrico di una pura traslazione.

9.4 Direzioni coniugate e direzioni principali

Sia \mathbf{J} il tensore di inerzia relativo ad un sistema di riferimento baricentrico ($O=G$). Assegnata una direzione individuata dal suo versore \mathbf{n} si definisce coniugata rispetto a \mathbf{J} la direzione con versore \mathbf{m} per la quale accade:

$$\mathbf{J} \mathbf{n} \bullet \mathbf{m} = 0 \quad (9.39)$$

Si definiscono poi direzioni principali d'inerzia tutte e sole le coppie di rette ortogonali fra loro che rispettano la relazione di coniugio (9.39). Ovvero:

$$\text{direzioni principali} \quad \iff \quad \begin{aligned} \mathbf{J} \mathbf{n} \bullet \mathbf{m} &= 0 \\ \mathbf{n} \bullet \mathbf{m} &= 0 \end{aligned}$$

Tali condizioni, dal punto di vista geometrico, equivalgono a quella di allineamento tra il vettore $\mathbf{J} \mathbf{n}$ ed il versore \mathbf{n} :

$$\mathbf{J} \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n} \quad (9.40)$$

Il problema della determinazione delle direzioni principali si riduce cioè al calcolo degli autovettori ed autovalori del tensore \mathbf{J} :

$$(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad / \quad \|\mathbf{n}\| = 1 \quad (9.41)$$

La (9.41) rappresenta un sistema di equazioni lineari omogeneo, nelle due incognite n_1 ed n_2 componenti del vettore \mathbf{n} , soggetto alla condizione aggiuntiva che \mathbf{n} abbia norma unitaria. Esso ammette soluzione diversa dalla banale, inaccettabile poichè non rispetta la condizione che \mathbf{n} abbia norma unitaria, se e solo se:

$$\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (9.42)$$

Esplicitando la (9.42) si ottiene l'equazione caratteristica associata al tensore \mathbf{J} :

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{J}) + \det(\mathbf{J}) = 0 \quad (9.43)$$

dove $\operatorname{tr}(\mathbf{J}) = J_{11} + J_{22}$ è la traccia di \mathbf{J} e $\det(\mathbf{J}) = J_{11}J_{22} - J_{12}^2$ è il determinante di \mathbf{J} . Si ricorda che $\operatorname{tr}(\mathbf{J})$ e $\det(\mathbf{J})$ sono invarianti, ovvero non cambiano valore al variare del sistema di riferimento, fissata che sia l'origine. Le soluzioni della (9.43) valgono:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\operatorname{tr}(\mathbf{J}) + \sqrt{[\operatorname{tr}(\mathbf{J})]^2 - 4 \det(\mathbf{J})}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{\operatorname{tr}(\mathbf{J}) - \sqrt{[\operatorname{tr}(\mathbf{J})]^2 - 4 \det(\mathbf{J})}}{2} \end{aligned} \quad (9.44)$$

e sono reali essendo $\Delta = [\operatorname{tr}(\mathbf{J})]^2 - 4 \det(\mathbf{J}) > 0$, risultato evidente vista la simmetria di \mathbf{J} . Inoltre, tenendo conto della (9.6), il tensore di inerzia risulta definito positivo, ovvero:

$$\mathbf{J} \mathbf{m} \bullet \mathbf{m} > 0 \quad \forall \mathbf{m} \neq \mathbf{0} \quad (9.45)$$

e quindi λ_1 e λ_2 sono maggiori di zero.

Una volta determinati i momenti principali di inerzia λ_1 e λ_2 , si sostituiscono uno alla volta in una delle due equazioni del sistema omogeneo (9.41). Si ottengono così, normalizzando, i versori delle direzioni principali. Infatti la prima delle (9.41) si scrive in esplicito come:

$$(J_{11} - \lambda_1) N_1 + J_{12} N_2 = 0 \quad (9.46)$$

per cui si ottiene:

$$N_1 = -\frac{J_{12}}{J_{11} - \lambda_1} \quad N_2 = 1 \quad (9.47)$$

indicando con N la norma del vettore calcolato:

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \sqrt{\frac{(J_{11} - \lambda_1)^2 + J_{12}^2}{(J_{11} - \lambda_1)^2}} \quad (9.48)$$

normalizzando la soluzione (9.47), si ottiene:

$$n_1 = \frac{N_1}{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{J_{11} - \lambda_1}{J_{12}}\right)^2}} \quad (9.49)$$

$$n_2 = \frac{N_2}{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{J_{12}}{J_{11} - \lambda_1}\right)^2}} \quad (9.50)$$

Si pone ora il problema della determinazione dei valori massimi e minimi dei momenti di inerzia al variare del versore \mathbf{m} . Si tratta cioè di risolvere il problema di estremo vincolato:

$$\text{ext} \{ \mathbf{J} \mathbf{m} \bullet \mathbf{m} > 0 \quad / \quad \|\mathbf{m}\|^2 = 1 \} \quad (9.51)$$

A tale scopo si procede con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto:

$$\varphi(\mathbf{m}, \rho) = \mathbf{J} \mathbf{m} \bullet \mathbf{m} - \rho (\|\mathbf{m}\|^2 - 1) \quad (9.52)$$

il problema (9.51) equivale a:

$$\varphi(\mathbf{n}, \lambda) = \text{ext} \{ \varphi(\mathbf{m}, \rho) \quad / \quad \mathbf{m} \in \mathcal{R}^2, \rho \in \mathcal{R} \} \quad (9.53)$$

I punti di stazionarietà del funzionale (9.52), definiti dalle coppie (\mathbf{n}, λ) , si trovano annullando la sua variazione nella generica direzione definita dalla coppia (\mathbf{t}, τ) :

$$\delta_{(\mathbf{t}, \tau)} \varphi(\mathbf{n}, \lambda) = 2\mathbf{J} \mathbf{n} \bullet \mathbf{t} - 2\lambda \mathbf{n} \bullet \mathbf{t} + \tau (\mathbf{n} \bullet \mathbf{n} - 1) = 0 \quad \forall (\mathbf{t}, \tau) \quad (9.54)$$

che equivale alla (9.41). Se ne conclude che i momenti principali di inerzia sono i massimi e minimi possibili per \mathcal{A} .

E' semplice mostrare a questo punto che se gli autovalori sono fra loro diversi $\lambda_1 \neq \lambda_2$ le direzioni principali ad essi associati $\mathbf{n}^{(1)}$ e $\mathbf{n}^{(2)}$ sono fra loro ortogonali ($\mathbf{n}^{(1)} \bullet \mathbf{n}^{(2)} = 0$). Infatti, per la (9.40) deve accadere:

$$\mathbf{J} \mathbf{n}^{(1)} = \lambda_1 \mathbf{n}^{(1)} \quad (9.55)$$

$$\mathbf{J} \mathbf{n}^{(2)} = \lambda_2 \mathbf{n}^{(2)} \quad (9.56)$$

moltiplicando scalarmente la (9.55) per $\mathbf{n}^{(2)}$ e la (9.56) per $\mathbf{n}^{(1)}$, e quindi sottraendo le due equazioni membro a membro si ottiene:

$$\mathbf{J} \mathbf{n}^{(1)} \bullet \mathbf{n}^{(2)} - \mathbf{J} \mathbf{n}^{(2)} \bullet \mathbf{n}^{(1)} = (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{n}^{(1)} \bullet \mathbf{n}^{(2)} = 0$$

e poichè $(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$, si conclude che le direzioni principali sono fra loro ortogonali.

9.5 Centro relativo e nocciolo di inerzia

Si consideri il caso di riferimento baricentrico ($O=G$). Si definisce centro relativo rispetto ad una retta a , di equazione:

$$\mathbf{a} = \mathbf{r} + \tau \mathbf{t} \quad (9.57)$$

con normale $\mathbf{n} = \mathbf{t}^\perp$, il punto C individuato dal vettore:

$$\mathbf{c} = -\frac{1}{A(\mathbf{r} \bullet \mathbf{n})} \mathbf{J} \mathbf{n} \quad (9.58)$$

Il centro relativo gode della proprietà di essere il baricentro della distribuzione dei momenti statici rispetto ad a . Infatti il baricentro della distribuzione dei momenti statici ($\mathbf{x}' \bullet \mathbf{n}$) rispetto all'asse a è individuato dal vettore posizione \mathbf{c}' , applicato nel punto origine O' degli assi $x'_1 x'_2$ (vedi figura 9.3), le cui componenti sono fornite dalle relazioni:

$$\mathbf{c}' = \frac{\int_A \mathbf{x}' (\mathbf{x}' \bullet \mathbf{n}) dA}{\int_A (\mathbf{x}' \bullet \mathbf{n}) dA} = \frac{\mathbf{J}' \mathbf{n}}{\mathbf{S}' \bullet \mathbf{n}} \quad (9.59)$$

ove \mathbf{J}' e \mathbf{S}' sono rispettivamente il tensore di inerzia ed il vettore momento statico della figura piana, calcolati rispetto al sistema $x'_1 x'_2$ di origine O' . Utilizzando le formule di trasporto per il tensore di inerzia e per il vettore momento statico, si ha:

$$\mathbf{c}' = \frac{\mathbf{J}' \mathbf{n}}{\mathbf{S}' \bullet \mathbf{n}} = \frac{[\mathbf{J} + A(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})] \mathbf{n}}{-A(\mathbf{r} \bullet \mathbf{n})} = \frac{\mathbf{J} \mathbf{n}}{-A(\mathbf{r} \bullet \mathbf{n})} - \mathbf{r} \quad (9.60)$$

essendo \mathbf{J} il tensore d'inerzia calcolato nel sistema baricentrico. Il baricentro della distribuzione dei momenti statici, in definitiva, è individuato nel riferimento baricentrico dal vettore:

$$\mathbf{c}' + \mathbf{r} = \frac{\mathbf{J} \mathbf{n}}{-A(\mathbf{r} \bullet \mathbf{n})} = \mathbf{c} \quad (9.61)$$

Si rileva immediatamente che se \mathbf{m} è coniugata ad \mathbf{n} rispetto a \mathbf{J} per la (9.58) \mathbf{m} è ortogonale a \mathbf{c} . Da un punto di vista geometrico la corrispondenza tra rette e punti in \mathcal{R}^2 indotta dalla (9.58) è detta "antipolarità". Così C è l'antipolo di a ed a è l'antipolare di C .

Fissato \mathbf{n} nella (9.58) al variare di \mathbf{r} si osserva che il centro relativo si muove sulla retta contenente il vettore \mathbf{c} . Per $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}$ si ha che $\|\mathbf{c}\| \rightarrow \infty$. Al contrario quando $\|\mathbf{r}\| \rightarrow \infty$ accade che $\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{0}$.

Fissato \mathbf{r} nella (9.58) al variare di \mathbf{n} il centro relativo descrive una retta. Infatti ponendo $\mathbf{A} = A(\mathbf{c} \otimes \mathbf{r})$ la (9.58) si può riscrivere nella forma equivalente:

$$[(\mathbf{A} \mathbf{J}^{-1} + \mathbf{I})\mathbf{J}]\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (9.62)$$

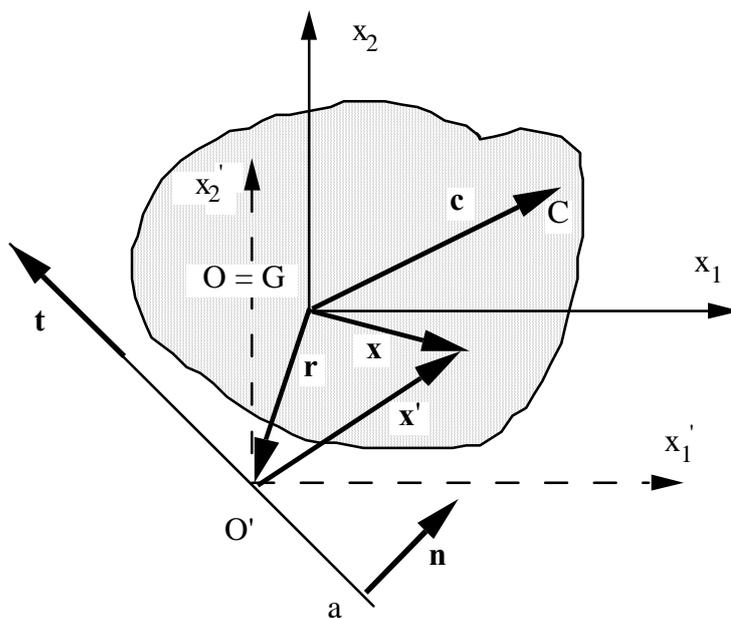


Figura 9.3: Centro relativo.

che può essere visto come un sistema omogeneo di due equazioni nelle incognite n_1 ed n_2 , componenti del versore \mathbf{n} . Questo ammette soluzione diversa dalla banale, ovvero l'equazione (9.58) è ben posta, se e solo se accade che:

$$\det[(\mathbf{A} \mathbf{J}^{-1} + \mathbf{I})\mathbf{J}] = \det(\mathbf{A} \mathbf{J}^{-1} + \mathbf{I}) \det \mathbf{J} = 0 \quad (9.63)$$

in definitiva deve allora essere:

$$\det(\mathbf{A} \mathbf{J}^{-1} + \mathbf{I}) = 0 \quad (9.64)$$

essendo sempre, come visto in precedenza, $\det \mathbf{J} > 0$. Essendo l'equazione caratteristica associata al tensore $\mathbf{A} \mathbf{J}^{-1}$ del tipo:

$$\det(\mathbf{A} \mathbf{J}^{-1} - \omega \mathbf{I}) = \omega^2 - \omega \operatorname{tr}(\mathbf{A} \mathbf{J}^{-1}) + \det(\mathbf{A} \mathbf{J}^{-1}) = 0 \quad (9.65)$$

e ponendo $\omega = -1$, per la (9.64) si ha:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} \mathbf{J}^{-1} + \mathbf{I}) &= 1 + \operatorname{tr}(\mathbf{A} \mathbf{J}^{-1}) + \det(\mathbf{A} \mathbf{J}^{-1}) \\ &= 1 + \operatorname{tr}(\mathbf{A} \mathbf{J}^{-1}) + \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{J}^{-1}) \\ &= 1 + \operatorname{tr}(\mathbf{A} \mathbf{J}^{-1}) = 0 \end{aligned} \quad (9.66)$$

essendo $\det(\mathbf{A}) = 0$, poichè \mathbf{A} è una diade. Allora la (9.66) può essere riscritta nella forma:

$$0 = 1 + \mathbf{A} \bullet \mathbf{J}^{-1} = 1 + A (\mathbf{c} \otimes \mathbf{r}) \bullet \mathbf{J}^{-1} = 1 + A \mathbf{J}^{-1} \mathbf{r} \bullet \mathbf{c} \quad (9.67)$$

La (9.67) è l'equazione della retta d di tutti i possibili antipoli del fascio di rette passante per il punto individuato dal vettore posizione \mathbf{r} , ovvero è la retta antipolare di tale punto. E' semplice mostrare ora, che \mathbf{r} definisce il centro relativo, ovvero l'antipolo, della retta d . Infatti, la normale \mathbf{m} a d è individuata da:

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{J}^{-1}\mathbf{r}}{\|\mathbf{J}^{-1}\mathbf{r}\|} \quad (9.68)$$

ed un punto, individuato dal vettore \mathbf{d} , della retta è:

$$\mathbf{d} = -\frac{\mathbf{J}^{-1}\mathbf{r}}{A \|\mathbf{J}^{-1}\mathbf{r}\|^2}$$

Il centro relativo della retta d , individuato dal vettore posizione \mathbf{e} , si ottiene allora utilizzando la formula definitoria (9.58):

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= -\frac{1}{A (\mathbf{d} \bullet \mathbf{m})} \mathbf{J} \mathbf{m} \\ &= -\frac{\mathbf{J} \frac{\mathbf{J}^{-1}\mathbf{r}}{\|\mathbf{J}^{-1}\mathbf{r}\|}}{A \left(\frac{\mathbf{J}^{-1}\mathbf{r}}{A \|\mathbf{J}^{-1}\mathbf{r}\|^2} \bullet \frac{\mathbf{J}^{-1}\mathbf{r}}{\|\mathbf{J}^{-1}\mathbf{r}\|} \right)} \\ &= \mathbf{r} \end{aligned} \quad (9.69)$$

Si definisce nocciolo centrale d'inerzia l'insieme dei punti la cui frontiera è il luogo dei centri relativi delle rette tangenti e mai secanti la figura piana.

Per quanto riguarda la costruzione del nocciolo d'inerzia, in particolare per le figure poligonali, si sfrutta la proprietà che i centri relativi delle rette passanti per un vertice descrivono un segmento i cui estremi sono i centri relativi delle rette tangenti a destra ed a sinistra del vertice.

9.6 Ellisse d'inerzia

Nei paragrafi precedenti si è visto che il tensore d'inerzia è simmetrico e definito positivo. Se ne deduce che la conica ad esso associato è un'ellisse, detta d'inerzia, di equazione:

$$A \mathbf{J} \bullet \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} = \det(\mathbf{J}) \quad (9.70)$$

Nel riferimento principale d'inerzia la (9.70) può scriversi in forma esplicita come:

$$A (\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2) = \lambda_1 \lambda_2 \quad (9.71)$$

ed introducendo il raggio di inerzia ρ_n di una figura piana \mathcal{A} in direzione \mathbf{n} come:

$$\rho_n = \sqrt{\frac{\mathbf{J} \bullet \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}}{A}} \quad (9.72)$$

la (9.71) fornisce la forma canonica dell'ellisse:

$$\frac{x_1^2}{\rho_2^2} + \frac{x_2^2}{\rho_1^2} = 1 \quad (9.73)$$

dove

$$\rho_1^2 = \frac{\lambda_1}{A} \quad \rho_2^2 = \frac{\lambda_2}{A}$$

L'ellisse d'inerzia contiene tutte le proprietà del tensore d'inerzia. Infatti tramite esso è possibile determinare graficamente i valori dei raggi di inerzia rispetto a qualsiasi direzione, ovvero individuare la coniugata di una assegnata retta.

Nella letteratura classica è di più frequente uso l'ellisse di Culmann che differisce da quello d'inerzia per una rotazione rigida di $\pi/2$. Allo scopo di definire l'equazione di Culmann si consideri il tensore d'inerzia \mathbf{J}^* per il quale:

$$\mathbf{J}^* \bullet \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} = \mathbf{J} \bullet \mathbf{t} \otimes \mathbf{l} \quad (9.74)$$

con $\mathbf{n} \bullet \mathbf{t} = 0$, $\mathbf{m} \bullet \mathbf{l} = 0$.

La (9.74) equivale a:

$$\mathbf{J}^* \mathbf{m} \bullet \mathbf{n} = \mathbf{J} \mathbf{R} \mathbf{m} \bullet \mathbf{R} \mathbf{n} \quad (9.75)$$

con \mathbf{R} rotazione di $\pi/2$, e quindi:

$$\mathbf{J}^* = \mathbf{R}^T \mathbf{J} \mathbf{R} \quad (9.76)$$

In esplicito, la matrice associata al tensore ortogonale \mathbf{R} è individuata dalle componenti:

$$\left[\mathbf{R} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.77)$$

e quindi \mathbf{J}^* :

$$[\mathbf{J}^*] = \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{12} & J_{11} \end{bmatrix} \quad (9.78)$$

ovvero, in forma implicita:

$$\mathbf{J}^* = \text{cof}(\mathbf{J}) = \det(\mathbf{J}) \mathbf{J}^{-T} \quad (9.79)$$

avendo indicato con $\text{cof}(\mathbf{J})$ la matrice dei cofattori di \mathbf{J} . E' semplice verificare che le direzioni principali di \mathbf{J}^* coincidono con quelle di \mathbf{J} . Detti $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$ e λ_1 , λ_2 le direzioni ed i valori principali di \mathbf{J} , rispettivamente, si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \lambda_1 \mathbf{n}^{(1)} \otimes \mathbf{n}^{(1)} + \lambda_2 \mathbf{n}^{(2)} \otimes \mathbf{n}^{(2)} \\ \mathbf{J}^* &= \lambda_2 \mathbf{n}^{(1)} \otimes \mathbf{n}^{(1)} + \lambda_1 \mathbf{n}^{(2)} \otimes \mathbf{n}^{(2)} \end{aligned}$$

La conica associata al tensore \mathbf{J}^* è definita dall'equazione:

$$A \mathbf{J}^* \bullet \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} = \det(\mathbf{J}^*) \quad (9.80)$$

che in forma canonica, ovvero riferita al sistema principale di inerzia di \mathbf{J} , diviene:

$$\frac{x_1^2}{\rho_1^2} + \frac{x_2^2}{\rho_2^2} = 1 \quad (9.81)$$

9.7 Esempi

Si intende determinare le grandezze geometriche (area, vettore momento statico, matrice d'inerzia, nocciolo d'inerzia, ecc.) per alcune semplici figure piane. Si utilizza il metodo della frontiera per il calcolo delle grandezze geometriche.

9.7.1 Rettangolo

Si considera il rettangolo riporato in figura 9.4.

Coordinate dei nodi

Nodo	1	2	3	4	5
x_1	0	b	b	0	0
x_2	0	0	h	h	0

Componenti dei versori normali ai lati

Lato	1	2	3	4
n_1	0	1	0	1
n_2	1	0	1	0

Valori degli α_i

α_1	α_2	α_3	α_4
0	$b h$	$b h$	0

Grandezze geometriche

$$A = (b h + b h)/2 = b h$$

$$S_1 = [b h (b + b) + b h b]/6 = b^2 h/2$$

$$S_2 = [b h h + b h (2 h)]/6 = b h^2/2$$

$$x_{g1} = S_1/A = b/2$$

$$x_{g2} = S_2/A = h/2$$

$$J_{11} = [b h (b^2 + b^2 + b^2) + b h (b^2)]/12 = b^3 h/3$$

$$J_{22} = [b h (h^2 + h^2 + h^2) + b h (h^2)]/12 = b h^3/3$$

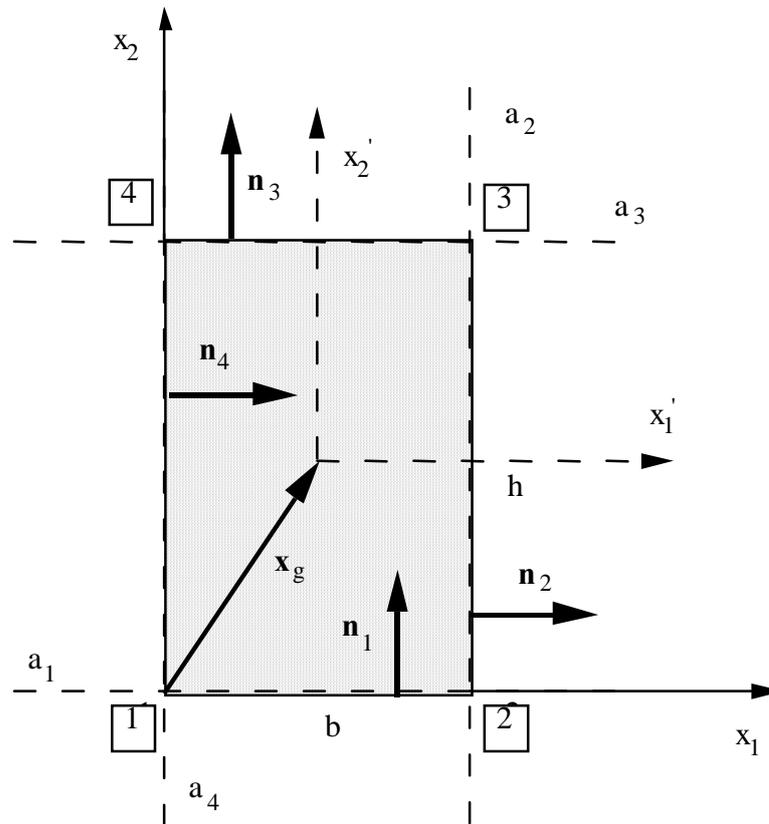


Figura 9.4: Rettangolo.

$$J_{12} = [b h (b h/2 + b h) + b h (b h + b h/2)]/12 = b^2 h^2/4$$

Matrice d'inerzia calcolata nel riferimento baricentrico

$$[\mathbf{J}] = \frac{b h}{12} \begin{bmatrix} 4 b^2 & 3 b h \\ 3 b h & 4 h^2 \end{bmatrix} - \frac{b h}{12} \begin{bmatrix} 3 b^2 & 3 b h \\ 3 b h & 3 h^2 \end{bmatrix} = \frac{b h}{12} \begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & h^2 \end{bmatrix}$$

Nocciolo d'inerzia

Centro relativo di	a_1	a_2	a_3	a_4
c_1	0	$-b/6$	0	$b/6$
c_2	$h/6$	0	$-h/6$	0

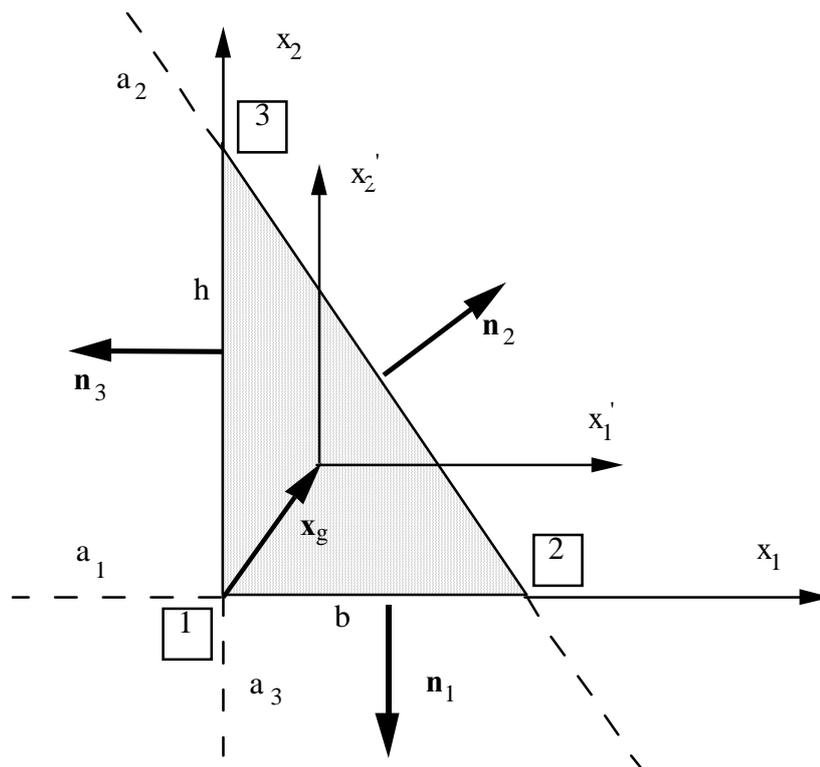


Figura 9.5: Triangolo.

9.7.2 Triangolo

Si considera il triangolo riportato in figura 9.5

Coordinate dei nodi

Nodo	1	2	3	4
x_1	0	b	0	0
x_2	0	0	h	0

Componenti dei versori normali ai lati

Lato	1	2	3
n_1	0	$h/\sqrt{b^2 + h^2}$	-1
n_2	-1	$b/\sqrt{b^2 + h^2}$	0

Valori degli α_i

α_1	α_2	α_3
0	$b h$	0

Grandezze geometriche

$$A = b h/2$$

$$S_1 = b^2 h/6$$

$$S_2 = b h^2/6$$

$$x_{g1} = S_1/A = b/3$$

$$x_{g2} = S_2/A = h/3$$

$$J_{11} = b^3 h/12$$

$$J_{22} = b h^3/12$$

$$J_{12} = b^2 h^2/24$$

Matrice d'inerzia calcolata nel riferimento baricentrico

$$[\mathbf{J}] = \frac{b h}{12} \begin{bmatrix} b^2 & b h/2 \\ b h/2 & h^2 \end{bmatrix} - \frac{b h}{18} \begin{bmatrix} b^2 & b h \\ b h & h^2 \end{bmatrix} = \frac{b h}{36} \begin{bmatrix} b^2 & -b h/2 \\ -b h/2 & h^2 \end{bmatrix}$$

Momenti e direzioni principali

$$tr(\mathbf{J}) = b h (b^2 + h^2) / 36$$

$$\det(\mathbf{J}) = 3 b^4 h^4 / (3 * 36^2)$$

$$\lambda_1 = b h [b^2 + h^2 + \sqrt{b^4 + h^4 - b^2 h^2}] / 72$$

$$\lambda_2 = b h [b^2 + h^2 - \sqrt{b^4 + h^4 - b^2 h^2}] / 72$$

Nocciolo d'inerzia

Centro relativo di	a_1	a_2	a_3
c_1	$-b/12$	$-b^2 (b - h/2) / (6 h \sqrt{b^2 + h^2})$	$b/6$
c_2	0	$-h^2 (b - h/2) / (6 h \sqrt{b^2 + h^2})$	$-h/12$

9.7.3 Programma di calcolo

Nel seguito è riportato un programma di calcolo delle caratteristiche geometriche scritto in linguaggio fortran.

```
*23456789012345678901234567890123456789012345678901234567890123456789012
*
  Program masse

  implicit none
  real*8 xx(2,31), an(2,30), stat(2),xin(2,2),xg(2),xing(2,2)
  real*8 aut(2), aun(2,2), c(2,30), t(2), ti(2)
  real*8 xc(2,30), anc(2,30)
  real*8 area, all, al2, xl, d, ar, trj, detj, anor
  real*8 x11, x12, x21, x22, x111, x112, x121, x122
  real*8 tit, titi, tt, tau1
  integer i, j, nv, nlc, l, k
  open(5, file='masse.dat')
  open(6, file='masse.ris')

*
*   ingresso dati
*
  read(5,*) nv
  read(5,*) ((xx(i,j),i=1,2),j=1,nv)
  xx(1,nv+1)=xx(1,1)
  xx(2,nv+1)=xx(2,1)

*
*   stampa dati
*
  write(6,1000)
  write(6,1010)nv
  write(6,1020)
  write(6,1030) (i,xx(1,i),xx(2,i), i=1,nv)

*
*   inizializzazione
*
  write(6,1035)
  area=0.0d0

  do i=1,2
    stat(i)=0.0d0
    do j=1,2
      xin(i,j)=0.0d0
    end do
  end do

  do i=1,nv
    all=xx(1,i+1)-xx(1,i)
    al2=xx(2,i+1)-xx(2,i)
    xl=sqrt(all**2+al2**2)
    an(1,i)= al2/xl
    an(2,i)=-all/xl
    d=xx(1,i)*an(1,i)+xx(2,i)*an(2,i)
    ar=xl*d
    area=area+ar/2.0d0
    stat(1) = stat(1)+ar*(xx(1,i)+xx(1,i+1))/6.0d0
    stat(2) = stat(2)+ar*(xx(2,i)+xx(2,i+1))/6.0d0
    xin(1,1) = ar*(xx(1,i)*xx(1,i)+xx(1,i)*xx(1,i+1)+
*      xx(1,i+1)*xx(1,i+1))/12.0d0 + xin(1,1)
    xin(2,2) = ar*(xx(2,i)*xx(2,i)+xx(2,i)*xx(2,i+1)+
```

```

*          xx(2,i+1)*xx(2,i+1))/12.0d0+xin(2,2)
  xin(1,2) = ar*(xx(1,i)*xx(2,i)+(xx(1,i)*xx(2,i+1)+
*          xx(2,i)*xx(1,i+1))/2.+xx(1,i+1)*xx(2,i+1))/12.0d0+
*          xin(1,2)
  write(6,1037)i,xl,an(1,i),an(2,i)
end do
xin(2,1) = xin(1,2)
*
*   baricentro
*
xg(1)=stat(1)/area
xg(2)=stat(2)/area
*
*   trasporto al baricentro
*
do i=1,2
  do j=1,2
    xing(i,j)=xin(i,j)-area*xg(i)*xg(j)
  end do
end do
*
*   direzioni e momenti principali
*
if (abs(xing(1,2)).gt.1d-5) then
  trj=xing(1,1)+xing(2,2)
  detj=xing(1,1)*xing(2,2)-xing(1,2)**2
  aut(1)=(trj+sqrt(trj**2-4*detj))/2.
  aut(2)=(trj-sqrt(trj**2-4*detj))/2.
  do i=1,2
    aun(i,1)=xing(1,2)/(aut(i)-xing(1,1))
    aun(i,2)=1.
    anor=sqrt(aun(i,1)**2+aun(i,2)**2)
    aun(i,1)=aun(i,1)/anor
    aun(i,2)=aun(i,2)/anor
  end do
else
  aut(1)=xing(1,1)
  aut(2)=xing(2,2)
  aun(1,1)=1.
  aun(1,2)=0.
  aun(2,1)=0.
  aun(2,2)=1.
endif
*
*   nocciolo di inerzia
*
nlc=0
j=1
320  l=0
  x1l=xx(1,j)
  x2l=xx(2,j)
330  l=l+1
  k=j+1
  x1k=xx(1,k)
  x2k=xx(2,k)

```



```

*
1000 format(10x,'*** sezione poligonale ***',///)
1010 format(10x,'numero di vertici della poligonale   nv = ',i4,/)
1020 format('vertice n.',15x,'x1',20x,'x2')
1030 format(i5,2e23.4)
1035 format('/',/,',lato n.',12x,'lunghezza',20x,'nl',21x,'n2')
1037 format(i5,3(10x,e13.4))
1040 format('/',/,10x,'area                               = ',
*e15.5,/)
1050 format(10x,'momento statico lungo x1               = ',e15.5,
*      /,10x,'momento statico lungo x2                 = ',e15.5,/)
1060 format(10x,'momento di inerzia lungo x1-x1         = ',e15.5,
*      /,10x,'momento di inerzia lungo x1-x2           = ',e15.5,
*      /,10x,'momento di inerzia lungo x2-x2           = ',e15.5,/)
1070 format(10x,'coordinata del baricentro x1           = ',e15.5,
*      /,10x,'coordinata del baricentro x2            = ',e15.5,/)
1080 format(10x,'momento di inerzia baricentrale (x1-x1) = ',e15.5,
*      /,10x,'momento di inerzia baricentrale (x1-x2) = ',e15.5,
*      /,10x,'momento di inerzia baricentrale (x2-x2) = ',e15.5,/)
1090 format(10x,'momenti e direzioni principali di inerzia',/,
*      10x,'autovalore 1 ',e15.5,/,10x,'autovettore ',2e15.5,/,
*      10x,'autovalore 2 ',e15.5,/,10x,'autovettore ',2e15.5,/)
1110 format(10x,'coordinate del centro relativo',/,
*      '      lato      x01      x02',
*      '      '      norm1     norm2',
*      '      '      c1       c2')
1120 format(i5,6e12.4)
close(5)
close(6)
end

```

9.7.4 Risultati numerici

Si riportano quindi i files dati e risultati relativi ad alcune semplici applicazioni numeriche.

Sezione rettangolare

file dati

4
0. 0.
1. 0.
1. 2.
0. 2.

file risultati

```

*** SEZIONE POLIGONALE ***
NUMERO DI VERTICI DELLA POLIGONALE NV = 4
  VERTICE N.      X1      X2
      1  0.0000E+00  0.0000E+00
      2  0.1000E+01  0.0000E+00
      3  0.1000E+01  0.2000E+01
      4  0.0000E+00  0.2000E+01

  LATO N.  LUNGHEZZA      N1      N2
      1  0.1000E+01  0.0000E+00 -0.1000E+01
      2  0.2000E+01  0.1000E+01  0.0000E+00
      3  0.1000E+01  0.0000E+00  0.1000E+01
      4  0.2000E+01 -0.1000E+01  0.0000E+00

AREA = 0.20000E+01
MOMENTO STATICO LUNGO X1 = 0.10000E+01
MOMENTO STATICO LUNGO X2 = 0.20000E+01
MOMENTO DI INERZIA LUNGO X1-X1 = 0.66667E+00
MOMENTO DI INERZIA LUNGO X1-X2 = 0.10000E+01
MOMENTO DI INERZIA LUNGO X2-X2 = 0.26667E+01
COORDINATA DEL BARICENTRO X1 = 0.50000E+00
COORDINATA DEL BARICENTRO X2 = 0.10000E+01
MOMENTO DI INERZIA BARICENTRALE (X1-X1) = 0.16667E+00
MOMENTO DI INERZIA BARICENTRALE (X1-X2) = 0.00000E+00
MOMENTO DI INERZIA BARICENTRALE (X2-X2) = 0.66667E+00
MOMENTI E DIREZIONI PRINCIPALI DI INERZIA
AUTOVALORE 1 0.16667E+00
AUTOVETTORE 0.10000E+01 0.00000E+00
AUTOVALORE 2 0.66667E+00

```

AUTOVETTORE 0.00000E+00 0.10000E+01

COORDINATE DEL CENTRO RELATIVO

LATO	X01	X02	NORM1	NORM2	C1	C2
1	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	-0.1000E+01	0.0000E+00	0.3333E+00
2	0.1000E+01	0.0000E+00	0.1000E+01	0.0000E+00	-0.1667E+00	0.0000E+00
3	0.1000E+01	0.2000E+01	0.0000E+00	0.1000E+01	0.0000E+00	-0.3333E+00
4	0.0000E+00	0.2000E+01	-0.1000E+01	0.0000E+00	0.1667E+00	0.0000E+00

Sezione rettangolare ruotata di 30 gradi

file dati

4
0. 0.
0.866 0.5
-0.134 2.232
-1. 1.732

file risultati

*** SEZIONE POLIGONALE ***

NUMERO DI VERTICI DELLA POLIGONALE NV = 4

VERTICE N.	X1	X2
1	0.0000E+00	0.0000E+00
2	0.8660E+00	0.5000E+00
3	-0.1340E+00	0.2232E+01
4	-0.1000E+01	0.1732E+01

LATO N.	LUNGHEZZA	N1	N2
1	0.1000E+01	0.5000E+00	-0.8660E+00
2	0.2000E+01	0.8660E+00	0.5000E+00
3	0.1000E+01	-0.5000E+00	0.8660E+00
4	0.2000E+01	-0.8660E+00	-0.5000E+00

AREA = 0.19999E+01

MOMENTO STATICO LUNGO X1 = -0.13399E+00

MOMENTO STATICO LUNGO X2 = 0.22319E+01

MOMENTO DI INERZIA LUNGO X1-X1 = 0.30062E+00

MOMENTO DI INERZIA LUNGO X1-X2 = -0.36603E+00

MOMENTO DI INERZIA LUNGO X2-X2 = 0.30324E+01

COORDINATA DEL BARICENTRO X1 = -0.67000E-01

COORDINATA DEL BARICENTRO X2 = 0.11160E+01

MOMENTO DI INERZIA BARICENTRALE (X1-X1) = 0.29165E+00

MOMENTO DI INERZIA BARICENTRALE (X1-X2) = -0.21649E+00

MOMENTO DI INERZIA BARICENTRALE (X2-X2) = 0.54161E+00

MOMENTI E DIREZIONI PRINCIPALI DI INERZIA

AUTOVALORE 1 0.66661E+00

AUTOVETTORE -0.50001E+00 0.86602E+00

AUTOVALORE 2 0.16665E+00

AUTOVETTORE 0.86602E+00 0.50001E+00

COORDINATE DEL CENTRO RELATIVO

LATO	X01	X02	NORM1	NORM2	C1	C2
1	0.0000E+00	0.0000E+00	0.5000E+00	-0.8660E+00	-0.1667E+00	0.2887E+00
2	0.8660E+00	0.5000E+00	0.8660E+00	0.5000E+00	-0.1443E+00	-0.8333E-01
3	-0.1340E+00	0.2232E+01	-0.5000E+00	0.8660E+00	0.1667E+00	-0.2887E+00
4	-0.1000E+01	0.1732E+01	-0.8660E+00	-0.5000E+00	0.1443E+00	0.8333E-01

Sezione triangolare

file dati

3

0. 0.

1. 0.

0. 2.

file risultati

*** SEZIONE POLIGONALE ***

NUMERO DI VERTICI DELLA POLIGONALE NV = 3

VERTICE N.	X1	X2
1	0.0000E+00	0.0000E+00
2	0.1000E+01	0.0000E+00
3	0.0000E+00	0.2000E+01

LATO N.	LUNGHEZZA	N1	N2
1	0.1000E+01	0.0000E+00	-0.1000E+01
2	0.2236E+01	0.8944E+00	0.4472E+00
3	0.2000E+01	-0.1000E+01	0.0000E+00

AREA = 0.10000E+01

MOMENTO STATICO LUNGO X1 = 0.33333E+00

MOMENTO STATICO LUNGO X2 = 0.66667E+00

MOMENTO DI INERZIA LUNGO X1-X1 = 0.16667E+00

MOMENTO DI INERZIA LUNGO X1-X2 = 0.16667E+00

MOMENTO DI INERZIA LUNGO X2-X2 = 0.66667E+00

COORDINATA DEL BARICENTRO X1 = 0.33333E+00

COORDINATA DEL BARICENTRO X2 = 0.66667E+00

MOMENTO DI INERZIA BARICENTRALE (X1-X1) = 0.55556E-01

MOMENTO DI INERZIA BARICENTRALE (X1-X2) = -0.55556E-01

MOMENTO DI INERZIA BARICENTRALE (X2-X2) = 0.22222E+00

MOMENTI E DIREZIONI PRINCIPALI DI INERZIA

AUTOVALORE 1 0.23904E+00

AUTOVETTORE -0.28978E+00 0.95709E+00

AUTOVALORE 2 0.38735E-01

AUTOVETTORE 0.95709E+00 0.28978E+00

COORDINATE DEL CENTRO RELATIVO

LATO	X01	X02	NORM1	NORM2	C1	C2
1	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	-0.1000E+01	-0.8333E-01	0.3333E+00
2	0.1000E+01	0.0000E+00	0.8944E+00	0.4472E+00	-0.8333E-01	-0.1667E+00
3	0.0000E+00	0.2000E+01	-0.1000E+01	0.0000E+00	0.1667E+00	-0.1667E+00

Sezione a L

file dati

6

0. 0.

10. 0.

10. 2.

3. 2.

3. 15.

0. 15.

file risultati

*** SEZIONE POLIGONALE ***

NUMERO DI VERTICI DELLA POLIGONALE NV = 6

VERTICE N.	X1	X2
1	0.0000E+00	0.0000E+00
2	0.1000E+02	0.0000E+00
3	0.1000E+02	0.2000E+01
4	0.3000E+01	0.2000E+01
5	0.3000E+01	0.1500E+02
6	0.0000E+00	0.1500E+02

LATO N.	LUNGHEZZA	N1	N2
1	0.1000E+02	0.0000E+00	-0.1000E+01
2	0.2000E+01	0.1000E+01	0.0000E+00
3	0.7000E+01	0.0000E+00	0.1000E+01
4	0.1300E+02	0.1000E+01	0.0000E+00
5	0.3000E+01	0.0000E+00	0.1000E+01
6	0.1500E+02	-0.1000E+01	0.0000E+00

AREA = 0.59000E+02

MOMENTO STATICO LUNGO X1 = 0.15850E+03
 MOMENTO STATICO LUNGO X2 = 0.35150E+03
 MOMENTO DI INERZIA LUNGO X1-X1 = 0.78367E+03
 MOMENTO DI INERZIA LUNGO X1-X2 = 0.59725E+03
 MOMENTO DI INERZIA LUNGO X2-X2 = 0.33937E+04
 COORDINATA DEL BARICENTRO X1 = 0.26864E+01
 COORDINATA DEL BARICENTRO X2 = 0.59576E+01
 MOMENTO DI INERZIA BARICENTRALE (X1-X1) = 0.35787E+03
 MOMENTO DI INERZIA BARICENTRALE (X1-X2) = -0.34703E+03
 MOMENTO DI INERZIA BARICENTRALE (X2-X2) = 0.12996E+04
 MOMENTI E DIREZIONI PRINCIPALI DI INERZIA
 AUTOVALORE 1 0.14136E+04
 AUTOVETTORE -0.31227E+00 0.94999E+00
 AUTOVALORE 2 0.24379E+03
 AUTOVETTORE 0.94999E+00 0.31227E+00
 COORDINATE DEL CENTRO RELATIVO

LATO	X01	X02	NORM1	NORM2	C1	C2
1	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	-0.1000E+01	-0.9873E+00	0.3697E+01
2	0.1000E+02	0.0000E+00	0.1000E+01	0.0000E+00	-0.8294E+00	0.8043E+00
3	0.1000E+02	0.2000E+01	0.8805E+00	0.4741E+00	-0.5592E+00	-0.1154E+01
4	0.3000E+01	0.1500E+02	0.0000E+00	0.1000E+01	0.6505E+00	-0.2436E+01
5	0.0000E+00	0.1500E+02	-0.1000E+01	0.0000E+00	0.2258E+01	-0.2189E+01
6	0.0000E+00	0.2000E+01	-0.1000E+01	0.0000E+00	0.1667E+00	-0.1667E+00

Capitolo 10

IL PROBLEMA DI SAINT-VENANT

10.1 Posizione del problema

Saint-Venant¹ considerò un particolare problema dell'equilibrio elastico.

10.1.1 Ipotesi geometriche

Il corpo tridimensionale oggetto di studio è un cilindro retto Ω limitato detto trave. Nel seguito sono utilizzate le seguenti notazioni:

- \mathcal{A} indica la sezione retta della trave, ipotizzata costante lungo tutta la lunghezza,
- $\partial\mathcal{A}$ è la frontiera della sezione retta della trave,
- L rappresenta la lunghezza della trave,
- x_i ($i=1,2,3$) sono le coordinate del generico punto secondo un riferimento cartesiano,
- \mathbf{e}^i ($i=1,2,3$) sono i versori degli assi di riferimento.

¹**Adhémar-Jean-Claude Barré de-Saint-Venant** (Villiers-en-Brie 1797-Saint-Ouen 1886), ingegnere e matematico francese. Matematico e ingegnere all'École des Ponts et Chaussées e professore all'Istituto Agronomico di Versailles (1848-54), fu dal 1868 membro dell'Accademia delle Scienze. Occupatosi di geometria analitica, ottenne i più significativi risultati nello studio della resistenza dei materiali e della teoria dell'elasticità, di cui è considerato uno dei fondatori. Di fondamentale importanza furono i suoi lavori sull'equilibrio dei corpi elastici cilindrici sollecitati sulle due basi (problema di Saint-Venant) e sulle applicazioni pratiche. Tali studi, insieme alle condizioni di congruenza e compatibilità che da lui presero nome, hanno posto le basi della scienza delle costruzioni.

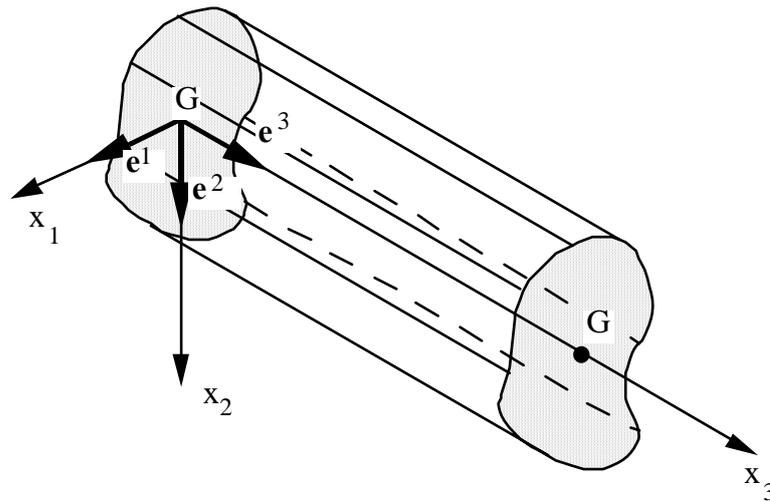


Figura 10.1: Schema della trave.

Il sistema di riferimento è scelto in modo che \mathbf{e}^1 \mathbf{e}^2 descriva il piano della sezione di estremità \mathcal{A}_0 della trave ed $\mathbf{e}^3 = \mathbf{e}^1 \times \mathbf{e}^2$.

La sezione terminale \mathcal{A}_L della trave individuata dall'ascissa $x_3 = L$. Si suppone che l'origine del sistema di riferimento sia il baricentro della sezione. In tal modo l'asse x_3 intercetta le sezioni rette sempre nei loro baricentri. In figura 10.1 è riportato lo schema.

10.1.2 Ipotesi di carico

Si suppone che la trave non abbia peso (forze di volume nulle), sia scarica sul mantello laterale e soggetta ad un sistema di carico solo sulle basi di estremità. In formule:

- $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ in Ω , (forze di volume nulle)
- $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ su $\mathcal{S} = \partial\mathcal{A} \times]0, L[$, (forze di superficie nulle sul mantello)
- $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ su \mathcal{A}_0 , $\mathbf{p} = \mathbf{p}_L$ su \mathcal{A}_L . (forze di superficie sulle basi)

10.1.3 Ipotesi sulla natura del materiale

Si considera il caso in cui il materiale che compone la trave sia:

- omogeneo,

- elastico lineare,
- isotropo.

10.1.4 Ipotesi sul tipo di analisi da condurre

Si suppone valida l'ipotesi:

- piccoli spostamenti (e deformazioni).

Naturalmente, il sistema di carichi esterni dovrà rispettare le equazioni cardinali della statica nella configurazione indeformata:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}_0} \mathbf{p}_0 \, dA + \int_{\mathcal{A}_L} \mathbf{p}_L \, dA &= \mathbf{0} \\ \int_{\mathcal{A}_0} \mathbf{r} \times \mathbf{p}_0 \, dA + \int_{\mathcal{A}_L} \mathbf{r} \times \mathbf{p}_L \, dA &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (10.1)$$

con \mathbf{r} vettore che individua il generico punto delle sezioni terminali della trave.

10.2 Problema dell'equilibrio elastico

Resta allora da determinare lo stato elastico $s = \{\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}\}$ ovvero la tripletta costituita dal campo degli spostamenti \mathbf{u} , dal campo delle deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}$ e da quello simmetrico delle tensioni $\boldsymbol{\sigma}$.

Le equazioni che governano il problema dell'equilibrio elastico (7.1)-(7.5) assumono la forma:

equazioni di campo:

- congruenza

$$2\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \quad \text{in } \Omega \quad (10.2)$$

- equilibrio

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega \quad (10.3)$$

- legame costitutivo

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\boldsymbol{\sigma} - \nu(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{I})\mathbf{I}] \quad \text{in } \Omega \quad (10.4)$$

condizioni al contorno:

- mantello scarico

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ su } \mathcal{S} \quad (10.5)$$

- carico sulla base \mathcal{A}_0

$$\boldsymbol{\sigma} (-\mathbf{e}^3) = \mathbf{p}_0 \text{ su } \mathcal{A}_0 \quad (10.6)$$

- carico sulla base \mathcal{A}_L

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}^3 = \mathbf{p}_L \text{ su } \mathcal{A}_L \quad (10.7)$$

essendo \mathbf{n} la normale uscente da \mathcal{S} nel generico punto del mantello della trave.

10.3 Principio fondamentale di Saint-Venant

Il problema dell'equilibrio elastico appena formulato, governato dalle equazioni (10.2)-(10.6) risulta allora difficile se non impossibile da risolvere. Soccorre a questo punto il principio fondamentale di Saint-Venant, che così recita:

nei punti del solido che sono a sufficiente distanza dall'elemento superficiale sede di applicazione dei carichi esterni, lo stato di tensione non dipende dalla particolare distribuzione di tali carichi ma solo dalla risultante e dal momento risultante di tali carichi.

Tale principio consente di sostituire alle condizioni puntuali al contorno (10.6) e (10.7), le condizioni globali fra risultante e momento risultante delle tensioni che emergono sulle basi e risultante e momento risultante dei carichi esterni applicati su tali basi.

In formule, le (10.6) e (10.7) sono sostituite dalle:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}_0} \boldsymbol{\sigma} (-\mathbf{e}^3) dA &= \int_{\mathcal{A}_0} \mathbf{p}_0 dA \\ \int_{\mathcal{A}_0} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma} (-\mathbf{e}^3) dA &= \int_{\mathcal{A}_0} \mathbf{x} \times \mathbf{p}_0 dA \end{aligned} \quad (10.8)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}_L} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}^3 dA &= \int_{\mathcal{A}_L} \mathbf{p}_L dA \\ \int_{\mathcal{A}_L} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}^3 dA &= \int_{\mathcal{A}_L} \mathbf{x} \times \mathbf{p}_L dA \end{aligned} \quad (10.9)$$

dove $\mathbf{x} = x_\alpha \mathbf{e}^\alpha$ il vettore che individua il generico punto della sezione retta della trave. Si avverte che, come al solito, gli indici greci assumono valore 1, 2 ed inoltre

si utilizza la convenzione che gli indici ripetuti si intendono sommati. Si evidenzia che il vettore posizione \mathbf{x} presente nelle (10.8) e (10.9) ha, nel riferimento scelto, la terza componente nulla.

La distanza oltre la quale sono trascurabili gli effetti locali provocati dalla particolare distribuzione di carico sulle basi detta distanza di estinzione. Si mostra che tale distanza di estinzione pari alla maggiore delle dimensioni della sezione retta della trave.

La validità del principio di Saint-Venant può cadere in difetto quando la sezione non è compatta. Si dice "compatta" la sezione per la quale accade che la lunghezza di una generica corda, posta tra due punti qualsiasi della curva di bordo della sezione, dello stesso ordine di grandezza del più piccolo segmento curvilineo che collega i due punti lungo la curva di bordo. Ciò non accade per le sezioni in parete sottile.

10.4 Sollecitazioni semplici

Le risultanti ed i momenti risultanti agenti sulle basi della trave valgono:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0 &= \int_{\mathcal{A}_0} \mathbf{p}_0 \, dA & \mathbf{M}_0 &= \int_{\mathcal{A}_0} \mathbf{x} \times \mathbf{p}_0 \, dA \\ \mathbf{R} &= \int_{\mathcal{A}_L} \mathbf{p}_L \, dA & \mathbf{M} &= \int_{\mathcal{A}_L} \mathbf{x} \times \mathbf{p}_L \, dA \end{aligned} \quad (10.10)$$

Le equazioni di equilibrio globali della trave (10.1) forniscono:

$$\mathbf{R}_0 + \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad \mathbf{M}_0 + \mathbf{M} + L\mathbf{e}^3 \times \mathbf{R} = \mathbf{0}$$

per cui note che siano \mathbf{R} e \mathbf{M} si determinano, per equilibrio, \mathbf{R}_0 ed \mathbf{M}_0 .

Si distinguono quattro casi di sollecitazione semplice agenti su \mathcal{A}_L :

▶ sforzo normale	agisce solo	$N = \mathbf{R} \bullet \mathbf{e}^3$
▶ flessione	agisce solo	$\mathbf{M}^f = (\mathbf{M} \bullet \mathbf{e}^\alpha) \mathbf{e}^\alpha$
▶ torsione	agisce solo	$M^t = \mathbf{M} \bullet \mathbf{e}^3$
▶ taglio e flessione	agisce solo	$\mathbf{V} = (\mathbf{R} \bullet \mathbf{e}^\alpha) \mathbf{e}^\alpha$

Le caratteristiche della sollecitazione su \mathcal{A}_L si esprimono in funzione delle tensioni

interne tenendo conto delle (10.9) e delle (10.10) come:

$$\begin{aligned}
 N &= \int_{\mathcal{A}_L} \sigma_{33} dA & (10.11) \\
 \mathbf{M}^f &= \int_{\mathcal{A}_L} \mathbf{x} \times \mathbf{e}^3 \sigma_{33} dA \\
 M^t &= \left(\int_{\mathcal{A}_L} \mathbf{x} \times \mathbf{e}^\alpha \sigma_{3\alpha} dA \right) \bullet \mathbf{e}^3 \\
 \mathbf{V} &= \int_{\mathcal{A}_L} \sigma_{3\alpha} \mathbf{e}^\alpha dA
 \end{aligned}$$

10.5 Metodo seminverso

Il problema così posto per ognuna delle sollecitazioni semplici resta comunque difficile da risolvere. Saint-Venant propose di utilizzare allora il metodo detto seminverso. Esso consiste nel postulare, sulla base di considerazioni intuitive, alcuni aspetti delle grandezze da determinare (spostamenti, tensioni) lasciando incogniti i rimanenti. A posteriori si verifica la consistenza delle ipotesi fatte e si determinano le parti incognite utilizzando le equazioni che governano il problema. Si ottiene in tal modo la soluzione, detta di Saint-Venant, di una classe di problemi dell'equilibrio elastico caratterizzati dalle stesse risultanti e momenti risultanti agenti sulle basi del solido.

In base a tale metodologia, si assume in tutti e quattro i casi di sollecitazione semplice

$$\sigma_{\alpha\beta} = 0 \quad (10.12)$$

Ciò equivale a considerare la trave come un insieme di fili paralleli all'asse x_3 soggetti ad una tensione normale σ_{33} , e che si scambiano fra loro al più tensioni tangenziali $\sigma_{\alpha 3}$.

10.5.1 Equilibrio

Sotto l'ipotesi definita dalla relazione (10.12) le equazioni di equilibrio (10.1) diventano:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{13,3} &= 0 & (10.13) \\
 \sigma_{23,3} &= 0 \\
 \sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} + \sigma_{33,3} &= 0
 \end{aligned}$$

Le prime due delle (10.13) stabiliscono che $\sigma_{\alpha 3}$ è costante lungo l'asse della trave. La terza delle (10.13) assicura allora che σ_{33} è al più lineare in x_3 .

Le condizioni al bordo (10.5), sul mantello \mathcal{S} , della trave diventano:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 &= 0 \end{aligned} \tag{10.14}$$

ovvero le prime due sono identicamente soddisfatte.

10.5.2 Legame costitutivo

Tento conto dell'ipotesi (10.12) sullo stato tensionale, le equazioni del legame costitutivo (10.4) si semplificano in:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{33} \\ \varepsilon_{22} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{33} \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E}\sigma_{33} \\ 2\varepsilon_{23} &= \frac{1}{G}\sigma_{23} \\ 2\varepsilon_{13} &= \frac{1}{G}\sigma_{13} \\ \varepsilon_{12} &= 0 \end{aligned} \tag{10.15}$$

10.5.3 Congruenza

Si riportano ora le equazioni indefinite di congruenza (3.71):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12,32} - \varepsilon_{13,22} &= \varepsilon_{22,31} - \varepsilon_{23,21} \\ \varepsilon_{12,33} - \varepsilon_{13,23} &= \varepsilon_{32,31} - \varepsilon_{33,21} \\ \varepsilon_{22,33} - \varepsilon_{23,23} &= \varepsilon_{32,32} - \varepsilon_{33,22} \\ \varepsilon_{11,32} - \varepsilon_{13,12} &= \varepsilon_{21,31} - \varepsilon_{23,11} \\ \varepsilon_{11,33} - \varepsilon_{13,13} &= \varepsilon_{31,31} - \varepsilon_{33,11} \\ \varepsilon_{11,22} - \varepsilon_{12,12} &= \varepsilon_{21,21} - \varepsilon_{22,11} \end{aligned} \tag{10.16}$$

Tenendo conto che per le equazioni (10.13) e (10.15) si ha:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} &= 0 \\ \varepsilon_{23,3} &= \frac{1}{2G}\sigma_{23,3} = 0 \\ \varepsilon_{13,3} &= \frac{1}{2G}\sigma_{13,3} = 0 \end{aligned} \tag{10.17}$$

Per le (10.17), le (10.16) riscritte in ordine differente forniscono:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} &= 0 \\
 \varepsilon_{11,33} + \varepsilon_{33,11} &= 0 \\
 \varepsilon_{22,33} + \varepsilon_{33,22} &= 0 \\
 (\varepsilon_{13,2} - \varepsilon_{23,1})_{,1} &= \varepsilon_{11,32} \\
 -(\varepsilon_{13,2} - \varepsilon_{23,1})_{,2} &= \varepsilon_{22,31} \\
 \varepsilon_{33,21} &= 0
 \end{aligned} \tag{10.18}$$

ed in termini di tensioni assumono la forma:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{33,22} + \sigma_{33,11} &= 0 \\
 -\nu \sigma_{33,33} + \sigma_{33,11} &= 0 \\
 -\nu \sigma_{33,33} + \sigma_{33,22} &= 0 \\
 (\sigma_{13,2} - \sigma_{23,1})_{,1} &= -\frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{33,23} \\
 -(\sigma_{13,2} - \sigma_{23,1})_{,2} &= -\frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{33,13} \\
 \sigma_{33,12} &= 0
 \end{aligned} \tag{10.19}$$

Se ne deduce allora:

$$\sigma_{33,11} = \sigma_{33,22} = \sigma_{33,33} = \sigma_{33,12} = 0$$

per cui σ_{33} ammette la forma di rappresentazione:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{33} &= g_o + g_1 x_1 + g_2 x_2 + (h_o + h_1 x_1 + h_2 x_2) x_3 \\
 &= g_o + \mathbf{g} \bullet \mathbf{x} + (h_o + \mathbf{h} \bullet \mathbf{x}) x_3
 \end{aligned} \tag{10.20}$$

essendo $g_o, g_1, g_2, h_o, h_1, h_2$ costanti ed $\mathbf{x} = x_\alpha \mathbf{e}^\alpha$ come sempre.

Capitolo 11

SFORZO NORMALE E MOMENTO FLETTENTE

11.1 Sollecitazione di sforzo normale e momento flettente

Si esamina il caso in cui la risultante ed il momento risultante agenti sulla base della trave $x_3 = L$ consistano in una forza N in direzione \mathbf{e}^3 (sforzo normale) ed una coppia \mathbf{M}^f ortogonale ad \mathbf{e}^3 (momento flettente).

11.1.1 Stato tensionale

Dovendo risultare $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ e $M^t = 0$, ricordando le (10.11) si può supporre (metodo seminverso) che $\sigma_{\alpha 3} = 0$ per $x_3 = L$. Le prime due equazioni di equilibrio (10.13) assicurano allora che $\sigma_{\alpha 3} = 0 \forall x_3 \in]0, L[$. Ne deriva che in tutti i punti della trave:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (11.1)$$

Inoltre, la terza delle (10.13) diventa:

$$\sigma_{33,3} = 0 \quad (11.2)$$

per cui σ_{33} è costante lungo l'asse x_3 , ed è quindi funzione solo di x_1 x_2 . Allora, tenuto conto della (11.2), la (10.20) si particularizza nella:

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= g_o + g_1 x_1 + g_2 x_2 \\ &= g_o + \mathbf{g} \bullet \mathbf{x} \end{aligned} \quad (11.3)$$

Lo sforzo normale N ed il vettore momento flettente \mathbf{M}^f , determinati in termini di tensioni interne dalle (10.11), per la forma di rappresentazione (11.3) della tensione normale, valgono rispettivamente:

$$N = \int_{\mathcal{A}_L} \sigma_{33} dA = \int_{\mathcal{A}_L} (g_o + g_1 x_1 + g_2 x_2) dA = g_o A + g_1 S_1 + g_2 S_2 = g_o A \quad (11.4)$$

$$M_1^f = \int_{\mathcal{A}_L} x_2 \sigma_{33} dA = \int_{\mathcal{A}_L} x_2 (g_o + g_1 x_1 + g_2 x_2) dA = g_1 J_{12} + g_2 J_{22} \quad (11.5)$$

$$M_2^f = - \int_{\mathcal{A}_L} x_1 \sigma_{33} dA = - \int_{\mathcal{A}_L} x_1 (g_o + g_1 x_1 + g_2 x_2) dA = - (g_1 J_{11} + g_2 J_{12})$$

essendo J_{11} J_{22} J_{12} le componenti della matrice d'inerzia \mathbf{J} ed S_1 S_2 le componenti del vettore momento statico \mathbf{S} che, poichè il riferimento scelto è baricentrico, risulta essere nullo. Posto

$$\mathbf{M}^\perp = \begin{Bmatrix} -M_2^f \\ M_1^f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_1 J_{11} + g_2 J_{12} \\ g_1 J_{12} + g_2 J_{22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{12} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix}$$

le relazioni (11.4) e (11.5) possono essere riscritte nella forma equivalente:

$$N = g_o A \quad (11.6)$$

$$\mathbf{M}^\perp = \mathbf{J} \mathbf{g}$$

da cui si ricava:

$$g_o = \frac{N}{A} \quad (11.7)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{M}^\perp \quad (11.8)$$

e quindi, tenuto conto della (11.3):

$$\sigma_{33} = \frac{N}{A} + \mathbf{J}^{-1} \mathbf{M}^\perp \bullet \mathbf{x} \quad (11.9)$$

Dunque la forma dello stato tensionale ipotizzata tramite le (11.1) e (11.3) è idonea a rappresentare le caratteristiche della sollecitazione di sforzo normale e momento flettente.

Nel caso siano stati scelti gli assi del sistema di riferimento siano principali d'inerzia, la matrice di inerzia è caratterizzata dal fatto che $J_{12} = 0$. In tal caso, la determinazione della inversa di \mathbf{J} risulta immediata e la forma (11.9) si specializza in:

$$\sigma_{33} = \frac{N}{A} - \frac{M_2^f}{J_{11}} x_1 + \frac{M_1^f}{J_{22}} x_2 \quad (11.10)$$

E' consuetudine nella pratica tecnica utilizzare la definizione dei momenti d'inerzia rispetto agli assi coordinati più di quelli lungo gli assi coordinati:

- momento d'inerzia lungo l'asse x_1 ovvero rispetto all'asse x_2 :

$$\int_{\mathcal{A}} x_1^2 dA = J_{11} = I_{22}$$

- momento d'inerzia lungo l'asse x_2 ovvero rispetto all'asse x_1 :

$$\int_{\mathcal{A}} x_2^2 dA = J_{22} = I_{11}$$

Sulla base di tali definizioni, la formula (11.10) diventa:

$$\sigma_{33} = \frac{N}{A} + \frac{M_1^f}{I_{11}}x_2 - \frac{M_2^f}{I_{22}}x_1 \quad (11.11)$$

La verifica del rispetto delle equazioni indefinite dell'equilibrio e di quelle ai limiti sul mantello della trave è immediata. Infatti, le prime già utilizzate si traducono nella costanza lungo l'asse della trave di σ_{33} come evidenziato dalla (11.2), e le seconde forniscono:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{su } \mathcal{S} \quad (11.12)$$

11.1.2 Legame costitutivo

Per determinare il campo di spostamenti associato allo stato tensionale (11.9), è necessario calcolare il tensore di deformazione, utilizzando le equazioni costitutive, e quindi integrarne le componenti.

Poichè la trave è supposta realizzata in materiale elastico lineare isotropo, per le (10.15) e (11.1), si ha:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{33} \quad \varepsilon_{33} = \frac{1}{E}\sigma_{33} \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{12} = 0 \quad (11.13)$$

Il campo di deformazione determinato è lineare nelle coordinate x_1 e x_2 ed è costante rispetto a x_3 ; ne consegue che le equazioni di congruenza interna (10.16) sono sicuramente soddisfatte. Esiste allora un campo di spostamenti la cui parte simmetrica del gradiente fornisce le deformazioni determinate tramite le relazioni di legame (11.13).

11.1.3 Spostamenti

Tenuto conto del legame spostamento-deformazione, ovvero dell'equazione di congruenza (10.2), e della (11.3), le (11.13) possono essere espresse come:

$$\begin{aligned}
 u_{1,1} &= -\frac{\nu}{E}(g_o + \mathbf{g} \bullet \mathbf{x}) & (11.14) \\
 u_{2,2} &= -\frac{\nu}{E}(g_o + \mathbf{g} \bullet \mathbf{x}) \\
 u_{3,3} &= \frac{1}{E}(g_o + \mathbf{g} \bullet \mathbf{x}) \\
 u_{2,3} + u_{3,2} &= 0 \\
 u_{1,3} + u_{3,1} &= 0 \\
 u_{1,2} + u_{2,1} &= 0
 \end{aligned}$$

La terza delle (11.14) fornisce allora:

$$u_3 = \frac{1}{E}(g_o + g_1x_1 + g_2x_2)x_3 + c_3(x_1, x_2) \quad (11.15)$$

che sostituita nella quinta e nella quarta delle (11.14) conduce a:

$$\begin{aligned}
 u_{1,3} &= -u_{3,1} = -\frac{1}{E}g_1x_3 - c_{3,1}(x_1, x_2) & (11.16) \\
 u_{2,3} &= -u_{3,2} = -\frac{1}{E}g_2x_3 - c_{3,2}(x_1, x_2)
 \end{aligned}$$

Integrando le (11.16) rispetto alla variabile x_3 , si ha:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= -\frac{1}{2E}g_1x_3^2 - x_3c_{3,1}(x_1, x_2) + c_1(x_1, x_2) & (11.17) \\
 u_2 &= -\frac{1}{2E}g_2x_3^2 - x_3c_{3,2}(x_1, x_2) + c_2(x_1, x_2)
 \end{aligned}$$

La prima e la seconda delle (11.14), tenuto conto delle espressioni di u_1 ed u_2 ottenute dalle (11.17), forniscono:

$$\begin{aligned}
 u_{1,1} &= -x_3c_{3,11}(x_1, x_2) + c_{1,1}(x_1, x_2) = -\frac{\nu}{E}(g_o + g_1x_1 + g_2x_2) & (11.18) \\
 u_{2,2} &= -x_3c_{3,22}(x_1, x_2) + c_{2,2}(x_1, x_2) = -\frac{\nu}{E}(g_o + g_1x_1 + g_2x_2)
 \end{aligned}$$

Dovendo la (11.18) essere vera per ogni valore di x_3 , deve accadere che $c_{3,11}(x_1, x_2) = c_{3,22}(x_1, x_2) = 0$, per cui:

$$\begin{aligned}
 c_{1,1}(x_1, x_2) &= -\frac{\nu}{E}(g_o + g_1x_1 + g_2x_2) & (11.19) \\
 c_{2,2}(x_1, x_2) &= -\frac{\nu}{E}(g_o + g_1x_1 + g_2x_2)
 \end{aligned}$$

che integrate, forniscono:

$$\begin{aligned} c_1(x_1, x_2) &= -\frac{\nu}{E} \left(g_0 x_1 + \frac{1}{2} g_1 x_1^2 + g_2 x_2 x_1 \right) + d_1(x_2) \\ c_2(x_1, x_2) &= -\frac{\nu}{E} \left(g_0 x_2 + g_1 x_1 x_2 + \frac{1}{2} g_2 x_2^2 \right) + d_2(x_1) \end{aligned} \quad (11.20)$$

per cui la (11.17) diventa:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{2E} g_1 x_3^2 - x_3 c_{3,1}(x_1, x_2) \\ &\quad - \frac{\nu}{E} \left(g_0 x_1 + \frac{1}{2} g_1 x_1^2 + g_2 x_2 x_1 \right) + d_1(x_2) \\ u_2 &= -\frac{1}{2E} g_2 x_3^2 - x_3 c_{3,2}(x_1, x_2) \\ &\quad - \frac{\nu}{E} \left(g_0 x_2 + g_1 x_1 x_2 + \frac{1}{2} g_2 x_2^2 \right) + d_2(x_1) \end{aligned} \quad (11.21)$$

Infine la sesta delle (11.14), viste le (11.21), conduce a:

$$\begin{aligned} 0 &= u_{1,2} + u_{2,1} \\ &= -2x_3 c_{3,12}(x_1, x_2) - \frac{\nu}{E} g_2 x_1 - \frac{\nu}{E} g_1 x_2 + d_{1,2}(x_2) + d_{2,1}(x_1) \end{aligned} \quad (11.22)$$

Dovendo la (11.22) essere vera per ogni valore di x_3 , deve accadere che $c_{3,12} = 0$. Se ne deduce allora che:

$$d_{1,2}(x_2) = \frac{\nu}{E} g_1 x_2 \quad d_{2,1}(x_1) = \frac{\nu}{E} g_2 x_1 \quad (11.23)$$

che integrate forniscono:

$$\begin{aligned} d_1(x_2) &= \frac{\nu}{2E} g_1 x_2^2 + f_1 \\ d_2(x_1) &= \frac{\nu}{2E} g_2 x_1^2 + f_2 \end{aligned} \quad (11.24)$$

inoltre, ricordando che $c_{3,11} = c_{3,22} = c_{3,12} = 0$ deve essere:

$$c_3 = x_1 f_{31} + x_2 f_{32} + f_3 \quad (11.25)$$

dove $f_1, f_2, f_3, f_{31}, f_{32}$ sono costanti rispetto a tutte le variabili. In definitiva le componenti di spostamento sono:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{2E} g_1 [x_3^2 + \nu (x_1^2 - x_2^2)] - \frac{\nu}{E} (g_0 + g_2 x_2) x_1 - x_3 f_{31} + f_1 \\ u_2 &= -\frac{1}{2E} g_2 [x_3^2 + \nu (x_2^2 - x_1^2)] - \frac{\nu}{E} (g_0 + g_1 x_1) x_2 - x_3 f_{32} + f_2 \\ u_3 &= \frac{1}{E} (g_0 + g_1 x_1 + g_2 x_2) x_3 + x_1 f_{31} + x_2 f_{32} + f_3 \end{aligned} \quad (11.26)$$

In forma matriciale la (11.26) si scrive come:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} &= \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} [x_3^2 + \nu (x_1^2 - x_2^2)] & -\nu x_1 x_2 \\ -\nu x_1 x_2 & \frac{1}{2} [x_3^2 + \nu (x_2^2 - x_1^2)] \\ x_1 x_3 & x_2 x_3 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} g_1 \\ g_2 \end{vmatrix} \\ &+ \frac{1}{E} \begin{vmatrix} -\nu x_1 \\ -\nu x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} g_o + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -f_{31} \\ 0 & 0 & -f_{32} \\ f_{31} & f_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (11.27)$$

E' chiaro nella (11.27) che gli ultimi due termini dell'espressione rappresentano rispettivamente una rotazione rigida ed una traslazione rigida della trave. Eliminando allora tali termini inessenziali alla deformazione della trave, la (11.26) si riduce:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{2E} g_1 [x_3^2 + \nu (x_1^2 - x_2^2)] - \frac{\nu}{E} (g_o + g_2 x_2) x_1 \\ u_2 &= -\frac{1}{2E} g_2 [x_3^2 + \nu (x_2^2 - x_1^2)] - \frac{\nu}{E} (g_o + g_1 x_1) x_2 \\ u_3 &= \frac{1}{E} (g_o + g_1 x_1 + g_2 x_2) x_3 \end{aligned} \quad (11.28)$$

11.2 Sforzo normale centrato

Nel caso che la sollecitazione esterna sia equivalente solo alla caratteristica di sforzo normale applicato al baricentro della sezione retta, le espressioni sia della tensione che degli spostamenti diventano estremamente semplici.

Dalla (11.9) si ricava:

$$\sigma_{33} = \frac{N}{A} \quad (11.29)$$

Le componenti del tensore di deformazione si riducono a:

$$\begin{aligned} u_{1,1} = \varepsilon_{11} &= -\frac{\nu N}{E A} & u_{2,2} = \varepsilon_{22} &= -\frac{\nu N}{E A} & u_{3,3} = \varepsilon_{33} &= \frac{N}{E A} \\ u_{2,3} + u_{3,2} &= 2\varepsilon_{23} = 0 & u_{1,3} + u_{3,1} &= 2\varepsilon_{13} = 0 & u_{1,2} + u_{2,1} &= 2\varepsilon_{12} = 0 \end{aligned} \quad (11.30)$$

Si consideri il campo di spostamenti con componenti:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\nu N}{E A} x_1 \\ u_2 &= -\frac{\nu N}{E A} x_2 \\ u_3 &= \frac{N}{E A} x_3 \end{aligned} \quad (11.31)$$

E' immediato verificare che il campo di spostamento (11.31) soddisfa le equazioni (11.30).

Si evidenzia che u_3 non dipende da x_1 x_2 . Ciò implica che la generica sezione trasversale a deformazione avvenuta è ancora piana e parallela alla configurazione iniziale indeformata. Inoltre la componente di spostamento nel piano \mathbf{e}^1 \mathbf{e}^2 avviene lungo la direzione individuata da vettore posizione $\mathbf{x} = x_\alpha \mathbf{e}^\alpha$.

11.3 Flessione semplice

11.3.1 Flessione retta

Si ha flessione retta quando lo sforzo normale è nullo ed il vettore momento flettente agisce lungo una direzione principale d'inerzia; in particolare si assume $\mathbf{M}^f = M_1^f \mathbf{e}^1$. In questo caso la formula (11.11) si semplifica in:

$$\sigma_{33} = \frac{M_1^f}{I_{11}} x_2 \quad (11.32)$$

che è nota come formula di Navier.

L'asse del momento flettente è definito dal versore \mathbf{m} tale che $\mathbf{m} = \mathbf{M}^f / \|\mathbf{M}^f\|$, essendo $\|\mathbf{M}^f\|$ la norma di \mathbf{M}^f ovvero il modulo del vettore \mathbf{M}^f . Per asse di sollecitazione \mathbf{s} si intende l'asse ortogonale alla direzione del momento flettente agente, $\mathbf{s} = \mathbf{m}^\perp$. Nel caso considerato si ha $\mathbf{s} = \mathbf{e}^2$.

Con asse neutro della distribuzione di tensioni da flessione si indica invece la retta, di versore \mathbf{n} , che contiene il segmento definito sulla sezione retta luogo dei punti in cui la tensione normale è nulla:

$$\sigma_{33} = \alpha \frac{M_1^f}{I_{11}} n_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}^1 \quad (11.33)$$

con α numero reale. La (11.33) mostra che l'asse neutro della flessione retta dovuta al momento flettente $\mathbf{M}^f = M_1^f \mathbf{e}^1$ è l'asse x_1 .

Tenendo conto delle equazioni (11.13), le equazioni di congruenza sono:

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1} = -\frac{\nu M_1^f}{EI_{11}} x_2 \quad \varepsilon_{22} = u_{2,2} = -\frac{\nu M_1^f}{EI_{11}} x_2 \quad \varepsilon_{33} = u_{3,3} = \frac{M_1^f}{EI_{11}} x_2 \quad (11.34)$$

$$2\varepsilon_{23} = u_{2,3} + u_{3,2} = 0 \quad 2\varepsilon_{13} = u_{1,3} + u_{3,1} = 0 \quad 2\varepsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} = 0$$

Considerando la componente ε_{33} del tensore di deformazione, si deduce che la dilatazione lineare lungo l'asse della trave è una funzione lineare di x_2 , per cui la generica sezione retta della trave resta piana a deformazione avvenuta. Inoltre,

tenendo conto che gli scorrimenti angolari $\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23}$ e $\gamma_{13} = 2\varepsilon_{13}$ sono nulli, si ha che l'angolo retto definito da una generica fibra della trave e la sezione retta resti inalterato a deformazione avvenuta. In definitiva si può affermare che la trave si deforma in modo tale che, a deformazione avvenuta, la generica sezione retta resti piana ed ortogonale alla deformata dell'asse della trave. In altre parole viene convalidata l'ipotesi di Eulero-Bernoulli introdotta per la formulazione della teoria tecnica della trave nel paragrafo 2.1, che afferma che: *la generica sezione trasversale della trave a deformazione avvenuta è ancora piana ed ortogonale alla linea media.*

Il campo di spostamenti è definito dalle relazioni:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\nu M_1^f}{EI_{11}} x_1 x_2 \\ u_2 &= -\frac{M_1^f}{2EI_{11}} [x_3^2 + \nu (x_2^2 - x_1^2)] \\ u_3 &= \frac{M_1^f}{EI_{11}} x_2 x_3 \end{aligned} \quad (11.35)$$

ed in particolare, gli spostamenti dei punti che giacciono sull'asse della trave si ottengono ponendo $x_1 = x_2 = 0$ nelle espressioni (11.35), ottenendo:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= -\frac{M_1^f}{2EI_{11}} x_3^2 \\ u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (11.36)$$

Si definisce asse di flessione, individuato dal versore \mathbf{f} , la direzione lungo la quale avviene l'inflessione dell'asse della trave. Tenendo conto della formula (11.36) si ha $\mathbf{f} = \mathbf{e}^2$, ovvero accade che l'asse di flessione è ortogonale all'asse neutro, $\mathbf{f} = \mathbf{n}^\perp$.

In definitiva sono stati definiti i seguenti assi:

- $\mathbf{m} = \mathbf{M}^f / \|\mathbf{M}^f\|$ asse del momento flettente,
- $\mathbf{s} = \mathbf{m}^\perp$ asse di sollecitazione,
- \mathbf{n} asse neutro,
- $\mathbf{f} = \mathbf{n}^\perp$ asse di flessione.

La rotazione φ della generica sezione retta $x_3 = z$ della trave si determina applicando il principio dei lavori virtuali. Si considera come sistema spostamenti lo schema del problema della flessione e come sistema forze la trave soggetta ad una

coppia unitaria lungo l'asse x_1 in corrispondenza della sezione z . I lavori virtuali esterno ed interno valgono:

$$\begin{aligned} L_{ve} &= 1 \cdot \varphi & (11.37) \\ L_{vi} &= \int_0^z \int_A \sigma_{33}^{SF} \cdot \varepsilon_{33}^{SS} dA dx_3 = \int_0^z \int_A \frac{1}{I_{11}} x_2 \frac{M_1^f}{EI_{11}} x_2 dA dx_3 \\ &= \int_0^z \frac{M_1^f}{EI_{11}} dx_3 = \frac{M_1^f}{EI_{11}} x_3 \end{aligned}$$

Eguagliando il lavoro virtuale interno con quello esterno e tenendo conto della seconda equazione delle (11.35), si ottiene:

$$\varphi = \frac{M_1^f}{EI_{11}} x_3 = - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \Big|_{x_1=x_2=0} \quad (11.38)$$

la trave ruota quindi di un angolo φ pari alla derivata prima cambiata di segno dello spostamento in direzione dell'asse di flessione.

Si consideri l'asse geometrico della trave inflessa, detta ζ un'ascissa curvilinea che la percorre, il suo raggio di curvatura R è definito dalla relazione:

$$c = \frac{1}{R} = - \frac{d^2 u_2}{d\zeta^2} = - \frac{\frac{d^2 u_2}{dx_3^2}}{\left[1 + \left(\frac{du_2}{dx_3} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (11.39)$$

Per l'ipotesi di piccoli spostamenti e piccoli gradienti di spostamento ($du_2/dx_3 \ll 1$) si può supporre valida:

$$c = \frac{1}{R} \simeq - \frac{d^2 u_2}{dx_3^2} = \frac{M_1^f}{EI_{11}} \quad (11.40)$$

nota come legge di Bernoulli¹: *la curvatura dell'asse baricentrico di una trave inflessa è direttamente proporzionale al momento flettente applicato.*

E' chiaro che, per l'approssimazione fatta nel calcolo della curvatura, secondo tale legge l'asse della trave si attergerebbe come un arco di cerchio e non come un arco di parabola. Ma, vista la piccolezza degli spostamenti, R è molto grande se confrontato con qualsiasi dimensione lineare della trave, per cui la differenza tra la

¹**Jacques Bernoulli** (Basilea 1654-1705), professore di matematica all'Università di Basilea, apparteneva alla famiglia di famosi matematici e scienziati originaria di Anversa, ma stabilitesi a Basilea verso la fine del sec. XVI. Col fratello Jean sviluppò il calcolo infinitesimale, introdotto da Leibniz e Newton, indicandone numerose applicazioni alla meccanica e alla geometria.

curva parabolica e l'arco di cerchio risulta essere proporzionale ad una quantità del secondo ordine e quindi trascurabile.

Si consideri ora il caso di flessione retta caratterizzato da $\mathbf{M}^f = M_2^f \mathbf{e}^2$. Tenendo conto delle equazioni (11.13), le equazioni di congruenza sono:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = u_{1,1} &= \frac{\nu M_2^f}{EI_{22}} x_1 & \varepsilon_{22} = u_{2,2} &= \frac{\nu M_2^f}{EI_{22}} x_1 & \varepsilon_{33} = u_{3,3} &= -\frac{M_2^f}{EI_{22}} x_1 \\ 2\varepsilon_{23} = u_{2,3} + u_{3,2} &= 0 & 2\varepsilon_{13} = u_{1,3} + u_{3,1} &= 0 & 2\varepsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} &= 0 \end{aligned} \quad (11.41)$$

ed il campo di spostamenti è definito dalle relazioni:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{M_2^f}{2EI_{22}} [x_3^2 + \nu(x_1^2 - x_2^2)] \\ u_2 &= \frac{\nu M_2^f}{EI_{22}} x_1 x_2 \\ u_3 &= -\frac{M_2^f}{EI_{22}} x_1 x_3 \end{aligned} \quad (11.42)$$

così che gli spostamenti dei punti che giacciono sull'asse della trave valgono:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{M_2^f}{2EI_{22}} x_3^2 \\ u_2 &= 0 \\ u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (11.43)$$

11.3.2 Flessione deviata

Si ha flessione deviata quando lo sforzo normale è nullo ed il vettore momento flettente agisce lungo una direzione non principale d'inerzia. Lo studio della flessione deviata si può effettuare considerando la sovrapposizione degli effetti di due flessioni rette. Quindi, considerando un sistema di riferimento che sia principale d'inerzia, il momento flettente agente è scomposto nelle due componenti $\mathbf{M}^f = M_1^f \mathbf{e}^1 + M_2^f \mathbf{e}^2$. In questo caso la componente di tensione non nulla è fornita dalla relazione:

$$\sigma_{33} = \frac{M_1^f}{I_{11}} x_2 - \frac{M_2^f}{I_{22}} x_1 \quad (11.44)$$

L'asse del momento flettente è definito dal versore $\mathbf{m} = \mathbf{M}^f / \|\mathbf{M}^f\|$, mentre asse di sollecitazione $\mathbf{s} = \mathbf{m}^\perp$. L'asse neutro della distribuzione di tensioni da flessione

deviata si ottiene ponendo:

$$\sigma_{33} = \alpha \left(\frac{M_1^f}{I_{11}} n_2 - \frac{M_2^f}{I_{22}} n_1 \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} = \frac{1}{D} \begin{Bmatrix} \frac{M_1^f}{I_{11}} \\ \frac{M_2^f}{I_{22}} \end{Bmatrix} \quad (11.45)$$

con

$$D = \sqrt{\left(\frac{M_1^f}{I_{11}} \right)^2 + \left(\frac{M_2^f}{I_{22}} \right)^2}$$

Gli spostamenti dei punti che giacciono sull'asse della trave si determinano sommando gli effetti delle due flessioni rette, forniti dalle relazioni (11.36) e (11.43):

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{M_2^f}{2EI_{22}} x_3^2 \\ u_2 &= -\frac{M_1^f}{2EI_{11}} x_3^2 \\ u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (11.46)$$

e quindi:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = -\frac{D}{2E} \mathbf{f} x_3^2 \quad \text{con} \quad \mathbf{f} = \frac{1}{D} \begin{Bmatrix} -\frac{M_2^f}{I_{22}} \\ \frac{M_1^f}{I_{11}} \end{Bmatrix}$$

da cui si nota ancora che $\mathbf{f} = \mathbf{n}^\perp$.

La (11.45) mostra che l'asse neutro della flessione deviata risulta ortogonale all'asse di sollecitazione se e solo se $I_{11} = I_{22}$. In figura 11.1 è riportato schematicamente il caso della flessione deviata.

11.4 Flessione composta

Per flessione composta o sforzo normale eccentrico si intende la sollecitazione di sforzo normale e momento flettente. Si definisce eccentricità, o anche centro di pressione, della sollecitazione composta il punto individuato dal vettore \mathbf{e} e di componenti:

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{Bmatrix} -M_2^f \\ M_1^f \end{Bmatrix} \quad (11.47)$$

La formula (11.11) che fornisce la tensione nella sezione della trave si può allora riscrivere, sfruttando la definizione di eccentricità, come:

$$\sigma_{33} = N \left(\frac{1}{A} + \frac{e_1}{I_{22}} x_1 + \frac{e_2}{I_{11}} x_2 \right) \quad (11.48)$$

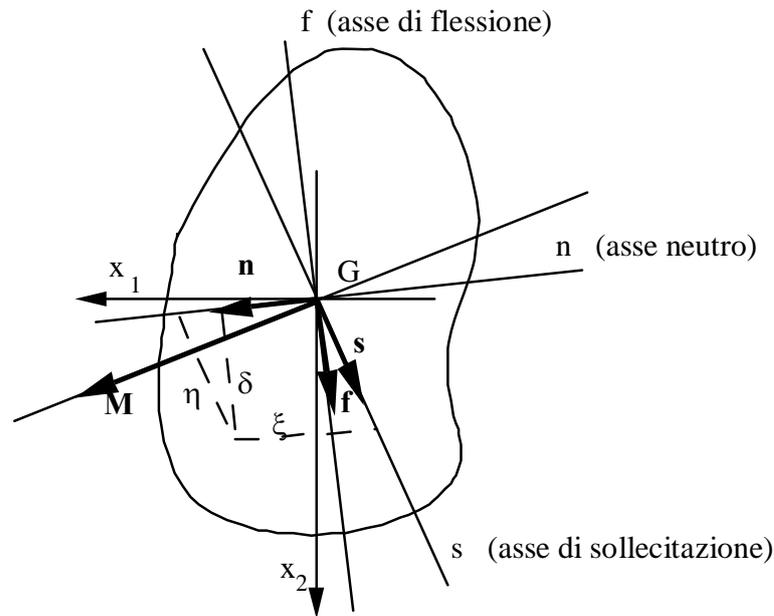


Figura 11.1: Asse di sollecitazione ed asse neutro in flessione deviata.

Introducendo i raggi d'inerzia $\rho_1^2 = I_{22}/A$ e $\rho_2^2 = I_{11}/A$, l'asse neutro è individuato dalla retta descritta dal vettore \mathbf{n} tramite d'equazione:

$$1 + \frac{e_1}{\rho_1^2}x_1 + \frac{e_2}{\rho_2^2}x_2 = 0 \quad (11.49)$$

Si consideri il caso $e_2 = 0$, per la (11.49) si ottiene:

$$x_1 = -\frac{\rho_1^2}{e_1} \quad (11.50)$$

che rappresenta l'equazione dell'asse neutro per una sollecitazione di flessione composta caratterizzata da momento flettente $M_1^f = 0$. Dalla formula (11.50) si deduce che l'asse neutro corrispondente ad all'eccentricità $\{e_1, 0\}$ è una retta parallela all'asse coordinato x_2 posta dalla parte opposta dell'eccentricità rispetto al baricentro della sezione; inoltre, dalla formula (11.50) si nota che l'asse neutro tende all'infinito per $e_1 \rightarrow 0$ e tende a zero per $e_1 \rightarrow \infty$.

Si consideri ora l'equazione di una retta tangente la frontiera della sezione retta del tipo:

$$a x_1 + b x_2 + c = 0$$

si assumi che tale retta rappresenti l'asse neutro di una sollecitazione composta; semplici calcoli mostrano che l'eccentricità associata a tale asse neutro è fornita

dall'espressione:

$$e_1 = \frac{a}{c} \rho_1^2 \quad e_2 = \frac{b}{c} \rho_2^2$$

Al variare della retta tangente considerata, cambia l'eccentricità associata. L'insieme di tutte le eccentricità associate a tutte le tangenti alla sezione retta descrive una curva chiusa. L'insieme dei punti interni a tale curva chiusa viene chiamato nocciolo d'inerzia. Si nota quanto segue:

- per un'eccentricità interna al nocciolo d'inerzia, l'asse neutro della sollecitazione di flessione composta è esterno alla sezione retta;
- per un'eccentricità sulla frontiera del nocciolo d'inerzia, l'asse neutro della sollecitazione di flessione composta è tangente la sezione retta;
- per un'eccentricità esterna al nocciolo d'inerzia, l'asse neutro della sollecitazione di flessione composta è secante la sezione retta.

Il nocciolo d'inerzia assume particolare importanza per travi realizzate con materiale caratterizzato da differente comportamento a trazione ed a compressione. E' questo il caso, ad esempio, dei materiali non reagenti a trazione.

Capitolo 12

TORSIONE

12.1 Sollecitazione di torsione

Si esamina il caso in cui la trave è soggetta ad una coppia torcente $M^t \mathbf{e}^3$ agente sulla base A_L della trave.

Come al solito si utilizza il metodo seminverso per la determinazione della soluzione del problema dell'equilibrio elastico. In questo caso di sollecitazione si fanno delle ipotesi esplicite anche sulla cinematica della trave, a partire da un suo intuitivo comportamento. Infatti, si suppone che la generica sezione della trave, posta all'ascissa x_3 , ruoti rispetto alla base di estremità della trave di un angolo $\theta(x_3) = x_3 \Theta$, con Θ indipendente da x_3 . Per verificare che Θ sia una costante lungo l'asse della trave è sufficiente ricordare che il momento torcente ha valore costante lungo tutta la trave. Ne consegue che la deformata di un qualsiasi tratto di lunghezza unitario della trave deve coincidere con la deformata di un qualsiasi altro tratto di uguale lunghezza della trave. Per cui Θ è costante.

Inoltre, dovendo essere nulle le sollecitazioni di sforzo normale e momento flettente lungo tutto l'asse della trave, i.e. $N = 0$ e $\mathbf{M}^f = \mathbf{0}$, si può supporre che $\sigma_{33} = 0$ ovunque. Dalle relazioni (10.15), si deduce che $\varepsilon_{33} = 0$ in ogni punto della trave. Ne consegue allora che se si verificano spostamenti u_3 lungo l'asse x_3 , questi devono essere indipendenti dall'ascissa x_3 .

Nei ragionamenti sviluppati non si fatto alcun accenno alla geometria della sezione retta della trave. Infatti, essi restano validi per una sezione di forma generica.

12.2 Torsione nella sezione circolare

Si considera inizialmente il semplice caso in cui la trave ha sezione circolare.

Si ipotizza inoltre che le sezioni della trave non subiscano ingobbamenti, cioè spostamenti lungo l'asse della trave.

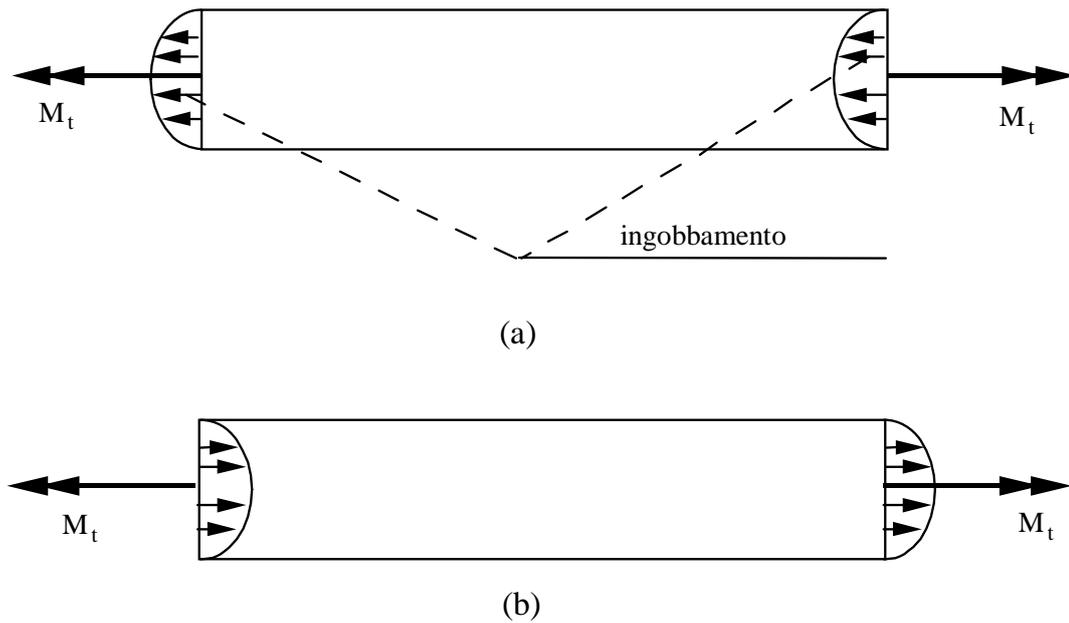


Figura 12.1: Momento torcente per sezione circolare.

Per dimostrare la validità di tale ipotesi nel caso di sezione circolare, si ragiona come segue. Si supponga che si verifichino ingobbamenti per effetto della sollecitazione di torsione. Vista la simmetria polare della sezione, tutti i punti che giacciono su una stessa circonferenza dovranno avere uguale spostamento in direzione dell'asse della trave. In figura 12.1(a) è riportata schematicamente una possibile deformata della trave supponendo che si ingobbi. Ruotando di π lo schema di figura 12.1(a), come illustrato in figura 12.1(b), si ottiene lo stesso schema di partenza ma con spostamenti assiali opposti a quelli dati in figura 12.1(a). Ciò è impossibile, data l'unicità della soluzione del problema dell'equilibrio elastico, per cui deve accadere che, per il caso in esame, non si verificano ingobbamenti delle sezioni.

Visto allora che la cinematica della trave consiste solamente nella rotazione rigida delle sezioni intorno all'asse della trave, nell'ipotesi di piccoli spostamenti, la forma del vettore spostamento è del tipo:

$$\begin{aligned} u_1 &= -x_2 x_3 \Theta \\ u_2 &= x_1 x_3 \Theta \\ u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (12.1)$$

con $\mathbf{x} = x_\alpha \mathbf{e}_\alpha$. La componente dello spostamento lungo l'asse è nulla, come si era in precedenza annunciato.

Il campo di deformazioni associato al campo di spostamenti definito dalla (12.1),

è fornito da:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = 0 \\ 2\varepsilon_{13} &= -x_2 \Theta \\ 2\varepsilon_{23} &= x_1 \Theta\end{aligned}\quad (12.2)$$

Per comodità di notazione si introduce il vettore di deformazione come:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{vmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{vmatrix} = \Theta \mathbf{x}^\perp \quad (12.3)$$

dove

$$\mathbf{x}^\perp = (\mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{Bmatrix} \quad (12.4)$$

Le tensioni si ricavano utilizzando l'equazione del legame costitutivo isotropo (10.15). Le uniche componenti di tensione non nulle sono le tensioni tangenziali σ_{13} e σ_{23} . In pratica si ha:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{13} &= -x_2 G \Theta \\ \sigma_{23} &= x_1 G \Theta\end{aligned}\quad (12.5)$$

essendo $G = E/[2(1+\nu)]$ il modulo di elasticità a taglio. Per comodità di notazione si introduce il vettore $\boldsymbol{\tau}$ le cui due componenti sono proprio le tensioni tangenziali non nulle:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{vmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{vmatrix} = G \Theta (\mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}) \quad (12.6)$$

Si deve ora verificare che le (12.1), (12.2) e (12.5) siano la soluzione del problema dell'equilibrio elastico della torsione per la trave con sezione circolare. Ciò significa che è necessario controllare che le equazioni indefinite dell'equilibrio (10.13) e le condizioni ai limiti (10.11) (10.14), sulle basi e sul mantello della trave, siano rispettate.

Per quanto riguarda le equazioni indefinite di equilibrio, per la (12.6) si ha:

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \boldsymbol{\tau}_{,3} = G \Theta_{,3} (\mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}) \\ 0 &= \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) = G \Theta \operatorname{div}(\mathbf{e}^3 \times \mathbf{x})\end{aligned}\quad (12.7)$$

la prima delle (12.7) è verificata poichè Θ è costante lungo l'asse della trave per ipotesi, la seconda è anch'essa verificata essendo $\operatorname{div}(\mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}) = 0$.

Le condizioni ai limiti (10.14) sul mantello della trave ∂A si riducono a:

$$0 = \boldsymbol{\tau} \bullet \mathbf{n} = G \Theta (\mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}) \bullet \mathbf{n} \quad (12.8)$$

che risulta banalmente verificata essendo, in ogni punto della frontiera della sezione retta, \mathbf{x} coassiale con \mathbf{n} , normale al contorno della sezione retta, cioè $\mathbf{n} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$.

Non resta ora che controllare l'equivalenza tra la risultante delle tensioni agenti sulle basi della trave e la sollecitazione di momento torcente. Poichè $\sigma_{33} = 0$, lo sforzo normale ed il momento flettente sono nulli. La risultante delle tensioni tangenziali vale:

$$\mathbf{V} = \int_A \boldsymbol{\tau} dA = G \Theta \mathbf{e}^3 \times \int_A \mathbf{x} dA = G \Theta \mathbf{e}^3 \times \mathbf{S} = \mathbf{0} \quad (12.9)$$

essendo il vettore momento statico nullo poichè il sistema di riferimento è baricentrico.

Il momento torcente sviluppato dalle tensioni tangenziali $\boldsymbol{\tau}$ vale:

$$\begin{aligned} M^t &= \mathbf{e}^3 \bullet \int_A \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau} dA = G \Theta \mathbf{e}^3 \bullet \int_A \mathbf{x} \times (\mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}) dA & (12.10) \\ &= G \Theta \int_A (\mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}) \bullet (\mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}) dA = G \Theta \int_A \mathbf{x} \bullet \mathbf{x} dA \\ &= G \Theta I_p \end{aligned}$$

essendo $I_p = \pi r^4/2$ il momento d'inerzia polare della sezione retta circolare di raggio r .

Si ricava allora dalla (12.10) l'espressione che fornisce l'angolo specifico di torsione in funzione del momento torcente esterno agente:

$$\Theta = \frac{M^t}{G I_p} \quad (12.11)$$

La soluzione completa del problema in termini di spostamenti, di deformazioni e di tensioni si ottiene sostituendo la (12.11) rispettivamente nelle (12.1), (12.3) e (12.6), che diventano rispettivamente:

$$\mathbf{u} = x_3 \frac{M^t}{G I_p} (\mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}) \quad (12.12)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{M^t}{G I_p} (\mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}) \quad (12.13)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{M^t}{I_p} (\mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}) \quad (12.14)$$

La tensione tangenziale massima τ_{\max} avviene per $\|\mathbf{x}\|$ massima, e cioè quando $\|\mathbf{x}\| = r$ e vale:

$$\tau_{\max} = \frac{2M^t}{\pi r^3} \quad (12.15)$$

Analogo ragionamento vale per la sezione circolare cava concentrica, per la quale il momento polare d'inerzia vale $I_p = \pi (r_e^4 - r_i^4)/2$, essendo r_e il raggio esterno ed r_i il raggio interno.

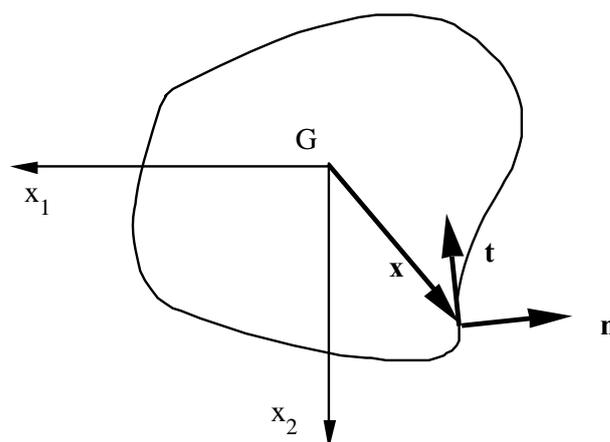


Figura 12.2: Torsione per la sezione generica.

12.3 Torsione per la sezione generica

La soluzione trovata per il caso della sezione circolare non va più bene quando la sezione della trave non ha forma circolare. Infatti, nel caso di sezione generica la condizione al contorno $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0$ in generale potrebbe non essere più soddisfatta, perchè può accadere che $\mathbf{n} \neq \mathbf{x} / \|\mathbf{x}\|$, come si può facilmente intuire dalla figura 12.2.

D'altra parte, il ragionamento che escludeva la possibilità di ingobbamento fatto su base intuitiva ma poi avvalorato dalle equazioni sviluppate per il caso della trave a sezione circolare, non è più valido quando la sezione della trave in esame è di forma generica.

12.3.1 Cinematica

La cinematica ipotizzabile nel caso di sezione qualsiasi consiste nella rotazione relativa tra le sezioni della trave secondo un'angolo specifico di rotazione Θ costante lungo l'asse della trave, come già visto per la sezione circolare, ed un ingobbamento della sezione anch'esso costante rispetto ad x_3 . In pratica si suppone che il vettore di spostamento abbia la forma:

$$\mathbf{u} = x_3 \Theta (\mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}) + \Theta \omega \mathbf{e}^3 \quad (12.16)$$

essendo $\omega = \omega(x_1, x_2)$ la funzione di ingobbamento che dipende solo dalla geometria della sezione.

Definito che sia il campo di spostamenti dalla (12.16) è possibile calcolare le

deformazioni ad esso associato:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = 0 \\ 2\varepsilon_{13} &= \Theta(\omega_{,1} - x_2) \\ 2\varepsilon_{23} &= \Theta(\omega_{,2} + x_1)\end{aligned}\tag{12.17}$$

ovvero, introducendo come in precedenza il vettore di deformazione:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{vmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{vmatrix} = \Theta(\nabla\omega + \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x})\tag{12.18}$$

12.3.2 Legame costitutivo

Le tensioni si ricavano tramite legame costitutivo:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{13} &= G \Theta(\omega_{,1} - x_2) \\ \sigma_{23} &= G \Theta(\omega_{,2} + x_1)\end{aligned}\tag{12.19}$$

ovvero, introducendo il vettore le cui due componenti sono proprio le tensioni tangenziali non nulle:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{vmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{vmatrix} = G \Theta(\nabla\omega + \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x})\tag{12.20}$$

12.3.3 Equilibrio

Le equazioni indefinite di equilibrio forniscono:

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \boldsymbol{\tau}_{,3} = G \Theta_{,3}(\nabla\omega + \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}) \\ 0 &= \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) = G \Theta \operatorname{div}(\nabla\omega + \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x})\end{aligned}\tag{12.21}$$

Come accadeva nel caso della sezione circolare, la prima delle (12.21) è verificata poichè, per ipotesi, Θ è costante lungo l'asse della trave. Al contrario, la seconda delle (12.21) non è automaticamente verificata e conduce all'equazione di campo:

$$\operatorname{div}(\nabla\omega) = \Delta\omega = \omega_{,11} + \omega_{,22} = 0\tag{12.22}$$

essendo $\operatorname{div}(\mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}) = 0$.

L'equazione ai limiti sul mantello della trave fornisce:

$$0 = \boldsymbol{\tau} \bullet \mathbf{n} = G \Theta(\nabla\omega + \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}) \bullet \mathbf{n}\tag{12.23}$$

La (12.23) equivale a:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla\omega \bullet \mathbf{n} + \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x} \bullet \mathbf{n} \\ &= \nabla\omega \bullet \mathbf{n} - \mathbf{e}^3 \times \mathbf{n} \bullet \mathbf{x} \\ &= \nabla\omega \bullet \mathbf{n} - \mathbf{t} \bullet \mathbf{x} \end{aligned} \quad (12.24)$$

essendo $\mathbf{t} = \mathbf{e}^3 \times \mathbf{n}$ la tangente al contorno della sezione retta. Posto $\rho^2 = \mathbf{x} \bullet \mathbf{x}$, il vettore posizione del generico punto della sezione si calcola come:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2} \nabla \rho^2 = \rho \nabla \rho \quad (12.25)$$

per cui la (12.24) si riscrive nella forma:

$$0 = \nabla\omega \bullet \mathbf{n} - \rho \nabla\rho \bullet \mathbf{t} \quad (12.26)$$

Allora, l'equazione di equilibrio al contorno si può scrivere come:

$$\nabla\omega \bullet \mathbf{n} = \rho \nabla\rho \bullet \mathbf{t} \quad (12.27)$$

12.3.4 Problema di Neumann

In definitiva l'equazione indefinita di equilibrio (12.22) e la condizione ai limiti (12.27) conducono al seguente problema alle derivate parziali per la determinazione di ω :

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= 0 && \text{in } A \\ \nabla\omega \bullet \mathbf{n} &= \rho \nabla\rho \bullet \mathbf{t} && \text{su } \partial A \end{aligned} \quad (12.28)$$

noto come problema di Neumann¹ per l'equazione di Laplace². E' chiaro l'aspetto puramente geometrico del problema (12.28). In analisi matematica si mostra che

¹**John von Neumann** (Budapest, 28 dicembre 1903 – Washington, 8 febbraio 1957) matematico e informatico statunitense di origine ungherese. Fu una delle personalità scientifiche preminenti del XX secolo cui si devono fondamentali contributi in campi come teoria degli insiemi, analisi funzionale, topologia, fisica quantistica, economia, informatica, teoria dei giochi, fluidodinamica e in molti altri settori della matematica.

²**Pierre Simon marchese di Laplace** (Beaumont-en-Auge, 23 marzo 1749 – Parigi, 5 marzo 1827) matematico, fisico e astronomo francese. Fu uno dei principali scienziati nel periodo napoleonico. Ha dato fondamentali contributi a vari campi della matematica, dell'astronomia e della teoria della probabilità ed è stato uno degli scienziati più influenti al suo tempo, anche per il suo contributo all'affermazione del determinismo. Laplace, infatti, diede la svolta finale all'astronomia matematica riassumendo ed estendendo il lavoro dei suoi predecessori nella sua opera in cinque volumi *Mécanique Céleste* (Meccanica Celeste) (1799-1825). Questo capolavoro ha trasformato lo studio geometrico della meccanica sviluppato da Newton in quello basato sull'analisi matematica. Nel 1799 fu nominato ministro degli interni da Napoleone che nel 1806 gli conferì il titolo di conte dell'Impero. Fu nominato marchese nel 1817, dopo la restaurazione dei Borboni.

la soluzione del problema di Neumann esiste ed unica, a meno di una costante arbitraria, purchè sia soddisfatta la condizione:

$$\int_{\partial A} \nabla \omega \bullet \mathbf{n} \, ds = 0 \quad (12.29)$$

Nel caso in esame la condizione di esistenza (12.29) è soddisfatta. Infatti, tenendo conto delle (12.27) e (12.25), si ha:

$$\int_{\partial A} \nabla \omega \bullet \mathbf{n} \, ds = \int_{\partial A} \rho \nabla \rho \bullet \mathbf{t} \, ds = \int_{\partial A} \frac{1}{2} \nabla \rho^2 \bullet \mathbf{t} \, ds = 0 \quad (12.30)$$

essendo $\nabla(\rho^2) \bullet \mathbf{t} \, ds$ un differenziale esatto.

La costante a meno della quale si individua la soluzione del problema rappresenta uno spostamento rigido lungo l'asse x_3 della trave. Indicando con $w = \mathbf{u} \bullet \mathbf{e}^3 = \Theta \omega$ la componente dello spostamento del generico punto in direzione dell'asse della trave, l'indeterminazione della soluzione del problema (12.28) è eliminata ponendo nullo lo spostamento medio:

$$\bar{w} = \frac{1}{A} \int_A w \, dA = \frac{1}{A} \Theta \int_A \omega \, dA = 0 \quad \implies \quad \int_A \omega \, dA = 0 \quad (12.31)$$

in tal modo la funzione $\omega(x_1, x_2)$ resta univocamente determinata.

12.3.5 Risultanti

Anche in questo caso è necessario verificare la validità della soluzione, controllando che la risultante sia nulla ed il momento risultante dia il momento torcente applicato.

A tale scopo si osserva inizialmente che le caratteristiche della sollecitazione \mathbf{N} ed \mathbf{M}^f sono nulle essendo $\sigma_{33} = 0$.

Si verifica poi che anche la caratteristica tagliante \mathbf{V} sia nulla; ricordando che $\boldsymbol{\tau} \bullet \mathbf{n} = 0$ su ∂A , si può scrivere:

$$\mathbf{0} = \int_{\partial A} \mathbf{x} (\boldsymbol{\tau} \bullet \mathbf{n}) \, ds = \int_{\partial A} \mathbf{x} (\sigma_{\alpha 3} n_\alpha) \, ds$$

che, per il teorema della divergenza fornisce:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial A} x_\beta (\sigma_{\alpha 3} n_\alpha) \, ds = \int_A (x_\beta \sigma_{\alpha 3})_{,\alpha} \, dA \\ &= \int_A x_\beta \sigma_{\alpha 3, \alpha} \, dA + \int_A x_{\beta, \alpha} \sigma_{\alpha 3} \, dA \\ &= \int_A x_\beta \sigma_{\alpha 3, \alpha} \, dA + \int_A \sigma_{\beta 3} \, dA = V_\beta \end{aligned} \quad (12.32)$$

visto che $\boldsymbol{\tau} \bullet \mathbf{n} = 0$ su ∂A .

Per quanto riguarda il momento torcente si ha:

$$\begin{aligned}
 M^t &= \mathbf{e}^3 \bullet \int_A \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau} \, dA = G \Theta \int_A (x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{13}) \, dA & (12.33) \\
 &= G \Theta \int_A [x_1 (\omega_{,2} + x_1) - x_2 (\omega_{,1} - x_2)] \, dA \\
 &= G \Theta \int_A (x_1^2 + x_2^2 + x_1 \omega_{,2} - x_2 \omega_{,1}) \, dA \\
 &= G \Theta \left[I_p + \int_A (x_1 \omega_{,2} - x_2 \omega_{,1}) \, dA \right]
 \end{aligned}$$

In definitiva si ottiene:

$$\Theta = \frac{M^t}{G \left(\int_A \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x} \bullet \nabla \omega \, dA + I_p \right)} = \frac{M^t}{G J_t} \quad (12.34)$$

dove J_t rappresenta il fattore di rigidezza torsionale:

$$J_t = I_p + \int_A (x_1 \omega_{,2} - x_2 \omega_{,1}) \, dA = I_p + \int_A \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x} \bullet \nabla \omega \, dA$$

La soluzione in termini di spostamenti, deformazioni e tensioni, del problema dell'equilibrio elastico della trave di sezione generica soggetta a torsione, è quindi:

$$\mathbf{u} = \frac{M^t}{G J_t} (\omega \mathbf{e}^3 + x_3 \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}) \quad (12.35)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{M^t}{G J_t} (\nabla \omega + \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}) \quad (12.36)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{M^t}{J_t} (\nabla \omega + \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}) \quad (12.37)$$

12.4 Centro di torsione

Nella trattazione fin qui svolta si è supposto che la rotazione delle sezioni della trave avvenga intorno all'origine del sistema di riferimento baricentrico.

Ora si suppone che le sezioni ruotino attorno ad un punto identificato da un vettore \mathbf{x}_c . In tal caso, ricordando la (12.16), la forma del campo di spostamenti è del tipo:

$$\mathbf{u} = \Theta [x_3 \mathbf{e}^3 \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) + \omega_c \mathbf{e}^3] \quad (12.38)$$

Le deformazioni ad esso associate sono:

$$\boldsymbol{\gamma} = \Theta [\nabla \omega_c + \mathbf{e}^3 \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)] \quad (12.39)$$

e le tensioni:

$$\boldsymbol{\tau} = G \Theta [\nabla \omega_c + \mathbf{e}^3 \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)] \quad (12.40)$$

Le equazioni indefinite dell'equilibrio (12.21) diventano:

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\tau}_{,3} = G \Theta [\nabla \omega_c + \mathbf{e}^3 \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)]_{,3} \quad (12.41)$$

$$0 = \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) = G \Theta \operatorname{div} [\nabla \omega_c + \mathbf{e}^3 \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)] = G \Theta \Delta \omega_c$$

e le equazioni ai limiti sul mantello della trave sono:

$$0 = \boldsymbol{\tau} \bullet \mathbf{n} = G \Theta [\nabla \omega_c + \mathbf{e}^3 \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)] \bullet \mathbf{n} \quad (12.42)$$

Ricordando la trattazione precedentemente svolta, l'equazione (12.42) equivale a:

$$\nabla (\omega_c + \mathbf{x} \bullet \mathbf{x}_c \times \mathbf{e}^3) \bullet \mathbf{n} = \rho \nabla \rho \bullet \mathbf{t} \quad (12.43)$$

Si giunge cioè al nuovo problema di Neumann:

$$\begin{aligned} \Delta (\omega_c + \mathbf{x} \bullet \mathbf{x}_c \times \mathbf{e}^3) &= 0 && \text{in } A \\ \nabla (\omega_c + \mathbf{x} \bullet \mathbf{x}_c \times \mathbf{e}^3) \bullet \mathbf{n} &= \rho \nabla \rho \bullet \mathbf{t} && \text{su } \partial A \end{aligned} \quad (12.44)$$

Come nel caso precedente la soluzione esiste ed è unica a meno di una costante di integrazione. Data l'unicità della soluzione del problema di Neuman le funzioni soluzioni della (12.28) e della (12.44) possono differire fra loro al più di una costante arbitraria c :

$$\omega_c = \omega + \mathbf{x} \bullet \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}_c + c \quad (12.45)$$

Le due terne di spostamento relative al problema (12.28) ed al problema (12.44) cioè differiscono solo di un moto rigido della trave.

Tra gli infiniti assi di rotazione possibili, si individua quello che dà luogo ad un moto medio nullo della sezione. Per cui si richiede non solo che sia nullo lo spostamento assiale medio ma anche le rotazioni medie intorno al generico asse ortogonale ad \mathbf{e}^3 . Per annullare lo spostamento assiale medio, si pone:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_A \omega_c dA = \int_A (\omega + \mathbf{x} \bullet \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}_c + c) dA \\ &= \int_A \omega dA + \int_A \mathbf{x} \bullet \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}_c dA + \int_A c dA \quad \implies \quad c = 0 \end{aligned} \quad (12.46)$$

essendo nullo l'ingobbamento medio dovuto ad ω ed avendo scelto il sistema di riferimento baricentrico, che rende nullo il vettore momento statico della sezione retta della trave.

Lo spostamento in direzione assiale del generico punto della sezione retta può d'altra parte essere visto come prodotto da una rotazione intorno ad un asse ortogonale ad \mathbf{e}^3 :

$$w \mathbf{e}^3 = \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{x} \quad (12.47)$$

con φ vettore rotazione funzione di \mathbf{x} , tale che $\varphi \bullet \mathbf{x} = 0$. Semplici calcoli algebrici mostrano che:

$$\varphi \times \mathbf{x} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & 0 \\ x_1 & x_2 & 0 \end{vmatrix} = (x_2\varphi_1 - x_1\varphi_2) \mathbf{e}^3 \quad (12.48)$$

Premoltiplicando vettorialmente ambo i membri della relazione (12.47) per \mathbf{x} e tenendo conto della relazione (12.48), si ottiene:

$$\begin{aligned} w \mathbf{x} \times \mathbf{e}^3 &= \mathbf{x} \times \mathbf{e}^3 [\varphi \bullet (\mathbf{x} \times \mathbf{e}^3)] \\ &= [(\mathbf{x} \times \mathbf{e}^3) \otimes (\mathbf{x} \times \mathbf{e}^3)] \varphi \end{aligned} \quad (12.49)$$

Integrando la (12.49) sull'area della sezione, si ha:

$$\begin{aligned} \int_A w \mathbf{x} \times \mathbf{e}^3 dA &= \int_A [(\mathbf{x} \times \mathbf{e}^3) \otimes (\mathbf{x} \times \mathbf{e}^3)] \varphi dA \\ &= \mathbf{J}^* \bar{\varphi} \end{aligned} \quad (12.50)$$

dove \mathbf{J}^* è il tensore d'inerzia, definito dalla (9.74), ruotato di $\pi/2$ rispetto a \mathbf{J} . Il vettore $\bar{\varphi}$ rappresenta la rotazione media che subisce la sezione, ottenuta dall'applicazione del teorema della media. Invertendo la (12.50) si ottiene la forma esplicita della rotazione media come:

$$\bar{\varphi} = (\mathbf{J}^*)^{-1} \int_A w \mathbf{x} \times \mathbf{e}^3 dA = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \mathbf{J} \int_A w \mathbf{x} \times \mathbf{e}^3 dA \quad (12.51)$$

In particolare, indicando con λ_1 ed λ_2 gli autovalori di \mathbf{J} , nel riferimento principale d'inerzia si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \lambda_1 \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^1 + \lambda_2 \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^2 \\ \mathbf{J}^* &= \lambda_2 \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^1 + \lambda_1 \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^2 \\ (\mathbf{J}^*)^{-1} &= \frac{1}{\lambda_2} \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^1 + \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^2 \end{aligned} \quad (12.52)$$

per cui le componenti del vettore rotazione media della sezione per la formula (12.51) sono:

$$\bar{\varphi}_1 = \frac{1}{\lambda_2} \int_A w x_2 dA \quad \bar{\varphi}_2 = -\frac{1}{\lambda_1} \int_A w x_1 dA \quad (12.53)$$

In base alla (12.51), e ricordando la (12.38), la rotazione media della sezione calcolata intorno ad un asse ortogonale ad x_3 che passa per il punto individuato dal vettore posizione \mathbf{x}_c vale:

$$\bar{\varphi}_c = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \mathbf{J} \int_A w_c \mathbf{x} \times \mathbf{e}^3 dA = \Theta \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \mathbf{J} \int_A \omega_c \mathbf{x} \times \mathbf{e}^3 dA \quad (12.54)$$

Sostituendo nella (12.54) l'espressione di ω_c fornita dalla (12.45), e tenendo conto della (12.46), si ha:

$$\begin{aligned}
 \bar{\varphi}_c &= \Theta \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \mathbf{J} \int_A (\omega + \mathbf{x} \bullet \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}_c) \mathbf{x} \times \mathbf{e}^3 dA & (12.55) \\
 &= \Theta \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \mathbf{J} \int_A [\omega \mathbf{x} \times \mathbf{e}^3 + (\mathbf{x} \bullet \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}_c) \mathbf{x} \times \mathbf{e}^3] dA \\
 &= \Theta \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \mathbf{J} \int_A [\omega \mathbf{x} \times \mathbf{e}^3 + (\mathbf{x}_c \bullet \mathbf{x} \times \mathbf{e}^3) \mathbf{x} \times \mathbf{e}^3] dA \\
 &= \Theta \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \mathbf{J} \int_A \{ \omega \mathbf{x} \times \mathbf{e}^3 + [(\mathbf{x} \times \mathbf{e}^3) \otimes (\mathbf{x} \times \mathbf{e}^3)] \mathbf{x}_c \} dA \\
 &= \Theta \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \mathbf{J} \left\{ \int_A \omega \mathbf{x} \times \mathbf{e}^3 dA + \mathbf{J}^* \mathbf{x}_c \right\}
 \end{aligned}$$

Il vettore posizione \mathbf{x}_c si determina imponendo che $\bar{\varphi}_c$ sia nullo, ovvero:

$$\int_A \omega \mathbf{x} \times \mathbf{e}^3 dA + \mathbf{J}^* \mathbf{x}_c = 0 \quad (12.56)$$

per cui si ha:

$$\mathbf{x}_c = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \mathbf{J} \int_A \omega \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x} dA \quad (12.57)$$

Il punto della sezione retta individuato dal vettore posizione \mathbf{x}_c definito dalla formula (12.57) è detto centro di torsione. La (12.57) mostra che esso dipende solo dalla geometria del problema e non dal materiale o dalle forze agenti.

Nel sistema di riferimento principale d'inerzia, si ha:

$$x_{c1} = -\frac{1}{\lambda_2} \int_A \omega x_2 dA \quad x_{c2} = \frac{1}{\lambda_1} \int_A \omega x_1 dA \quad (12.58)$$

12.5 Funzione di Prandtl

Il problema della torsione può essere risolto in maniera alternativa attraverso l'uso della funzione di Prandtl detta anche la funzione delle tensioni.

Si suppone che le tensioni derivino dalla funzione delle tensioni (o di Prandtl) $F = F(x_1, x_2)$ tramite la relazione:

$$\boldsymbol{\tau} = \left\{ \begin{array}{c} F_{,2} \\ -F_{,1} \end{array} \right\} = -\mathbf{e}^3 \times \nabla F \quad (12.59)$$

ovvero in componenti:

$$\tau_1 = F_{,2} \quad \tau_2 = -F_{,1} \quad (12.60)$$

In tal modo la terza equazione indefinita di equilibrio ($div(\boldsymbol{\tau}) = 0$) è automaticamente soddisfatta.

12.5.1 Problema di Dirichlet

Tenendo conto che le tensioni normali agenti sulla sezione retta sono nulle nella sollecitazione di torsione, la quarta e la quinta equazione indefinita di congruenza (10.19), scritte nel caso generale del problema della trave, conducono a:

$$\begin{aligned} (\sigma_{13,2} - \sigma_{23,1})_{,1} &= 0 \\ (\sigma_{13,2} - \sigma_{23,1})_{,2} &= 0 \end{aligned} \quad (12.61)$$

ovvero il rotore del vettore $\boldsymbol{\tau}$ deve essere un vettore costante. Ricordando l'espressione (12.20) del vettore tensione tangenziale ottenuto partendo dalla cinematica del problema, si ha:

$$\mathbf{e}^3 \bullet \text{rot}(\boldsymbol{\tau}) = G \Theta (\omega_{,21} - \omega_{,12} + 1 + 1) = 2 G \Theta \quad (12.62)$$

e quindi, ricordando la (12.61):

$$2 G \Theta = -(F_{,11} + F_{,22}) = -\Delta F \quad (12.63)$$

L'equazione (12.63) rappresenta la condizione necessaria e sufficiente di congruenza solo quando la sezione è monoconnessa.

Per quanto riguarda la condizione di equilibrio sul mantello della trave, la (12.23) si trasforma in:

$$0 = -\mathbf{e}^3 \times \nabla F \bullet \mathbf{n} = \nabla F \bullet \mathbf{e}^3 \times \mathbf{n} = \nabla F \bullet \mathbf{t} \quad (12.64)$$

cioè F costante su ∂A . Nel caso di sezione monoconnessa la costante può essere posta uguale a zero perchè lo stato tensionale non dipende da questa costante, essendo ottenuto come gradiente di F .

L'equazione di campo (12.63) con la condizione al limite (12.64) conducono al problema di Dirichlet:

$$\begin{aligned} \Delta F &= -2 G \Theta && \text{in } A \\ F &= 0 && \text{su } \partial A \end{aligned} \quad (12.65)$$

Naturalmente, una qualsiasi funzione \widehat{F} definita come:

$$\widehat{F} = F + k$$

con k costante risolve il problema (12.65).

12.5.2 Risultanti

Nasce ora l'esigenza di verificare che la risultante delle tensioni sia nulla e che il momento risultante fornisca una sollecitazione di pura torsione. La risultante delle tensioni tangenziali $\boldsymbol{\tau}$ definite dalla relazione (12.59) vale:

$$\mathbf{V} = \int_A \boldsymbol{\tau} \, dA = \int_A \nabla F \times \mathbf{e}^3 \, dA = \int_{\partial A} F \mathbf{n} \times \mathbf{e}^3 \, ds = \mathbf{0} \quad (12.66)$$

essendo $F = 0$ sul contorno della sezione. Anche qualora si consideri la funzione \widehat{F} , che assume valore k sul contorno, si dimostra agevolmente che $\mathbf{V} = \mathbf{0}$. Infatti:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \int_A \boldsymbol{\tau} \, dA = \int_A \nabla \widehat{F} \times \mathbf{e}^3 \, dA \\ &= \int_{\partial A} F \mathbf{n} \times \mathbf{e}^3 \, ds + k \int_{\partial A} \mathbf{n} \times \mathbf{e}^3 \, ds \\ &= \mathbf{0} - k \int_{\partial A} \mathbf{t} \, ds = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (12.67)$$

Il momento torcente vale invece:

$$\begin{aligned} M^t &= \mathbf{e}^3 \bullet \int_A \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau} \, dA = \mathbf{e}^3 \bullet \int_A \mathbf{x} \times (\nabla F \times \mathbf{e}^3) \, dA \\ &= - \int_A \mathbf{x} \bullet [\mathbf{e}^3 \times (\nabla F \times \mathbf{e}^3)] \, dA = - \int_A \mathbf{x} \bullet \nabla F \, dA \\ &= - \int_A \operatorname{div}(F \mathbf{x}) \, dA + \int_A F \operatorname{div}(\mathbf{x}) \, dA \\ &= - \int_{\partial A} F \mathbf{x} \bullet \mathbf{n} \, ds + \int_A 2 F \, dA \end{aligned} \quad (12.68)$$

ma il primo integrale dell'ultimo termine è nullo, essendo per la seconda delle (12.65) $F = 0$ su ∂A , per cui si ha:

$$M^t = \int_A 2 F \, dA \quad (12.69)$$

Nel caso si consideri \widehat{F} si perviene allo stesso risultato. Infatti, si ha:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\partial A} \widehat{F} \mathbf{x} \bullet \mathbf{n} \, ds + \int_A 2 \widehat{F} \, dA \\
 = & - \int_{\partial A} F \mathbf{x} \bullet \mathbf{n} \, ds - k \int_{\partial A} \mathbf{x} \bullet \mathbf{n} \, ds + \int_A 2 F \, dA + 2 k \int_A dA \\
 = & 0 - k \int_A \operatorname{div} \mathbf{x} \, dA + \int_A 2 F \, dA + 2 k A \\
 = & 0 - k \int_A 2 \, dA + \int_A 2 F \, dA + 2 k A \\
 = & 0 - 2 k A + \int_A 2 F \, dA + 2 k A \\
 = & \int_A 2 F \, dA
 \end{aligned}$$

12.5.3 Ingobbamento

Infine, invertendo la relazione (12.20) e tenendo conto della (12.59) si ricava l'espressione del gradiente della funzione di ingobbamento ω in funzione della funzione delle tensioni F :

$$\begin{aligned}
 \nabla \omega &= \frac{1}{G \Theta} \boldsymbol{\tau} - \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x} = \frac{1}{G \Theta} \mathbf{e}^3 \times (\nabla F - \mathbf{x}) \\
 &= \frac{1}{G \Theta} \left\{ \begin{array}{c} F_{,2} \\ -F_{,1} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} x_2 \\ -x_1 \end{array} \right\}
 \end{aligned} \tag{12.70}$$

Noti che siano la funzione F e l'angolo unitario di torsione Θ tramite le equazioni (12.65) e (12.69), dalla (12.70) si ricava ω in funzione del momento torcente e quindi si definiscono gli spostamenti della trave.

12.6 Sezione rettangolare allungata

Si considera ora il caso in cui la sezione della trave di forma rettangolare di dimensione $a \times b$ con un lato di dimensione molto maggiore dell'altro: $a \gg b$. In questo caso non appare applicabile a rigore il principio di Saint-Venant, in quanto, come risulta evidente, la sezione non è compatta. Si suppone allora che la sollecitazione di torsione sia applicata in modo opportuno sulle basi della trave, ed in seguito si vedrà cosa si intende per *modo opportuno*.

Si sceglie il sistema di riferimento in modo tale che l'origine sia baricentrica e l'asse x_1 sia parallelo al lato maggiore a , come mostrato in figura 12.3.

Se la sezione rettangolare è sufficientemente allungata, ed al limite il rapporto a/b tra il lato maggiore e quello minore tende ad infinito, appare giustificato supporre

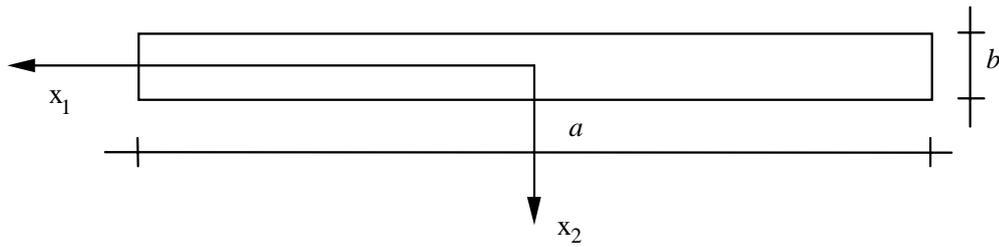


Figura 12.3: Sezione rettangolare allungata.

che la tensione tangenziale $\boldsymbol{\tau}$ non dipenda dall'ascissa x_1 . Ciò significa che $\boldsymbol{\tau}_{,1} = \mathbf{0}$. La terza equazione indefinita di equilibrio (12.21), riscritta nella forma:

$$\tau_{1,1} + \tau_{2,2} = 0 \quad (12.71)$$

assicura che $\tau_{2,2} = 0$, ovvero la componente tangenziale τ_2 non dipende da x_2 . D'altra parte, la condizione al contorno sul mantello della trave (12.23) impone che sul bordo ∂A della sezione la tensione tangenziale sia tangente al bordo stesso. Se ne deduce che sui due lati maggiori della sezione rettangolare la tensione tangenziale ha componente solo lungo la direzione x_1 , ovvero $\tau_2(\pm b/2) = 0$. Allora lungo ogni corda la componente tangenziale τ_2 è nulla.

12.6.1 Funzione di Prandtl

Si vuole ora affrontare il problema della torsione per la sezione rettangolare allungata tramite la teoria di Prandtl, utilizzando cioè la funzione delle tensioni F . Sulla base delle considerazioni appena sviluppate, si tratta di costruire una funzione F che soddisfa le condizioni (12.65), ovvero che sia a laplaciano costante e che assuma valore nullo per $x_2 = \pm b/2$. A tale scopo si assume:

$$F = c \left(x_2 + \frac{b}{2} \right) \left(x_2 - \frac{b}{2} \right) = c \left(x_2^2 - \frac{b^2}{4} \right) \quad (12.72)$$

con c costante che viene determinata utilizzando l'equazione di congruenza nel campo A (12.65₁):

$$\Delta F = 2c = -2G\Theta \quad (12.73)$$

In definitiva, ricavando la costante c dall'equazione (12.73) e sostituendola nella forma di rappresentazione di F (12.72), si ottiene:

$$F = -G\Theta \left(x_2^2 - \frac{b^2}{4} \right) \quad (12.74)$$

L'angolo specifico di torsione Θ si calcola imponendo che il momento risultante delle tensioni tangenziali sia il valore assegnato M^t . Infatti, utilizzando la formula (12.69) si ha:

$$M^t = \int_A 2 F dA = -2 G \Theta \int_A \left(x_2^2 - \frac{b^2}{4} \right) dA = G \Theta J_t \quad (12.75)$$

dove il fattore di rigidità torsionale J_t vale:

$$J_t = \frac{a b^3}{3} \quad (12.76)$$

Invertendo la (12.75), tenuto conto della relazione (12.76), si ottiene finalmente:

$$\Theta = \frac{3 M^t}{G a b^3} \quad (12.77)$$

Una volta trovato il valore di Θ si sostituisce nell'espressione (12.74) della funzione di Prandtl F e si ottiene:

$$F = -\frac{3 M^t}{a b^3} \left(x_2^2 - \frac{b^2}{4} \right) \quad (12.78)$$

Infine, utilizzando le espressioni (12.60) che forniscono le componenti della tensione tangenziale in funzione di F , si ha:

$$\tau_1 = F_{,2} = -\frac{6 M^t}{a b^3} x_2 \quad \tau_2 = -F_{,1} = 0 \quad (12.79)$$

Il *modo opportuno*, di cui si parlava in precedenza, con il quale viene applicata la sollecitazione di torsione sulle basi della trave, è definito dalla forma delle tensioni tangenziali (12.79).

Nella generica sezione della trave, la tensione tangenziale massima in valore assoluto si ha per $x_2 = \pm b/2$:

$$\tau_{\max} = \frac{3 M^t}{a b^2} \quad (12.80)$$

12.6.2 Effetto di bordo

Tenendo conto dell'equazione (12.74) l'espressione della tensione tangenziale (12.79) può essere riscritta nella forma equivalente:

$$\tau_1 = -2 G \Theta x_2 \quad \tau_2 = 0 \quad (12.81)$$

Volendo allora calcolare il valore del momento torcente M^t in funzione di Θ , come momento risultante della distribuzione delle tensioni tangenziali espresse dalla (12.81), si ha:

$$\begin{aligned} M^t &= \mathbf{e}^3 \bullet \int_A \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau} \, dA = \mathbf{e}^3 \bullet \int_A \mathbf{x} \times \mathbf{e}^1 (-2 G \Theta x_2) \, dA & (12.82) \\ &= \int_A \mathbf{x} \bullet \mathbf{e}^1 \times \mathbf{e}^3 (-2 G \Theta x_2) \, dA = 2 G \Theta \int_A \mathbf{x} \bullet \mathbf{e}^2 x_2 \, dA \\ &= 2 G \Theta \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} (x_2)^2 \, dx_1 \, dx_2 = G \Theta \frac{a b^3}{6} \end{aligned}$$

Si evidenzia che il risultato appena ottenuto tramite l'espressione (12.82) è in contrasto con quello ottenuto tramite la formula (12.75). Infatti la (12.82) fornisce un momento torcente pari alla metà di quello calcolato con la (12.75). Tale risultato è dovuto all'approssimazione ipotizzata sull'andamento del vettore $\boldsymbol{\tau}$ nella sezione.

L'espressione (12.74) considerata per la funzione F di Prandtl non è coerente con la trattazione di Saint-Venant in quanto non soddisfa la condizione (12.65₂) per $x_1 = \pm a/2$. Ciò induce un errore che ovviamente è sensibile nella prossimità degli estremi della sezione e trascurabile nel resto della sezione, purchè il rettangolo sia sufficientemente allungato. Tale approssimazione sulla funzione F a sua volta induce un'approssimazione sull'andamento delle tensioni tangenziali nella sezione. Esse possono essere considerate valutate con buona approssimazione nella parte centrale della sezione, mentre presentano un andamento inaccettabile, secondo la teoria sviluppata da Saint-Venant, per $x_1 = \pm a/2$.

In realtà, volendo soddisfare la condizione di mantello scarico su tutta la frontiera della sezione, si dovrà ammettere un differente andamento delle tensioni tangenziali, rispetto a quello definito dalla (12.79) o (12.81), in particolare in prossimità delle due zone di estremità della sezione.

Si consideri allora una di queste due zone, e si imponga la condizione di equilibrio su una qualsiasi parte \mathcal{P} della sezione che risieda in questa zona, come mostrato in figura 12.4.

L'equazione di equilibrio scritta in forma integrale su \mathcal{P} fornisce:

$$0 = \int_{\mathcal{P}} \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) \, dA = \int_{\partial\mathcal{P}} \boldsymbol{\tau} \bullet \mathbf{n} \, ds \quad (12.83)$$

ovvero, come noto per i cosiddetti campi solenoidali a divergenza nulla, il flusso del vettore $\boldsymbol{\tau}$ entrante deve eguagliare quello uscente nella parte \mathcal{P} della sezione. Con riferimento alla figura 12.4, volendo allora rispettare la condizione di mantello laterale della trave scarico, si dovrà supporre che, per bilanciare il flusso entrante in \mathcal{P} , la tensione tangenziale in prossimità degli estremi della sezione deve cambiare direzione ed assumere quindi componente non nulla in direzione di x_2 . In definitiva,

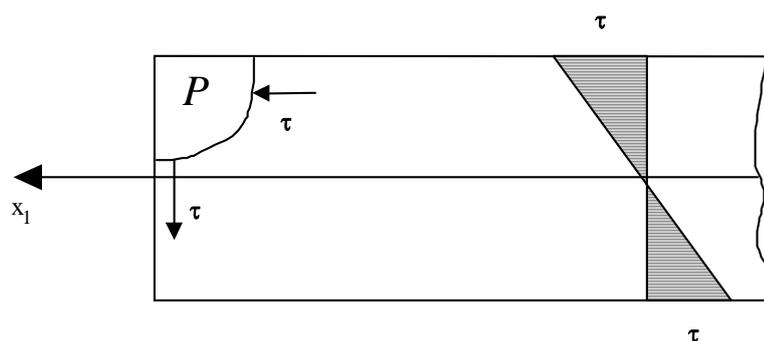


Figura 12.4: Zona di estremità della sezione rettangolare allungata.

nelle zone in prossimità di $x_1 = \pm a/2$ si hanno tensioni tangenziali con componente non nulla in direzione x_2 .

Ora, si torni al problema sorto dalla constatazione della differente valutazione del momento torcente fornita dalle espressioni (12.75) e (12.82). Si nota allora che tramite la (12.75) si commette un errore tanto più piccolo nella valutazione del volume definito dalla funzione F , quanto più la sezione è allungata. Infatti la funzione delle tensioni risulta errata solo in prossimità delle parti terminali della sezione. Al contrario, tramite la (12.82), l'errore commesso è notevole in quanto nella valutazione del momento torcente non si è tenuto assolutamente conto delle tensioni tangenziali agenti in direzione x_2 nella prossimità dei bordi della sezione. Tali tensioni, per quanto relative ad una zona di piccola estensione, hanno un braccio d'applicazione pari circa $\pm a/2$, e quindi contribuiscono notevolmente nel calcolo del momento torcente. Per correggere allora la formula (12.82) si dovrà tener conto anche del momento torcente derivante dalle tensioni tangenziali τ_2 agenti nelle vicinanze delle estremità della sezione rettangolare.

A tale scopo si suppone per semplicità che la dimensione d di ognuna delle due zone di estremità della sezione ove si hanno tensioni tangenziali τ_2 sia molto piccola, come schematicamente riportato in figura 12.5.

Tenendo conto della formula (12.81₁), il flusso q_1 delle tensioni tangenziali τ_1 vale:

$$q_1 = \int_{-b/2}^{x_2} \tau_1 d\eta = -2 G \Theta \int_{-b/2}^{x_2} \eta d\eta = G \Theta \left(\frac{b^2}{4} - x_2^2 \right) \quad (12.84)$$

Si consideri ora come parte P la zona della sezione delimitata dalla linea tratteggiata in figura 12.5. L'equazione (12.83) impone che il flusso totale q_1 delle tensioni tangenziali τ_1 entranti in P eguagli il flusso totale q_2 delle tensioni tangenziali τ_2

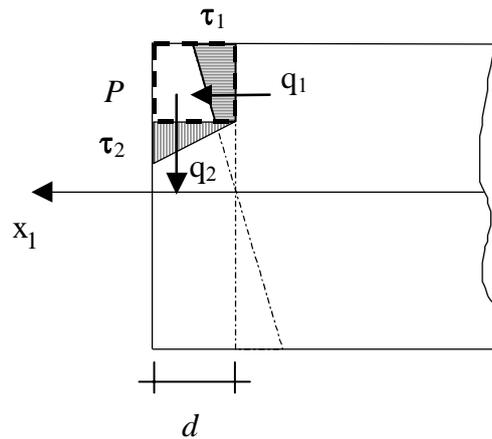


Figura 12.5: Distribuzione delle tensioni tangenziali nella zona di estremità della sezione rettangolare.

uscanti da P . Ciò implica che:

$$q_2 = q_1 = G \Theta \left(\frac{b^2}{4} - x_2^2 \right) \quad (12.85)$$

Se la dimensione di d tende a zero, il valore di q_2 non cambia. In tal modo, su ognuna delle due corde di estremità della sezione rettangolare agirà una distribuzione parabolica di q_2 . La risultante del flusso q_2 vale:

$$R = \int_{-b/2}^{b/2} q_2 dx_2 = G \Theta \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{b^2}{4} - x_2^2 \right) dx_2 = G \Theta \frac{b^3}{6} \quad (12.86)$$

In definitiva, si può calcolare il momento torcente risultante dalla distribuzione delle tensioni tangenziali come la somma del momento torcente ricavato dalla formula (12.82) aumentato dell'apporto provocato dalla presenza delle forze R agenti sulle estremità della sezione:

$$M^t = G \Theta \frac{a b^3}{6} + G \Theta \frac{b^3}{6} a = G \Theta \frac{a b^3}{3} \quad (12.87)$$

che coincide perfettamente con la formula (12.75).

12.6.3 Ingobbamento

Infine, per quanto riguarda l'ingobbamento, la (12.70), per la particolare forma di F (12.74), fornisce:

$$\nabla \omega = \frac{1}{G \Theta} \left\{ \begin{array}{c} F_{,2} \\ -F_{,1} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} x_2 \\ -x_1 \end{array} \right\} = - \left\{ \begin{array}{c} 2x_2 \\ 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} x_2 \\ -x_1 \end{array} \right\} = - \left\{ \begin{array}{c} x_2 \\ x_1 \end{array} \right\} \quad (12.88)$$

ovvero:

$$\omega_{,1} = -x_2 \quad \omega_{,2} = -x_1 \quad (12.89)$$

che integrate forniscono:

$$\omega = -x_1 x_2 + k \quad (12.90)$$

essendo k una costante di integrazione. Dall'equazione (12.90) si desume che l'ingobbamento della sezione generica della trave ha la forma di un paraboloide iperbolico.

12.7 Sezione sottile aperta

Si considera il caso in cui la sezione retta della trave sia costituita da una striscia sottile di materiale di spessore variabile o non, avente come linea media la curva piana, di lunghezza a , di equazione:

$$x_1 = x_1(\zeta) \quad x_2 = x_2(\zeta) \quad (12.91)$$

con ζ ascissa curvilinea del generico punto della linea media misurata a partire da un'origine O , generalmente scelta in corrispondenza di un'estremità della linea. Si assume per ipotesi che la linea media non formi circuiti chiusi. In questo caso per corda relativa all'ascissa curvilinea ζ si intende sempre quella ortogonale alla linea media della sezione, cui corrisponde uno spessore $b(\zeta)$.

La sezione sottile deve soddisfare alcuni requisiti geometrici:

- $a \gg b(\zeta) \quad \forall \zeta$
- $\frac{d}{d\zeta} b(\zeta) \ll 1 \quad \forall \zeta$
- $\rho(\zeta) \gg b(\zeta) \quad \forall \zeta$

ove $\rho(\zeta)$ rappresenta il raggio di curvatura della linea media della sezione valutato in corrispondenza dell'ascissa curvilinea ζ .

Si esamina inizialmente un tratto di lunghezza infinitesima $d\zeta$ della sezione sottile. Si sceglie un riferimento locale destrorso definito dal versore \mathbf{t} della tangente alla linea media della sezione e dal versore \mathbf{m} definito come $\mathbf{m} = \mathbf{e}^3 \times \mathbf{t}$. Il generico punto giacente sulla corda $b(\zeta)$ è individuato dalla distanza κ dalla linea media, come mostrato in figura 12.6. Se il raggio di curvatura $\rho(\zeta)$ della linea media della striscia di materiale è grande rispetto alla corda generica $b(\zeta)$, l'elemento di sezione di lunghezza $d\zeta$ può con buona approssimazione essere considerato come un tratto di una sezione di forma rettangolare allungata.

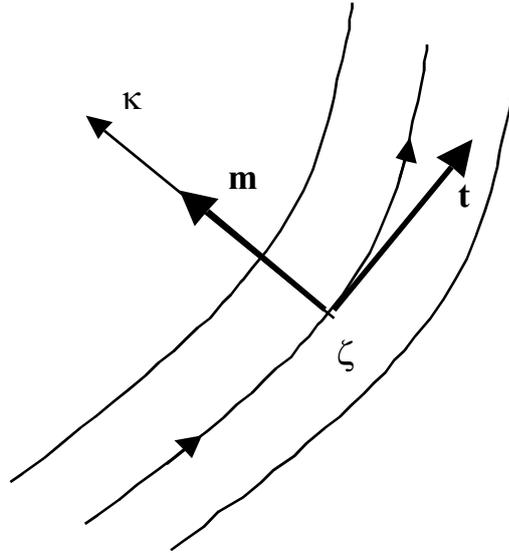


Figura 12.6: Generico tratto della sezione sottile.

Analogamente al caso della sezione rettangolare allungata, in corrispondenza della generica ascissa curvilinea, la funzione di Prandtl F può essere scelta con buona approssimazione come quella definita dalla formula (12.74):

$$F = -G \Theta \left(\kappa^2 - \frac{b(\zeta)^2}{4} \right) \quad (12.92)$$

L'aliquota infinitesima di momento torcente assorbita dal tratto di lunghezza $d\zeta$ per la relazione (12.69) vale:

$$dM^t = -2 G \Theta d\zeta \int_{-b/2}^{b/2} \left(\kappa^2 - \frac{b(\zeta)^2}{4} \right) d\kappa = G \Theta \frac{b(\zeta)^3}{3} d\zeta \quad (12.93)$$

Integrando la (12.93) su tutta la linea media della sezione sottile allungata, si deve ottenere il valore del momento torcente totale agente sulla sezione aperta:

$$M^t = G \Theta \int_0^a \frac{b(\zeta)^3}{3} d\zeta = G \Theta J_t \quad (12.94)$$

Le tensioni tangenziali si calcolano tenendo conto delle espressioni (12.60), cioè derivando la funzione delle tensioni F definita dalla (12.92) rispetto alla coordinata nello spessore κ e rispetto all'ascissa curvilinea ζ . In definitiva di ha:

$$\begin{aligned} \tau_\zeta &= F_{,\kappa} = -2 G \Theta \kappa \\ \tau_\kappa &= -F_{,\zeta} = \frac{1}{2} G \Theta \frac{d b(\zeta)}{d\zeta} b(\zeta) \approx 0 \end{aligned} \quad (12.95)$$

ove l'ultimo termine della (12.95₂) è tanto più piccolo, e quindi trascurabile, quanto più lo spessore della sezione varia lentamente lungo l'ascissa curvilinea. In termini di momento torcente applicato, la componente non trascurabile della tensione tangenziale si determina dalle relazioni (12.95₁) e (12.94):

$$\tau_\zeta = -\frac{2 M^t}{J_t} \kappa \quad (12.96a)$$

che risulta analoga alla formula (12.79) ottenuta per la sezione rettangolare allungata. Infine la tensione tangenziale massima in valore assoluto, relativa all'ascissa curvilinea ζ , vale:

$$\tau_{\max} = \frac{M^t}{J_t} b(\zeta) \quad (12.97a)$$

Nel caso che la sezione sottile ha spessore costante, cioè la dimensione b della corda non dipende dall'ascissa curvilinea ζ , il fattore di rigidezza torsionale J_t vale:

$$J_t = \int_0^a \frac{b(\zeta)^3}{3} d\zeta = \frac{a b^3}{3} \quad (12.98)$$

Si nota che l'espressione della rigidezza torsionale (12.98) è perfettamente analoga a quella determinata per la sezione rettangolare allungata.

L'ingobbamento ω della sezione si calcola, come già fatto per la sezione rettangolare allungata, tramite la relazione (12.70). Infatti, il differenziale $d\omega$ lungo la linea media vale:

$$\begin{aligned} d\omega &= \nabla\omega \bullet \mathbf{t} d\zeta = \frac{1}{G \Theta} \boldsymbol{\tau} \bullet \mathbf{t} d\zeta - \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x} \bullet \mathbf{t} d\zeta \\ &= -\mathbf{x} \bullet \mathbf{n} d\zeta = -h d\zeta \end{aligned} \quad (12.99)$$

essendo nulla la tensione tangenziale $\boldsymbol{\tau}$ valutata in corrispondenza sulla linea media ed avendo indicato con $h(\zeta)$ la minima distanza tra la retta tangente la curva in ζ e l'origine degli assi di riferimento.

In definitiva la funzione di ingobbamento ω , per l'equazione (12.99) si calcola come:

$$\omega(\zeta) = \int_0^\zeta d\omega(\hat{\zeta}) = -\int_0^\zeta h(\hat{\zeta}) d\hat{\zeta} \quad (12.100)$$

con $\hat{\zeta}$ valore generico dell'ascissa curvilinea tra 0 e ζ .

12.8 Sezione sottile chiusa

Si esamina ora il caso in cui la linea media della sezione sottile formi un circuito chiuso. In tal caso la sezione è detta chiusa. L'ascissa curvilinea ζ che percorre

la sezione chiusa è scelta in modo da girare in senso antiorario lungo la striscia di materiale che definisce la sezione.

Il problema della torsione per la sezione sottile chiusa si affronta, come già fatto per la sezione rettangolare allungata e per la sezione sottile aperta, in termini di tensioni. A tale scopo, la condizione di congruenza (12.62), scritta ora nel riferimento $\mathbf{t m}$ definito come in precedenza per la sezione aperta in figura 12.6, nel generico punto giacente sulla linea media della sezione sottile fornisce:

$$\tau_{\kappa,\zeta} - \tau_{\zeta,\kappa} = 2 G \Theta \quad (12.101)$$

D'altra parte visto che lo spessore è piccolo rispetto alla lunghezza della linea media della sezione, si può ragionevolmente supporre, come già fatto per la sezione rettangolare allungata e per la sezione sottile aperta, che la componente della tensione tangenziale in direzione normale τ_κ sia nulla. Allora integrando l'equazione differenziale (12.101), se ne deduce che la tensione tangenziale in direzione di \mathbf{t} è funzione lineare di κ e si può esprimere come:

$$\tau_\zeta = -2 G \Theta \kappa + \tau_c = \tau_a + \tau_c \quad (12.102)$$

dove τ_c rappresenta una costante di integrazione che in generale dipende dall'ascissa curvilinea ζ . Tramite la formula (12.102) la tensione tangenziale si scrive come somma di una parte τ_a che, per la (12.95₁), equivale alla tensione tangenziale per una sezione di uguale geometria, ma aperta, e da una parte τ_c dovuta proprio al fatto che la sezione è chiusa. In definitiva, la tensione tangenziale per una sezione sottile chiusa soggetta a torsione assume la forma:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_a + \boldsymbol{\tau}_c = (\tau_a + \tau_c) \mathbf{t} \quad (12.103)$$

Ne seguito viene trascurata la parte τ_a della tensione tangenziale, in quanto, come sarà dimostrato risulta generalmente molto più piccola di τ_c .

Lo stato tensionale determinato dal campo di tensioni tangenziali $\boldsymbol{\tau}_c$ rispetta ovunque la condizione di equilibrio sul mantello della trave. Si verifica allora il soddisfacimento della terza equazione indefinita di equilibrio per il tratto generico tratto della sezione sottile chiusa, come illustrato in figura 12.7. Scelta che sia la posizione sulla linea media dell'origine dell'ascissa curvilinea, si indichi con P la parte di sezione retta delimitata dalle corde $b(\zeta_1)$ e $b(\zeta_2)$. L'equazione di equilibrio della parte P fornisce:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_P \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}_c) dA = \int_{\partial P} \boldsymbol{\tau}_c \bullet \mathbf{n} ds = \int_{\partial P} \tau_c \mathbf{t} \bullet \mathbf{n} ds \\ &= \int_{-b(\zeta_1)/2}^{b(\zeta_1)/2} \tau_c \mathbf{t} \bullet \mathbf{n} ds + \int_{-b(\zeta_2)/2}^{b(\zeta_2)/2} \tau_c \mathbf{t} \bullet \mathbf{n} ds \\ &= - \int_{-b(\zeta_1)/2}^{b(\zeta_1)/2} \tau_c ds + \int_{-b(\zeta_2)/2}^{b(\zeta_2)/2} \tau_c ds = \tau_c(\zeta_2) b(\zeta_2) - \tau_c(\zeta_1) b(\zeta_1) \end{aligned} \quad (12.104)$$

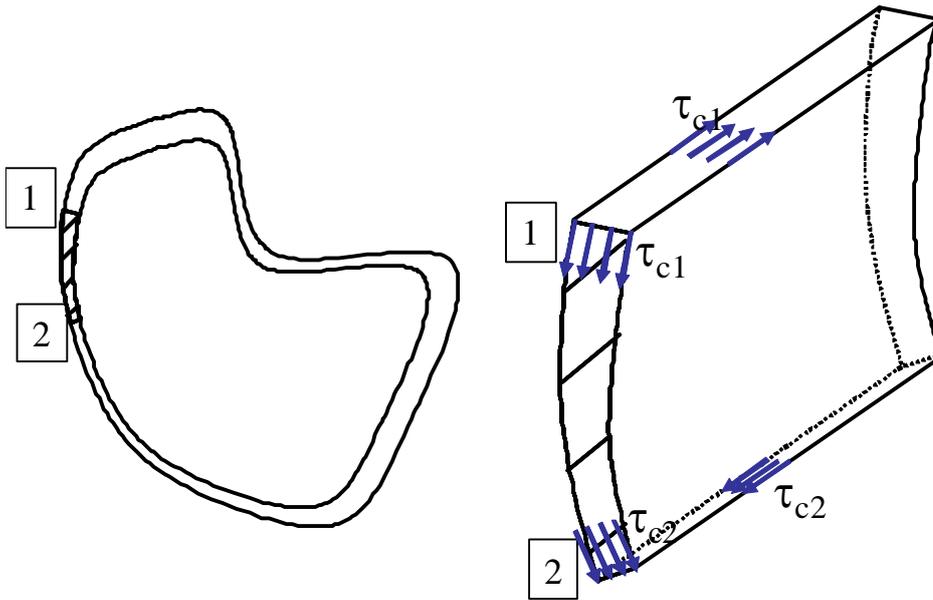


Figura 12.7: Tensioni tangenziali per la sezione chiusa.

ove \mathbf{n} rappresenta, come al solito, il versore della normale uscente a P . Vista la casuale scelta delle ascisse curvilinee ζ_1 e ζ_2 l'equazione (12.104) conduce al risultato che il prodotto $\tau_c(\zeta) b(\zeta)$ è costante su tutta la sezione sottile chiusa. Allo stesso risultato è possibile pervenire imponendo l'equilibrio della parte di trave di lunghezza unitaria, definita dalle due parti di sezioni definite dalle corde 1 e 2:

$$\tau_{c1} b_1 = \tau_{c2} b_2$$

con evidente significato dei simboli.

Per prima cosa è necessario verificare che la distribuzione di tensioni tangenziali τ_c fornisca una sollecitazione di pura torsione. A tale scopo si deve inizialmente controllare che la risultante \mathbf{V} delle tensioni tangenziali definite dalla (12.102) sia nulla. Si ha infatti:

$$\mathbf{V} = \int_A \tau_c \mathbf{t} dA = \tau_c b \int_0^a \mathbf{t} d\zeta = \mathbf{0} \quad (12.105)$$

Con riferimento alla figura 12.8, il momento risultante delle tensioni tangenziali M^{tc} dovuta alle tensioni tangenziali τ_c vale:

$$M^{tc} = \mathbf{e}^3 \bullet \int_A \mathbf{x} \times \tau_c \mathbf{t} dA = \tau_c b \int_0^a h(\zeta) d\zeta = 2 \tau_c b \Omega \quad (12.106)$$

dove $h(\zeta) d\zeta$ è il doppio dell'area del triangolo di base $d\zeta$ ed altezza $h(\zeta)$ rappresentato in figura 12.8 e Ω rappresenta l'area della figura geometrica che ha per contorno la linea media della sezione sottile.

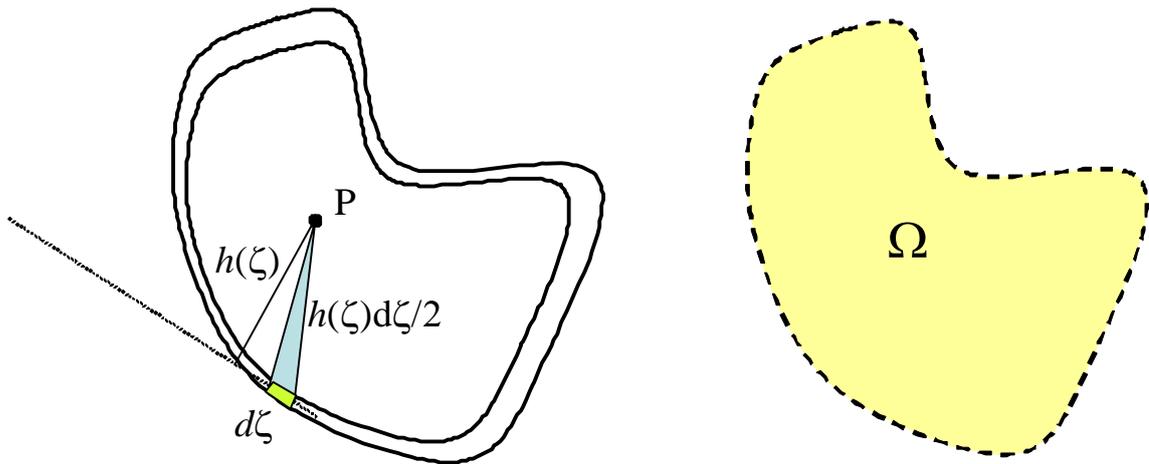


Figura 12.8: Equilibrio alla rotazione della sezione chiusa.

Si nota che, poichè l'ascissa curvilinea ζ gira in senso antiorario nella sezione, il vettore $-\mathbf{m}$ rappresenta la normale uscente da Ω . Invertendo l'equazione (12.106) si ottiene la prima formula di Bredt:

$$\tau_c = \frac{M^{tc}}{2 b \Omega} \quad (12.107)$$

La formula (12.106), ovvero la sua forma inversa (12.107), fornisce la relazione tra il valore del momento torcente M^{tc} la distribuzione di tensioni tangenziali τ_c .

Volendo ricavare la relazione tra il valore del momento torcente M^{ta} e l'angolo unitario di torsione Θ , si applica il principio dei lavori virtuali per un tratto di trave di lunghezza unitaria. Il sistema delle forze è fornito dalla distribuzione delle tensioni tangenziali τ_c^* che hanno momento torcente risultante unitario:

$$\tau_c^* = \frac{1}{2 b \Omega} \quad (12.108)$$

Gli scorrimenti angolari, valutati nel sistema degli spostamenti, sono ricavati utilizzando la relazione (12.107):

$$\gamma = \frac{1}{G} \tau_c = \frac{1}{G} \frac{M^{tc}}{2 b \Omega} \quad (12.109)$$

Eguagliando il lavoro virtuale esterno con quello virtuale interno si ottiene:

$$1 \Theta = \int_A \tau_c^* \gamma dA = \int_A \frac{1}{2 b \Omega} \frac{1}{G} \frac{M^{tc}}{2 b \Omega} b d\zeta = \frac{M^{tc}}{4 G \Omega^2} \int_0^a \frac{1}{b} d\zeta \quad (12.110)$$

La relazione (12.110) è nota come seconda formula di Bredt. Il fattore di rigidezza torsionale J_{tc} proprio della sezione chiusa vale:

$$J_{tc} = \frac{4 \Omega^2}{\int_0^a \frac{1}{b} d\zeta} \quad (12.111)$$

per cui la seconda formula di Bredt si riscrive nella forma:

$$\Theta = \frac{M^{tc}}{G J_{tc}} \quad (12.112)$$

Indicando con M^{ta} il momento torcente risultante delle tensioni τ_a e con J_{ta} il corrispondente fattore di rigidezza torsionale, poichè l'angolo unitario di torsione deve essere lo stesso se calcolato invertendo la (12.94) o tramite la (12.112), accade che:

$$\Theta = \frac{M^{ta}}{G J_{ta}} = \frac{M^{tc}}{G J_{tc}} = \frac{M^t}{G J_t} \quad (12.113)$$

dove $M^t = M^{ta} + M^{tc}$ ed il fattore di rigidezza torsionale totale J_t si ottiene come:

$$J_t = J_{ta} + J_{tc} = \int_0^a \frac{b(\zeta)^3}{3} d\zeta + \frac{4 \Omega^2}{\int_0^a \frac{1}{b} d\zeta} \quad (12.114)$$

Le relazioni (12.113) permettono di determinare la parte di momento torcente M^{ta} e la parte M^{tc} del momento torcente totale M^t in funzione dei fattori di rigidezza torsionale J_{ta} , J_{tc} e J_t . Infatti, si ha:

$$M^{ta} = M^t \frac{J_{ta}}{J_t} \quad M^{tc} = M^t \frac{J_{tc}}{J_t} \quad (12.115)$$

Allo scopo di valutare l'ordine di grandezza relativo tra i momenti M^{ta} e M^{tc} , si considera il caso di una sezione con spessore costante. Le formule (12.98), (12.111) e le espressioni (12.115) relative alla ripartizione del momento torcente totale M^t forniscono:

$$\frac{M^{ta}}{M^{tc}} = \frac{J_{ta}}{J_{tc}} = \frac{a b^3}{3} \frac{a}{4 b \Omega^2} = \frac{(a b)^2}{12 \Omega^2} = \frac{1}{12} \left(\frac{A}{\Omega} \right)^2 \quad (12.116)$$

L'area A della sezione della trave è generalmente molto più piccola dell'area Ω iscritta dalla linea media, per cui il rapporto tra queste due superfici può ritenersi molto minore dell'unità:

$$\frac{M^{ta}}{M^{tc}} \ll 1 \quad (12.117)$$

Ne consegue allora che le espressioni (12.115) possono assumere la forma approssimata:

$$M^{ta} = M^t \frac{J_{ta}}{J_t} \approx 0 \quad M^{tc} = M^t \frac{J_{tc}}{J_t} \approx M^t \quad (12.118)$$

In questo spirito, si ammette che la tensione tangenziale totale è fornita dalla sola parte τ_c , mentre la parte di tensione relativa alla sezione aperta τ_a è trascurabile.

Per quanto riguarda l'ingobbamento della sezione, in base alla (12.20) ed alla prima formula di Bredt (12.107), si ha:

$$\nabla\omega \bullet \mathbf{t} = \left(\frac{1}{G \Theta} \frac{M^t \mathbf{t}}{2 b \Omega} - \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x} \right) \bullet \mathbf{t} = \frac{J_t}{b \Omega} - \mathbf{x} \bullet \mathbf{n} \quad (12.119)$$

Integrando ed eliminando la costante di integrazione tramite la classica condizione che la funzione di ingobbamento abbia valore medio nullo sull'area, si calcola la funzione $\omega(\zeta)$.

12.8.1 Sezione triconnessa

Si esamina il caso in cui la sezione sottile sia triconnessa ovvero costituita da due maglie chiuse. Si denotino con q_1 e con q_2 i valori dei flussi nelle due maglie come illustrato in figura 12.9, tali che:

$$M_1^t = 2\Omega_1 q_1 \quad M_2^t = 2\Omega_2 q_2 \quad (12.120)$$

con Ω_1 ed Ω_2 rispettivamente le aree delle maglie 1 e 2, ed inoltre con:

$$M^t = M_1^t + M_2^t = 2\Omega_1 q_1 + 2\Omega_2 q_2 \quad (12.121)$$

Per determinare l'angolo unitario di rotazione si applica il principio dei lavori virtuali. Poiché si intende determinare la rotazione della sezione, si sceglie un sistema di forze definito dalla sezione oggetto di studio sollecitata da una coppia torcente unitaria. Si ricorda che per applicare il PLV si deve considerare un sistema di tensioni in equilibrio, e non necessariamente congruente, con le forze assegnate. Si scelgono allora due sistemi di tensioni in equilibrio con la coppia torcente unitaria, come illustrato in figura 12.9.

Considerando i due sistemi di forze SF1 ed SF2, il PLV fornisce le equazioni:

$$\begin{aligned} \Theta &= \int_1 \tau_1^* \gamma_1 b \, d\zeta - \int_{1-2} \tau_1^* \gamma_2 b \, d\zeta \\ &= \int_1 \frac{1}{2\Omega_1 b} \frac{q_1}{Gb} b \, d\zeta - \int_{1-2} \frac{1}{2\Omega_1 b} \frac{q_2}{Gb} b \, d\zeta \\ &= \frac{q_1}{2G\Omega_1} \int_1 \frac{1}{b} \, d\zeta - \frac{q_2}{2G\Omega_1} \int_{1-2} \frac{1}{b} \, d\zeta \end{aligned} \quad (12.122)$$

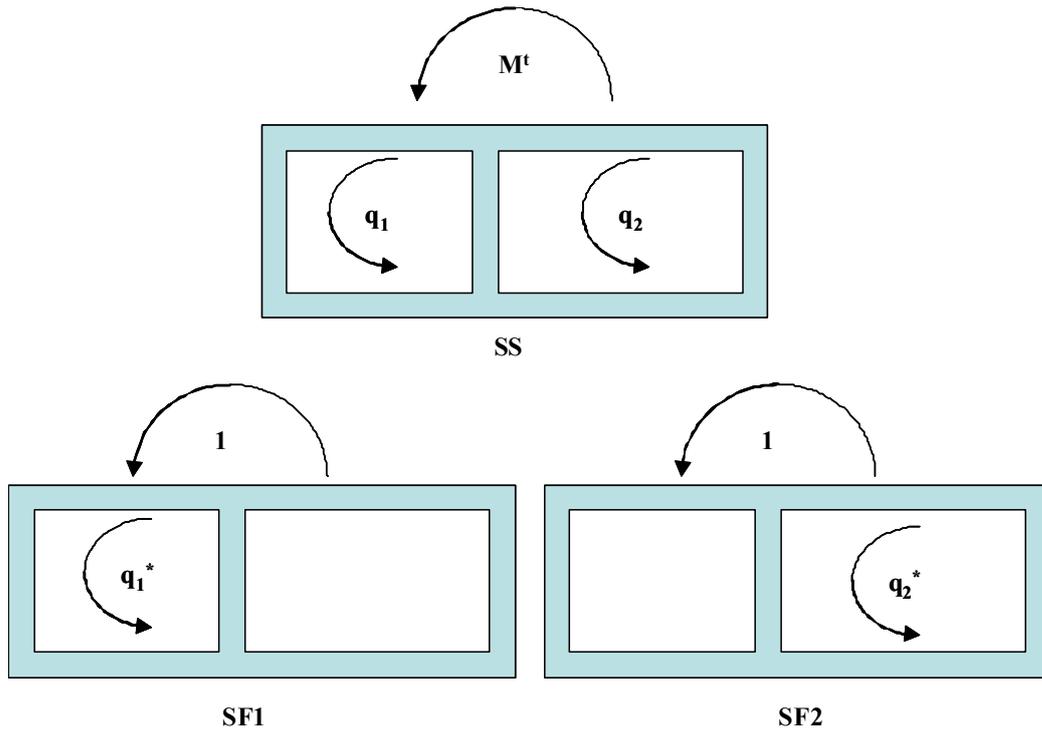


Figura 12.9: Sezione triconnessa soggetta a torsione.

$$\begin{aligned}
 \Theta &= \int_2 \tau_2^* \gamma_2 b \, d\zeta - \int_{1-2} \tau_2^* \gamma_1 b \, d\zeta & (12.123) \\
 &= \int_2 \frac{1}{2\Omega_2 b} \frac{q_2}{Gb} b \, d\zeta - \int_{1-2} \frac{1}{2\Omega_2 b} \frac{q_1}{Gb} b \, d\zeta \\
 &= \frac{q_2}{2G\Omega_2} \int_2 \frac{1}{b} \, d\zeta - \frac{q_1}{2G\Omega_2} \int_{1-2} \frac{1}{b} \, d\zeta
 \end{aligned}$$

avendo indicato con 1 la maglia 1, con 2 la maglia 2 e con 1-2 il tratto comune della maglia 1 e 2. In definitiva, si ottiene il seguente sistema di 3 equazioni nelle 3 incognite Θ , q_1 , q_2 :

$$\begin{aligned}
 M^t &= 2\Omega_1 q_1 + 2\Omega_2 q_2 & (12.124) \\
 \Theta &= \frac{q_1}{2G\Omega_1} \int_1 \frac{1}{b} \, d\zeta - \frac{q_2}{2G\Omega_1} \int_{1-2} \frac{1}{b} \, d\zeta \\
 \Theta &= \frac{q_2}{2G\Omega_2} \int_2 \frac{1}{b} \, d\zeta - \frac{q_1}{2G\Omega_2} \int_{1-2} \frac{1}{b} \, d\zeta
 \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema 12.124 è possibile determinare la distribuzione delle tensioni tangenziali ed il valore dell'angolo unitario di torsione per la sezione triconnessa.

Il procedimento può essere esteso al caso di sezioni più volte connesse.

Capitolo 13

FLESSIONE E TAGLIO

13.1 Sollecitazione di flessione e taglio

Si esamina il caso in cui la risultante delle tensioni agenti sulla base della trave $x_3 = L$ consista in una tagliante \mathbf{V} , tale che $\mathbf{V} \bullet \mathbf{e}^3 = 0$, applicata ad un punto individuato dal vettore posizione \mathbf{x}_T rispetto al baricentro della sezione, come rappresentato schematicamente in figura 13.1.

Le equazioni di equilibrio globale della trave impongono che la risultante ed il momento risultante agenti sulle basi $x_3 = 0$ e $x_3 = L$ siano equivalenti alla forza di taglio \mathbf{V} .

Ciò si traduce nell'imporre:

$$\begin{aligned} N(L) &= 0 & \mathbf{V}(L) &= \mathbf{V} \\ \mathbf{M}^f(L) &= \mathbf{0} & M^t(L) &= \mathbf{e}^3 \bullet \mathbf{x}_T \times \mathbf{V} \\ N(0) &= 0 & \mathbf{V}(0) &= -\mathbf{V} \\ \mathbf{M}^f(0) &= -L\mathbf{e}^3 \times \mathbf{V} & M^t(0) &= -\mathbf{e}^3 \bullet \mathbf{x}_T \times \mathbf{V} \end{aligned} \tag{13.1}$$

Seguendo lo stesso tipo di ragionamento, si ottengono le caratteristiche della sollecitazione calcolate rispetto ad un sistema di assi baricentrici nella generica sezione della trave di normale uscente diretta secondo \mathbf{e}^3 :

$$\begin{aligned} N(x_3) &= 0 & \mathbf{V}(x_3) &= \mathbf{V} \\ \mathbf{M}^f(x_3) &= (L - x_3)\mathbf{e}^3 \times \mathbf{V} & M^t(x_3) &= \mathbf{e}^3 \bullet \mathbf{x}_T \times \mathbf{V} \end{aligned} \tag{13.2}$$

Nel seguito viene sviluppata una soluzione approssimata del problema della trave soggetta a flessione e taglio. La soluzione approssimata che sarà determinata è basata sul rispetto delle sole equazioni di equilibrio e non vengono prese in considerazione condizioni di congruenza interna. Ne consegue che si giungerà ad una soluzione equilibrata ma non congruente.

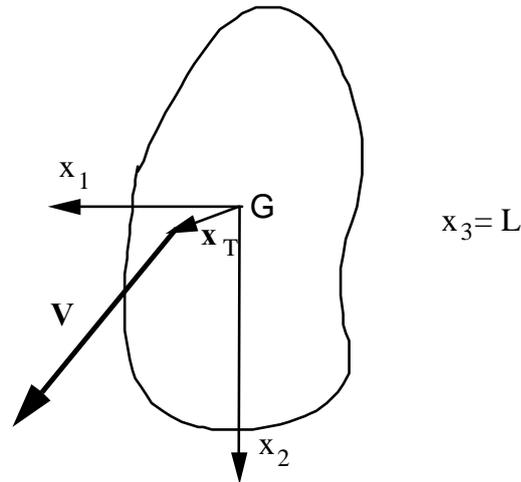


Figura 13.1: Sezione terminale della trave soggetta ad una forza di taglio.

Si assume che sia sempre valida l'ipotesi che $\sigma_{\alpha\beta} = 0$ in ogni punto della trave ed inoltre che la tensione normale σ_{33} sia definita dal problema della flessione tramite la formula (11.9), che, tenuto conto della terza delle (13.2), si particolarizza in:

$$\sigma_{33} = -(L - x_3)\mathbf{J}^{-1}\mathbf{V} \bullet \mathbf{x} \quad (13.3)$$

Per la (13.3) le equazioni indefinite di equilibrio (10.13) diventano allora:

$$\begin{aligned} \sigma_{13,3} &= 0 \\ \sigma_{23,3} &= 0 \\ \sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} &= -\sigma_{33,3} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{V} \bullet \mathbf{x} \end{aligned} \quad (13.4)$$

Vale la pena notare che l'asse neutro delle $\sigma_{33,3}$ è definito dall'equazione $\mathbf{J}^{-1}\mathbf{V} \bullet \mathbf{n} = 0$, ovvero \mathbf{V} ed \mathbf{n} sono coniugati rispetto a $\mathbf{J}^* = (\det\mathbf{J})\mathbf{J}^{-1}$.

Indicando allora con $\boldsymbol{\tau}$ il vettore di componenti σ_{13} e σ_{23} le equazioni (13.4) si riscrivono come:

$$\boldsymbol{\tau}_{,3} = \mathbf{0} \quad \text{div}\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{V} \bullet \mathbf{x} \quad \text{in } A \quad (13.5)$$

Le condizioni al contorno sul mantello della trave (10.14) si traducono semplicemente in:

$$\boldsymbol{\tau} \bullet \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{su } \partial A \quad (13.6)$$

essendo \mathbf{n} la normale uscente definita nel generico punto della frontiera ∂A della sezione A della trave.

13.2 Centro di taglio

La sollecitazione è detta di pura flessione e taglio quando accade che la deformazione provocata dalle caratteristiche della sollecitazione definite sulle basi della trave dalle (13.1) è ortogonale in energia allo stato di deformazione ottenuto per il problema della torsione. Ciò avviene solo quando il punto di applicazione della forza tagliante \mathbf{V} è scelto in modo tale da rendere nullo il lavoro virtuale interno tra le tensioni prodotte dalla forza \mathbf{V} e le deformazioni prodotte da un momento torcente di generico valore.

Siano allora $\boldsymbol{\tau}^*$ le tensioni tangenziali dovute alla sollecitazione di pura flessione e taglio e $\boldsymbol{\gamma}$ il vettore di componenti $2\varepsilon_{13}$ e $2\varepsilon_{23}$ che rappresenta la deformazione di pura torsione, nel caso di pura flessione e taglio il lavoro virtuale delle $\boldsymbol{\tau}^*$ per le $\boldsymbol{\gamma}$ deve essere nullo:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \boldsymbol{\tau}^* \bullet \boldsymbol{\gamma} \, dV = \int_V \boldsymbol{\tau}^* \bullet \Theta (\nabla\omega + \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}) \, dV & (13.7) \\ &= L\Theta \int_A \boldsymbol{\tau}^* \bullet (\nabla\omega + \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}) \, dA \end{aligned}$$

ovvero, applicando il teorema delle divergenza e tenendo conto della seconda delle (13.5) e della (13.6), si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_A \boldsymbol{\tau}^* \bullet (\nabla\omega + \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}) \, dA & (13.8) \\ &= \int_A \boldsymbol{\tau}^* \bullet \nabla\omega \, dA + \int_A \boldsymbol{\tau}^* \bullet \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x} \, dA \\ &= \int_A \operatorname{div}(\omega \boldsymbol{\tau}^*) \, dA - \int_A \omega \operatorname{div}\boldsymbol{\tau}^* \, dA + \mathbf{e}^3 \bullet \mathbf{x}_T \times \mathbf{V} \\ &= \int_{\partial A} \omega \boldsymbol{\tau}^* \bullet \mathbf{n} \, ds + \int_A \omega \mathbf{J}^{-1}\mathbf{V} \bullet \mathbf{x} \, dA + \mathbf{e}^3 \bullet \mathbf{x}_T \times \mathbf{V} \\ &= \left(\int_A \omega \mathbf{J}^{-1}\mathbf{x} \, dA + \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}_T \right) \bullet \mathbf{V} \end{aligned}$$

La sollecitazione è di pura flessione e taglio per ogni possibile vettore forza \mathbf{V} quando l'ultima delle (13.8) è valida, cioè quando il punto di applicazione della forza \mathbf{V} è fornito dall'espressione:

$$\mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}_T = - \int_A \omega \mathbf{J}^{-1}\mathbf{x} \, dA \quad (13.9)$$

ovvero:

$$\int_A \omega \mathbf{x} \, dA = -\mathbf{J} \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}_T \quad (13.10)$$

per cui si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^3 \times \int_A \omega \mathbf{x} dA &= -\mathbf{e}^3 \times [\mathbf{J} \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}_T] \\ &= -\mathbf{W} [\mathbf{J} \mathbf{W} \mathbf{e}^3 \times \mathbf{x}_T] = \mathbf{J}^* \mathbf{x}_T \end{aligned} \quad (13.11)$$

in definitiva si ricava:

$$\mathbf{x}_T = (\mathbf{J}^*)^{-1} \mathbf{e}^3 \times \int_A \omega \mathbf{x} dA = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \mathbf{J} \mathbf{e}^3 \times \int_A \omega \mathbf{x} dA \quad (13.12)$$

Il vettore posizione \mathbf{x}_T , univocamente definito dalla formula (13.12), individua il punto ove deve essere applicato un qualsiasi vettore forza di taglio comunque diretto nel piano della sezione della trave, affinché la sollecitazione di taglio e flessione sia ortogonale in energia a quella di torsione. In altre parole quando la retta di azione di \mathbf{V} passa per \mathbf{x}_T si dice che la trave è soggetta a sola flessione e taglio e non a sollecitazione di torsione. Ciò induce a calcolare il valore del momento torcente generato da una forza \mathbf{V} scegliendo come polo il punto individuato da \mathbf{x}_T . Così, qualora \mathbf{V} sia applicata in \mathbf{x}_V , il momento torcente varrebbe $M^t = \mathbf{e}^3 \bullet (\mathbf{x}_V - \mathbf{x}_T) \times \mathbf{V}$. Ancora, il momento torcente non va calcolato rispetto al baricentro, ma rispetto al punto definito da \mathbf{x}_T .

Il punto individuato da \mathbf{x}_T è detto centro di taglio. E' immediato verificare che la formula (13.12) che fornisce il centro di taglio \mathbf{x}_T è perfettamente identica a quella precedentemente ottenuta per la definizione del centro di torsione \mathbf{x}_c (11.55). Se ne deduce che la posizione del centro di taglio coincide con quella del centro di torsione.

Se il lavoro virtuale interno definito dalla (13.7) è nullo, dovrà conseguentemente essere nullo per il principio dei lavori virtuali il corrispondente lavoro virtuale esterno.

Sulla base di questa evidente considerazione, si prende in esame inizialmente il caso (a) in cui, nell'applicazione del principio dei lavori virtuali, il sistema di forze sia relativo alla sollecitazione di taglio ed il sistema di spostamenti quello relativo alla sollecitazione di torsione, come mostrato schematicamente in figura 13.2. Detto \mathbf{u}_c il vettore spostamento relativo tra due sezioni poste a distanza unitaria del punto $\mathbf{x}_T = \mathbf{x}_c$ provocato dalla sollecitazione di torsione, si ha:

$$\mathbf{V} \bullet \mathbf{u}_c = \int_A \boldsymbol{\tau}^* \bullet \boldsymbol{\gamma} dA \quad \forall \mathbf{V}, \boldsymbol{\tau}^* \text{ in equilibrio} \quad (13.13)$$

Essendo la (13.13) valida per ogni vettore \mathbf{V} deve allora accadere che $\mathbf{u}_c = \mathbf{0}$, ovvero lo spostamento relativo del centro di torsione deve essere nullo. Se ne deduce che, per effetto della sollecitazione di torsione, le sezioni della trave ruotano le une rispetto alle altre intorno al centro di torsione.

Si considera ora il caso (b) in cui, nell'applicazione del principio dei lavori virtuali, il sistema di forze sia relativo alla sollecitazione di torsione ed il sistema di

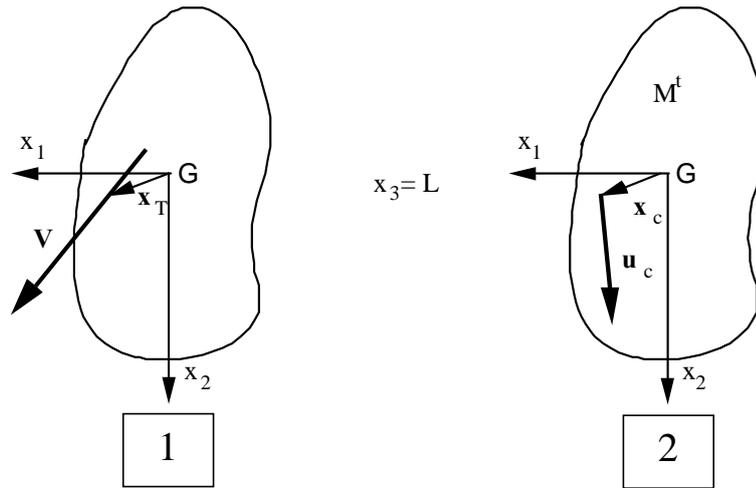


Figura 13.2: Applicazione del principio dei lavori virtuale: [a] sistema delle forze (1) - sistema degli spostamenti (2), [b] sistema delle forze (2) - sistema degli spostamenti (1).

spostamenti quello relativo alla sollecitazione di taglio, come mostrato schematicamente in figura 13.2. In tal caso il lavoro virtuale esterno è fornito dal prodotto del momento torcente M^t del sistema di forze per la rotazione relativa tra due sezioni poste a distanza unitaria Θ valutata nel sistema di spostamenti provocati dalla forza \mathbf{V} . In formula si ha:

$$\begin{aligned}
 M^t \Theta &= \int_A \boldsymbol{\tau} \bullet \boldsymbol{\gamma}^* dA = \int_A G \boldsymbol{\gamma} \bullet \frac{1}{G} \boldsymbol{\tau}^* dA & (13.14) \\
 &= \int_A \boldsymbol{\tau}^* \bullet \boldsymbol{\gamma} dA = 0 & \forall M^t, \boldsymbol{\tau} \text{ in equilibrio}
 \end{aligned}$$

Essendo la (13.14) valida per ogni M^t deve allora accadere che $\Theta = 0$, ovvero la rotazione relativa tra le sezioni della trave dovuta alla sollecitazione di puro taglio e flessione, quando cioè \mathbf{V} è applicato in \mathbf{x}_T , è nulla.

Riepilogando, il punto individuato dal vettore $\mathbf{x}_T = \mathbf{x}_c$ nel piano della sezione è:

- il centro di torsione (le sezioni della trave ruotano le une rispetto alle altre intorno ad esso quando agisce M^t),
- il centro di taglio (le sezioni della trave non subiscono rotazioni relative fra loro quando la retta d'azione di \mathbf{V} lo contiene).

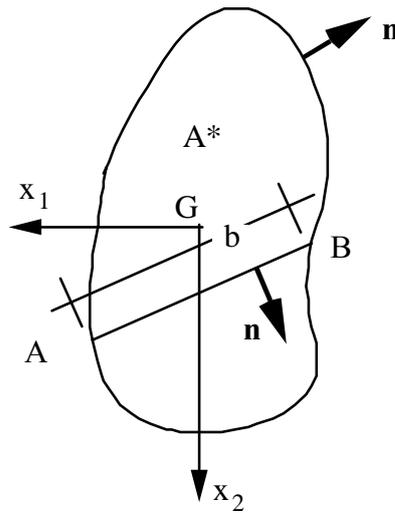


Figura 13.3: Tensione tangenziale media.

13.3 Tensione tangenziale media su una corda

Con riferimento alla figura 13.3, si consideri il segmento AB di lunghezza b che rappresenta una generica corda nella sezione retta della trave.

Si definisce tensione tangenziale media sulla corda AB la quantità scalare:

$$\bar{\tau}_n = \frac{1}{b} \int_A^B \boldsymbol{\tau} \bullet \mathbf{n} \, ds \quad (13.15)$$

Indicando con A^* l'area definita dalla corda AB , come mostrato in figura 13.2, e ricordando la condizione al contorno (13.6), si ha:

$$\bar{\tau}_n b = \int_A^B \boldsymbol{\tau} \bullet \mathbf{n} \, ds = \int_{\partial A^*} \boldsymbol{\tau} \bullet \mathbf{n} \, ds = q \quad (13.16)$$

essendo q il flusso delle tensioni tangenziali uscenti dall'area A^* . Applicando il teorema della divergenza alla (13.16) e ricordando la terza equazione indefinita di equilibrio (13.5), si ha:

$$q = \int_{\partial A^*} \boldsymbol{\tau} \bullet \mathbf{n} \, ds = \int_{A^*} \text{div} \boldsymbol{\tau} \, dA = - \int_{A^*} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{V} \bullet \mathbf{x} \, dA = - \mathbf{J}^{-1} \mathbf{V} \bullet \mathbf{S}^* \quad (13.17)$$

con \mathbf{S}^* vettore momento statico dell'area A^* rispetto al riferimento baricentrico scelto. L'ultima uguaglianza della (13.16), tenuta conto la (13.17), fornisce la formula finale per il calcolo della tensione tangenziale media agente sulla corda AB , nota

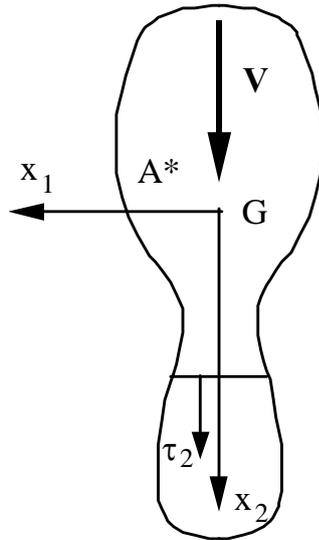


Figura 13.4: Sezione simmetrica sollecitata lungo l'asse di simmetria.

come formula di Jourawski¹:

$$\bar{\tau}_n = -\frac{1}{b} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{V} \bullet \mathbf{S}^* \quad (13.18)$$

13.4 Sollecitazione sull'asse di simmetria

Si esamina un caso particolare, ma molto diffuso nelle tecniche applicazioni. Sia la sezione in esame simmetrica rispetto all'asse x_2 come mostrato in figura 13.4, sollecitata lungo lo stesso asse che evidentemente sarà principale di inerzia ed inoltre conterrà il centro di taglio e torsione.

Si è allora sicuri che la sollecitazione in esame sia di pura flessione e taglio, senza torsione. La corda sulla quale si intende definire la tensione tangenziale media scelta in modo da essere comunque parallela all'asse x_1 . In questo caso la normale \mathbf{n} alla corda coincide con il versore \mathbf{e}^2 dell'asse x_2 e la tensione tangenziale media $\bar{\tau}_n$ altro non è che la media sulla corda della tensione tangenziale τ_2 . Si ha allora:

$$\bar{\tau}_2 = -\frac{V_2 S_2^*}{J_{22} b} \quad (13.19)$$

¹Jourawski D.J. (1821 - 1891), ingegnere russo. Si diplomò presso l'Istituto di Ingegneria delle vie di comunicazione di San Pietroburgo. Nel 1842, egli fu assegnato al progetto della ferrovia tra San Pietroburgo e Mosca, e nel 1844 ebbe l'incarico della più importante opera della linea, il ponte sul fiume Werebia.

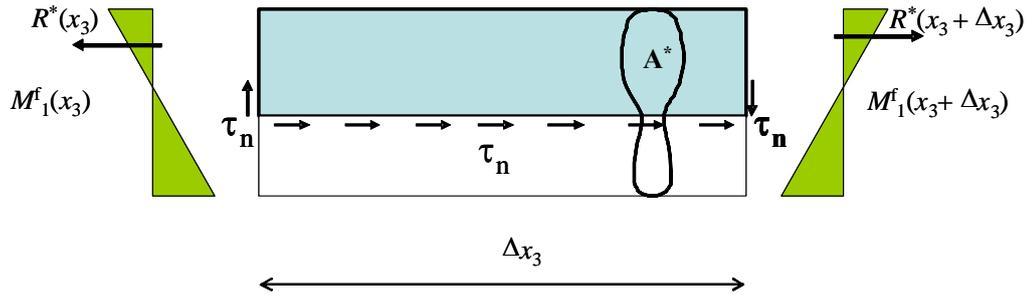


Figura 13.5: Determinazione delle tensioni tangenziali da taglio.

con

$$S_2^* = \int_{A^*} x_2 \, dA \quad J_{22} = \int_A (x_2)^2 \, dA$$

momento statico rispetto all'asse x_1 dell'area A^* e momento d'inerzia rispetto all'asse x_1 della sezione retta, rispettivamente. La formula (13.19) può essere riscritta nella forma:

$$\bar{\tau}_n = -\frac{V_2}{b} \frac{S_1^*}{I_{11}} \quad (13.20)$$

con $s_1^* = S_2^*$ e $I_{11} = J_{22}$.

Alla formula di Jourawsky si può giungere tramite un ragionamento alternativo, ma equivalente. Si consideri un tratto di trave di lunghezza Δx_3 , definito dalla sola parte A^* della sezione della trave, come illustrato in figura 13.5.

Sulla faccia definita dalla corda che delimita A^* la tensione tangenziale non dipende dall'ascissa x_3 . Imponendo l'equilibrio della parte di trave si ha:

$$R^*(x_3 + \Delta x_3) - R^*(x_3) = -\bar{\tau}_n b \Delta x_3 \quad (13.21)$$

dove la quantità $\bar{\tau}_n b \Delta x_3$ è detta scorrimento sul tratto di lunghezza Δx_3 . Dalla (13.21) si ottiene:

$$\bar{\tau}_n b = -\frac{R^*(x_3 + \Delta x_3) - R^*(x_3)}{\Delta x_3} \quad (13.22)$$

che, nel limite per Δx_3 che tende a zero, fornisce:

$$\bar{\tau}_n b = -\frac{dR^*(x_3)}{dx_3} \quad (13.23)$$

Sulla sezione di ascissa x_3 le tensioni normali per la flessione sono fornite dalla formula (13.3) $\sigma_{33} = -V_2(L - x_3)x_2/I_{11}$, la cui risultante sull'area A^* vale:

$$R^*(x_3) = -\int_{A^*} \frac{V_2(L - x_3)x_2}{I_{11}} \, dA = -\frac{V_2(L - x_3)s_1^*}{I_{11}} \quad (13.24)$$

da cui si ottiene:

$$\frac{dR^*(x_3)}{dx_3} = \frac{V_2 s_1^*}{I_{11}}$$

e quindi

$$\bar{\tau}_n b = -\frac{V_2 s_1^*}{I_{11}}$$

ovvero la formula (13.20).

Nel caso in cui $V_1 \neq 0$ e $V_2 \neq 0$, con x_1 e x_2 ancora direzioni principali d'inerzia, la tensione normale dovuta alla sollecitazione di flessione associata al taglio, vale:

$$\sigma_{33} = \frac{M_1^f}{I_{11}} x_2 - \frac{M_2^f}{I_{22}} x_1 = \frac{-V_2 (L - x_3)}{I_{11}} x_2 - \frac{V_1 (L - x_3)}{I_{22}} x_1 \quad (13.25)$$

che derivata rispetto ad x_3 e sostituita nella terza delle (13.4) fornisce:

$$\sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} = -\sigma_{33,3} = -\left(\frac{V_2}{I_{11}} x_2 + \frac{V_1}{I_{22}} x_1 \right) \quad (13.26)$$

In definitiva si ottiene:

$$\bar{\tau}_n = -\frac{1}{b} \left(\frac{V_2}{I_{11}} s_1^* + \frac{V_1}{I_{22}} s_2^* \right) \quad (13.27)$$

Nel caso in cui sia scelto un sistema di riferimento non principale d'inerzia, la tensione normale dovuta alla flessione è fornita dall'espressione (11.9) con $N = 0$, che assume la forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= \begin{bmatrix} I_{22} & I_{12} \\ I_{12} & I_{11} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -M_2^f \\ M_1^f \end{Bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_{22} & I_{12} \\ I_{12} & I_{11} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} (x_3 - L) \end{aligned} \quad (13.28)$$

che derivata rispetto ad x_3 fornisce:

$$\sigma_{33,3} = (H_{11} V_1 + H_{12} V_2) x_1 + (H_{12} V_1 + H_{22} V_2) x_2 \quad (13.29)$$

essendo:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} I_{22} & I_{12} \\ I_{12} & I_{11} \end{bmatrix}^{-1}$$

In definitiva la formula di Jourawsky si generalizza in:

$$\bar{\tau}_n = -\frac{1}{b} [(H_{11} V_1 + H_{12} V_2) s_2^* + (H_{12} V_1 + H_{22} V_2) s_1^*] \quad (13.30)$$

Ovviamente al variare della posizione della corda lungo x_2 varia il valore della tensione tangenziale media. Si nota che, per come è stata presa l'area A^* in figura

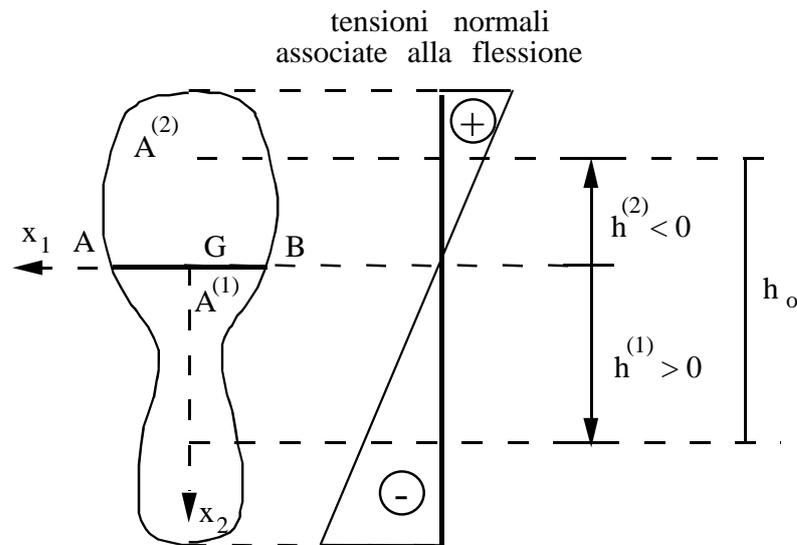


Figura 13.6: Braccio della coppia interna.

13.6, il momento statico di A^* risulta essere sempre non positivo, così che la tensione tangenziale media sulla corda definita dalla (13.19) è sempre non negativa, essendo il momento di inerzia positivo, la lunghezza della corda positiva e la forza tagliante anch'essa scelta positiva.

Vista la simmetria dello schema la tensione tangenziale τ_2 dovrà avere per ogni corda una distribuzione simmetrica rispetto all'asse x_2 . Si assume allora che il valore puntuale della tensione tangenziale coincida con quello medio calcolato con la formula (13.19).

Per determinare i valori massimi e minimi della tensione tangenziale al variare della posizione della corda si calcolano le posizioni di stazionarietà di τ_2 . Si procede allora come segue:

$$\frac{d\tau_2}{dx_2} = 0 \quad \implies \quad 0 = \frac{d}{dx_2} \left(\frac{S_2^*}{b} \right) = \frac{1}{b} \frac{dS_2^*}{dx_2} - \frac{S_2^*}{b^2} \frac{db}{dx_2} \quad (13.31)$$

Poichè l'incremento di momento statico vale:

$$dS_2^* = b x_2 dx_2 \quad (13.32)$$

la seconda delle (13.31) si riduce all'espressione:

$$x_2 = \frac{S_2^*}{b^2} \frac{db}{dx_2} \quad (13.33)$$

Nel caso che la sezione abbia corda di lunghezza costante $db/dx_2 = 0$, ovvero per la sezione rettangolare, il valore massimo della tensione tangenziale si ottiene per $x_2 = 0$, cioè proprio in corrispondenza dell'asse neutro delle $\sigma_{33,3}$.

Si consideri ora una sezione anche non rettangolare, purchè simmetrica rispetto all'asse x_2 . Si scelga su di essa come corda AB il segmento dell'asse neutro delle $\sigma_{33,3}$, ovviamente esso sarà baricentrico e coincidente con l'asse x_1 .

Si indichino con $A^{(1)}$ ed $A^{(2)}$ le aree definite sulla sezione per effetto della suddivisione di A prodotta dalla corda AB , come mostrato in figura 13.6. Analogamente, siano $S_2^{(1)}$, $S_2^{(2)}$ e $J_{22}^{(1)}$, $J_{22}^{(2)}$ i momenti statici e di inerzia relativi ad $A^{(1)}$ ed $A^{(2)}$ rispetto all'asse neutro. Con $h^{(1)}$ ed $h^{(2)}$ si intendono le coordinate lungo l'asse x_2 che individuano i baricentri dei momenti statici della parte superiore ed inferiore della sezione:

$$h^{(1)} = \frac{\int_{A^{(1)}} x_2 x_2 dA}{\int_{A^{(1)}} x_2 dA} = \frac{J_{22}^{(1)}}{S_2^{(1)}} \quad h^{(2)} = \frac{\int_{A^{(2)}} x_2 x_2 dA}{\int_{A^{(2)}} x_2 dA} = \frac{J_{22}^{(2)}}{S_2^{(2)}} \quad (13.34)$$

E' evidente che $J_{22} = J_{22}^{(1)} + J_{22}^{(2)}$ inoltre che $-S_2^{(1)} = S_2^{(2)} = S_2^*$, per cui si ha:

$$J_{22} = h^{(1)} S_2^{(1)} + h^{(2)} S_2^{(2)} = (-h^{(1)} + h^{(2)}) S_2^* = h^0 S_2^* \quad (13.35)$$

dove $h^0 = -h^{(1)} + h^{(2)}$ è detto braccio della coppia interna. Infatti, le distanze $h^{(1)}$ ed $h^{(2)}$ definiscono, ricordando la formula della flessione, i punti di applicazione delle risultanti di trazione e di compressione generate dalla coppia flettente che accompagna il taglio.

In definitiva, la tensione tangenziale in corrispondenza della corda baricentrica si può valutare tenendo conto delle (13.19) e (13.35) come:

$$\bar{\tau}_2(0) = \frac{V_2}{b(0)h^0} \quad (13.36)$$

Per soddisfare la condizione al contorno (13.6) devono nascere in corrispondenza della generica corda AB , ora anche non baricentrica, tensioni tangenziali τ_1 in generale non nulle. Per determinare tale componente del vettore tensione tangenziale, si sfruttano ancora le equazioni di equilibrio imponendo il rispetto della condizione di mantello scarico (13.6). Si derivi rispetto a x_1 la terza equazione indefinita di equilibrio (13.4):

$$\sigma_{13,11} + \sigma_{23,21} + \sigma_{33,31} = 0 \quad (13.37)$$

Poichè $\sigma_{23} = \tau_2$ e σ_{33} non dipendono da x_1 accade che $\sigma_{23,21} = \sigma_{33,31} = 0$, per cui si ricava che $\sigma_{13,11} = 0$. Ricordando che le tensioni tangenziali sono costanti lungo x_3 , si ha:

$$\tau_1 = \sigma_{13} = f(x_2)x_1 + g(x_2) \quad (13.38)$$

con f e g funzioni incognite. La condizione di tangenza delle τ al contorno della sezione impone:

$$[f(x_2)x_1 + g(x_2)] n_1 + \tau_2 n_2 = 0 \quad x_1 = \pm \frac{b}{2} \quad (13.39)$$

con \mathbf{n} normale al contorno. Vista la simmetria della sezione, per $x_1 = b/2$ \mathbf{n} ha componenti n_1 ed n_2 , per $x_1 = -b/2$ \mathbf{n} ha componenti $-n_1$ ed n_2 , per cui la (13.39) in esplicito diventa:

$$\begin{aligned} [f(x_2)b/2 + g(x_2)] n_1 + \tau_2 n_2 &= 0 & x_1 &= b/2 \\ [-f(x_2)b/2 + g(x_2)] n_1 - \tau_2 n_2 &= 0 & x_1 &= -b/2 \end{aligned} \quad (13.40)$$

che rappresenta un sistema di due equazioni nelle incognite $f(x_2)$ e $g(x_2)$. La soluzione si ricava immediatamente come:

$$f(x_2) = -2\tau_2 n_2 / b n_1 \quad g(x_2) = 0 \quad (13.41)$$

In definitiva si ottiene:

$$\tau_1(x_1, x_2) = -\frac{2\tau_2(x_2) n_2(x_2)}{b(x_2) n_1(x_2)} x_1 \quad (13.42)$$

cioè la tensione tangenziale parallela alla corda varia linearmente con x_1 .

13.5 La sezione rettangolare

Si considera ora il caso della sezione rettangolare di dimensioni $b \times h$ sollecitata secondo l'asse x_2 . Per il calcolo della tensione tangenziale normale media si sceglie una corda parallela all'asse x_1 ed a distanza y dall'origine. In questo caso la formula (13.20) diventa:

$$\bar{\tau}_2(y) = -\frac{V_2}{b I_{11}} s_1^* = -\frac{12 V_2}{b b h^3} b \int_{-h/2}^y x_2 dx_2 = -\frac{12 V_2}{b h^3} \frac{1}{2} \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \quad (13.43)$$

L'andamento delle tensioni è parabolico, con valore nullo per $y = \pm h/2$, mentre assume valore massimo per $y = 0$:

$$\bar{\tau}_{2,\max} = \bar{\tau}_2(0) = \frac{3 V_2}{2b h} \quad (13.44)$$

13.6 La sezione in parete sottile

Si considera il caso in cui la sezione retta della trave sia costituita da una striscia sottile di materiale di spessore variabile o non, avente come linea media la curva piana di equazione:

$$x_1 = x_1(\zeta) \quad x_2 = x_2(\zeta) \quad (13.45)$$

con ζ ascissa curvilinea del generico punto della linea media misurata a partire da un'origine O , che generalmente è scelta in corrispondenza di un'estremità della linea, che per ipotesi non forma circuiti chiusi. In questo caso per corda relativa all'ascissa curvilinea ζ si intende sempre quella ortogonale alla linea media della sezione, cui corrisponde uno spessore $b(\zeta)$.

Si suppone che la forza di taglio passi per il centro di taglio. In tal caso si è visto che il lavoro virtuale tra le sollecitazioni di taglio e flessione e di torsione deve essere nullo. Anzi, è stata sfruttata proprio questa proprietà per determinare la formula che fornisce \mathbf{x}_T .

Dalla trattazione della torsione si ricava che la sollecitazione di momento torcente induce lungo la generica corda una distribuzione lineare di tensioni tangenziali τ_ζ parallele alla linea media della sezione e che si annullano in corrispondenza del punto medio della corda. Poichè il lavoro virtuale interno che le tensioni tangenziali da taglio compiono per le deformazioni tangenziali da torsione deve essere nullo, si ricava che τ_ζ devono essere simmetriche rispetto al punto medio della corda. Ciò implica che la risultante lungo la corda delle τ_ζ in corrispondenza dell'ascissa curvilinea ζ passa per la linea media. Vista allora la simmetria delle tensioni tangenziali rispetto alla linea media per ogni ζ , e vista la piccolezza dello spessore della sezione, si può ora con buona approssimazione supporre che le τ_ζ siano costanti lungo lo spessore. In pratica si può utilizzare la formula di Jourawski per la determinazione del valore puntuale delle tensioni tangenziali da taglio:

$$\tau(\zeta) = -\frac{1}{b(\zeta)} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{V} \bullet \mathbf{S}^*(\zeta) \quad (13.46)$$

13.7 Deformazione di una trave in parete sottile

Per la determinazione della deformazione indotta nella trave a causa solo della sua deformabilità a taglio, si può applicare come al solito il principio dei lavori virtuali.

Il sistema delle forze è costituito da una forza \mathbf{F} applicata ove è necessario calcolare lo spostamento, per esempio all'estremità della trave, comunque diretta nel piano della sezione retta della trave. Il sistema degli spostamenti consiste nella trave soggetta ad una forza tagliente \mathbf{V} .

La tensione tangenziale in corrispondenza dell'ascissa curvilinea ζ , valutata nel sistema delle forze viene indicata con $\tau^*(\zeta)$, mentre la deformazione valutata nel

sistema degli spostamenti in corrispondenza della stessa ascissa curvilinea denotata con $\gamma(\zeta)$, e valgono:

$$\tau^*(\zeta) = -\frac{1}{b(\zeta)} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F} \bullet \mathbf{S}^*(\zeta) \quad \gamma(\zeta) = -\frac{1}{G b(\zeta)} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{V} \bullet \mathbf{S}^*(\zeta) \quad (13.47)$$

Per il principio dei lavori virtuali, lavoro virtuale esterno uguale lavoro virtuale interno, si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \bullet \mathbf{u} &= \int_V \tau^*(\zeta) \gamma(\zeta) dV \\ &= \frac{L}{G} \int_a \frac{1}{b(\zeta)} (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{F} \bullet \mathbf{S}^*(\zeta)) (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{V} \bullet \mathbf{S}^*(\zeta)) d\zeta \\ &= \frac{L}{G} \left[\int_a \frac{1}{b(\zeta)} (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}^*(\zeta)) \otimes (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}^*(\zeta)) d\zeta \right] \mathbf{V} \bullet \mathbf{F} \end{aligned} \quad (13.48)$$

Si ricava allora:

$$\mathbf{F} \bullet \mathbf{u} = \frac{L}{G} \left[\int_a \frac{1}{b(\zeta)} (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}^*(\zeta)) \otimes (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}^*(\zeta)) d\zeta \right] \mathbf{V} \bullet \mathbf{F} \quad \forall \mathbf{F} \quad (13.49)$$

che equivale a:

$$\mathbf{u} = \frac{L}{G} \left[\int_a \frac{1}{b(\zeta)} (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}^*(\zeta)) \otimes (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}^*(\zeta)) d\zeta \right] \mathbf{V} \quad (13.50)$$

Introducendo il tensore simmetrico dei fattori di taglio come:

$$\boldsymbol{\chi} = A \left[\int_a \frac{1}{b(\zeta)} (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}^*(\zeta)) \otimes (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}^*(\zeta)) d\zeta \right] \quad (13.51)$$

la (13.50) si riscrive:

$$\mathbf{u} = \frac{L}{G A} \boldsymbol{\chi} \mathbf{V} \quad (13.52)$$

E' necessario notare che le direzioni principali di $\boldsymbol{\chi}$ in generale non coincidono con le direzioni principali del tensore d'inerzia \mathbf{J} . Ciò significa che anche se la flessione associata al taglio è retta, si possono avere spostamenti da taglio con componente anche lungo la direzione ortogonale all'azione tagliante. Ciò non si verifica evidentemente nelle sezioni che ammettono un asse di simmetria, sollecitate lungo tale asse.

13.8 Determinazione del centro di taglio

Il metodo è basato sulla banale osservazione che una qualsiasi distribuzione di tensioni tangenziali di puro taglio ha come risultante una forza di taglio che passa per il centro di taglio.

Da questa evidente affermazione si ricava che se si costruiscono due distribuzioni di tensioni tangenziali di puro taglio, le risultanti passeranno per il centro di taglio. Per cui l'intersezione tra le due direzioni degli assi centrali forniranno il centro di taglio.

In particolare è possibile scegliere le due distribuzioni di tensioni tangenziali fornite dalle espressioni:

$$\begin{aligned}\tau^1(\zeta) &= \frac{1}{b(\zeta)} \frac{V_1}{I_{22}} s_2^*(\zeta) \\ \tau^2(\zeta) &= -\frac{1}{b(\zeta)} \frac{V_2}{I_{11}} s_1^*(\zeta)\end{aligned}\quad (13.53)$$

ottenute dalla formula (13.46) ponendo rispettivamente $V_1 \neq 0$, $V_2 = 0$ e $V_1 = 0$, $V_2 \neq 0$. Calcolando gli assi centrali delle due distribuzioni è possibile determinare il centro di taglio come l'intersezione dei due assi centrali. Tale centro di taglio è individuato dal vettore \mathbf{x}_T . Il vettore posizione \mathbf{x}_T individua quindi il punto dove deve essere applicato un qualsiasi vettore forza di taglio comunque diretto nel piano della sezione della trave, affinché la sollecitazione di taglio e flessione non generi torsione. In altre parole quando la retta di azione di \mathbf{V} passa per \mathbf{x}_T si dice che la trave è soggetta a sola flessione e taglio e non a sollecitazione di torsione. Ciò induce a calcolare il valore del momento torcente generato da una forza \mathbf{V} scegliendo come polo il punto individuato da \mathbf{x}_T . Così, supponendo che \mathbf{V} sia applicata in \mathbf{x}_V , il momento torcente varrebbe $M^t = \mathbf{e}^3 \bullet (\mathbf{x}_V - \mathbf{x}_T) \times \mathbf{V}$. In definitiva, il momento torcente non va calcolato rispetto al baricentro, ma rispetto al punto definito da \mathbf{x}_T .

13.9 Esercizio sulla sollecitazione di taglio

Si considera una trave soggetta alla sollecitazione di taglio e flessione. La sezione della trave è in parete sottile, come illustrato in figura 13.7.

Si fissa inizialmente il sistema di riferimento (x'_1, x'_2) con origine nell'angolo superiore destro, come riportato in figura 13.7. Si procede quindi alla determinazione del baricentro. A tale scopo si calcolano inizialmente l'area e le componenti del vettore momento statico:

$$\begin{aligned}A &= ab + 2ab + ab + ab = 5ab \\ S'_1 &= ab \frac{a}{2} + 2ab a + ab \frac{a}{2} = 3a^2b \\ S'_2 &= 2ab a + ab 2a + ab \frac{3}{2}a = \frac{11}{2}a^2b\end{aligned}\quad (13.54)$$

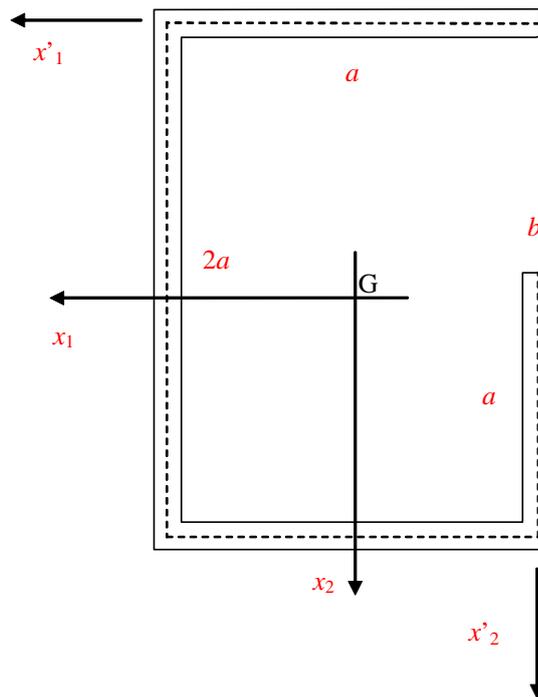


Figura 13.7: Sezione in parete sottile soggetta a sollecitazione di taglio e flessione.

Le coordinate del baricentro sono allora:

$$\begin{aligned} x_1^g &= \frac{S'_1}{A} = \frac{3a^2b}{5ab} = \frac{3}{5}a \\ x_2^g &= \frac{S'_2}{A} = \frac{11}{2} \frac{a^2b}{5ab} = \frac{11}{10}a \end{aligned} \quad (13.55)$$

Determinato che sia il baricentro, si calcolano i momenti d'inerzia della sezione. Poiché il sistema di riferimento baricentrico non è principale d'inerzia, il momento centrifugo è certamente non nullo. La matrice d'inerzia ha quindi tutte le componenti non nulle. Si considera il caso in cui la forza di taglio \mathbf{V} ha entrambe le componenti non nulle; la formula di Jourawsky generalizzata (13.30) per la sollecitazione di taglio assume la forma:

$$\tau = -\frac{1}{b} [(H_{11}V_1 + H_{12}V_2) s_2^* + (H_{12}V_1 + H_{22}V_2) s_1^*] \quad (13.56)$$

τ è la componente normale della tensione tangenziale alla generica corda, che risulta sempre ortogonale alla linea media della sezione.

Per determinare l'andamento delle tensioni tangenziali è necessario valutare le funzioni s_1^* e s_2^* . A tale scopo si considera la linea media della sezione divisa in 4 tratti, come mostrato in figura 13.8; in ogni tratto si introduce un'ascissa.

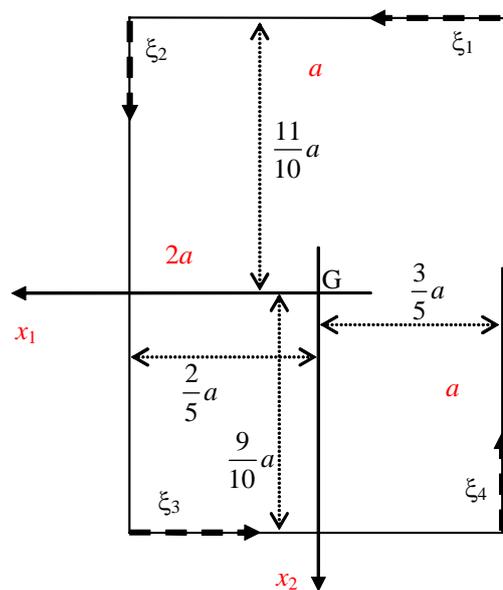


Figura 13.8: Ascisse sulla linea media della sezione sottile.

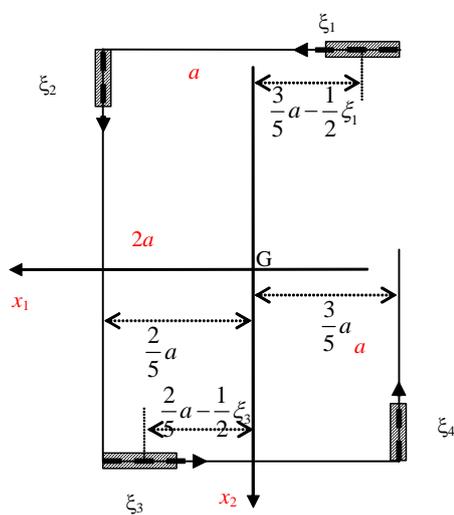


Figura 13.9: Calcolo del momento statico $s_2^* = S_1^*$.

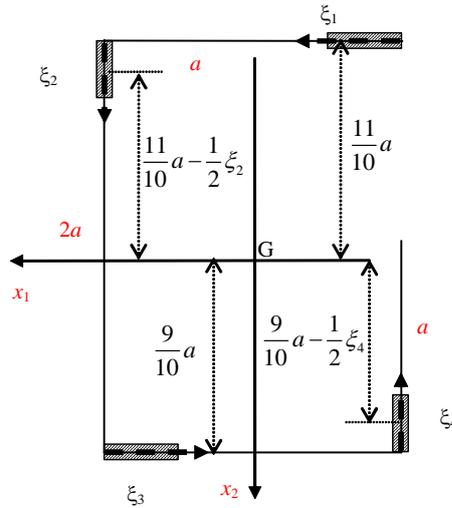


Figura 13.10: Calcolo del momento statico $s_1^* = S_2^*$.

Le funzioni momento statico nei quattro tratti valgono:

$$\begin{aligned}
 s_{2_1}^* = S_{1_1}^* &= - \left(\frac{3}{5}a - \frac{1}{2}\xi_1 \right) b \xi_1 \\
 s_{2_2}^* = S_{1_2}^* &= - \frac{1}{10}a^2b + \frac{2}{5}ab \xi_2 \\
 s_{2_3}^* = S_{1_3}^* &= \frac{7}{10}a^2b + b \xi_3 \left(\frac{2}{5}a - \frac{1}{2}\xi_3 \right) \\
 s_{2_4}^* = S_{1_4}^* &= \frac{3}{5}a^2b - \frac{3}{5}ab \xi_4
 \end{aligned} \tag{13.57}$$

$$\begin{aligned}
 s_{2_1}^* = S_{2_1}^* &= - \frac{11}{10}ab \xi_1 \\
 s_{2_2}^* = S_{2_2}^* &= - \frac{11}{10}a^2b - \left(\frac{11}{10}a - \frac{1}{2}\xi_2 \right) b \xi_2 \\
 s_{2_3}^* = S_{2_3}^* &= - \frac{13}{10}a^2b + \frac{9}{10}ab \xi_3 \\
 s_{2_4}^* = S_{2_4}^* &= - \frac{2}{5}a^2b + \left(\frac{9}{10}a - \frac{1}{2}\xi_4 \right) b \xi_4
 \end{aligned} \tag{13.58}$$

Nelle figure 13.11 e 13.12 sono riportati gli andamenti delle funzioni momento statico.

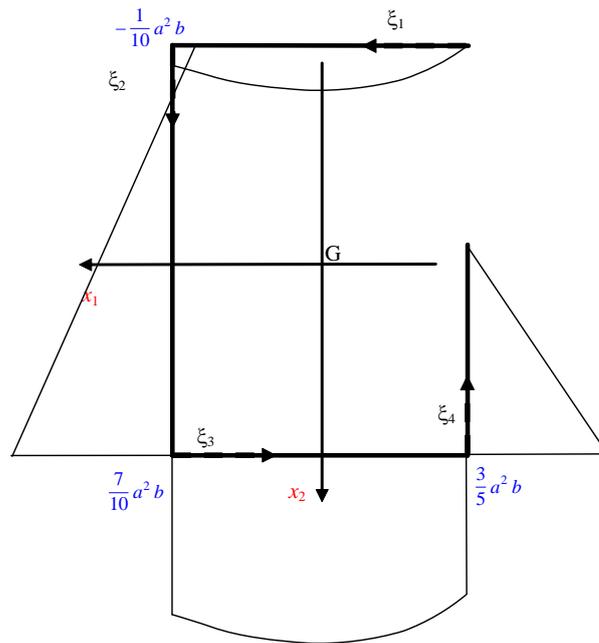
L'equazione (13.56), tenendo conto delle formule (13.57) e (13.58) ovvero delle funzioni diagrammate nelle figure 13.11 e 13.12, è possibile determinare il diagramma delle tensioni tangenziali per la sezione considerata.

Qualora fosse necessario determinare la posizione del centro di taglio, si procede come segue.

Fase 1

Si pone $H_{12}V_1 + H_{22}V_2 = 0$ nell'equazione (13.56); le tensioni tangenziali valgono allora:

$$\tau^1 = - \frac{1}{b} (H_{11}V_1 + H_{12}V_2) s_2^* = -\alpha_1 s_2^* \tag{13.59}$$

Figura 13.11: Diagramma di $S_1^* = s_2^*$.

avendo posto $\alpha_1 = (H_{11}V_1 + H_{12}V_2)/b$. La tensione tangenziale così calcolata nella fase 1 dipende esclusivamente da s_2^* . Si determinano le risultanti delle tensioni tangenziali sui singoli tratti della sezione in parete sottile:

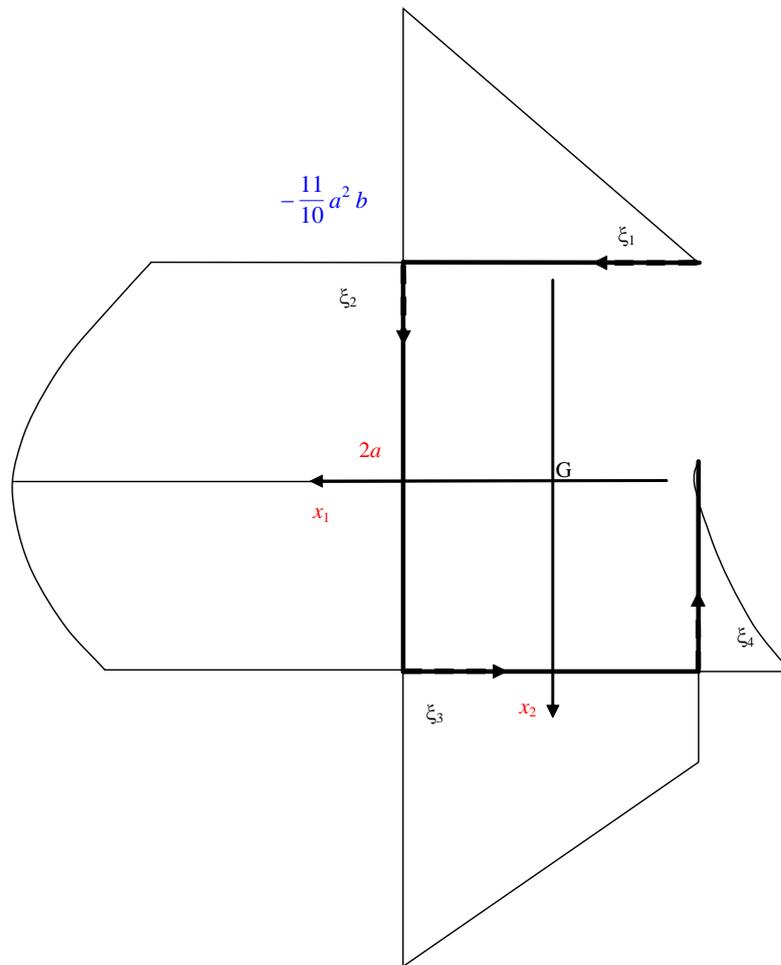
$$\begin{aligned}
 F_1^1 &= - \int_0^a \alpha_1 s_{2_1}^* d\xi_1 = \frac{2}{15} a^3 b \alpha_1 \\
 F_2^1 &= - \int_0^{2a} \alpha_1 s_{2_2}^* d\xi_2 = -\frac{3}{5} a^3 b \alpha_1 \\
 F_3^1 &= - \int_0^a \alpha_1 s_{2_3}^* d\xi_3 = -\frac{11}{15} a^3 b \alpha_1 \\
 F_4^1 &= - \int_0^a \alpha_1 s_{2_4}^* d\xi_4 = -\frac{3}{10} a^3 b \alpha_1
 \end{aligned} \tag{13.60}$$

Le quattro forze sono applicate come mostrato in figura 13.13.

Le quattro forze hanno risultante \mathbf{V}^1 con componenti:

$$V_1^1 = \frac{13}{15} a^3 b \alpha_1 \quad V_2^1 = -\frac{3}{10} a^3 b \alpha_1 \tag{13.61}$$

Scelto un polo qualsiasi, l'asse centrale del sistema di forze si determina imponendo che il momento della risultante sia uguale al momento delle quattro forze. In particolare, scegliendo come polo il baricentro della sezione, ovvero l'origine del sistema

Figura 13.12: Diagramma di $S_2^* = s_1^*$.

di riferimento, si ha:

$$-V_2^1 d_1 + V_1^1 d_2 = \frac{11}{10} a F_1^1 + \frac{2}{5} a F_2^1 + \frac{9}{10} a F_3^1 + \frac{3}{5} a F_4^1 \quad (13.62)$$

e, tenendo conto delle equazioni (13.60) e (13.61), la (13.62) diventa:

$$\frac{3}{10} a^3 b \alpha_1 d_1 + \frac{13}{15} a^3 b \alpha_1 d_2 = \frac{11}{10} a \frac{2}{15} a^3 b \alpha_1 - \frac{2}{5} a \frac{3}{5} a^3 b \alpha_1 - \frac{9}{10} a \frac{11}{15} a^3 b \alpha_1 - \frac{3}{5} a \frac{3}{10} a^3 b \alpha_1 \quad (13.63)$$

Effettuando qualche semplificazione, si ha:

$$9d_1 + 26d_2 = -28a \quad (13.64)$$

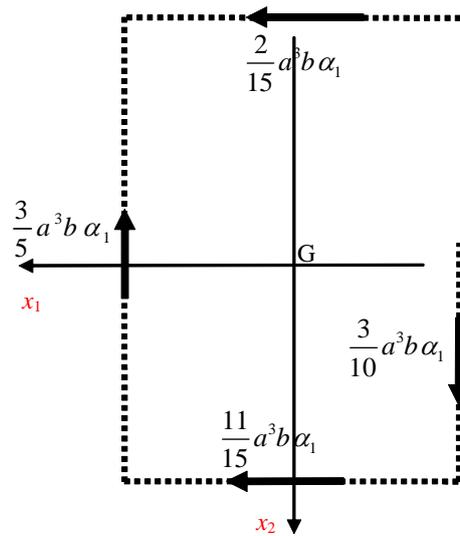


Figura 13.13: Forze esplicate nella fase 1.

che rappresenta l'equazione dell'asse centrale del sistema di forze con risultante \mathbf{V}^1 . Il centro di taglio giace certamente sulla retta determinata.

Fase 2

Si pone $H_{11}V_1 + H_{12}V_2 = 0$ nell'equazione (13.56); le tensioni tangenziali valgono allora:

$$\tau^2 = -\frac{1}{b} (H_{12}V_1 + H_{22}V_2) s_1^* = -\alpha_2 s_1^* \quad (13.65)$$

avendo posto $\alpha_1 = (H_{11}V_1 + H_{12}V_2)/b$. La tensione tangenziale così calcolata nella fase 1 dipende esclusivamente da S_1^* . Si determinano le risultanti delle tensioni tangenziali sui singoli tratti della sezione in parete sottile:

$$\begin{aligned} F_1^2 &= -\int_0^a \alpha_2 s_{1_1}^* d\xi_1 = \frac{11}{20} a^3 b \alpha_2 \\ F_2^2 &= -\int_0^{2a} \alpha_2 s_{1_2}^* d\xi_2 = \frac{46}{15} a^3 b \alpha_2 \\ F_3^2 &= -\int_0^a \alpha_2 s_{1_3}^* d\xi_3 = \frac{17}{20} a^3 b \alpha_2 \\ F_4^2 &= -\int_0^a \alpha_2 s_{1_4}^* d\xi_4 = \frac{7}{60} a^3 b \alpha_2 \end{aligned} \quad (13.66)$$

Le quattro forze sono applicate come mostrato in figura 13.14.

Le quattro forze hanno risultante \mathbf{V}^2 con componenti:

$$V_1^2 = -\frac{3}{10} a^3 b \alpha_2 \quad V_2^2 = \frac{59}{20} a^3 b \alpha_2 \quad (13.67)$$

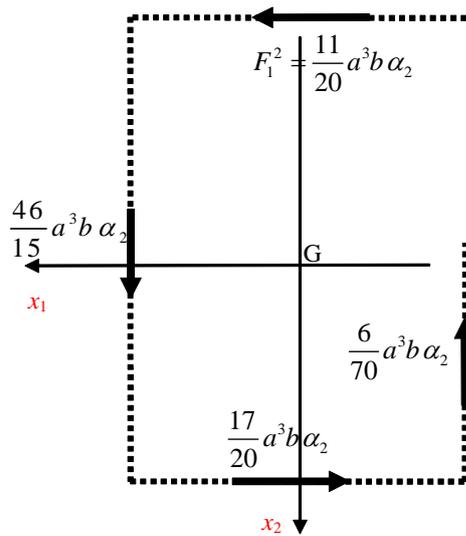


Figura 13.14: Forze esplicate nella fase 2.

Scelto un polo qualsiasi, l'asse centrale si determina imponendo che il momento della risultante sia uguale al momento delle quattro forze. In particolare, scegliendo come polo il baricentro della sezione, ovvero l'origine del sistema di riferimento, si ha:

$$-V_2^2 d_1 + V_1^2 d_2 = \frac{11}{10} a F_1^2 + \frac{2}{5} a F_2^2 + \frac{9}{10} a F_3^2 + \frac{3}{5} a F_4^2 \quad (13.68)$$

e, tenendo conto delle equazioni (13.66) e (13.67), la (13.68) diventa:

$$117d_1 + 18d_2 = -160a \quad (13.69)$$

che rappresenta l'equazione dell'asse centrale del sistema di forze con risultante \mathbf{V}^2 . Il centro di taglio giace certamente sulla retta determinata.

Fase 3

Il centro di taglio si trova come intersezione delle due rette ottenute come assi centrali di \mathbf{V}^1 e di \mathbf{V}^2 :

$$\begin{cases} 9d_1 + 26d_2 = -28a \\ 117d_1 + 18d_2 = -160a \end{cases} \quad (13.70)$$

che risolvendo fornisce le coordinate del centro di taglio:

$$d_1 = -\frac{293}{370}a = -0.792a \quad d_2 = -\frac{457}{555}a = -0.823a \quad (13.71)$$

13.10 Sezione sottile chiusa

Nel caso di sezione in parete sottile chiusa, la formula di Jourawski (13.46) non è applicabile in quanto, una volta assegnata la corda in corrispondenza della quale si intende determinare la tensione tangenziale, non è possibile definire in modo univoco l'area A^* .

Per il calcolo delle tensioni tangenziali allora si procede come di seguito illustrato. Si sceglie una corda in corrispondenza di una ascissa curvilinea ζ_o , si indica con q_o il flusso incognito delle tensioni tangenziali in corrispondenza della corda scelta. La tensione tangenziale τ per la generica corda si calcola come la somma dell'effetto provocato dalla presenza del flusso incognito q_o e della tensione tangenziale alla Jourawski, valutata quest'ultima come se la sezione fosse aperta (vedi figura 13.15):

$$\tau = \frac{1}{b(\zeta)} q_o - \frac{1}{b(\zeta)} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{V} \bullet \mathbf{S}^*(\zeta) \quad (13.72)$$

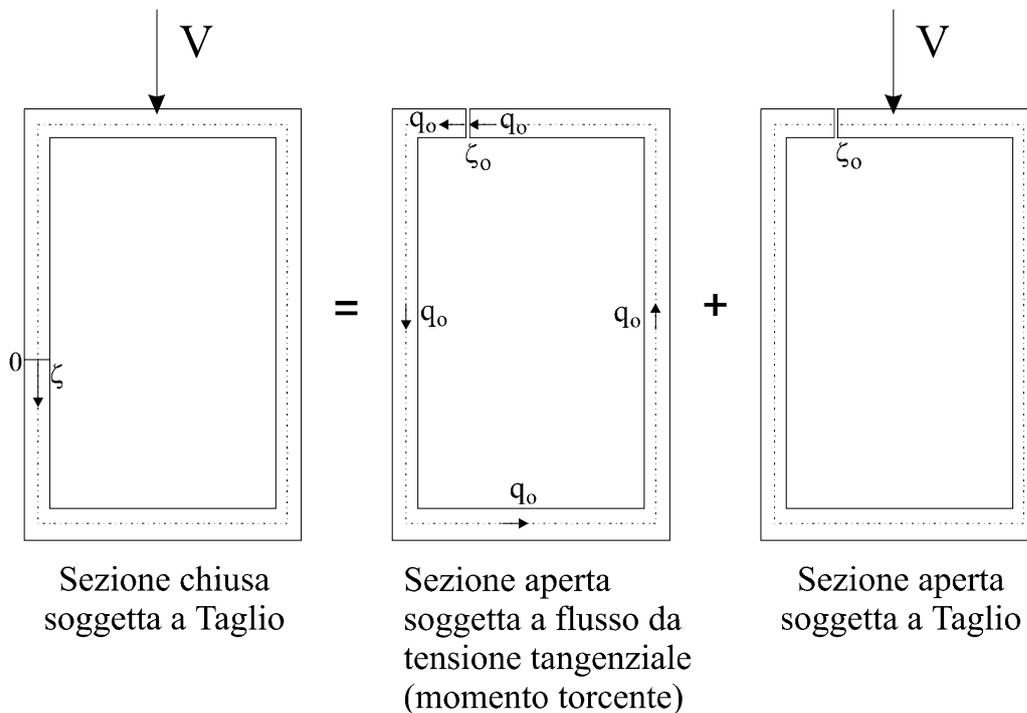


Figura 13.15: Sezione sottile chiusa soggetta a taglio.

Si evidenzia che la presenza del solo flusso di tensioni tangenziali q_o genera nella sezione un momento torcente. Per determinare il valore di q_o si scrive un'equazione di congruenza, imponendo che la rotazione unitaria della sezione sia nulla, poichè

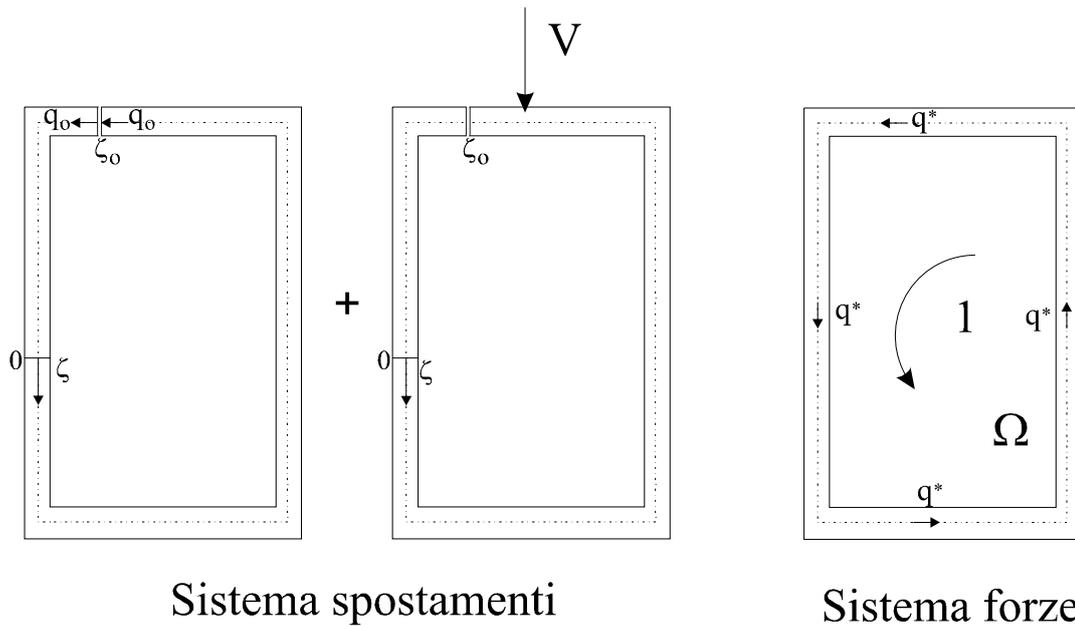


Figura 13.16: Principio dei lavori virtuali per la trave con sezione sottile chiusa.

la sollecitazione è di puro taglio. Tale equazione si scrive agevolmente ricorrendo al principio dei lavori virtuali, dove il sistema degli spostamenti e quello delle forze sono evidenziati in figura 13.16.

In definitiva, con l'aiuto della figura 13.16, si scrive:

$$\begin{aligned}
 1 \Theta &= \int_a \left(\frac{1}{b(\zeta)} q^* \frac{\tau}{G} \right) b(\zeta) d\zeta = \int_a q^* \frac{\tau}{G} d\zeta = \int_a \frac{1}{2 \Omega G} \tau d\zeta \quad (13.73) \\
 &= \frac{1}{2 G \Omega} \int_a \left(\frac{1}{b(\zeta)} q_0 - \frac{1}{b(\zeta)} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{V} \bullet \mathbf{S}^*(\zeta) \right) d\zeta \\
 &= q_0 \frac{1}{2 G \Omega} \int_a \frac{1}{b(\zeta)} d\zeta - \frac{1}{2 G \Omega} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{V} \bullet \int_a \frac{1}{b(\zeta)} \mathbf{S}^*(\zeta) d\zeta = 0
 \end{aligned}$$

e quindi:

$$q_0 = \frac{\mathbf{J}^{-1} \mathbf{V} \bullet \int_a \frac{1}{b(\zeta)} \mathbf{S}^*(\zeta) d\zeta}{\int_a \frac{1}{b(\zeta)} d\zeta} \quad (13.74)$$

Nel caso che la sezione chiusa è n -connessa, con $n > 2$, si procede in modo analogo a quanto già descritto sopra. Nel seguito si esamina il caso con $n = 3$. Si distinguono due possibili maglie indipendenti, e.g. Ω_1 e Ω_2 , e si introducono su di esse appropriati sistemi di riferimento curvilinei, come mostrato in figura 13.17.

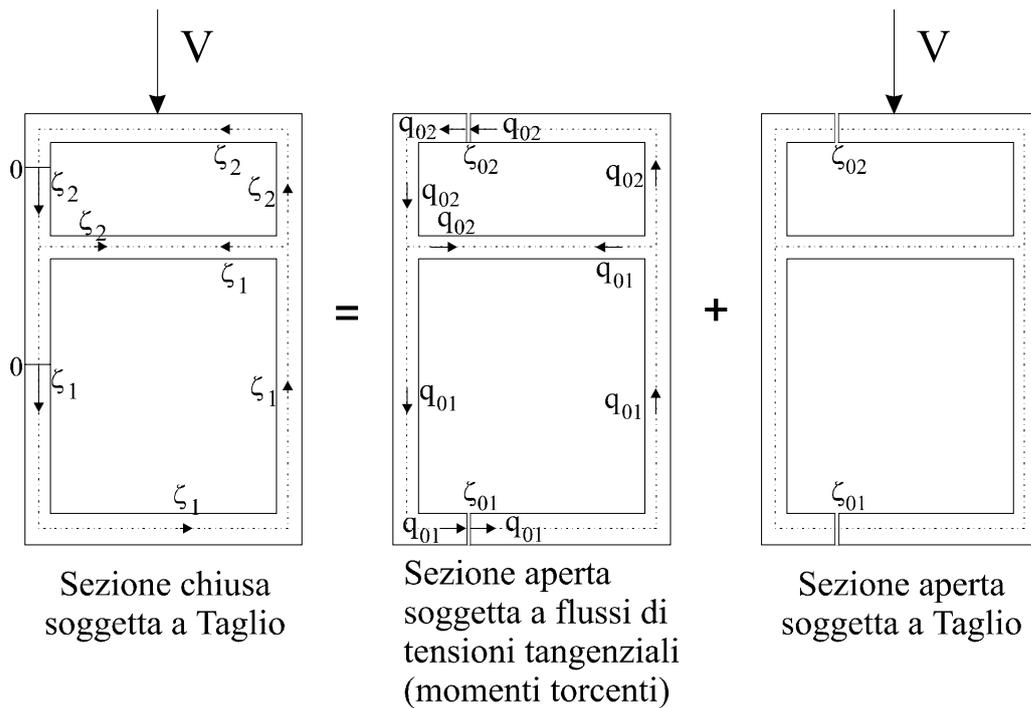
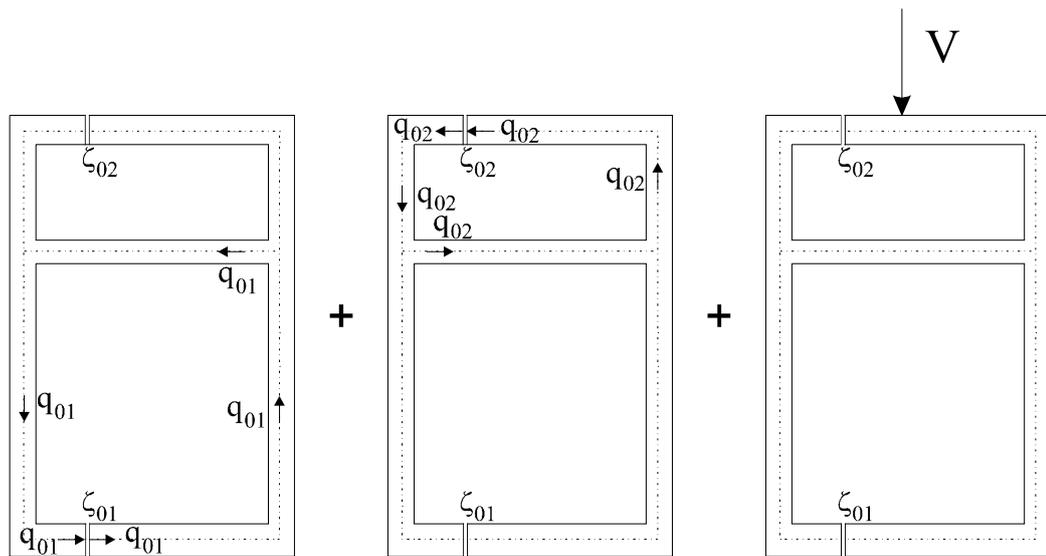


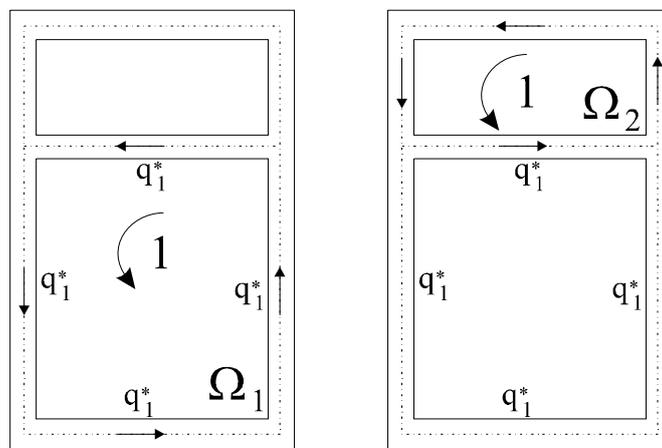
Figura 13.17: Sezione sottile tri-connessa soggetta a taglio.

Si indicano con q_{o1} e q_{o2} i flussi delle tensioni tangenziali in corrispondenza delle corde individuate dalle ascisse curvilinee ζ_{o1} e ζ_{o2} , rispettivamente. Per condizioni di equilibrio, i due flussi q_{o1} e q_{o2} circolano nelle due maglie Ω_1 e Ω_2 .

I valori incogniti dei flussi di tensioni tangenziali si determinano come nel caso di sezione sottile bi-connessa imponendo la congruenza. In particolare, si devono scrivere due equazioni di congruenza per ricavare i flussi incogniti. Ancora una volta si impone che l'angolo unitario di torsione della sezione sia nullo. Tale condizione di congruenza, attraverso l'utilizzo del principio dei lavori virtuali, permette di scrivere due equazioni. Infatti, come è ben noto, nell'applicare il principio dei lavori virtuali il sistema forze deve soddisfare esclusivamente il requisito dell'equilibrio delle tensioni, e nella sezione tri-connessa scelta di possibili flussi di tensioni tangenziali indipendenti in equilibrio con il momento torcente unitario applicato ne esistono due. In figura 13.18 è evidenziato il sistema degli spostamenti ed i due sistemi delle forze.



Sistema spostamenti



Sistema forze 1

Sistema forze 2

Figura 13.18: Principio dei lavori virtuali per la sezione sottile tri-connessa.

In definitiva, con l'aiuto della figura 13.18, si scrive:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{M_1} q_1^* \frac{1}{b(\zeta_1)} q_{o1} d\zeta_1 - \int_{M_{12}} q_1^* \frac{1}{b(\zeta_1)} q_{o2} d\zeta_1 \\
&\quad - \int_{M_1} q_1^* \frac{1}{b(\zeta_1)} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{V} \bullet \mathbf{S}^*(\zeta_1) d\zeta_1 \\
&= \frac{1}{2 G \Omega_1} \left(q_{o1} \int_{M_1} \frac{1}{b(\zeta_1)} d\zeta_1 - q_{o2} \int_{M_{12}} \frac{1}{b(\zeta_1)} d\zeta_1 \right. \\
&\quad \left. - \mathbf{J}^{-1} \mathbf{V} \bullet \int_{M_1} \frac{1}{b(\zeta_1)} \mathbf{S}^*(\zeta_1) d\zeta_1 \right)
\end{aligned} \tag{13.75}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{M_2} q_2^* \frac{1}{b(\zeta_2)} q_{o2} d\zeta_2 - \int_{M_{12}} q_2^* \frac{1}{b(\zeta_2)} q_{o1} d\zeta_2 \\
&\quad - \int_{M_2} q_2^* \frac{1}{b(\zeta_2)} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{V} \bullet \mathbf{S}^*(\zeta_2) d\zeta_2 \\
&= \frac{1}{2 G \Omega_2} \left(-q_{o1} \int_{M_{12}} \frac{1}{b(\zeta_2)} d\zeta_2 + q_{o2} \int_{M_2} \frac{1}{b(\zeta_2)} d\zeta_2 \right. \\
&\quad \left. - \mathbf{J}^{-1} \mathbf{V} \bullet \int_{M_2} \frac{1}{b(\zeta_2)} \mathbf{S}^*(\zeta_2) d\zeta_2 \right)
\end{aligned} \tag{13.76}$$

dove per M_1 si intende la maglia 1, per M_2 la maglia 2 e per M_{12} il tratto comune tra la maglia 1 e la maglia 2. Risolvendo le due equazioni (13.75) e (13.76) rispetto a q_{o1} e q_{o2} , si determina l'andamento delle tensioni tangenziali da taglio nella sezione sottile chiusa triconnessa.

Capitolo 14

CRITERI DI RESISTENZA

14.1 Premesse

Nei capitoli precedenti sono stati forniti gli strumenti matematici necessari per la definizione dello stato di tensione e deformazione in un solido soggetto a determinate forze esterne e variamente vincolato. Tali deduzioni effettuate facendo l'ipotesi che la materia costituente il corpo segua le leggi dell'elasticità lineare, sono pertanto valide nella misura in cui il comportamento reale del materiale è sufficientemente prossimo a quello teorico ipotizzato.

Per verificare tale circostanza si presenta quindi indispensabile la definizione per via sperimentale delle proprietà tecnologiche dei materiali al fine di saggiare i limiti entro i quali le leggi teoriche proposte sono in grado di rappresentare attendibilmente il fenomeno reale.

Il più semplice e più comune test sperimentale sui materiali da costruzione è la cosiddetta *prova di trazione*. Tale prova viene effettuata inserendo un provino di sezione circolare o rettangolare del materiale in esame in una macchina atta ad esercitare su di esso una forza di trazione P , come illustrato in figura 14.1, crescente con gradualità e registrando le variazioni $\Delta\ell$ della lunghezza di prova ℓ_o al variare della forza applicata P .

Detta A l'area iniziale della sezione trasversale del provino; introdotte le due quantità:

$$\sigma_n = \frac{P}{A}, \quad \varepsilon_c = \frac{\Delta\ell}{\ell_o} \quad (14.1)$$

dette rispettivamente *tensione nominale* e *deformazione convenzionale*, è possibile dedurre dalla prova un diagramma $\sigma_n = \sigma_n(\varepsilon_c)$ che qualifica abbastanza bene il comportamento meccanico del materiale sotto sforzo.

Facendo riferimento ai materiali metallici più comunemente impiegati nell'ambito delle costruzioni quali l'acciaio o l'alluminio, i diagrammi $\sigma_n - \varepsilon_c$ effettuati in prove

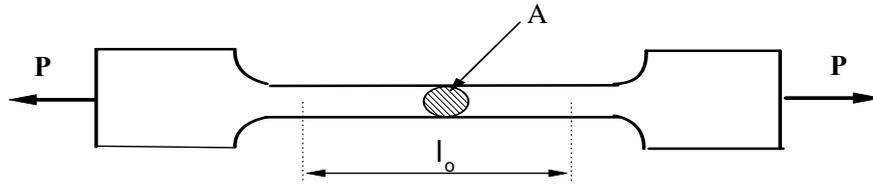


Figura 14.1: Prova di trazione

a temperatura ambiente si presentano in genere come qualitativamente illustrato in figura 14.2.

Inizialmente la relazione fra tensione e deformazione risulta essere essenzialmente lineare. Questa parte lineare della curva si estende fino al punto A la cui tensione corrispondente σ_o viene detto *limite di proporzionalità*. E' evidente pertanto che solo in questo campo risultano attendibili i risultati teorici dedotti nell'ipotesi di elasticità lineare. Incrementando ulteriormente il carico, la deformazione cresce non più proporzionalmente alla tensione ma il materiale permane ancora in campo elastico nel senso che scaricando il provino questo ritorna alla sua lunghezza iniziale. Questa condizione è soddisfatta fino al punto B la cui tensione corrispondente σ_s viene detta *tensione di snervamento*. Per la gran parte dei materiali il limite di proporzionalità σ_o e la tensione di snervamento σ_s risultano essere sensibilmente prossime. Incrementando il carico esterno ulteriormente, le deformazioni cominciano ad accrescersi molto rapidamente e non sono più reversibili nel senso che procedendo allo scarico del provino a partire da un punto C situato al di sopra del punto di snervamento B , la legge di scarico non ripercorre a ritroso la curva di carico iniziale $OABC$ ma avviene secondo la retta CC' sensibilmente parallela alla retta elastica iniziale OA . La deformazione totale ε che compete al punto C può quindi pensarsi scomposta nella parte elastica ε^e che viene restituita allo scarico e nella parte plastica o permanente ε^p . Ricaricando il provino a partire dalla situazione deformata C' , la legge di carico ripercorre piuttosto fedelmente la retta $C'C$ per poi riprendere, a partire da C , la curva iniziale relativa al materiale vergine. Il campo BD della curva, in cui il materiale non più elastico, richiede ancora incrementi di tensione per produrre incrementi di deformazione, definisce il cosiddetto *fenomeno dell'incrudimento*.

In questa fase comincia a diventare sensibile la contrazione trasversale plastica (*strizione*) della sezione del provino per cui la tensione nominale σ_n comincia a

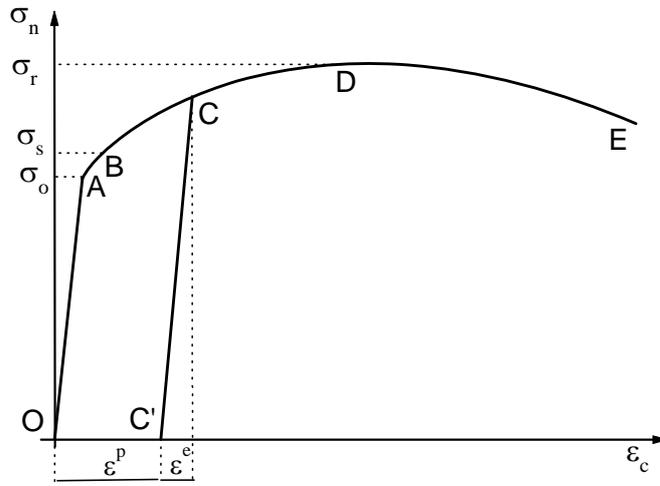


Figura 14.2: Diagramma sforzo-deformazione per materiali metallici comuni

discostarsi piuttosto notevolmente dalla tensione reale.

Si ha allora che, pur continuando ad aumentare la tensione reale, la diminuzione dell'area è tale che la tensione nominale, e quindi il carico, raggiunto un massimo in corrispondenza del punto D prende a diminuire sino a che in E si verifica la rottura del provino. La tensione nominale massima σ_r viene detta *tensione di rottura*. Da quanto detto è evidente pertanto che il comportamento elastico lineare per i materiali dotati di campo plastico si verifica solo entro un campo piuttosto limitato di tensioni che in regime monoassiale può ritenersi individuato dall'intervallo:

$$-\sigma_o \leq \sigma \leq \sigma_o \quad (14.2)$$

essendo provato che per tali materiali si ha all'incirca uguale comportamento a trazione e compressione.

La definizione del limite di proporzionalità σ_o , che come già si è detto si assume coincidente con la tensione di snervamento σ_s , risulta quindi indispensabile per la valutazione del campo di validità della teoria elastica lineare.

In alcuni materiali, quali ad esempi gli acciai a basso tenore di carbonio largamente usati nelle costruzioni metalliche, tale definizione risulta essere piuttosto semplice in quanto, come illustrato in figura 14.3, il raggiungimento dello snervamento è denunciato da un brusco accrescimento della deformazione a tensione pressochè costante (tratto AB della curva di figura 14.3). Nei materiali in cui allo snervamento sussegue immediatamente l'incrudimento (vedi figura 14.2), la valutazione della tensione di snervamento σ_s risulta invece essere estremamente più aleatoria.

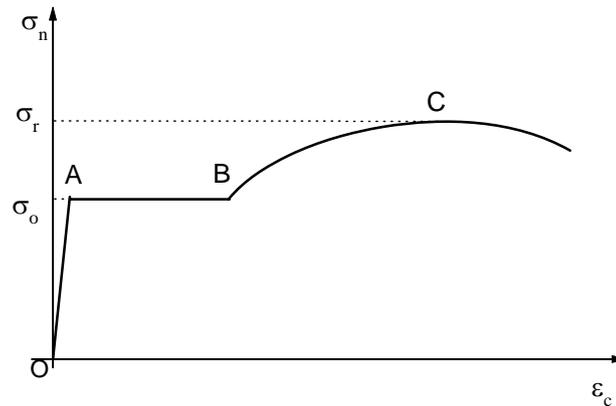


Figura 14.3: Diagramma sforzo-deformazione per acciai a basso tenore di carbonio

Si usa spesso definire infatti tale tensione come quella in corrispondenza della quale si ha una deformazione residua allo scarico dello 0,2%.

In ogni caso, fissata che sia per il materiale la tensione di snervamento, la tensione di lavoro o *tensione ammissibile* k per strutture calcolate secondo le ipotesi dell'elasticità lineare, deve essere tenuta sufficientemente più bassa di σ_o . Si usa infatti fissare quale valore della tensione ammissibile la quantità:

$$k = \frac{\sigma_o}{s} \quad (14.3)$$

essendo s un *coefficiente di sicurezza* sufficientemente maggiore di uno.

La necessità di fissare tale coefficiente è dovuta a molteplici cause: incertezza nella previsione dei carichi esterni; incertezza nelle schematizzazioni strutturali; non prevedibilità di eventuali difetti interni del materiale; etc. In questo senso pertanto s è da intendersi come *coefficiente di ignoranza*.

Vi è tuttavia da rilevare che limitare il campo di lavoro della struttura a quello elastico lineare, riferendo la sicurezza al raggiungimento di una aliquota della tensione di snervamento di uno o più punti di essa, conduce spesso ad un sovradimensionamento che risulta certamente antieconomico.

Per materiali che abbiano un campo plastico piuttosto esteso è possibile infatti, sfruttando le risorse plastiche, pervenire a dimensionamenti più razionali ed economici. Ciò implica necessariamente l'abbandono delle limitazioni connesse all'ipotesi dell'elasticità lineare e l'introduzione dei legami costitutivi elasto-plastici certamente più complessi dei precedenti.

Diversa è invece la situazione per i materiali fragili e cioè per quei materiali che

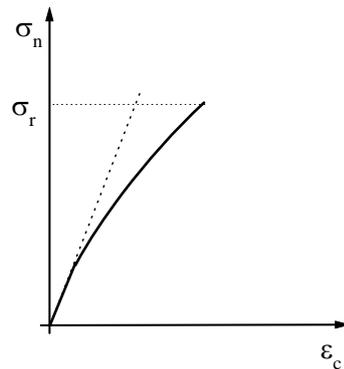


Figura 14.4: Diagramma sforzo-deformazione per materiali fragili

hanno limitata capacità di deformarsi plasticamente e pervengono quindi a rottura per deformazioni molto piccole.

Per questi materiali, fra i quali si ricordano la ghisa, il vetro, il calcestruzzo, si ha in genere, già da tensioni all'incirca nulle, uno spiccato comportamento non lineare, come riportato in figura 14.4, ed inoltre una sensibile differenza di resistenza a trazione e compressione.

Le tensioni ammissibili, e cioè il campo entro il quale è lecito schematizzare il corpo come elastico lineare, devono in questo caso essere tenute molto basse sia perchè il materiale come si è detto si allontana sin dall'origine da tale comportamento, sia perchè, non sussistendo capacità di adattamento plastico, la rottura avviene bruscamente senza alcun fenomeno premonitore.

14.2 I criteri di sicurezza: generalità

Se si prende in considerazione un'asta sottoposta ad uno stato di sollecitazione semplice, per esempio trazione, si può per essa agevolmente valutare la tensione relativa alla condizione critica e verificare che quella esistente nell'elemento le sia sempre inferiore. In generale quindi, per strutture che lavorano in regime monoassiale la sicurezza nel punto generico è garantita se la tensione normale σ soddisfa la condizione:

$$-k \leq \sigma \leq k \quad (14.4)$$

posta l'ipotesi che il materiale abbia uguali tensioni ammissibili a trazione e compressione.

Nel caso più generale di differente comportamento a trazione e compressione la

(14.4) va sostituita dalla condizione:

$$-k'' \leq \sigma \leq k' \quad (14.5)$$

essendo k' e k'' rispettivamente i limiti ammissibili a trazione ed a compressione.

Nel caso di sollecitazione biassiale o triassiale, specie in strutture di forma non semplice, il problema diviene molto più complesso, in quanto per una verifica, si dovrebbero teoricamente prendere in esame, nel caso di materiale isotropo, gli effetti di tutte le possibili combinazioni delle tensioni principali σ_1 , σ_2 e σ_3 . Questa indagine in realtà si può effettuare con prove sperimentali o su modelli con un procedimento, tuttavia, lungo e costoso.

Usualmente inoltre, per i vari materiali da costruzione, si hanno a disposizione solo dati relativi a sollecitazioni di tipo monoassiale statiche.

Qualora quindi si riuscisse per ipotesi a definire la combinazione in qualche senso più gravosa delle tensioni principali, non si sarebbe ancora in grado di valutare quantitativamente la pericolosità dello stato tensionale, dovendo confrontare una sollecitazione di tipo triassiale con una di tipo monoassiale.

Tale difficoltà viene superata facendo delle ipotesi e sviluppando delle teorie riguardanti la resistenza dei materiali. Dette ipotesi permettono in sostanza di definire una *tensione ideale*, cioè una tensione monoassiale *equivalente*, esprimibile formalmente con la relazione:

$$\sigma_{id} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

che provoca nel materiale, secondo la teoria adottata, lo stesso effetto della reale sollecitazione triassiale.

La tensione equivalente o ideale, in quanto monoassiale, può essere facilmente confrontata con i risultati delle prove sui materiali per la verifica delle strutture.

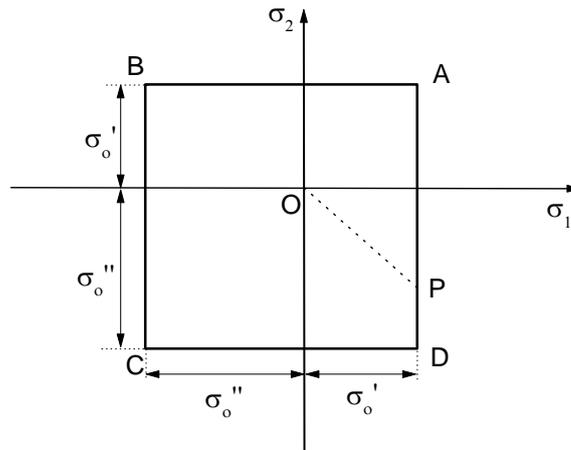
Numerosi sono i criteri di sicurezza proposti per i materiali duttili e fragili e molti di essi si possono considerare largamente superati. Ci si limita pertanto alla trattazione dei più noti, con particolare interesse per quelli relativi ai materiali duttili che sono gli unici ad aver avuto serie conferme sperimentali.

14.3 Materiali fragili

14.3.1 Criterio della massima tensione normale

Questo criterio (*Rankine*¹, *Lamè*, *Navier*) assume che la crisi del materiale abbia luogo quando una delle tre tensioni principali raggiunge la tensione limite a trazione

¹**Rankine William John Macquorn** (Edimburgo 1820-Glasgow 1872) ingegnere e fisico scozzese. Contribuì a dare orientamento moderno alla scienza delle costruzioni e all'ingegneria meccanica, sistemando su basi razionali le molte nozioni e norme di progetto evolute con la

Figura 14.5: Quadrato di *Rankine*

σ'_o o a compressione σ''_o . La condizione di crisi del materiale viene dunque individuata analiticamente dal verificarsi di una delle due uguaglianze:

$$\begin{aligned} \max \{ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \} &= \sigma'_o \\ \min \{ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \} &= -\sigma''_o \end{aligned} \quad (14.6)$$

che, nel caso di uguale resistenza a trazione e compressione, si semplificano nell'unica:

$$\max \{ |\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3| \} = \sigma_o \quad (14.7)$$

Una semplice rappresentazione grafica del criterio nel caso di uno stato tensionale piano, caratterizzato dall'essere $\sigma_3 = 0$, è riportata in figura 14.5.

pratica. Particolare importanza riveste la sua teoria del "masso illimitato", fondamentale per la costruzione di muri di sostegno, e così pure le sue indagini sulle cause di rottura dei materiali da costruzione. Dopo il 1840 si dedicò allo studio delle leggi della termodinamica: nel *Manual of the Steam Engine* (1859; Manuale della macchina a vapore) sviluppò analiticamente il complesso di trasformazioni del vapore nelle macchine termiche, stabilendone il ciclo termodinamico caratteristico (ciclo* R.). Convinto sostenitore dell'"energetica", svolse un ruolo assai importante nei dibattiti teorici della fisica della seconda metà dell'Ottocento. In uno scritto del 1855, *Outlines of the Science of Energetics* (Lineamenti di una scienza dell'energetica), propose di assumere i principi della termodinamica come schema teorico generale per comprendere i fenomeni fisici. *Metodo o formula di Rankine*: determinazione del carico di sicurezza relativo a un solido snello di sezione A, sollecitato a pressoflessione. *Scala Rankine*: Scala di temperatura assoluta in cui lo zero è lo zero assoluto e in cui l'intervallo di temperatura di un grado è uguale all'intervallo di temperatura di un grado Fahrenheit.

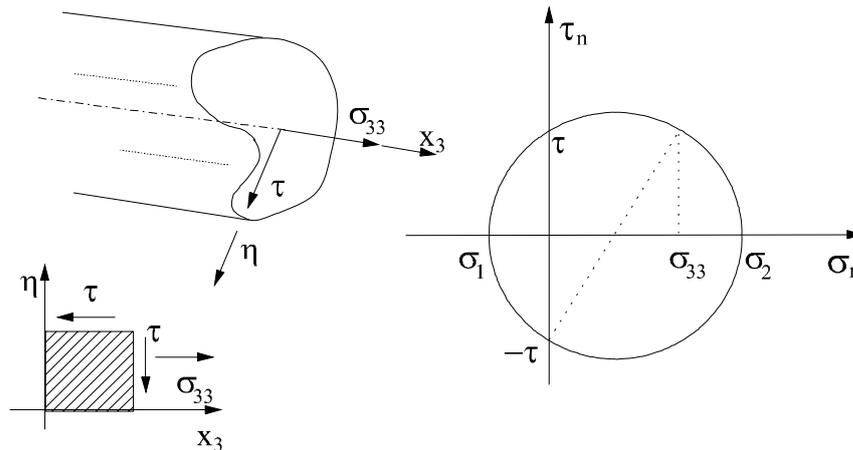


Figura 14.6: Cerchio di Mohr per uno stato tensionale piano alla Saint Venant.

Assunte infatti come coordinate le due rimanenti tensioni principali non nulle σ_1 e σ_2 la condizione di crisi (14.6) si traduce per $\sigma_3 = 0$ nel verificarsi, in alternativa, di una delle quattro uguaglianze:

$$\sigma_1 = \sigma'_o, \quad \sigma_2 = \sigma_o, \quad \sigma_1 = -\sigma''_o, \quad \sigma_2 = -\sigma''_o \quad (14.8)$$

che nel piano σ_1, σ_2 sono rappresentate rispettivamente dalle quattro rette passanti rispettivamente per DA, AB, BC, CD . La crisi si ha dunque in questo caso quando il punto rappresentativo dello stato tensionale giace sul contorno del quadrato $ABCD$ (*quadrato di Rankine*) e cioè quando una delle due tensioni principali non nulle raggiunge il valore limite a trazione o compressione.

E' appena il caso di osservare che nel caso di uno stato tensionale piano alla Saint Venant, in cui il piano delle tensioni è individuato dalla direzione dell'asse x_3 e dalla direzione di τ , l'analisi dei cerchi di Mohr conduce a concludere che le tensioni principali sono di segno opposto (vedi figura 14.6).

Pertanto le condizioni di crisi che interessa considerare nell'ambito della teoria della trave alla Saint Venant sono relative al secondo e quarto quadrante del riferimento σ_1, σ_2 .

La tensione tangenziale massima τ_o sopportabile dal materiale in assenza di tensioni normali può peraltro valutarsi osservando che, dovendo valere per uno stato tensionale piano la relazione

$$\sigma_i = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \quad i = 1, 2 \quad (14.9)$$

se l'unica componente di tensione diversa da zero risulta essere $\sigma_{12} = \tau$ si ha, in termini di componenti principali di tensione:

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = -\tau \quad (14.10)$$

Le (14.10) nel piano σ_1, σ_2 descrivono la retta per OP , che, supposto come in figura 14.5 che risulti $\sigma'_o < \sigma''_o$ (caso caratteristico della ghisa e del calcestruzzo), interseca il quadrato limite nel punto P di coordinate $(\sigma'_o, -\sigma'_o)$. Il valore limite τ_o della tensione tangenziale risulta quindi essere, in conformità con quanto appena detto:

$$\tau_o = \sigma'_o \quad (14.11)$$

Nel caso si supponesse invece che $\sigma'_o > \sigma''_o$ un identico ragionamento condurrebbe ad asserire che:

$$\tau_o = \sigma''_o \quad (14.12)$$

In generale può dunque scriversi:

$$\tau_o = \min \{ \sigma'_o, \sigma''_o \} \quad (14.13)$$

Questo criterio di crisi, che risulta essere uno dei più antichi storicamente, era stato sostanzialmente abbandonato in quanto per i materiali duttili risulta essere largamente lontano dalla realtà come è stato provato sperimentalmente. Recentemente tale criterio è stato rivalutato invece per ciò che concerne il calcestruzzo fornendo risultati piuttosto attendibili.

In ogni caso se

$$k' = \frac{\sigma'_o}{s'} \quad k'' = \frac{\sigma''_o}{s''} \quad (14.14)$$

rappresentano le tensioni ammissibili a trazione e compressione, essendo s' ed s'' i rispettivi coefficienti di sicurezza, le condizioni di sicurezza nel punto, conformemente al criterio ora esposto, si scrivono:

$$\begin{aligned} \max \{ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \} &\leq k' \\ \min \{ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \} &\geq -k'' \end{aligned} \quad (14.15)$$

se il materiale ha diverse tensioni ammissibili a trazione e compressione. Nel caso invece di uguaglianza fra le suddette tensioni, le precedenti si semplificano nell'unica

$$\max \{ |\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3| \} \leq k \quad (14.16)$$

14.3.2 Criterio della massima dilatazione

Questa teoria (*Saint Venant, Grashof*) assume che la crisi del materiale abbia luogo quando una delle tre dilatazioni principali raggiunge la dilatazione limite a trazione $\varepsilon'_o = \sigma'_o/E$ o a compressione $\varepsilon''_o = \sigma''_o/E$. La condizione di crisi del materiale viene quindi analiticamente individuata dal verificarsi di una delle due uguaglianze:

$$\begin{aligned}\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} &= \frac{\sigma'_o}{E} \\ \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} &= -\frac{\sigma''_o}{E}\end{aligned}\quad (14.17)$$

che nel caso di uguale resistenza a trazione e compressione diventano:

$$\max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3|\} = \frac{\sigma_o}{E} \quad (14.18)$$

Ricordando che

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \boldsymbol{\sigma} - \nu (\boldsymbol{\sigma} \bullet \mathbf{I}) \mathbf{I}] \quad (14.19)$$

è opportuno, per riportare le (14.17) o (14.18) in termini di tensioni, introdurre le tensioni ideali:

$$\begin{aligned}\sigma_{1id} &= \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \\ \sigma_{2id} &= \sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3) \\ \sigma_{3id} &= \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)\end{aligned}\quad (14.20)$$

che, conformemente alle (14.19), sono quelle tensioni che agendo separatamente in regime monoassiale provocano le stesse dilatazioni principali che si verificano nel caso reale per effetto combinato delle tre tensioni principali.

Le (14.17) assumono così l'aspetto

$$\begin{aligned}\max\{\sigma_{1id}, \sigma_{2id}, \sigma_{3id}\} &= \sigma'_o \\ \min\{\sigma_{1id}, \sigma_{2id}, \sigma_{3id}\} &= -\sigma''_o\end{aligned}\quad (14.21)$$

e nel caso (14.18)

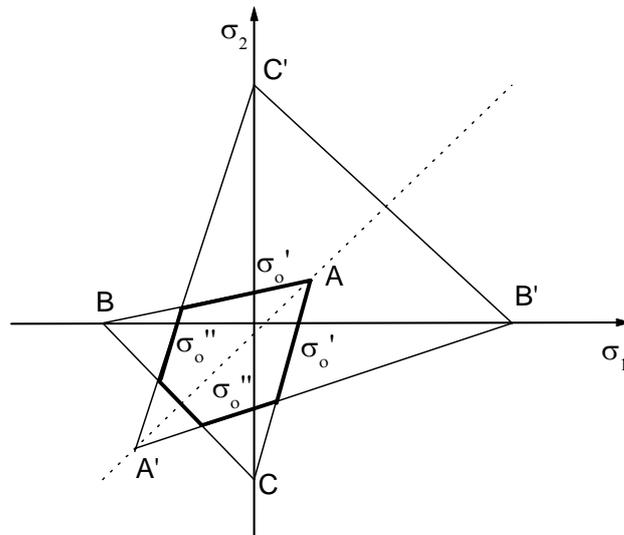
$$\max\{|\sigma_{1id}|, |\sigma_{2id}|, |\sigma_{3id}|\} = \sigma_o \quad (14.22)$$

Una semplice rappresentazione nel caso degli stati tensionali piani con $\sigma_3 = 0$, può al solito attenersi osservando che in tali ipotesi la prima delle (14.21) si traduce nelle tre condizioni:

$$\sigma_1 - \nu\sigma_2 = \sigma'_o, \quad \sigma_2 - \nu\sigma_1 = \sigma'_o, \quad -\nu(\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma'_o \quad (14.23)$$

mentre la seconda si traduce nelle ulteriori tre:

$$\sigma_1 - \nu\sigma_2 = -\sigma''_o, \quad \sigma_2 - \nu\sigma_1 = -\sigma''_o, \quad -\nu(\sigma_1 + \sigma_2) = -\sigma''_o \quad (14.24)$$

Figura 14.7: Poligono di *Grashof*

Le (14.23) nel piano σ_1, σ_2 descrivono le tre rette di frontiera del triangolo isoscele ABC avente vertici di coordinate (figura 14.7):

$$A = \left(\frac{\sigma'_o}{1-\nu}, \frac{\sigma'_o}{1-\nu} \right), \quad B = \left(-\frac{\sigma'_o}{\nu}, 0 \right), \quad C = \left(0, -\frac{\sigma'_o}{\nu} \right)$$

Le (14.24) descrivono invece le tre rette di frontiera del triangolo isoscele $A'B'C'$ avente vertici di coordinate:

$$A' = \left(-\frac{\sigma''_o}{1-\nu}, -\frac{\sigma''_o}{1-\nu} \right), \quad B' = \left(\frac{\sigma''_o}{\nu}, 0 \right), \quad C' = \left(0, \frac{\sigma''_o}{\nu} \right)$$

Il poligono formato dall'intersezione dei due triangoli ottenuti, rappresenta quindi la frontiera della condizione di crisi in esame. Tale poligono a seconda di valori assunti dal rapporto σ''_o/σ'_o e dal coefficiente di contrazione trasversale ν , può essere geometricamente rappresentato da un quadrilatero, da un pentagono o da un esagono.

Facendo riferimento al caso di uno stato tensionale caratterizzato da una sola tensione tangenziale τ , si ha, conformemente alla (14.10), il valore di crisi per tale tipo di sollecitazione:

$$\tau_o = \frac{1}{1+\nu} \min \{ \sigma'_o, \sigma''_o \} \quad (14.25)$$

Il criterio sopra esposto costituisce sotto certi aspetti un miglioramento del criterio della massima tensione normale discusso precedentemente. E' infatti logico

attendarsi che la resistenza nella direzione di una delle tre tensioni principali sia influenzata dalle tensioni agenti in direzione ortogonale. Questo criterio, contrariamente al precedente, mette in gioco tale circostanza. La sua validità è tuttavia molto dubbia ed è certamente inesistente per i materiali duttili. Per il calcestruzzo e per i materiali fragili può forse dare risultati accettabili.

Adottando tale criterio le verifiche si conducono assicurandosi che in ogni punto risulti:

$$\begin{aligned} \max \{ \sigma_{1id}, \sigma_{2id}, \sigma_{3id} \} &\leq k' \\ \min \{ \sigma_{1id}, \sigma_{2id}, \sigma_{3id} \} &\geq -k'' \end{aligned} \quad (14.26)$$

se le tensioni ammissibili sono diverse a trazione e compressione, ovvero assicurandosi che

$$\max \{ |\sigma_{1id}|, |\sigma_{2id}|, |\sigma_{3id}| \} \leq k \quad (14.27)$$

nel caso di uguali tensioni ammissibili a trazione e compressione.

14.4 Materiali duttili

Si è osservato nelle considerazioni precedenti che per i materiali duttili il comportamento elastico lineare è limitato superiormente dal raggiungimento della tensione di snervamento σ_o . Con riferimento ad uno stato di tensione in generale di tipo triassiale si pone quindi il problema di definire quale combinazione di esse produca snervamento del materiale.

Un'osservazione fondamentale a tal fine è la seguente: *lo snervamento del materiale non è influenzato da un regime di pressioni di tipo idrostatico*. Tale osservazione ha ricevuto infatti un'ampia conferma sperimentale ad opera del Bridgman in una serie di prove di trazione effettuate tenendo immerso il provino in una camera a pressione idraulica che consentiva di raggiungere pressioni dell'ordine di 2500 atm. Da tali prove è emerso infatti che la pressione idrostatica lascia pressochè inalterato il valore della tensione di snervamento e da luogo solo ad una maggiore deformabilità plastica del provino, i.e. incrementa la duttilità del materiale. Assunta quindi l'ininfluenza della pressione idrostatica è logico attribuire agli sforzi interni che non variano per effetto della pressione medesima, la causa dello snervamento del materiale.

Rilevato che un regime di pressione idrostatica d'intensità p provoca su ogni giacitura passante per il punto esclusivamente una tensione normale $\sigma_n = p$, è immediato riconoscere che sovrapponendo allo stato di sforzo reale una pressione idrostatica, restano invariate su ciascuna giacitura le sole componenti tangenziali di tensione. E' quindi logico pensare che lo snervamento del materiale sia un fenomeno da attribuirsi alle tensioni tangenziali.

Si espongono nel seguito i criteri che, operando in tale spirito, hanno riscosso le maggiori conferme per via sperimentale.

14.4.1 Criterio della massima tensione tangenziale

Questa teoria (*Tresca, Guest, Saint Venant*) assume che lo snervamento avvenga quando la massima tensione tangenziale associata allo stato di tensione reale eguaglia la massima tensione tangenziale che si ha in regime monoassiale all'atto dello snervamento.

Ricordando che l'espressione analitica della massima tensione tangenziale risulta essere (4.47):

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3| \} \quad (14.28)$$

detta σ_o la tensione di snervamento del materiale in regime monoassiale, è immediato dedurre dalla (14.28) che il valore limite della tensione tangenziale in regime monoassiale risulta essere:

$$\tau_s = \frac{\sigma_o}{2} \quad (14.29)$$

Lo snervamento del materiale secondo tale criterio si ha quindi quando si verifica la condizione:

$$\max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3| \} = \sigma_o \quad (14.30a)$$

Si precisa fin d'ora, come già osservato in precedenza, che si ammette uguale per i materiali duttili la tensione di snervamento a trazione e compressione, i.e. si assume che tali materiali siano *isoresistenti*.

Per stati tensionali piani ($\sigma_3 = 0$), è immediato dedurre che la (14.30a) equivale a dire che sia verificata una delle sei eguaglianze:

$$\sigma_1 = \pm\sigma_o, \quad \sigma_2 = \pm\sigma_o, \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \pm\sigma_o \quad (14.31)$$

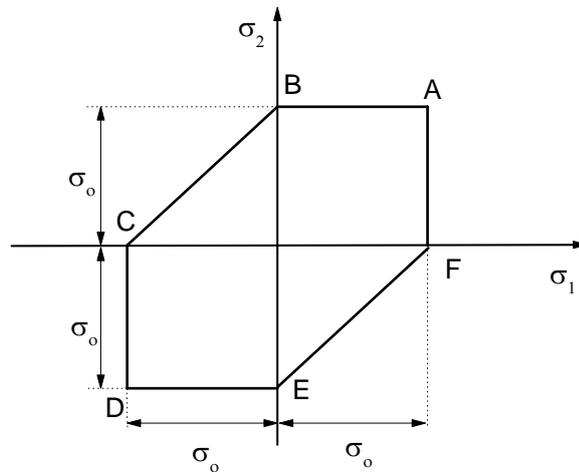
Nel piano σ_1, σ_2 tali uguaglianze corrispondono alle sei rette di frontiera dell'esagono *ABCDEF* in figura 14.8, che rappresenta appunto la richiesta condizione di snervamento nel caso di stati tensionali piani (*esagono di Tresca*).

E' opportuno rilevare che nei due quadranti in cui le due tensioni principali non nulle hanno segno opposto (caso alla Saint Venant), lo snervamento avviene secondo tale criterio se e solo se:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_o \quad (14.32)$$

D'altro canto la tensione tangenziale che in assenza di tensioni normali provoca snervamento, essendo valida la (14.10), si ottiene direttamente dalla (14.29):

$$\tau_o = \frac{\sigma_o}{2} \quad (14.33)$$

Figura 14.8: Esagono di *Tresca*

In conformità con il criterio appena descritto, detta k la tensione ammissibile, le verifiche di resistenza si conducono quindi assicurandosi che risulti, nel caso più generale di stato tensionale triassiale:

$$\max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3| \} \leq k \quad (14.34)$$

Per gli stati tensionali del tipo alla Saint Venant (piani con tensioni principali di segno opposto), la (14.34) si riduce a verificare che:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq k \quad (14.35)$$

14.4.2 Criterio della massima energia di distorsione

Questa teoria (*Von Mises*², *Hencky*, *Huber*) assume che lo snervamento del materiale in un punto abbia luogo qualora il valore dell'energia potenziale complementare di distorsione per unità di volume ψ^{dist} raggiunga in esso un valore limite ψ_o^{dist} .

²**Von Mises Richard** (Lemberg 1883-Boston 1953) matematico e filosofo austriaco. Insegnò in varie università tedesche e a Berlino dove aderì al Circolo di Berlino (strettamente legato a quello di Vienna), e accolse le tesi di fondo del neopositivismo logico, pur sostenendo con Reichenbach una concezione non logica della probabilità (1939; *Kleines Lehrbuch des Positivismus*, Piccolo manuale del positivismo). All'avvento del nazismo emigrò prima in Turchia e poi negli Stati Uniti dove, dal 1939, fu professore di matematica applicata e aerodinamica all'Università di Harvard. Si occupò di analisi numerica, di ingegneria aeronautica oltre che di filosofia della scienza. Fu uno dei principali sostenitori della concezione della probabilità detta frequentista.

Al fine di definire ψ^{dist} si ricorda che il generico stato tensionale rappresentato dal tensore $\boldsymbol{\sigma}$ può sempre scomporsi in maniera univoca in uno stato detto sferico $\boldsymbol{\sigma}^S$ ed uno deviatorico $\boldsymbol{\sigma}^D$ tali che risulti:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^S + \boldsymbol{\sigma}^D \quad / \quad J_1^D = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}^S &= \sigma_m \mathbf{I} = \frac{1}{3}(\text{tr} \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}\end{aligned}\quad (14.36)$$

In particolare in un riferimento principale di tensione si trova:

$$\begin{aligned}\sigma_1^D &= \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} \\ \sigma_2^D &= \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{3} \\ \sigma_3^D &= \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3}\end{aligned}\quad (14.37)$$

L'opera del Bridgman conferma che $\boldsymbol{\sigma}^D$ è causa di una variazione di forma del materiale sollecitato, pertanto tale aliquota del campo di tensione può definirsi di *distorsione*, mentre $\boldsymbol{\sigma}^S$ è causa di una sola variazione di volume e tale si definirà l'aliquota del campo di tensione relativa.

Detta pertanto ψ l'energia potenziale complementare per unità di volume associata allo stato di tensione $\boldsymbol{\sigma}$, è possibile scrivere:

$$\psi(\boldsymbol{\sigma}) = \psi(\boldsymbol{\sigma}^D + \boldsymbol{\sigma}^S) = \psi^{dist} + \psi^{vol} + \psi^{DS} \quad (14.38)$$

essendo ψ^{DS} l'energia potenziale elastica mutua per unità di volume relativa al lavoro mutuo delle due diverse aliquote del campo di tensione. In particolare è facile convincersi che gli stati tensionali $\boldsymbol{\sigma}^D$ e $\boldsymbol{\sigma}^S$ sono ortogonali in energia e quindi $\psi^{DS} = 0$. Infatti:

$$\psi^{DS} = \boldsymbol{\sigma}^D \bullet \boldsymbol{\varepsilon}^S = \boldsymbol{\sigma}^D \bullet \mathbf{I} \varepsilon_m = J_1^D \varepsilon_m = 0 \quad (14.39)$$

essendo ε_m la deformazione media. Poichè, come si è già detto, il limite di snervamento dei materiali duttili non sembra subire variazione in presenza di elevati stati idrostatici di tensione, appare logico limitarsi a considerare piuttosto che l'intera energia di deformazione, la sola parte associata alla variazione di forma del materiale in esame.

Il valore dell'energia potenziale complementare di distorsione per unità di volume ψ^{dist} si scrive allora come:

$$\begin{aligned}\psi^{dist} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^D \bullet \boldsymbol{\varepsilon}^D = \frac{1+\nu}{2E} \boldsymbol{\sigma}^D \bullet \boldsymbol{\sigma}^D \\ &= \frac{1}{4G} \{(\sigma_1^D)^2 + (\sigma_2^D)^2 + (\sigma_3^D)^2\}\end{aligned}\quad (14.40)$$

Sostituendo nella (14.40) le (14.37), la condizione di snervamento secondo tale criterio sussiste quando è verificata l'uguaglianza:

$$\begin{aligned}\psi^{dist} &= \frac{1}{4G} \left[\left(\frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} \right)^2 + \left(\frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{3} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{6G} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3) = \psi_o^{dist}\end{aligned}\quad (14.41)$$

E' immediato rilevare quindi che in corrispondenza dello stato monoassiale di snervamento si ottiene il valore limite:

$$\psi_o^{dist} = \frac{\sigma_o^2}{6G} \quad (14.42)$$

La (14.41) può pertanto risciversi nella forma:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 = \sigma_o^2 \quad (14.43)$$

Si osserva che dalla (14.43) è possibile passare all'espressione equivalente in termini di componenti generiche del tensore degli sforzi. Infatti, ricordando la seconda delle definizioni (4.24), e tenuto conto della (14.40), si ottiene:

$$J_2^D = \frac{1}{2} \left[(tr \boldsymbol{\sigma}^D)^2 - tr (\boldsymbol{\sigma}^D)^2 \right] = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^D \bullet \boldsymbol{\sigma}^D = -2G\psi^{dist}$$

D'altra parte, per la (4.29) si ha:

$$\begin{aligned}-2G\psi^{dist} &= J_2^D = J_2 - \frac{1}{3}J_1^2 \\ &= (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2) - \\ &\quad \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 \\ &= \frac{1}{3} \{ \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33} \\ &\quad - [\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)] \}\end{aligned}$$

Ne consegue allora che:

$$\begin{aligned}\psi^{dist} &= \frac{1}{6G} \{ \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \\ &\quad - (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33}) \}\end{aligned}$$

e la condizione di snervamento si ha quando:

$$\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) - (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33}) = \sigma_o^2 \quad (14.44)$$

Dalla (14.44) si trae inoltre che la tensione tangenziale che, in assenza di tensioni normali, provoca snervamento del materiale risulta essere:

$$\tau_o = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \quad (14.45)$$

Dal confronto fra la (14.45) e la (14.29) si deduce che il criterio in esame predice una tensione tangenziale di snervamento del materiale che risulta essere all'incirca il 15% più elevata di quella dedotta con il criterio della massima tensione tangenziale esposto in precedenza. Tale differenza è la massima che peraltro si riscontra fra i due criteri che sono quindi assai prossimi fra di loro dal punto di vista applicativo.

Di ciò ci si può rendere conto immediatamente osservando che, nel caso degli stati tensionali piani con $\sigma_3 = 0$ la condizione di snervamento (14.43) si riduce a:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_o^2 \quad (14.46)$$

La (14.46) nel piano σ_1, σ_2 risulta essere rappresentata da una ellisse avente come semiasse maggiore la bisettrice dei quadranti in cui le tensioni hanno uguale segno e come semiasse minore, ovviamente, la bisettrice dei due quadranti rimanenti. Tale ellisse tracciata a tratto pieno nella figura 14.9 risulta essere perfettamente circoscritta all'esagono di Tresca, che nella stessa figura è riportato con linea tratteggiata.

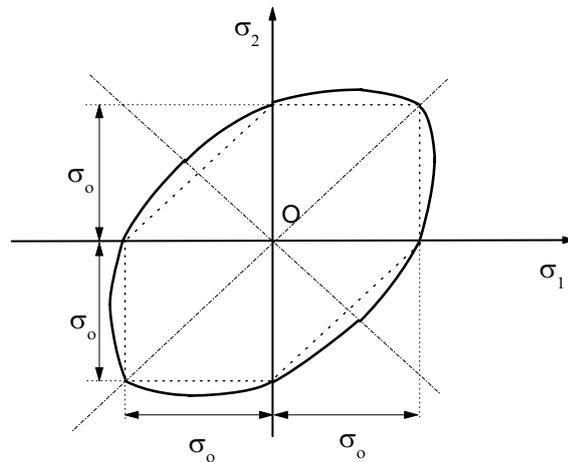
Tale criterio è certamente uno dei più attendibili per descrivere il fenomeno dello snervamento dei materiali duttili e le verifiche di resistenza, assunta un'opportuna tensione ammissibile k , si conducono con esso assicurandosi che in ogni punto si abbia:

$$\sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33} + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2)} \leq k \quad (14.47)$$

14.4.3 Criterio della massima tensione tangenziale ottaedrale

Questo criterio si fonda sull'assunzione che lo snervamento avvenga quando la tensione tangenziale reale relativa alla giacitura ottaedrale raggiunge un certo valore limite τ_o^{ott} . Ricordando l'espressione analitica (4.55) che caratterizza la tensione tangenziale su una giacitura ottaedrale, la condizione di snervamento in un punto secondo tale criterio si formalizza come:

$$\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} = \tau_o^{ott} \quad (14.48)$$

Figura 14.9: Ellisse di *Von Mises*

E' immediato rilevare quindi che in corrispondenza dello stato monoassiale di snervamento si ottiene il valore limite:

$$\tau_o^{ott} = \frac{\sqrt{2}\sigma_o}{3} \quad (14.49)$$

La (14.48) si riscrive pertanto nella forma:

$$\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} = \sqrt{2}\sigma_o \quad (14.50)$$

ovviamente equivalente alla (14.43).

Quanto appena osservato consente di concludere che pur partendo da linee concettuali sostanzialmente differenti, il presente criterio e quello della massima energia di distorsione sono di fatto equivalenti. Le considerazioni ed i concetti associati alla precedente ipotesi di snervamento possono allora ritenersi validi nel caso in esame.

Capitolo 15

INTRODUZIONE ALLA STABILITA' DELL'EQUILIBRIO

15.1 Sistemi articolati rigidi

Si consideri una mensola rigida vincolata tramite un supporto elastico di rigidezza k , soggetta a carico assiale F , come illustrato in figura 15.1.

L'equazione di equilibrio può essere scritta nella configurazione indeformata ovvero in quella deformata caratterizzata da una rotazione φ della trave. Nel secondo caso il vincolo elastico reagisce con un momento proporzionale tramite k alla rotazione φ ; in tal caso l'equazione di equilibrio si scrive come:

$$k\varphi - FL \sin \varphi = 0 \quad (15.1)$$

Risolviendo l'equazione (15.1) rispetto alla forza adimensionalizzata $f = FL/k$, si ottiene:

$$f = \frac{FL}{k} = \frac{\varphi}{\sin \varphi} \quad (15.2)$$

In figura 15.2 è riportato il percorso di equilibrio per la mensola. Si evidenzia che per $f < 1$ la mensola è in equilibrio per la sola configurazione definita da $\varphi = 0$, ovvero per la configurazione indeformata. Per $f > 1$, nell'intervallo $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, per la trave sono possibili 3 configurazioni di equilibrio: $\varphi > 0$, $\varphi < 0$, $\varphi = 0$. Per $f = 1$ si ha un punto di biforcazione dell'equilibrio; il valore della forza per la quale si ha biforcazione dell'equilibrio è generalmente definito carico critico.

L'equazione di equilibrio (15.1) si può anche ottenere come condizione di stazionarietà dell'energia potenziale totale, che nel caso in esame vale:

$$\Pi(\varphi) = \frac{1}{2}k\varphi^2 - FL(1 - \cos \varphi) \quad (15.3)$$

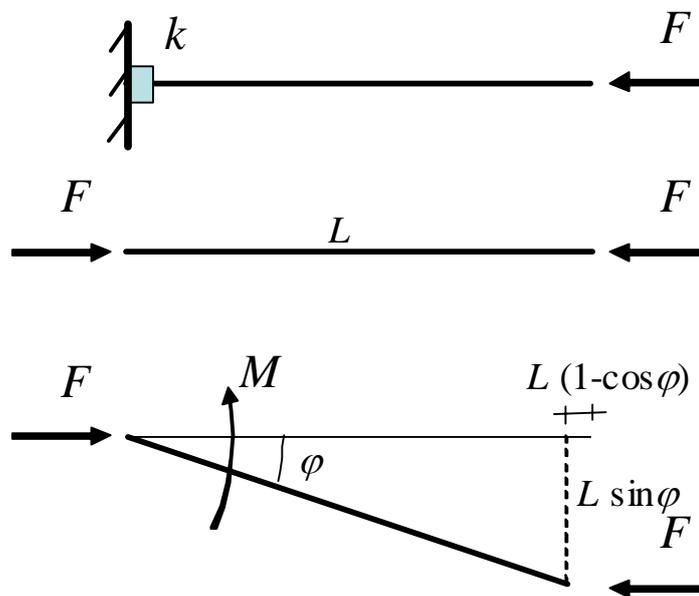


Figura 15.1: Mensola soggetta a carico assiale.

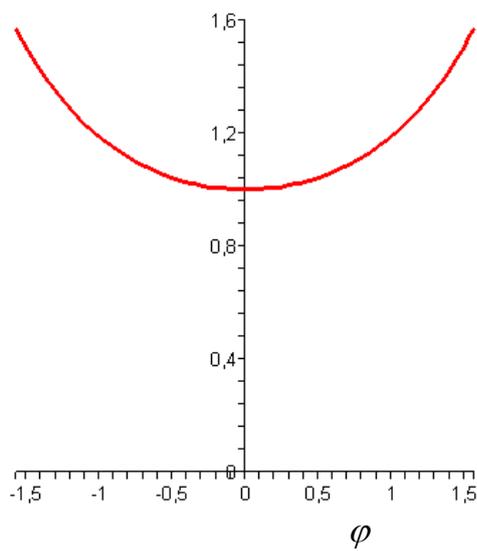


Figura 15.2: Percorso di equilibrio della mensola caricata assialmente.

dove il primo termine rappresenta l'energia elastica del vincolo ed il secondo il potenziale dei carichi. Imponendo la condizione di stazionarietà si ottiene:

$$0 = \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = k\varphi - FL \sin \varphi \quad (15.4)$$

Indagando inoltre sulla derivata seconda dell'energia è possibile stabilire la qualità dell'equilibrio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} > 0 & \quad \text{equilibrio stabile} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} < 0 & \quad \text{equilibrio instabile} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = 0 & \quad \text{equilibrio indifferente} \end{aligned} \quad (15.5)$$

L'equilibrio è stabile quando a partire da una configurazione iniziale di equilibrio, perturbando tale configurazione di equilibrio la struttura tende a ritornare nella sua posizione iniziale di equilibrio. L'equilibrio è instabile quando perturbando la configurazione iniziale di equilibrio la struttura tende ad allontanarsi dalla posizione iniziale di equilibrio. L'equilibrio è indifferente quando a partire da una configurazione iniziale di equilibrio, perturbando tale configurazione di equilibrio la struttura tende a restare nella sua configurazione perturbata.

Nel caso in esame si ha:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = k - FL \cos \varphi \quad (15.6)$$

Possono accadere i seguenti possibili casi:

- $f = FL/k < 1$ per cui $\varphi = 0$; in tal caso si ha:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = k - FL > 0 \quad (15.7)$$

l'equilibrio è stabile.

- $f = FL/k > 1$ con $\varphi = 0$; in tal caso si ha:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = k - FL < 0 \quad (15.8)$$

l'equilibrio è instabile.

- $f = FL/k > 1$ con $\varphi / \sin \varphi = f$; in tal caso si ha

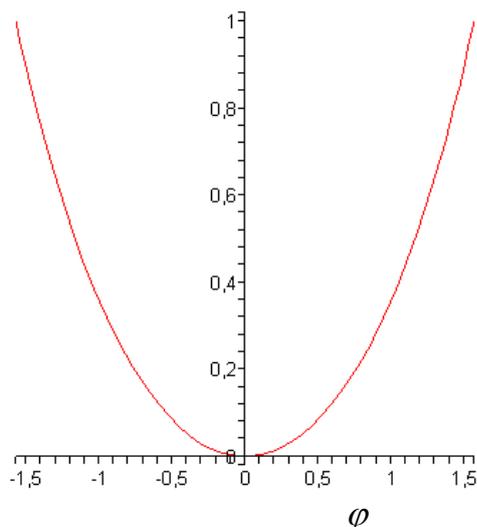


Figura 15.3: Grafico della derivata seconda dell'energia potenziale totale nel caso $f = FL/k > 1$ con $\varphi/\sin \varphi = f$.

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = k - FL \cos \varphi = k - \frac{k\varphi}{L \sin \varphi} L \cos \varphi = k \left(1 - \frac{\varphi}{\tan \varphi} \right) > 0 \quad (15.9)$$

l'equilibrio è stabile.

L'andamento della derivata seconda dell'energia potenziale totale è illustrato in figura 15.3. In figura 15.4 è riportato l'andamento dell'energia potenziale totale per $f = 0.5$, $f = 1.5$ e $f = 1.0$.

In realtà nella maggior parte delle applicazioni tecniche è di fondamentale importanza determinare esclusivamente il valore del carico critico ovvero del carico di biforcazione dell'equilibrio, mentre risulta spesso poco interessante, e particolarmente complesso, definire tutti i percorsi di equilibrio post-critici. Allo scopo di determinare il carico critico si può svolgere un'analisi considerando configurazioni molto vicine a quella indeformata. A tale fine, si sviluppano in serie di Taylor le funzioni trigonometriche fino al secondo ordine:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \varphi \\ \cos \varphi &= 1 - \frac{\varphi^2}{2} \end{aligned} \quad (15.10)$$

Sostituendo le espressioni (15.10) nell'energia potenziale totale (15.3), si ottiene:

$$\Pi(\varphi) = \frac{1}{2} k \varphi^2 - FL \frac{\varphi^2}{2} \quad (15.11)$$

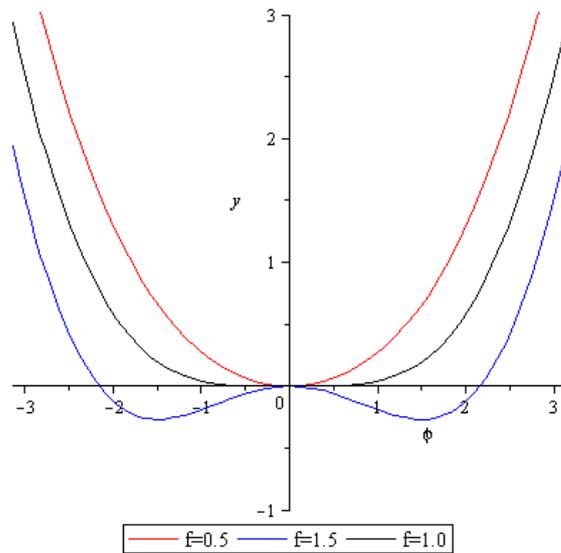


Figura 15.4: Energia potenziale per 3 differenti valori di f .

Imponendo la stazionarietà dell'energia potenziale nella sua forma approssimata (15.11) si perviene all'equazione:

$$0 = \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = k\varphi - FL\varphi \quad (15.12)$$

che risolta assumendo $\varphi \neq 0$ fornisce il valore del carico critico:

$$F = \frac{k}{L} \quad (15.13)$$

Si consideri ora la trave continua rappresentata in figura 15.5, costituita da tratti rigidi connessi tra loro tramite elementi elastici concentrati.

L'energia potenziale totale approssimata al secondo ordine vale:

$$\Pi = \frac{1}{2}k \Delta\varphi_1^2 + \frac{1}{2}k \Delta\varphi_2^2 - FL\frac{\varphi_1^2}{2} - FL\frac{\varphi_2^2}{2} - FL\frac{\varphi_3^2}{2} \quad (15.14)$$

dove $\Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_2$ e φ_3 si calcolano in funzione di φ_1 e φ_2 . In particolare, si ha:

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \varphi_1 + \varphi_2 \\ \Delta\varphi_1 &= \varphi_1 - \varphi_2 \\ \Delta\varphi_2 &= \varphi_2 + \varphi_3 = \varphi_1 + 2\varphi_2 \end{aligned} \quad (15.15)$$

L'energia (14) diventa allora:

$$\begin{aligned} \Pi(\varphi_1, \varphi_2) &= \frac{1}{2}k(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2}k(\varphi_1 + 2\varphi_2)^2 \\ &\quad - FL\frac{\varphi_1^2}{2} - FL\frac{\varphi_2^2}{2} - FL\frac{(\varphi_1 + \varphi_2)^2}{2} \end{aligned} \quad (15.16)$$

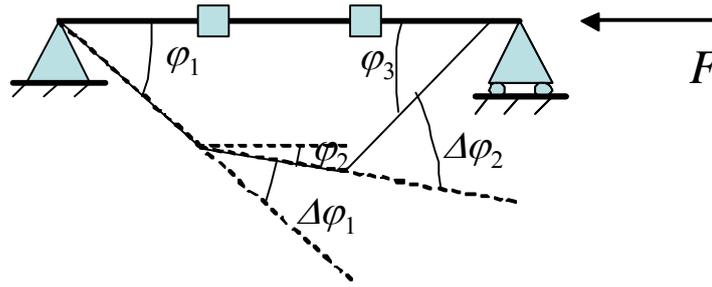


Figura 15.5: Trave semplicemente appoggiata con elementi elastici, caricata di punta.

La condizione di stazionarietà dell'energia potenziale totale (15.16) conduce alle equazioni:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = k(\varphi_1 - \varphi_2) + k(\varphi_1 + 2\varphi_2) - FL\varphi_1 - FL(\varphi_1 + \varphi_2) \\
 &= 2(k - FL)\varphi_1 + (k - FL)\varphi_2 \\
 0 &= \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = -k(\varphi_1 - \varphi_2) + 2k(\varphi_1 + 2\varphi_2) - FL\varphi_2 - FL(\varphi_1 + \varphi_2) \\
 &= (k - FL)\varphi_1 + (5k - 2FL)\varphi_2
 \end{aligned} \tag{15.17}$$

ovvero, in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} 2(k - FL) & k - FL \\ k - FL & 5k - 2FL \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{15.18}$$

Il sistema di equazioni (15.18) risulta omogeneo; per avere una soluzione diversa dalla banale, corrispondente a quella di trave indeformata, si deve imporre che il determinante sia uguale a zero:

$$\det \begin{bmatrix} 2(k - FL) & k - FL \\ k - FL & 5k - 2FL \end{bmatrix} = 9k^2 - 12kFL + 3F^2L^2 = 0 \tag{15.19}$$

che risolta rispetto a F fornisce i seguenti due valori:

$$F_1 = \frac{k}{L}, \quad F_2 = 3\frac{k}{L} \tag{15.20}$$

Sostituendo il valore $F = F_1$ nella seconda delle equazioni (15.17), si ottiene:

$$0 = \left(k - \frac{k}{L}L\right)\varphi_1 + \left(5k - 2\frac{k}{L}L\right)\varphi_2 = 3k\varphi_2 \implies \varphi_1 \neq 0 \quad \varphi_2 = 0 \tag{15.21}$$

Analogamente, sostituendo il valore $F = F_2$ sempre nella seconda delle equazioni (15.17), si ottiene:

$$0 = \left(k - \frac{3k}{L}L\right)\varphi_1 + \left(5k - 2\frac{3k}{L}L\right)\varphi_2 = 3k\varphi_2 \implies \varphi_1 = -\varphi_2/2 \tag{15.22}$$

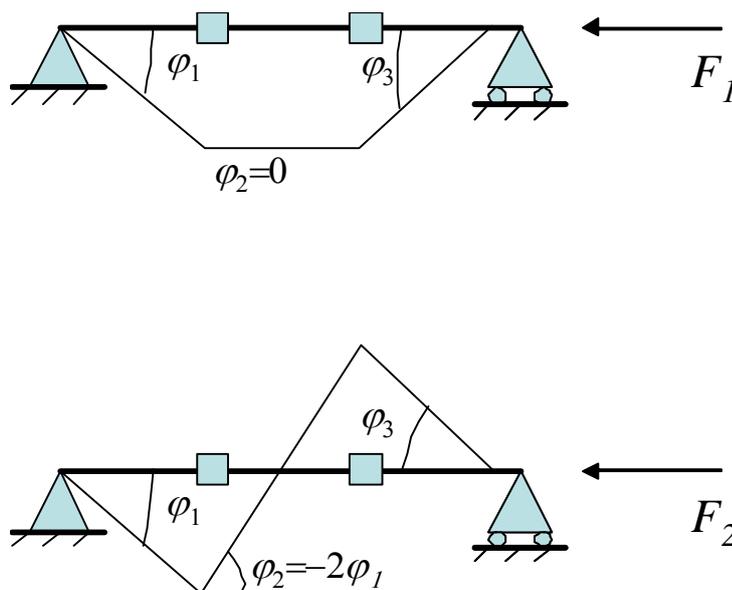


Figura 15.6: Deformate corrispondenti ai due valori del carico critico.

Le forme delle deformate corrispondenti ai due valori del carico critico determinati sono riportati schematicamente in figura 15.6.

Se ne deduce allora che in corrispondenza del valore del carico critico $F_1 < F_2$ la configurazione di equilibrio non banale è una qualsiasi, proporzionale alla prima di quelle riportate in figura 15.6. Inoltre, in corrispondenza del valore del carico critico $F_2 > F_1$, la configurazione di equilibrio non banale è una qualsiasi, proporzionale alla seconda di quelle riportate in figura 15.6.

15.2 Travi con elasticità diffusa

Si consideri una trave soggetta a carico assiale in equilibrio in una configurazione deformata. Le equazioni di equilibrio del tratto di trave di lunghezza dz nella configurazione deformata, schematicamente illustrato in figura 15.7, forniscono:

$$\begin{aligned} T' &= 0 \\ M' - Nv' &= 0 \end{aligned} \quad (15.23)$$

essendo $F = N$.

Nell'ipotesi che le curvature siano comunque non troppo grandi e che possa ancora valere la classica relazione tra momento flettente e curvatura, si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$EIv^{IV} + Nv^{II} = 0 \quad (15.24)$$

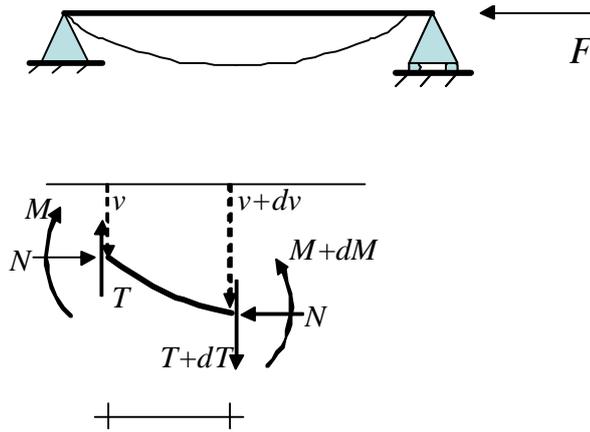


Figura 15.7: Trave con elasticità diffusa soggetta a carico assiale.

ovvero

$$v^{IV} + \alpha^2 v^{II} = 0 \quad \text{con} \quad \alpha^2 = \frac{N}{EI} \quad (15.25)$$

L'equazione (15.25) ammette soluzione del tipo:

$$v = A \sin(\alpha z) + B \cos(\alpha z) + Cz + D$$

per cui si ha:

$$\begin{aligned} \varphi &= -v' &= -\alpha A \cos(\alpha z) + \alpha B \sin(\alpha z) - C \\ M &= EI\varphi' &= \alpha^2 A \sin(\alpha z) + \alpha^2 B \cos(\alpha z) \\ T &= M' - Nv' &= \alpha^3 A \cos(\alpha z) - \alpha^2 B \sin(\alpha z) + \\ & & N(-\alpha A \cos(\alpha z) + \alpha B \sin(\alpha z) - C) \end{aligned} \quad (15.26)$$

Inoltre è necessario scrivere le opportune condizioni al contorno. Nel caso particolare di trave appoggiata-appoggiata, si ha:

$$\begin{aligned} v(0) = 0 &\longrightarrow B + D = 0 \\ M(0) = 0 &\longrightarrow B = 0 \\ v(L) = 0 &\longrightarrow A \sin(\alpha L) + B \cos(\alpha L) + CL + D = 0 \\ M(L) = 0 &\longrightarrow \alpha^2 A \sin(\alpha L) + \alpha^2 B \cos(\alpha L) = 0 \end{aligned}$$

che, in definitiva forniscono:

$$B = C = D = 0 \quad A \sin(\alpha L) = 0 \quad (15.27)$$

Qualora anche A fosse nulla, la soluzione sarebbe banale, ovvero l'equilibrio si avrebbe nella configurazione indeformata; al contrario, poichè si intende determinare la condizione di equilibrio nella configurazione deformata, si deve porre:

$$\sin(\alpha L) = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha L = n\pi \quad (15.28)$$

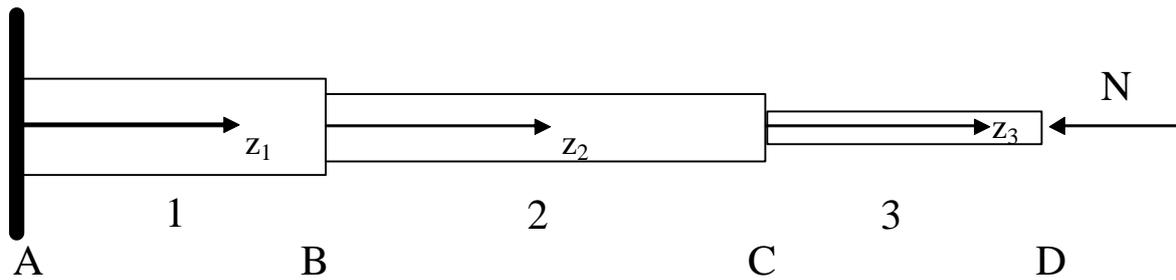


Figura 15.8: Mensola a sezione variabile soggetta a carico di punta.

Quindi si perviene alla condizione:

$$\alpha^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = \frac{N}{EI} \quad (15.29)$$

da cui si ricava il valore del carico critico minore N_c :

$$N_c = EI \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \quad (15.30)$$

avendo assunto $n = 1$.

15.2.1 Esempio

Determinare il carico critico della trave a sezione variabile in figura 15.8.

L'equazione differenziale che governa il problema è la seguente:

$$EI \frac{d^4 v}{dz^4} + N \frac{d^2 v}{dz^2} = 0 \quad (15.31)$$

dove v è l'inflessione della trave e z è l'asse della trave. Ponendo:

$$\alpha^2 = \frac{N}{EI} \quad (15.32)$$

l'equazione (15.31) diventa:

$$\frac{d^4 v}{dz^4} + \alpha^2 \frac{d^2 v}{dz^2} = 0 \quad (15.33)$$

La soluzione dell'equazione differenziale (15.33) è del tipo:

$$v = A \sin(\alpha z) + B \cos(\alpha z) + Cz + D \quad (15.34)$$

dove A, B, C e D sono costanti di integrazione da determinare imponendo opportune condizioni al contorno. Dalla soluzione (15.34) è possibile determinare la rotazione, il momento flettente ed il taglio nella trave:

$$\begin{aligned}\varphi &= -v' &= -\alpha A \cos(\alpha z) + \alpha B \sin(\alpha z) - C \\ M &= EI\varphi' &= \alpha^2 A \sin(\alpha z) + \alpha^2 B \cos(\alpha z) \\ T &= M' - Nv' &= \alpha^3 A \cos(\alpha z) - \alpha^2 B \sin(\alpha z) + \\ &&N(-\alpha A \cos(\alpha z) + \alpha B \sin(\alpha z) - C)\end{aligned}\quad (15.35)$$

L'equazione differenziale (15.33) deve essere scritta 3 volte, una per ogni tratto della trave in figura:

$$\begin{aligned}\frac{d^4 v_1}{dz_1^4} + \alpha_1^2 \frac{d^2 v_1}{dz_1^2} &= 0 \\ \frac{d^4 v_2}{dz_2^4} + \alpha_2^2 \frac{d^2 v_2}{dz_2^2} &= 0 \\ \frac{d^4 v_3}{dz_3^4} + \alpha_3^2 \frac{d^2 v_3}{dz_3^2} &= 0\end{aligned}\quad (15.36)$$

le cui soluzioni sono:

$$\begin{aligned}v_1 &= A_1 \sin(\alpha_1 z) + B_1 \cos(\alpha_1 z) + C_1 z + D_1 \\ v_2 &= A_2 \sin(\alpha_2 z) + B_2 \cos(\alpha_2 z) + C_2 z + D_2 \\ v_3 &= A_3 \sin(\alpha_3 z) + B_3 \cos(\alpha_3 z) + C_3 z + D_3\end{aligned}\quad (15.37)$$

Si pone:

$$\alpha_1^2 = \frac{N}{EI_1} \quad \alpha_2^2 = \frac{N}{EI_2} \quad \alpha_3^2 = \frac{N}{EI_3} \quad \begin{array}{ll} \alpha_1 = \alpha & \alpha_1 = \alpha \\ \alpha_2 = \beta\alpha & \alpha_2 = \beta\alpha \\ \alpha_3 = \gamma\alpha & \alpha_3 = \gamma\alpha \end{array}\quad (15.38)$$

con:

$$\begin{aligned}\beta &= \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} & \gamma &= \sqrt{\frac{I_1}{I_3}} \\ \beta^2 &= \frac{I_1}{I_2} & \gamma^2 &= \frac{I_1}{I_3} \\ I_2 &= \frac{I_1}{\beta^2} & I_3 &= \frac{I_1}{\gamma^2}\end{aligned}\quad (15.39)$$

Le condizioni al contorno da imporre per determinare le costanti di integrazione sono le seguenti:

- in A:

$$\begin{aligned}v_1(0) &= 0 \\ \varphi_1(0) &= 0\end{aligned}$$

- in B:

$$\begin{aligned}v_1(L_1) &= v_2(0) \\ \varphi_1(L_1) &= \varphi_2(0) \\ M_1(L_1) &= M_2(0) \\ T_1(L_1) &= T_2(0)\end{aligned}$$

- in C:

$$\begin{aligned}v_2(L_2) &= v_3(0) \\ \varphi_2(L_2) &= \varphi_3(0) \\ M_2(L_2) &= M_3(0) \\ T_2(L_2) &= T_3(0)\end{aligned}$$

- in D:

$$\begin{aligned}M_3(L_3) &= 0 \\ T_3(L_3) &= N \left. \frac{dv_3}{dz_3} \right|_{L_3}\end{aligned}$$

Esplicitando si ha:

$$\begin{aligned}0 &= B_1 + D_1 \\ 0 &= \alpha A_1 + C_1 \\ 0 &= A_1 \sin(\alpha L_1) + B_1 \cos(\alpha L_1) + C_1 L_1 + D_1 - [B_2 + D_2] \\ 0 &= \alpha A_1 \cos(\alpha L_1) + \alpha B_1 \sin(\alpha L_1) + C_1 - [(\beta \alpha) A_2 + C_2] \\ 0 &= \alpha^2 A_1 \sin(\alpha L_1) + \alpha^2 B_1 \cos(\alpha L_1) - (\beta \alpha)^2 B_2 \\ 0 &= \alpha^3 A_1 \cos(\alpha L_1) + \alpha^3 B_1 \sin(\alpha L_1) - (\beta \alpha)^3 A_2 \\ 0 &= A_2 \sin((\beta \alpha) L_2) + B_2 \cos((\beta \alpha) L_2) + C_2 L_2 + D_2 - [B_3 + D_3] \\ 0 &= (\beta \alpha) A_2 \cos((\beta \alpha) L_2) + (\beta \alpha) B_2 \sin((\beta \alpha) L_2) + C_2 - [(\gamma \alpha) A_3 + C_3] \\ 0 &= (\beta \alpha)^2 A_2 \sin((\beta \alpha) L_2) + (\beta \alpha)^2 B_2 \cos((\beta \alpha) L_2) - (\gamma \alpha)^2 B_3 \\ 0 &= (\beta \alpha)^3 A_2 \cos((\beta \alpha) L_2) + (\beta \alpha)^3 B_2 \sin((\beta \alpha) L_2) - (\gamma \alpha)^3 A_3 \\ 0 &= -EI_3 [(\gamma \alpha)^2 A_3 \sin((\gamma \alpha) L_3) + (\gamma \alpha)^2 B_3 \cos((\gamma \alpha) L_3)] \\ 0 &= -EI_3 [(\gamma \alpha)^3 A_3 \cos((\gamma \alpha) L_3) + (\gamma \alpha)^3 B_3 \sin((\gamma \alpha) L_3)] \\ &\quad -N [(\gamma \alpha) A_3 \cos((\gamma \alpha) L_3) + (\gamma \alpha) B_3 \sin((\gamma \alpha) L_3) + C_3]\end{aligned}\tag{15.40}$$

Ponendo:

$$\begin{aligned}s_1 &= \sin(\alpha L_1) & c_1 &= \sin(\alpha L_1) \\ s_2 &= \sin(\alpha \beta L_2) & c_2 &= \sin(\alpha \beta L_2) \\ s_3 &= \sin(\alpha \beta L_3) & c_3 &= \sin(\alpha \beta L_3)\end{aligned}\tag{15.41}$$

si ottiene il seguente sistema di equazioni omogeneo:

$$\mathbf{M} \mathbf{X} = \mathbf{0}\tag{15.42}$$

Per ottenere una soluzione del sistema di equazioni (15.42) diversa dalla banale, si impone il determinante della matrice dei coefficienti uguale a zero:

$$\det(\mathbf{M}) = 0\tag{15.43}$$

Risolviendo l'equazione (15.43) rispetto a N , e scegliendo il valore minimo di N che soddisfa la (15.43), si determina il carico critico.

Appendice A

Cenni sul calcolo delle variazioni

A.1 I funzionali: generalità

Si consideri l'intervallo $T = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$; sia inoltre $\overline{\mathfrak{S}}$ l'insieme delle funzioni $u = u(x)$ definito come:

$$\overline{\mathfrak{S}} = \{u = u(x) \in C^1(T) : u(a) = u_a; u(b) = u_b\} \quad (\text{A.1})$$

Assegnata la funzione $F = F(x, u, u')$ di argomenti x, u e $u' = du/dx$, essendo $u \in \overline{\mathfrak{S}}$, è possibile considerare l'espressione integrale:

$$I(u) = \int_a^b F(x, u, u') dx \quad (\text{A.2})$$

La $I(u)$ rappresenta un *funzionale*. Il valore dell'integrale $I(u)$ è un valore scalare e dipende dalla funzione $u(x)$. In questo senso quindi, il concetto di funzionale può caratterizzarsi come la generalizzazione del concetto classico di funzione. In altri termini un funzionale è una funzione a valore scalare nella quale la variabile indipendente ha, a sua volta, il significato di una funzione.

L'insieme \mathfrak{S} di tutte le funzioni $u \in \overline{\mathfrak{S}}$ per cui $I(u)$ ha senso, è detto *spazio di dominio del funzionale*. L'insieme \mathfrak{R} delle immagini di tutte le $u \in \mathfrak{S}$ mappate da $I(u)$ è detto *range (campo) del funzionale*. In generale $\mathfrak{S} \subseteq \overline{\mathfrak{S}}$; $\mathfrak{R} \subseteq R$.

Un funzionale $I(u)$ è detto lineare in u se e solo se soddisfa la relazione:

$$I(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha I(u_1) + \beta I(u_2) \quad (\text{A.3})$$

per ogni scalare α e β , con u_1 ed u_2 appartenenti ad \mathfrak{S} .

Un funzionale $B(u, v)$ è detto *bilineare* se è lineare in ognuno dei suoi argomenti u e v .

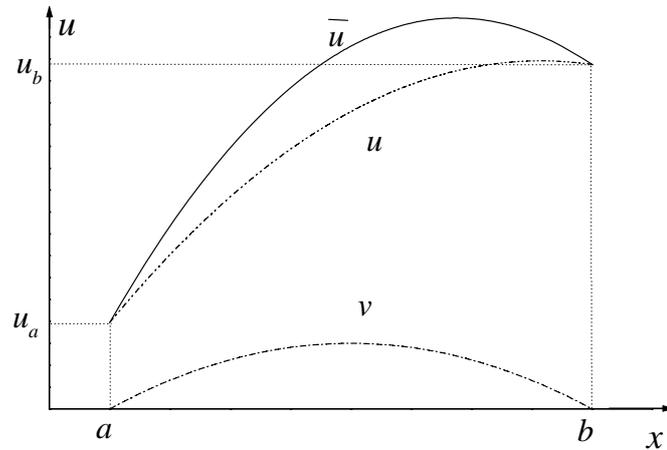


Figura A.1: Definizione della funzione $\bar{u}(x)$.

A.2 L'operatore variazionale

Siano $u = u(x)$ ed $\bar{u} = \bar{u}(x)$ due funzioni appartenenti all'insieme $\bar{\mathfrak{F}}$. In generale è sempre possibile porre:

$$\bar{u} = u + \alpha v \quad (\text{A.4})$$

essendo $v = v(x)$ ed α una costante reale. È evidente che $v(a) = v(b) = 0$ (cfr. figura A.1); in altri termini v soddisfa la forma omogenea delle condizioni al contorno su u .

Il termine αv è detto variazione di u ed è indicato con δu . L'operatore $\delta \cdot$ è detto *operatore variazionale* e può commutare con gli operatori differenziali ed integrali:

$$\frac{d(\delta u)}{dx} = \frac{d(\alpha v)}{dx} = \alpha \frac{dv}{dx} = \delta u' = \delta \left(\frac{du}{dx} \right); \quad (\text{A.5})$$

$$\delta \int_a^b u(x) dx = \alpha \int_a^b v(x) dx = \int_a^b \alpha v(x) dx = \int_a^b \delta u dx. \quad (\text{A.6})$$

Al fine di fornire un significato più fisico a quanto detto, si consideri un generico sistema meccanico \mathfrak{M} individuato nello spazio euclideo dalla regione Ω di contorno $\partial\Omega$. Le funzioni $u \in \bar{\mathfrak{F}}$ possono allora pensarsi, ad un certo istante di tempo fissato, come le possibili configurazioni (cioè i possibili vettori puntuali di spostamento) di detto sistema, congruenti con una data condizione al contorno $u = \hat{u}$ assegnata sulla

porzione $\partial_u \Omega \subseteq \partial \Omega$. Pertanto, per ogni punto x fissato di Ω , δu è da intendersi come la variazione dalla configurazione attuale u di \mathfrak{M} . Chiaramente $\delta u = 0$ su $\partial_u \Omega$.

Considerata la funzione $F = F(x, u, u')$ della variabile dipendente u e della sua derivata u' , fissato un valore della variabile indipendente x , alla variazione in u è associata la variazione di F . Si definisce quindi la *variazione prima di F* come:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u'. \quad (\text{A.7})$$

La relazione (A.7) può essere ricavata come:

$$\delta F = \alpha \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\alpha} = \alpha \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{F(x, u + \delta u, u' + \delta u') - F(x, u, u')}{\alpha} \quad (\text{A.8})$$

attraverso l'espansione in potenze di α del termine $F(x, u + \alpha v, u' + \alpha v')$. E' utile osservare come la (A.8) possa porsi nella forma:

$$\delta F = \alpha \left[\frac{dF(x, u + \alpha v, u' + \alpha v')}{d\alpha} \right]_{\alpha=0}. \quad (\text{A.9})$$

D'altra parte il differenziale di F si valuta come:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial u'} du' \quad (\text{A.10})$$

poichè per quanto sino ad ora detto x non è variata durante la variazione da u a $u + \delta u$, appare evidente l'analogia formale fra la (A.10) e la (A.7). E' facile quindi verificare che le leggi di variazione di somma, prodotto, rapporto, potenza, etc. sono completamente analoghe alle corrispondenti di differenziazione.

A.3 Variazione prima di un funzionale

La variazione prima di un funzionale $I(u) = \int_a^b F(x, u, u') dx$ è definita come:

$$\delta I = \alpha \left[\frac{dI(u + \alpha v)}{d\alpha} \right]_{\alpha=0} \quad (\text{A.11})$$

o equivalentemente

$$\delta I = \int_a^b \delta F dx = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial u'} du' \right) dx = \alpha \int_a^b \left[\frac{dF}{d\alpha} \right]_{\alpha=0} dx. \quad (\text{A.12})$$

Dal calcolo differenziale elementare è noto che una generica funzione $f(x)$ differenziabile e definita su tutto R , possiede un estremo (cioè un punto di minimo o di massimo) in x_0 se e solo se $df(x_0) = 0$.

Analogamente al caso di funzioni ordinarie, vista l'analogia precedentemente discussa fra variazione prima e differenziale, affinché un funzionale $I(u)$ abbia un estremo per la configurazione u_0 fra tutte quelle ammissibili, deve verificarsi che la sua variazione prima sia nulla:

$$\delta I = \alpha \left[\frac{dI(u_0 + \alpha v)}{d\alpha} \right]_{\alpha=0} = 0 \quad (\text{A.13})$$

o equivalentemente

$$\left[\frac{dI(u_0 + \alpha v)}{d\alpha} \right]_{\alpha=0} = 0 \quad (\text{A.14})$$

