CAPITOLO 1

IL MODELLO CIRCUITALE

1.1 Introduzione

L'*interazione elettromagnetica* è una delle quattro interazioni fondamentali della natura attualmente conosciute. Essa si manifesta in svariati modi tra cariche elettriche ferme e/o in moto, su distanze che vanno da quelle atomiche fino a quelle intergalattiche. La struttura atomica, i legami chimici, la struttura della materia, la trasmissione degli impulsi nervosi, i fulmini, i pezzi di carta attratti da un astuccio di plastica dopo che è stato strofinato, i chiodi di ferro attratti da una calamita, la luce emessa da una lampadina, da un laser, dal sole o da una stella sono solo alcune delle tante manifestazioni di questa interazione.
L'*elettricità* (e il *magnetismo*) è l'insieme di tutti quei fenomeni fisici "macroscopici" che coinvolgono cariche elettriche, ferme e in moto, le loro interazioni, nonché gli effetti delle loro interazioni. Partendo dalla conoscenza delle leggi dell'interazione elettromagnetica, l'ingegno umano, attraverso complesse e sofisticate apparecchiature, è riuscito a "imbrigliare" l'*elettricità* (e il *magnetismo*). Ciò ha consentito la realizzazione di sistemi, che si fondano sull'interazione elettromagnetica, ad esempio per:

- il trasporto e la distribuzione dell'energia;
- la trasmissione, l'elaborazione e la memorizzazione dell'informazione;
- il monitoraggio e controllo di processi.

Questi sistemi hanno determinato lo sviluppo sociale ed economico del mondo occidentale, e non solo, a partire dalla seconda metà del XIX secolo. Qui di seguito parleremo brevemente di essi.

Attraverso le *correnti elettriche* è possibile trasportare energia, sotto forma di *energia elettrica,* con estrema semplicità, grande efficienza e impatto ambientale del tutto controllabile. Nelle centrali di produzione dell'energia elettrica, l'energia che si sviluppa dalla "caduta libera di acqua" (nelle centrali idroelettriche), dalla combustione (del petrolio, gas metano, carbone nelle centrali termoelettriche) o dalla reazione di fissione nucleare (dell'uranio o del plutonio nelle centrali nucleari) viene convertita in energia elettrica da apposite macchine che prendono il nome di *alternatori.* Anche l'energia trasportata dalla luce del sole (pure essa di natura elettromagnetica), può essere trasformata direttamente in energia elettrica attraverso l'effetto foto voltaico (celle solari) [1].
L'energia elettrica, così prodotta, viene trasportata e distribuita attraverso una fitta e complessa rete di conduttori in tutti i luoghi in cui essa necessita (reti ferroviarie, metropolitane, industrie, uffici, stazioni per le telecomunicazioni, laboratori, ospedali, scuole, università, abitazioni, ...), dove viene impiegata per fare funzionare apparati di svariata natura (la motrice di un treno, la stazione trasmittente di un canale televisivo, il computer che abbiamo sulla scrivania, il telefono portatile che abbiamo in tasca, la stufa elettrica, il frigorifero, l'impianto stereofonico, il televisore, ...).
Tipicamente una centrale per la produzione di energia elettrica è in grado di produrre, almeno come ordine di grandezza, l'equivalente del fabbisogno energetico medio di milioni di abitazioni ad uso civile. Provate a immaginare quanto sarebbe lo spreco di energia e quale sarebbe l'impatto ambientale se non fosse possibile trasportare energia sotto forma di energia elettrica, e quindi ciascuno utente fosse costretto a produrla in proprio in prossimità della propria abitazione. Anche nelle auto, navi, aerei ci sono macchine che convertono parte dell'energia prodotta dai motori (a scoppio, diesel, a reazione, ...) in energia elettrica, e reti di conduttori più o meno complesse che trasportano l'energia elettrica nei posti dove serve.

Attraverso l'elettricità e il magnetismo è possibile rappresentare suoni e immagini con un elevato grado di accuratezza. I suoni e le immagini così rappresentati possono essere:

1 Le celle solari, che usano l'effetto fotovoltaico per produrre energia elettrica, non fanno altro che trasformare, attraverso un processo fisico estremamente complesso, parte dell'energia trasportata dal campo elettromagnetico associato alla luce del sole, che oscilla quasi sinusoidalmente con frequenze che vanno da qualche terahertz (infrarosso) a diverse centinaia di terahertz (visibile e ultravioletto), in lavoro di un campo elettrico stazionario.

- elaborati attraverso apparati elettronici;
- registrati su supporti magnetici, ottici, ferro elettrici, a semiconduttore;
- diffusi in ambienti di qualsiasi tipo e dimensione;
- trasmessi su distanze, oramai, interplanetarie.

Si pensi, ad esempio, ad un sistema costituito da un lettore di compact disk, amplificatore e casse acustiche, o al sistema di diffusione delle trasmissioni radio e televisive, o a una rete per la telefonia (sia fissa che mobile), o a un sistema di trasmissione di immagini e suoni via satellite.
In generale, attraverso l'elettricità e il magnetismo è possibile rappresentare, elaborare e trasmettere *informazioni* di qualsiasi tipo: basti pensare alle informazioni che sono elaborate dal microprocessore di un calcolatore elettronico, o che viaggiano in *internet.* Oramai attraverso un qualsiasi calcolatore è possibile elaborare anche suoni e immagini !!!

Utilizzando l'elettricità e il magnetismo è possibile anche controllare processi di svariato tipo. Attraverso dei *sensori* le grandezze di interesse del processo da controllare vengono misurate. I sensori trasducono le grandezze da controllare (ad esempio, posizioni relative, velocità, pressioni, temperature, ...) in *segnali elettrici.* Questi segnali vengono trasmessi attraverso cavi e/o antenne (anche via satellite) ad uno o più calcolatori che li elaborano e adottano tutte le "decisioni" necessarie perché siano rispettate le specifiche del processo. Le decisioni adottate, che sono anche esse rappresentate da segnali elettrici, sono inviate attraverso cavi e/o antenne (anche via satellite) agli *attuatori*. Gli attuatori (elettro valvole, motori, lampade di segnalazione, interruttori, ...) sono apparati in grado di realizzare le operazioni richieste sul processo perché le specifiche siano rispettate. Queste operazioni possono essere più o meno complesse e il loro svolgimento può richiedere anche del lavoro (meccanico o di altra natura).
In tutte queste applicazioni l'elettricità e il magnetismo sono "governati" da sistemi molto particolari e estremamente complessi che prendono il nome di *circuiti elettrici.*

1.2 I circuiti elettrici

I circuiti sono interconnessioni di *dispositivi elettrici* ed *elettronici.* I dispositivi sono i "mattoni" più semplici dei circuiti. Essi sono oggetti fisici, di svariata composizione, struttura e forma, dai quali fuoriescono due o più conduttori di

elettricità, detti *terminali* (o *morsetti*) del dispositivo. Nella maggior parte dei casi i terminali sono conduttori *filiformi* (le dimensioni trasversali sono molto più piccole delle loro lunghezze).
I dispositivi di un circuito interagiscono tra loro, elettricamente, quando sono collegati attraverso i terminali. I terminali (di componenti diversi) sono collegati (elettricamente) tra loro tramite opportune giunzioni che prendono il nome di *nodi* del circuito [2].
Ciascun dispositivo è delimitato da una superficie chiusa, detta *superficie limite del dispositivo,* all'interno della quale non è possibile accedere e dalla quale fuoriescono i terminali. La superficie limite del dispositivo è quasi sempre fatta di materiale isolante elettrico [3].

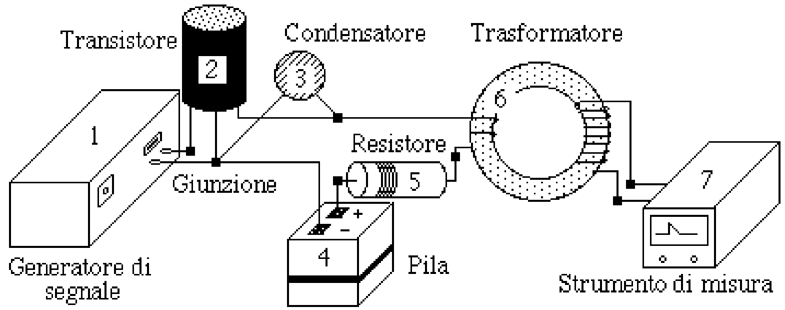


Fig. 1.1 *Esempio di circuito.*

Esempi di dispositivi sono i resistori, gli induttori, i condensatori, i diodi, i transistori, gli amplificatori operazionali, i generatori di tensione e i generatori di corrente (batterie, dinamo, alternatori, ...), i trasformatori, i motori elettrici. Le reti per la trasmissione e la distribuzione dell'energia elettrica, gli amplificatori, gli alimentatori, i filtri, gli oscillatori, i modulatori, i demodulatori, gli strumenti di misura (voltmetri, amperometri, oscilloscopi,

2 Nella realizzazione di un circuito, spesso, è necessario utilizzare ulteriori conduttori filiformi (conduttori di collegamento) per potere connettere i componenti così come il progetto richiede.

3 Spesso le superfici limite dei componenti elettronici di potenza sono fatte di materiale conduttore con elevata conducibilità elettrica e termica, allo scopo di trasmettere più efficacemente il calore in essi prodotto verso l'ambiente; in questi componenti la superficie limite funge anche da terminale.

schede di acquisizione, ...), i generatori di segnali, le memorie, i microprocessori, ... sono, invece, esempi di circuiti.
In Figura 1.1 è mostrato un circuito costituito da sette elementi: cinque dispositivi - il transistore, il condensatore, il resistore, la pila, il trasformatore e da due *apparati* molto complessi, il generatore di segnali e lo strumento di misura. Il resistore, la pila, il condensatore, il generatore di segnali e lo strumento di misura hanno due soli terminali. Il transistore ha, invece, tre terminali. Il trasformatore ha quattro terminali, raggruppati a coppie. Esistono dispositivi che hanno un numero più elevato di terminali, si pensi, ad esempio, a un qualsiasi circuito integrato.

Osservazione

Nell'esempio di Figura 1.1, sia il generatore di segnali che lo strumento di misura, pur essendo, essi stessi, circuiti estremamente complessi, costituiti da tanti dispositivi, interagiscono con i dispositivi del circuito - il transistore, il condensatore, il resistore, la pila e il trasformatore - "prevalentemente" attraverso due coppie di terminali. Per questa ragione essi possono essere considerati come se fossero due "componenti" circuitali con due terminali, estremamente complessi nella loro costituzione fisica, ma altrettanto semplici nelle funzioni da essi espletate.
Da ora in poi useremo l'espressione "componente" per indicare sia un singolo dispositivo fisico, sia un apparato (elettrico, elettronico) che interagisce con le altre parti del circuito principalmente attraverso dei terminali e che ha, in condizioni nominali, caratteristiche di funzionamento molto semplici. Un circuito è come un edificio, esso è costituito da tanti "mattoni". Così come utilizzando gli stessi mattoni possiamo realizzare edifici molto diversi tra di loro a seconda della loro disposizione, così utilizzando gli stessi componenti circuitali possiamo realizzare diversi circuiti a secondo del modo in cui sono collegati.

♦

Le grandezze di interesse di un circuito sono, nella maggior parte dei casi, le *correnti che attraversano i conduttori terminali* e le *tensioni tra i conduttori terminali* dei singoli componenti che lo costituiscono. Queste grandezze

svolgono un ruolo fondamentale in tutte le applicazioni dell'elettricità e del magnetismo.

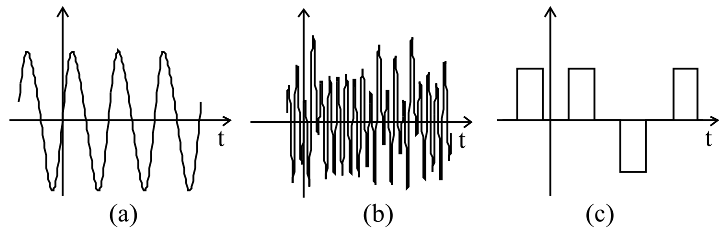


Fig. 1.2 *Andamenti temporali tipici di tensioni e correnti.*

L'energia elettrica è trasportata dalle correnti elettriche che attraversano i conduttori delle reti di distribuzione. In esse le intensità di corrente e le tensioni variano nel tempo, in condizioni di funzionamento nominali, con legge sinusoidale, Figura 1.2a (nelle auto la distribuzione dell'energia elettrica viene realizzata tramite correnti costanti nel tempo).
I segnali audio e video vengono rappresentati da tensioni (o correnti) elettriche e la loro elaborazione analogica avviene manipolando queste grandezze attraverso opportuni circuiti. In questi casi, le forme d'onda delle tensioni (o delle intensità di corrente) sono molto irregolari (Figura 1.2b).
In un qualsiasi sistema digitale per l'elaborazione, la trasmissione e la conservazione dell'informazione, l'informazione è rappresentata da segnali di tensione a più livelli del tipo illustrati in Figura 1.2c.
Nelle memorie magnetiche l'informazione viene rappresentata attraverso gli stati di magnetizzazione di materiali ferromagnetici.

Durante il funzionamento di un circuito elettrico, lo spazio, sia interno che esterno a ciascun componente e a ciascun conduttore, è sede di campi elettrici e magnetici, di correnti elettriche, nonché di distribuzioni di cariche.
La dinamica di queste grandezze è descritta dal modello costituito dalle **equazioni di Maxwell** e dalle **relazioni costitutive** dei mezzi materiali con cui sono realizzati i singoli componenti e i conduttori. Le correnti elettriche nei conduttori e nei singoli componenti e le cariche elettriche che si addensano sulle superfici dei conduttori e che si localizzano all'interno dei singoli componenti sono incognite, così come sono incognite le distribuzioni del campo elettrico e del campo magnetico: tutte queste grandezze dipendono, in maniera complicata,

dalla natura fisica dei singoli componenti, dal modo in cui essi sono collegati tra di loro e dalle "sorgenti di elettricità" presenti nel circuito.
Chi sono le "sorgenti di elettricità"? Nell'esempio di circuito riportato in Figura 1.1, le sorgenti di elettricità sono la pila e il generatore di segnale. In generale, con l'espressione "sorgenti di elettricità" intendiamo tutti quei componenti in grado di produrre distribuzioni di cariche e di correnti in un sistema più o meno complesso in cui sono presenti materiali conduttori, dielettrici e magnetici. Questi componenti vengono chiamati *generatori*. Ciò che noi possiamo controllare direttamente in un circuito sono le tensioni e/o le intensità di corrente dei generatori.
Sebbene, una descrizione "esatta" del funzionamento di un circuito richieda, almeno in principio, la soluzione delle equazioni del campo elettromagnetico e delle equazioni costitutive, il cosiddetto *modello di campo*, per determinare le intensità di corrente e le tensioni dei singoli componenti circuitali, in condizioni di funzionamento "lentamente variabili", può essere sufficiente studiare un modello approssimato, notevolmente semplificato e al contempo sufficientemente adeguato. Esso è il *modello circuitale* e si fonda su due condizioni di funzionamento che ora illustreremo.
I circuiti sono progettati e realizzati in modo tale da verificare con eccellente approssimazione (in condizioni di funzionamento "nominali") le seguenti condizioni:

(a) Il funzionamento di ciascun componente è descritto <u>adeguatamente</u> dalle <u>intensità delle correnti elettriche</u> che attraversano i suoi terminali e dalle <u>tensioni elettriche</u> tra i suoi terminali. Queste grandezze sono legate fra loro da specifiche relazioni, dette **relazioni caratteristiche del componente**. Esse dipendono, <u>prevalentemente</u>, dalla <u>costituzione fisica</u>. del componente e sono indipendenti dal particolare circuito in cui il componente è inserito.

(b) Le interazioni tra i diversi componenti di un circuito avvengono <u>prevalentemente</u> tramite i loro terminali, cioè attraverso le <u>intensità delle correnti</u> che li attraversano e le <u>tensioni</u> tra di essi. Le leggi che descrivono queste interazioni sono le **leggi di Kirchhoff**. Esse dipendono <u>prevalentemente</u> dal modo in cui i componenti sono collegati e non dalla loro specifica natura fisica.

In sintesi, il *funzionamento* di ciascun componente di un circuito dipende <u>prevalentemente</u> dalla sua costituzione fisica e non dalla natura degli altri componenti presenti nel circuito; l'interazione tra i diversi componenti del circuito avviene <u>prevalentemente</u> attraverso i loro terminali.

Osservazione

Queste due proprietà sono di fondamentale importanza e sono alla base del modello circuitale. La proprietà *(a)* assicura che il funzionamento dei singoli componenti di un dato circuito, in condizioni nominali, dipende prevalentemente dalla loro costituzione fisica e non dal particolare circuito in cui sono inseriti. Ciò ne consente la costruzione indipendentemente dall'uso che poi se ne farà e dal circuito in cui saranno inseriti. Si provi a immaginare come sarebbe complicato costruire un circuito se le leggi che governano il funzionamento dei singoli componenti dipendessero sensibilmente dal particolare circuito in cui essi sono inseriti.
La proprietà *(b)* assicura che il funzionamento del circuito dipende solo dal modo in cui i componenti sono collegati e non dalla loro effettiva posizione nello spazio. Questo è un prerequisito fondamentale per la robustezza di un circuito. Provate a immaginare cosa accadrebbe se il funzionamento di un circuito fosse molto sensibile alle effettive posizioni relative dei suoi componenti.

♦

Le ipotesi che sono alla base del modello circuitale, come vedremo, sono verificate esattamente solo quando le tensioni e le correnti del circuito sono costanti nel tempo, cioè solo per i *circuiti in regime stazionario*. Quando le tensioni e le correnti variano nel tempo, l'interazione tra le diversi parti del circuito può dipendere sensibilmente dalle effettive configurazioni di campo elettromagnetico prodotte dalle cariche e correnti che sono ivi presenti. Tuttavia, se le tensioni e le correnti "variano lentamente" nel tempo gli effetti dell'interazione che dipende dalle correnti e dalle tensioni terminali sono prevalenti su quelli che dipendono dall'effettiva configurazione di campo elettromagnetico presente nella struttura. Più avanti saremo in grado di precisare meglio cosa intendiamo per "lentamente variabile".

Anche se il modello circuitale descrive solo approssimativamente il comportamento di un circuito, esso, riveste un ruolo fondamentale nell'ingegneria perché consente di studiare un insieme estremamente vario e ampio di sistemi elettromagnetici. Sia il funzionamento di un semplice circuito elettrico costituito da una batteria, una lampadina e fili conduttori, sia il funzionamento di un ricevitore radio, costituito da centinaia di componenti, anche molto complessi, è descritto adeguatamente dalle leggi di Kirchhoff e dalle relazioni caratteristiche dei componenti. Comunque, come abbiamo già sottolineato, ogni circuito viene progettato e realizzato in modo tale che, se utilizzato correttamente, il suo funzionamento effettivo sia molto vicino a quello che garantisce la validità dello stesso modello circuitale.

Osservazione

La più forte limitazione del modello circuitale è che non è in grado di descrivere il fenomeno della propagazione del campo elettromagnetico e, quindi, gli effetti del ritardo dovuti alla velocità finita di propagazione. Infatti, come vedremo, il modello circuitale è basato sull'ipotesi che la configurazione del campo elettromagnetico presente nel *circuito* sia prevalentemente di tipo quasi-stazionario. Ciò si verifica quando le grandezze elettriche variano così "lentamente" nel tempo che gli effetti dei ritardi sono trascurabili (è come se i segnali elettrici si propagassero "istantaneamente nel circuito"). Per questa ragione, i "circuiti fisici" descrivibili attraverso il modello circuitale prendono il nome di *circuiti a parametri concentrati.* L'aggettivo "concentrato" sta a indicare che le dimensioni fisiche del circuito sono abbastanza piccole da poter ritenere che nelle condizioni di funzionamento nominali il campo elettromagnetico si propaghi attraverso di esso in modo praticamente istantaneo. Nella situazione in cui l'approssimazione basata sul modello a parametri concentrati non è valida, ad esempio, perché le grandezze elettriche del circuito fisico variano troppo velocemente nel tempo, devono essere tenute in conto le dimensioni fisiche del circuito. Per distinguere tali circuiti dai circuiti a parametri concentrati, essi sono denominati *circuiti a parametri distribuiti.* Esempi tipici sono i circuiti costituiti da linee di trasmissione e da guide d'onda. Si dovrà ricorrere alle equazioni di Maxwell complete per predire il comportamento di questi sistemi. In queste lezioni tratteremo solo i circuiti a parametri concentrati.

Sebbene le equazioni del modello circuitale, cioè le leggi di Kirchhoff e le relazioni caratteristiche dei singoli componenti, possano essere dedotte dalle leggi di Maxwell e dalle relazioni costitutive dei materiali con cui sono realizzati i componenti (assumendo che le grandezze elettromagnetiche varino "lentamente" nel tempo), in questo corso formuleremo direttamente le equazioni del modello circuitale. La ragione è molto semplice. L'obiettivo principale del corso è introdurre il modello circuitale, studiarne le proprietà fondamentali e insegnare a risolvere i circuiti, di qualsiasi tipo, attraverso l'uso di quegli strumenti dell'algebra lineare e dell'analisi matematica che vengono insegnati nel primo anno di un corso di laurea di primo livello di una Facoltà di Ingegneria. Tuttavia cercheremo di mettere in evidenza i limiti di applicabilità del modello circuitale e le ragioni di questi limiti.
Si presume che lo studente che segue questo corso abbia già acquisite e maturate le conoscenze di base di fisica, e in particolare, di elettromagnetismo che vengono insegnate durante il primo anno di un corso di laurea in Ingegneria di primo livello della Classe dell'Informazione e della Classe Industriale. Comunque, nei prossimi tre paragrafi vengono rivisti, partendo da un punto di vista diverso da quello che generalmente si adotta in un corso di Fisica introduttivo all'elettromagnetismo, concetti e leggi che sono alla base del funzionamento di un circuito elettrico e, quindi, del modello circuitale. Dare allo studente anche la possibilità di avvicinarsi ad un argomento partendo da differenti punti di vista è fondamentale per la sua formazione.

1.3 La carica elettrica

La *carica* e la *corrente elettrica* sono le grandezze fisiche fondamentali che determinano l'interazione elettromagnetica [4]. Le forze che caratterizzano questa interazione vengono descritte attraverso il campo elettrico e il campo magnetico. La *legge di Lorentz* esprime la forza che agisce sulla carica "elementare" che si muove in un campo elettromagnetico. Le *equazioni di*

4 Ciascuna particella elementare (elettrone, protone, neutrone, ...) si comporta come se fosse un *magnete elementare*. Di conseguenza gli elettroni e protoni oltre ad avere una carica elettrica hanno anche un momento magnetico proprio, detto *momento magnetico intrinseco.* Il ruolo del momento magnetico intrinseco degli elettroni è fondamentale in tutti i materiali ferromagnetici.

Maxwell esprimono le leggi che legano il campo elettromagnetico alle sorgenti "elementari" del campo, che sono le cariche e le correnti elettriche.
Le cariche elettriche possono essere positive o negative. Il segno della carica è distinguibile grazie alla forza di Coulomb, per cui cariche (ferme) dello stesso segno si respingono e cariche di segno opposto si attraggono. Il protone, ad esempio, è una particella dotata di carica positiva, mentre l'elettrone è una particella dotata di carica negativa (ovviamente è del tutto convenzionale aver scelto come segno della carica del protone quello positivo e come segno della carica dell'elettrone quello negativo).
La carica dell'elettrone è la carica negativa "elementare" e quella del protone è la carica positiva "elementare". In valore assoluto, la carica del protone e la carica dell'elettrone sono uguali.
In queste note adotteremo le unità di misura del Sistema Internazionale (SI). Nel sistema SI l'unità di misura della carica elettrica è denominata, come sappiamo, *coulomb* (simbolo C),

$$[Q] = \mathrm{C}\ . \tag{1}$$

(In questo note con il simbolo $[F]$ indichiamo l'unità di misura della generica grandezza fisica F.)
Un *coulomb* è un valore di carica estremamente grande se lo confrontiamo con la carica di un singolo elettrone o di un singolo protone. Infatti, si ha che

$$1\mathrm{C} \cong 6.24\ 10^{18}\, e, \tag{2}$$

dove e indica la carica, in valore assoluto, dell'elettrone.
La carica elettrica contenuta in una data regione di spazio è la somma delle cariche positive e negative contenute in essa: ciascuna carica deve essere sommata con il proprio segno. Si ha cioè:

$$Q_t = Q_+ + Q_- \tag{3}$$

dove Q_+ e Q_- indicano, rispettivamente, la carica positiva e la carica negativa contenute nella regione di spazio in considerazione. La relazione (3) può essere riscritta come

$$Q_t = Q_+ - |Q_-|\ . \tag{4}$$

Se $Q_t = 0$ si dice che la regione in esame è globalmente *neutra.*

Esempio

Consideriamo un cm^3 di filo di rame. In esso ci sono circa 10^{23} atomi, che formano il reticolo cristallino. Ciascun atomo contiene 29 protoni (cariche positive del nucleo) e 29 elettroni (cariche negative "attorno" al nucleo). Per ogni atomo vi è, mediamente, all'incirca un *elettrone* libero di muoversi nel reticolo cristallino; i protoni e gli altri elettroni si possono considerare come se fossero praticamente immobili. Pertanto nella regione in un cm^3 ci sono circa 10^{23} elettroni che possono "migrare".
In assenza di campi elettrici esterni, gli elettroni liberi si muovono in maniera completamente disordinata a causa dell'agitazione termica (con velocità modeste, dell'ordine di 100 km/s a temperature ordinarie). In conseguenza di ciò, il numero di protoni e il numero di elettroni (elevatissimo) che si trovano, mediamente, in un cm^3 sono uguali, la carica totale è zero e il campo elettrico macroscopico, cioè, il valor medio del campo elettrico su dimensioni macroscopiche, risulta essere praticamente zero. Quindi, in assenza di un campo elettrico macroscopico esterno, gli elettroni liberi "migrano" solo a causa dell'agitazione termica in un ambiente che resta mediamente neutro.

♦

1.3.1 Legge della conservazione della carica per sistemi elettricamente chiusi

In generale, Q_+ e Q_-, e quindi Q_t, variano nel tempo. Ciò è dovuto al fatto che le cariche si muovono sotto l'azione di campi elettromagnetici, e quindi, migrano, da una regione all'altra dello spazio. In una trattazione macroscopica, come quella che serve per descrivere il modello circuitale, possiamo considerare la carica come una funzione continua del tempo perché gli effetti dovuti alla "granularità" delle cariche elementari sono trascurabili (le regioni macroscopiche, per definizione, contengono un numero elevatissimo di particelle).

Diciamo che un sistema è elettricamente chiuso se attraverso la superficie che lo delimita non passano particelle cariche.

Legge della conservazione della carica elettrica

In un sistema elettricamente chiuso la carica elettrica totale non varia nel tempo.

♦

Questa è una delle leggi basilari dell'elettromagnetismo. Se si esclude la possibilità che uguali quantità di carica positiva e negativa possano essere simultaneamente create o distrutte (ciò, in realtà, può accadere negli acceleratori di particelle dove le particelle elementari vengono accelerate fino a velocità prossime a quelle della luce nel vuoto), come immediata conseguenza della legge della conservazione della carica abbiamo che sia il numero di cariche elementari positive, sia il numero di cariche elementari negative contenute in un sistema elettricamente chiuso non variano nel tempo.

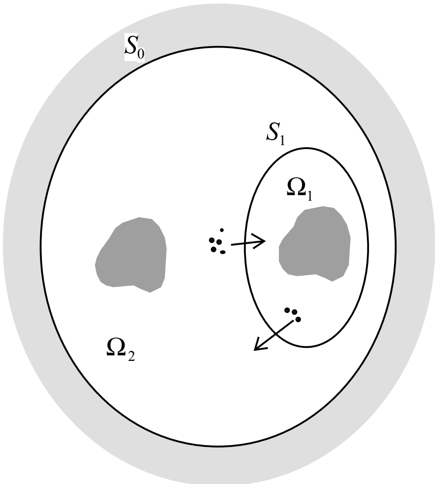


Fig. 1.3 *Sistema elettromagnetico chiuso: attraverso la superficie S_0 non c'è passaggio di cariche elettriche.*

Consideriamo un sistema elettromagnetico chiuso che occupa la regione di spazio delimitata dalla superficie S_0 (Figura 1.3). Consideriamo ora una parte di questo sistema, indichiamo con Ω_1 la regione di spazio che essa occupa e con S_1 la superficie che delimita Ω_1; indichiamo con Ω_2 la restante parte della

regione di spazio delimitata da S_0. Inoltre, indichiamo con $Q_1(t)$ la carica totale contenuta in Ω_1 e con $Q_2(t)$ la carica totale contenuta in Ω_2 ad un generico istante di tempo t. Allora, per la legge della conservazione della carica si ha che

$$Q_1(t) + Q_2(t) = Q_0 = costante, \tag{5}$$

dove Q_0 è la carica totale contenuta nel sistema chiuso. In conseguenza di ciò, se la carica Q_1 diminuisce (aumenta) nel tempo, la carica Q_2 aumenta (diminuisce).
La carica Q_1 diminuisce (aumenta) nel tempo, in senso relativo, se cariche positive (negative) si spostano dalla regione Ω_1 alla regione Ω_2 e/o cariche negative (positive) si spostano dalla regione Ω_2 alla regione Ω_1, attraversando la superficie S_1. In conclusione, la carica Q_1, e di conseguenza la carica Q_2, variano quando c'è un flusso di carica elettrica attraverso la superficie S_1, cioè, quando c'è una *corrente elettrica* attraverso S_1. Può anche accadere che, pur essendovi particelle cariche che attraversano la superficie S_1, le cariche Q_1 e Q_2 non variano nel tempo. Il lettore cerchi di descrivere una situazione in cui ciò potrebbe verificarsi. Il concetto di intensità di corrente elettrica, che è un concetto base del modello circuitale, sarà ampiamente sviluppato nel seguito.

1.4 L'intensità della corrente elettrica

Si ha *corrente elettrica macroscopica* quando le cariche si *muovono in moto ordinato su scala macroscopica*, ad esempio, in un filo conduttore di elettricità (un filo di rame) sotto l'azione di un campo elettrico esterno prodotto da sorgenti macroscopiche, come, ad esempio, una pila. Quando c'è una corrente elettrica macroscopica al moto disordinato degli elettroni liberi, dovuto all'agitazione termica, si sovrappone un moto di insieme con velocità media diversa da zero in una certa direzione. Ora ci soffermeremo solo sull'analisi dei concetti e delle grandezze che si introducono per descrivere le situazioni in cui si ha una corrente elettrica macroscopica; ciò può essere fatto prescindendo dalle modalità con cui si essa viene prodotta.
Una delle grandezze fondamentali che caratterizza una corrente elettrica è quello di *intensità di corrente elettrica.* Consideriamo, anzitutto, nella regione in cui ci sono cariche elettriche in moto una superficie generica S (aperta o

chiusa) orientata arbitrariamente e contiamo le cariche (supposte puntiformi), di specie in generale diverse, che la attraversano. In Figura 1.4 le due possibili orientazioni di una superficie aperta S sono indicate attraverso i due possibili versi della normale: in Figura 1.4a la superficie è orientata con la normale che va dal basso verso l'alto, invece in Figura 1.4b la stessa superficie è orientata con la normale che va dall'alto verso il basso. Sia T la durata dell'intervallo temporale durante il quale contiamo le cariche e t l'istante in cui iniziamo a contarle. Inoltre, etichettiamo ciascuna particella con un numero intero, di modo ché q_i sia la carica elettrica della "$i-$esima" particella che ha attraversato la superficie S a un istante t_i imprecisato con $t_i \geq t_{i-1}$ e $i = 1, 2, \ldots$.

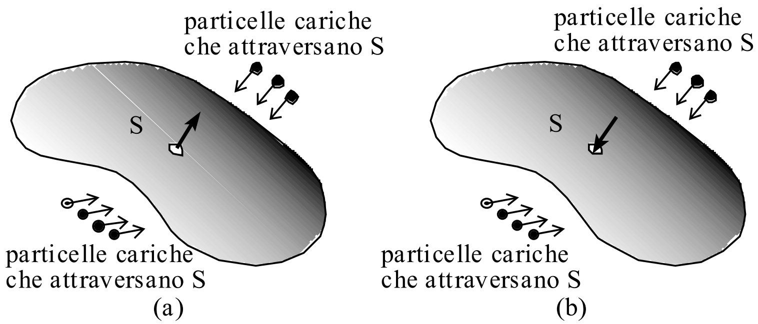


Fig. 1.4 *Due possibili modi di orientare la superficie S.*

Definiamo la *carica elettrica netta* che attraversa la superficie orientata S nell'intervallo $(t, t+T)$ come la somma,

$$q_S(t;T) = \sum_i (\pm) q_i \,, \tag{6}$$

di tutte le cariche che attraversano S in quell'intervallo, facendo intervenire il segno + per le cariche che l'attraversano concordemente con il verso prescelto per orientarla e il segno – per le cariche che l'attraversano nel verso opposto. Ciascuna carica q_i viene "contata" con il proprio segno. Per definizione è $q_S(t;T=0)=0$. Il rapporto

$$I_S(t;T) = \frac{q_S(t;T)}{T} \tag{7}$$

definisce l'*intensità media della corrente elettrica* che attraversa la superficie orientata S nell'intervallo $(t, t+T)$.
In generale, l'intensità media della corrente I_S dipende sia dall'istante t in cui inizia il processo di conteggio sia dalla lunghezza T dell'intervallo di osservazione. Tuttavia, quasi sempre le cose stanno in modo tale che I_S tende a un valore ben definito, che in generale dipende solo da t, se la lunghezza dell'intervallo di osservazione T viene fatto tender a un valore "fisicamente infinitesimo" ΔT. Con l'espressione "fisicamente infinitesimo" vogliamo intendere un valore molto piccolo rispetto alla scala dei tempi sui quali le grandezze elettriche macroscopiche variano apprezzabilmente, e tuttavia abbastanza grande di modo che S sia attraversata da un numero elevatissimo di particelle.

Definizione: intensità della corrente elettrica

In tali condizioni è possibile definire l'*intensità di corrente elettrica* che attraversa la superficie orientata S nel generico istante t come

$$i_S(t) = \lim_{T \to \Delta T} I_S(t;T) = \frac{q_S(t;\Delta T)}{\Delta T}; \tag{8}$$

$q_S(t;\Delta T)$ è la carica netta che attraversa S nell'intervallo fisicamente infinitesimo ΔT a partire dall'istante t.

♦

Introduciamo la funzione $Q_S(t)$ definita come la carica elettrica netta che attraversa la superficie orientata S nell'intervallo di tempo $(0,t)$. È evidente, allora, che la carica $q_S(t;\Delta T)$ che attraversa la superficie orientata S nell'intervallo ΔT è esprimibile come

$$q_S(t;\Delta T) = Q_S(t+\Delta T) - Q_S(t) = \Delta Q_S, \tag{9}$$

cioè è data dalla carica netta che ha attraversato S nell'intervallo di tempo $(0, t+\Delta T)$ meno la carica netta che ha attraversato la stessa superficie S

nell'intervallo di tempo $(0,t)$. La variazione di carica ΔQ_S può essere determinata attraverso la relazione

$$\Delta Q_S \cong \frac{dQ_S}{dt}\Delta T, \tag{10}$$

dove dQ_S/dt è la derivata prima della funzione $Q_S(t)$ valutata all'istante t. Il segno "$\cong$", a rigore, può essere sostituito con quello di eguaglianza solo nel limite $\Delta T \to 0$. Comunque, se la funzione $Q_S(t)$ varia lentamente su ogni intervallo temporale di ampiezza ΔT (e ciò è certamente vero per come è stata definito l'intervallo fisicamente infinitesimo ΔT), possiamo, senza sbagliare di molto, sostituire nella (10) il segno "$\cong$" con il segno "$=$".
Utilizzando le relazioni (9) e (10) (con il segno "$=$" al posto del segno "$\cong$") la relazione (8) diventa

$$i_S(t) = \frac{dQ_S}{dt}. \tag{11}$$

In conclusione, l'intensità della corrente elettrica che attraversa la superficie orientata S al generico istante t è uguale alla derivata prima rispetto al tempo della carica elettrica netta che ha attraversato la superficie S nell'intervallo $(0,t)$.
E' evidente allora che la carica netta che attraversa la superficie S nell'intervallo di tempo infinitesimo $(t, t+\Delta t)$, ΔQ_S, può essere espressa come $\Delta Q_s = i_S(t)\Delta t$. La carica netta $Q_S(t_1,t_2)$ che attraversa la superficie orientata S in un generico intervallo (t_1,t_2) (con $t_2 > t_1$) è data dall'integrale definito sull'intervallo (t_1,t_2) dell'intensità della corrente elettrica $i_S(t)$,

$$Q_S(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} i_S(t)dt \ . \tag{12}$$

Questa relazione è una diretta conseguenza della definizione di intensità di corrente data sopra. Si ottiene immediatamente a partire dalla relazione (11).

Esercizio

Il lettore verifichi che si ottiene la relazione (10) se, invece di considerare la carica che ha attraversato la superficie S nell'intervallo $(0,t)$, si considera la carica che ha attraversato la stessa superficie nell'intervallo (t_0,t) (con $t_0 < t$).

♦

L'intensità della corrente elettrica attraverso una superficie orientata è una grandezza scalare il cui segno, positivo o negativo, dipende solo dalla scelta dell'orientamento della superficie. Se i'_S è l'intensità della corrente attraverso la superficie S orientata come riportato in Figura 1.4a e i''_S è l'intensità della corrente attraverso la stessa superficie orientata in verso opposto, come indicato in Figura 1.4b, si ha

$$i'_S(t) = -i''_S(t) \ . \tag{13}$$

L'intensità della corrente elettrica ha il ruolo di grandezza elettrica fondamentale del Sistema Internazionale delle unità di misura. Nel sistema SI l'unità di misura dell'intensità di corrente elettrica è denominata *ampere* (simbolo A),

$$[i] = \mathrm{A} \ . \tag{14}$$

L'unità di carica, cioè il coulomb, è pertanto un'unità derivata e corrisponde al prodotto di un ampere per un secondo:

$$\mathrm{C} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{s} \ . \tag{15}$$

Un *coulomb* è la carica netta che attraversa una generica superficie S nell'intervallo di un *secondo* quando l'intensità della corrente elettrica attraverso S è uguale a un *ampere.*

Dal corso di Fisica sapete che l'intensità della corrente elettrica attraverso una generica superficie orientata S può essere espressa in funzione delle grandezze che descrivono il moto macroscopico delle singole cariche. Il caso più semplice si ha quando le cariche sono tutte della stessa specie, ad esempio, gli elettroni liberi di un conduttore solido. In questo caso l'intensità della corrente elettrica attraverso la superficie orientata S è data

$$i_S(t) = \iint_S \boldsymbol{J}(P,t) \cdot \boldsymbol{n}(P) dS, \tag{16}$$

dove la grandezza vettoriale

$$\boldsymbol{J}(P,t) = \rho(P,t)\boldsymbol{v}(P,t), \tag{17}$$

valutabile punto per punto e istante per istante nel conduttore, è il campo di *densità di corrente elettrica*; ρ è la densità volumetrica [5] della carica associata agli elettroni liberi, cioè la carica per unità di volume, e $\boldsymbol{v}$ è la loro velocità media (**Appendice** A1).
L'integrale di superficie (16) rappresenta il flusso del campo di densità di corrente attraverso la superficie orientata S; $\boldsymbol{n}$ è il versore normale alla superficie S orientato concordemente con il verso scelto per S.
Nel sistema SI l'unità di misura della densità di corrente elettrica è

$$[\boldsymbol{J}] = \text{A/m}^2 \ . \tag{18}$$

Se il campo di densità di corrente nella regione di interesse è uniforme e la superficie S è piana abbiamo

$$i_S = J_0 A \cos\alpha, \tag{19}$$

dove J_0 è il modulo del campo di densità di corrente, A è l'area della superficie S, α è l'angolo che la direzione del vettore del campo di densità di corrente forma con la normale alla superficie orientata S. L'intensità della corrente elettrica è positiva quando $0 \le |\alpha| \le \pi/2$ ed è negativa quando $\pi/2 < |\alpha| < \pi$. Se il campo di densità di corrente non è uniforme e/o la superficie S non è piana, bisogna calcolare l'integrale di superficie (16).

5 Si consideri una distribuzione volumetrica di carica elettrica. La densità di carica $\rho = \rho(P,t)$ è definita in modo tale che $\rho(P,t)\Delta\Omega_P$ rappresenta la carica elettrica netta contenuta all'istante t nel volume elementare $\Delta\Omega_P$, fisicamente infinitesimo, centrato nel punto P. Nel SI la densità di carica volumetrica si misura in $coulomb/m^3$.

Esempio

Si consideri un conduttore di rame filiforme con sezione $S = 1\ \text{cm}^2$. Si supponga che sia attraversato da una corrente elettrica di intensità $I = 1\ \text{A}$ (diretta parallelamente all'asse del filo). Quale è la velocità media (macroscopica) degli elettroni liberi? Il modulo della densità di corrente è $J = I/S = 10\ \text{kA/m}^2$. Il numero di elettroni liberi per cm^3 è $n \cong 10^{23}$. Allora la densità di carica elettrica è $\rho = ne \cong 2 \cdot 10^7\ \text{C/m}^3$. Di conseguenza la velocità media degli elettroni liberi è $v = J/\rho \cong 0.5\ \text{mm/s}$. Ricordiamo che il moto disordinato associato all'agitazione termica è caratterizzato da velocità dell'ordine di 100 km/s a temperature ordinarie.

♦

Nel caso in cui si ha a che fare con due specie di portatori di cariche, l'una positiva con densità volumetrica ρ_+ e velocità media $\boldsymbol{v}_+$, e l'altra negativa con densità volumetrica ρ_- e velocità media $\boldsymbol{v}_-$ (come, ad esempio, nelle soluzioni elettrolitiche o nei semiconduttori), l'espressione del campo di densità di corrente elettrica è

$$\boldsymbol{J}(P,t) = \rho_+(P,t)\boldsymbol{v}_+(P,t) + \rho_-(P,t)\boldsymbol{v}_-(P,t). \tag{20}$$

1.4.1 Legge della conservazione della carica per sistemi elettricamente aperti

Nel § **1.3** abbiamo enunciato la legge della conservazione della carica elettrica per sistemi elettricamente chiusi. La carica contenuta entro una regione Ω racchiusa da una superficie Σ non attraversata da corrente elettrica è costante nel tempo. Quando, invece, la superficie chiusa Σ è attraversata da corrente elettrica, la carica elettrica all'interno di Ω, in generale, varia nel tempo (Figura 1.5).
Indichiamo con $i_\Sigma(t)$ l'intensità della corrente elettrica che all'istante t attraversa la superficie chiusa Σ orientata concordemente con il verso uscente da Ω. Inoltre, indichiamo con $Q_\Omega(t)$ la carica elettrica totale che all'istante t è contenuta nella regione Ω.

La carica elettrica netta $q_\Sigma(t,\Delta T)$ che nell'intervallo di tempo infinitesimo $(t,t+\Delta T)$ attraversa la superficie orientata Σ è data da

$$q_\Sigma(t,\Delta T) \cong i_\Sigma(t)\Delta T. \tag{21}$$

La carica $q_\Sigma(t,\Delta T)$ è la somma algebrica delle cariche che nell'intervallo di tempo $(t,t+\Delta T)$ attraversano Σ, facendo intervenire il segno + per le cariche che attraversano Σ uscendo da Ω e il segno – per le cariche che attraversano Σ entrando in Ω (in accordo con il fatto che abbiamo orientato la superficie chiusa Σ concordemente con il verso uscente da Ω). Di conseguenza $q_\Sigma(t,\Delta T)$ è uguale alla carica elettrica netta che nell'intervallo di tempo $(t,t+\Delta T)$ <u>effettivamente esce</u> dalla regione Ω <u>meno</u> la carica elettrica netta che nello stesso intervallo di tempo <u>effettivamente entra</u> nella regione Ω.

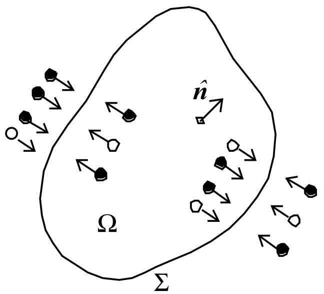


Fig. 1.5 *La carica totale contenuta nella regione Ω varia nel tempo in presenza di una corrente elettrica attraverso la superficie chiusa Σ.*

Per la conservazione della carica elettrica abbiamo che:

(i) le cariche che nell'intervallo di tempo $(t,t+\Delta T)$ <u>effettivamente escono</u> da Ω, attraversando Σ, all'<u>istante t</u> si trovano tutte dentro la regione Ω;
(ii) anche le cariche elettriche che nello stesso intervallo di tempo <u>effettivamente entrano</u> in Ω, attraversando Σ, all'<u>istante $t+\Delta T$</u> si trovano tutte dentro la regione Ω.

Di conseguenza, la variazione di carica $Q_\Omega(t)-Q_\Omega(t+\Delta T)$ è uguale alla carica elettrica netta che nell'intervallo di tempo $(t,t+\Delta T)$ <u>effettivamente esce</u> dalla regione Ω <u>meno</u> la carica elettrica netta che nello stesso intervallo di tempo <u>effettivamente entra</u> dalla regione Ω e, quindi,

$$Q_\Omega(t)-Q_\Omega(t+\Delta t)=q_\Sigma(t,\Delta T). \tag{22}$$

Utilizzando la (22) dalla relazione (21) si ottiene

$$i_\Sigma(t) \cong -\frac{Q_\Omega(t+\Delta T)-Q_\Omega(t)}{\Delta T}. \tag{23}$$

Nel limite in cui ΔT è sufficientemente piccolo possiamo confondere il rapporto incrementale a secondo membro della (23) con la derivata prima e scrivere

$$i_\Sigma(t) = -\frac{dQ_\Omega}{dt}. \tag{24}$$

Questa è la legge della conservazione della carica per sistemi elettricamente aperti.

Legge della conservazione della carica per sistemi elettricamente aperti

Data una qualsiasi superficie chiusa Σ che delimita la regione di spazio Ω, orientata concordemente con il verso uscente da Ω, l'intensità della corrente elettrica attraverso Σ è uguale alla derivata prima, rispetto al tempo, della carica elettrica totale contenuta nel volume Ω cambiata di segno.

♦

Il segno "–" esprime il fatto che, nel caso di cariche positive effettivamente uscenti da Σ (primo membro positivo) si riscontra una diminuzione di Q_Ω e cioè si ha $dQ_\Omega/dt<0$.

Dal corso di Fisica sapete che l'equazione (24) può essere espressa come (se sono assenti distribuzioni superficiali di cariche e correnti)

$$\oint\!\!\!\oint_\Sigma \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}dS = -\frac{d}{dt}\iiint_\Omega \rho dv, \tag{25}$$

dove ρ è la densità di carica elettrica libera presente all'interno della regione Ω, ottenuta sommando le densità di carica elettrica di tutte le specie di portatori di carica presenti. Questa è la forma più nota della legge della conservazione della carica elettrica (**Appendice** A1). Il simbolo $\oiint(\cdot)dS$ ricorda che l'integrale di superficie è esteso ad una superficie chiusa.

Osservazione

Quando le grandezze elettriche sono costanti nel tempo (*regime stazionario*) si ha che l'intensità della corrente elettrica attraverso qualsiasi superficie chiusa è sempre uguale a zero,

$$i_\Sigma = 0\text{, ovvero, } \oiint_\Sigma \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}dS = 0\,. \tag{26}$$

In questa situazione la quantità di carica che globalmente attraversa la superficie chiusa Σ, in un generico intervallo di tempo, è nulla: tanta carica entra in Σ quanta, nello stesso tempo intervallo di tempo ne esce. Per tale ragione si dice che in *regime stazionario il campo del vettore densità di corrente è conservativo rispetto al flusso*.

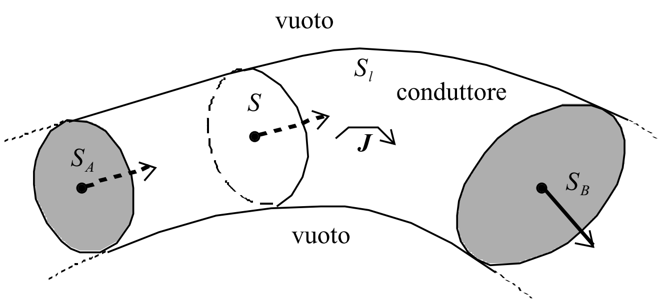


Fig. 1.6 *In condizioni stazionarie l'intensità della corrente elettrica attraverso una generica sezione di un conduttore filiforme non dipende dalla particolare sezione scelta.*

Una conseguenza importante dell'equazione (26) è che in regime stazionario l'intensità della corrente elettrica che attraversa un filo conduttore ha lo stesso valore attraverso tutte le sue sezioni. Facciamo riferimento a un conduttore che

ha una forma del tipo illustrato in Figura 1.6. Si assuma che il conduttore sia connesso a un apparato elettrico attraverso le due superfici estreme S_A e S_B e che sia attraversato da una corrente. La superficie laterale S_l separa il conduttore dal vuoto o da un materiale che assumiamo essere un isolante elettrico perfetto, cioè un materiale in cui non esistono cariche libere e quindi non è possibile avere correnti. Se indichiamo con i_A e i_B le intensità delle correnti elettriche attraverso le due superfici estreme S_A e S_B, rispettivamente, e con i l'intensità della corrente elettrica attraverso una generica sezione S del conduttore (intermedia tra S_A e S_B), si ha

$$i_A = i = i_B\,. \tag{27}$$

Le superfici S_A, S e S_B sono orientate concordemente (da sinistra verso destra).
L'equazione (27) è una diretta conseguenza di due fatti: attraverso la superficie laterale S_l non può esserci corrente elettrica perché il mezzo circostante è un isolante perfetto; sulla superficie laterale S_l non possono accumularsi cariche perché abbiamo supposto di essere in condizioni stazionarie (su S_l può esserci al più una carica costante nel tempo). Se sulla superficie S_l vi fosse una carica variabile nel tempo, sotto forma di distribuzione superficiale, essa darebbe luogo a un campo elettrico e a un campo magnetico variabili nel tempo, contravvenendo così all'ipotesi di regime di funzionamento stazionario.

♦

1.5 La tensione elettrica

Come già abbiamo ricordato, le grandezze elettriche fondamentali di un circuito elettrico sono l'intensità della corrente elettrica e la tensione elettrica. Nel precedente paragrafo abbiamo riesaminato il concetto di intensità della corrente elettrica, in questo paragrafo riesamineremo quello di *tensione elettrica.*
La tensione elettrica è una grandezza integrale del campo elettrico. Attraverso di essa è possibile descrivere alcune delle proprietà fondamentali di questo campo.
Consideriamo un campo elettrico prodotto da un sistema di cariche e di correnti. Sia γ una curva aperta di estremi A e B, e la si orienti scegliendo arbitrariamente un verso di percorrenza, ad esempio, quello che va dall'estremo A all'estremo B, Figura 1.7.

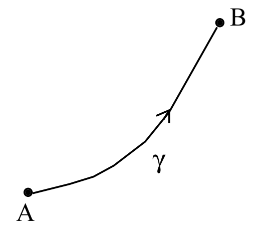


Fig. 1.7 *Cammino lungo cui viene definita la tensione elettrica.*

Definizione: tensione elettrica

La tensione del campo elettrico lungo la curva orientata γ, che indicheremo con v_γ, è il lavoro che il campo elettrico compie su una carica, riferito alla carica stessa, per muoverla lungo γ concordemente con il verso prescelto.

♦

Nel sistema SI l'unità di misura della tensione elettrica è denominata *volt* (simbolo V),

$$[v] = \mathrm{V} \quad . \tag{28}$$

La definizione di tensione elettrica può applicarsi anche al caso di linea chiusa. In questo caso gli estremi A e B coincidono. La tensione elettrica lungo una linea chiusa Γ, che indicheremo con il simbolo E_Γ, prende il nome di *circuitazione del campo elettrico*. Per questa grandezza, spesso, viene anche usato il termine *forza elettromotrice* (f.e.m.).[6]

Dal corso di Fisica sapete che la tensione v_γ può essere espressa come integrale di linea del campo elettrico $\boldsymbol{E}$ lungo la curva orientata γ (**Appendice** A1),

$$v_\gamma = \int_\gamma \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{t} dl \, . \tag{29}$$

[6] Tale termine, introdotto nelle prime applicazioni elettriche e tuttora di uso corrente, non rappresenta evidentemente una forza bensì un lavoro su di una carica riferito alla carica stessa.

In generale, il campo elettrico è una funzione (vettoriale) del punto dello spazio e del tempo. Di conseguenza la tensione elettrica varia al variare del tempo ed è, quindi, una funzione del tempo. Per la circuitazione del campo elettrico lungo la linea chiusa Γ si ha

$$E_\Gamma = \oint_\Gamma \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{t} dl \, . \tag{30}$$

Il simbolo $\oint_\Gamma (\cdot) dl$ ricorda che l'integrale di linea è esteso a una linea chiusa.
Se il campo elettrico nella regione di interesse è uniforme e la linea γ è un segmento di lunghezza L abbiamo

$$v_\gamma = E_0 L \cos\beta , \tag{31}$$

dove E_0 è il modulo del campo elettrico e β è l'angolo che la direzione del vettore del campo elettrico forma con il segmento orientato γ. La tensione è positiva quando $0 \le |\beta| \le \pi/2$ ed è negativa quando $\pi/2 < |\beta| < \pi$. Se il campo elettrico non è uniforme e/o la curva γ non è un segmento, allora bisogna calcolare l'integrale di linea (29).

Legge dell'induzione elettromagnetica (legge di Faraday-Neumann)

La legge dell'induzione elettromagnetica, nota anche come legge di Faraday-Neumann, dice che (stiamo considerando linee chiuse ferme)

$$E_\Gamma = -\frac{d\Phi_\Gamma}{dt} , \tag{32}$$

dove Φ_Γ è il flusso del campo di induzione magnetica concatenato con la linea chiusa Γ, definito concordemente con il verso di percorrenza scelto per Γ (**Appendice** A1).

♦

Nel sistema SI l'unità di misura del flusso del campo magnetico è denominata *weber* (simbolo Wb),

$$[\Phi] = \mathrm{W}b \ . \tag{33}$$

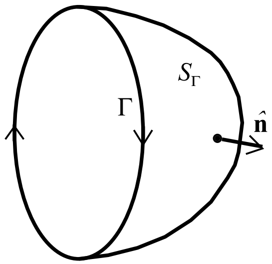


Fig. 1.8 *La linea chiusa Γ è l'orlo della superficie aperta S_Γ.*

L'unità di flusso del campo di induzione magnetica, cioè il *weber*, corrisponde al prodotto di un volt per un secondo:

$$\mathrm{W}b = \mathrm{V} \cdot \mathrm{s} \ . \tag{34}$$

La legge di Faraday-Neumann esprime il fatto che la circuitazione del campo elettrico è pari (a meno del segno) alla derivata rispetto al tempo del flusso del campo di induzione magnetica concatenato con la linea stessa. Il fenomeno prende il nome di induzione elettromagnetica. Esso è uno dei fenomeni più importanti dell'elettromagnetismo: ogniqualvolta nello spazio esiste un campo magnetico variabile nel tempo, ad esso si associa un campo elettrico con circuitazione diversa da zero.

Dal corso di Fisica sapete che il flusso del campo di induzione magnetica $\boldsymbol{B}$ concatenato con una linea chiusa Γ può essere espresso come (**Appendice** A1)

$$\Phi_\Gamma = \iint_{S_\Gamma} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} dS, \tag{35}$$

dove S_Γ è una qualsiasi superficie aperta che ha come orlo la linea chiusa Γ e $\hat{\boldsymbol{n}}$ è il versore normale al generico punto della superficie S_Γ orientato in maniera tale che il verso di Γ e quello di $\hat{\boldsymbol{n}}$ siano tra loro legati, rispettivamente, come il senso di rotazione e quello di avanzamento di una vite destrogira, Figura 1.8. Nel SI l'unità di misura del campo di induzione magnetica è il *tesla* (simbolo, T). È evidente che $\mathrm{W}b = \mathrm{T} \cdot \mathrm{m}^2$.

La possibilità di associare il flusso del campo di induzione magnetica alla linea chiusa Γ si basa sul fatto che $\boldsymbol{B}$ è conservativo rispetto al flusso, cioè per qualsiasi superficie chiusa Σ si ha

$$\oiint_\Sigma \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} dS = 0 \, . \tag{36}$$

Questa è la proprietà fondamentale del campo di induzione magnetica. Essa implica che il flusso del campo di induzione magnetica attraverso una superficie aperta dipende solo dall'orlo della superficie: il flusso del campo $\boldsymbol{B}$ attraverso due superfici aperte (orientate concordemente) che hanno lo stesso orlo sono uguali.
Allora, la legge di Faraday-Neumann può essere espressa nella forma (**Appendice** A1)

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{t} dl = -\frac{d}{dt} \iint_{S_\Gamma} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} dS \, . \tag{37}$$

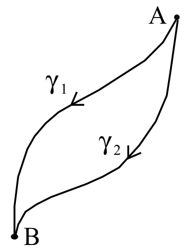


Fig. 1.9 *Due curve diverse che hanno gli stessi estremi.*

Osservazione

Quando le grandezze elettriche e magnetiche sono <u>costanti nel tempo</u> (regime stazionario) dalla (37) (o dalla (32)) abbiamo che la circuitazione del campo elettrico lungo una qualsiasi linea <u>chiusa</u> è sempre uguale a zero (si dice, anche, che *il campo elettrico è conservativo rispetto alla circuitazione*),

$$E_\Gamma = 0 \ \text{ovvero} \ \oint_\Gamma \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{t} dl = 0 \, . \tag{38}$$

In questa situazione la tensione elettrica lungo una linea aperta dipende solo dai punti estremi della linea e non dalla particolare percorso definito dalla stessa (Figura 1.9),

$$v_{\gamma_1} = v_{\gamma_2} \equiv v_{AB} . \tag{39}$$

♦

1.6 Circuiti di bipoli

In un circuito il funzionamento di ogni singolo componente è, in ogni istante, determinato dalla interazione tra il componente stesso e il resto del circuito. In altre parole, si può dire che esso è il frutto dell'interazione tra due diverse esigenze: che il componente si comporti in modo compatibile con la sua specifica natura e che tale comportamento sia a sua volta compatibile con quello di tutti gli altri componenti presenti nel circuito. Le *relazioni caratteristiche* descrivono il funzionamento dei singoli componenti e le *leggi di Kirchhoff* ne regolano l'interazione. Le equazioni che ne derivano sono le *equazioni circuitali*. Nella parte restante di questo Capitolo introdurremo e descriveremo le equazioni circuitali.
Nei limiti delle approssimazioni del modello circuitale, che illustreremo brevemente nel **§ 1.13**, le condizioni di funzionamento dei singoli componenti del circuito e, quindi, dell'intero circuito, sono individuate dalle tensioni tra i terminali dei componenti e dalle intensità di corrente che attraversano i terminali dei componenti: queste sono le variabili elettriche del circuito e, quindi, le incognite delle equazioni circuitali.
La relazione caratteristica del componente, che ne descrive il funzionamento complessivo, è espressione solo della sua natura fisica. Essa esprime le relazioni tra le intensità delle correnti e le tensione del componente imposte dalla sua natura fisica. Le leggi di Kirchhoff esprimono le relazioni tra le variabili circuitali imposte dal modo in cui i componenti del circuito sono collegati tra loro. La legge di Kirchhoff per le correnti mette in relazione le intensità delle correnti che attraversano i terminali di componenti diversi collegati a uno stesso nodo. La legge di Kirchhoff per le tensioni mette in relazione le tensioni tra le coppie di terminali che formano un percorso chiuso.

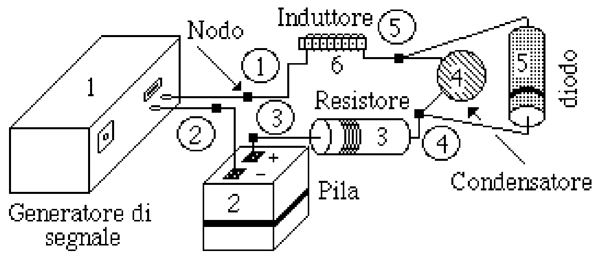


Fig. 1.10 *Esempio di circuito costituito da componenti con due terminali.*

Per semplicità, faremo riferimento a circuiti di soli componenti con due terminali. Un esempio di circuito di questo tipo è illustrato in Figura 1.10. (In questo paragrafo e nei successivi faremo spesso riferimento al circuito di Figura 1.10 per esemplificare i concetti e le leggi che man mano introdurremo.) Con "1", "2", "3", "4", "5" e "6" abbiamo indicato i diversi componenti del circuito; con ①, ②, ③, ④ e ⑤ abbiamo indicato i <u>nodi</u> del circuito, cioè le giunzioni tra terminali di componenti circuitali diversi. L'estensione alla situazione più generale in cui siano presenti anche componenti con più di due terminali non comporta alcuna difficoltà concettuale e verrà sviluppata nel Capitolo 4.
Nel modello circuitale un generico componente con due terminali è rappresentato attraverso il *bipolo*, concetto che svilupperemo e approfondiremo in questo paragrafo. In questo paragrafo, in particolare, definiremo con precisione l'intensità della corrente e la tensione per un generico componente con due terminali. Nel paragrafo successivo formuleremo e discuteremo le leggi di Kirchhoff per un circuito di bipoli. Nel **§ 1.8** presenteremo e discuteremo i concetti di potenza ed energia elettrica assorbite da un bipolo. Nel **§ 1.9** presenteremo e discuteremo le relazioni caratteristiche dei bipoli fondamentali. Infine, nel **§ 1.10** ci soffermeremo sui limiti di validità del concetto di bipolo e delle stesse leggi di Kirchhoff.

1.6.1 L'intensità della corrente elettrica di un componente con due terminali

In ogni circuito ci sono cariche elettriche in movimento sia nei conduttori di collegamento che nei componenti. Le cariche e le correnti elettriche producono campi elettrici e magnetici che permeano l'intero circuito.

Consideriamo un generico componente con due terminali, ad esempio, un componente del circuito riportato in Figura 1.10. Esso può essere il resistore, l'induttore o il diodo; la sua specifica natura non ha per ora alcuna importanza.
Un generico componente con due terminali può essere rappresentato schematicamente come indicato in Figura 1.11a, dove vengono messi in evidenza la "superficie limite" del componente e i due conduttori terminali filiformi che da essa fuoriescono. Abbiamo marcato un terminale con il simbolo "a" e l'altro terminale con il simbolo "b".
I conduttori con cui sono realizzati i terminali, in condizioni di funzionamento nominali (cioè nelle condizioni di funzionamento per le quali i componenti sono stati realizzati e il circuito progettato) possono essere ritenuti conduttori perfetti.
Il fenomeno della conduzione elettrica nei cosiddetti *conduttori di tipo ohmico* (rame, argento, ...) è descritto dalla relazione costitutiva (*legge di Ohm alle grandezze specifiche*)

$$\boldsymbol{E} = \eta \boldsymbol{J},$$

dove il parametro η è la resistività elettrica del materiale. L'unità di misura della resistività elettrica nel SI è $ohm \cdot m$ ($\Omega \cdot \mathrm{m}$); *ohm* è l'unità di misura della resistenza elettrica. La resistività dei buoni conduttori di elettricità (argento, rame, alluminio) è dell'ordine di $0,01\ \mu\Omega \cdot \mathrm{m}$.
Un conduttore perfetto è un conduttore (ideale) con resistività elettrica uguale a zero. Quindi il campo elettrico all'interno di esso è nullo anche quando è attraversato da una corrente elettrica. Di conseguenza, all'interno di un conduttore perfetto non c'è carica elettrica [7]. L'eventuale carica elettrica presente in un conduttore perfetto è addensata in corrispondenza della superficie e si manifesta come se fosse una distribuzione superficiale di carica.

[7] In generale, la carica elettrica libera Q_Σ contenuta all'interno della superficie chiusa Σ è legata al *campo di spostamento elettrico* $\boldsymbol{D}$ attraverso la *legge di Gauss* (**Appendice** A1),

$$\oiint_\Sigma \boldsymbol{D} \cdot \hat{n} dS = Q_\Sigma .$$

In un conduttore ohmico si ha quasi sempre $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$, dove ε_0 è la costante dielettrica del vuoto. Di conseguenza, se il campo elettrico all'interno del conduttore è nullo, non c'è carica al suo interno.

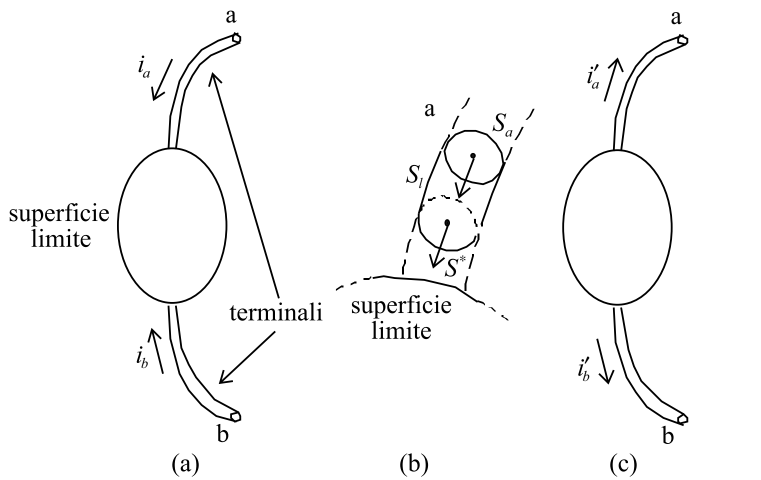


Fig. 1.11 *Schematizzazione di un generico componente con due terminali: (a), (c) possibili scelte per i versi di riferimenti per le intensità di corrente; (b) ingrandimento del terminale "a".*

Consideriamo una generica sezione trasversale del terminale "a", indichiamo la corrispondente superficie con S_a e orientiamola come indicato in Figura 1.11b, cioè con la normale che punta verso la superficie limite. Istante per istante c'è una carica elettrica netta che attraversa questa superficie. Sia i_{S_a} l'intensità della corrente elettrica che attraversa la superficie orientata S_a definita concordemente con la (8). (Attenzione: per definire l'intensità della corrente elettrica che attraversa una data superficie bisogna sempre orientare la superficie.)
L'intensità della corrente elettrica i_{S_a} è, in generale, una funzione del tempo, $i_{S_a} = i_{S_a}(t)$, che dipende sia dalla natura del componente in considerazione che dal resto del circuito in cui è inserito. E' possibile associare un'unica intensità di corrente al terminale "a" ?
La funzione $i_{S_a} = i_{S_a}(t)$ dipende, in generale, dalla particolare superficie S_a che si considera. Abbiamo già osservato nel **§ 1.4** che, in regime stazionario l'intensità della corrente elettrica che attraversa una generica sezione trasversale di un filo conduttore non dipende dalla particolare sezione scelta. Questa proprietà non vale quando le grandezze elettriche variano nel tempo a causa

della carica elettrica addensata in corrispondenza della superficie laterale del conduttore.
Si consideri un'altra sezione trasversale del terminale "a", sia S^* la corrispondente superficie, orientata come indicato in Figura 1.11b e sia i^* l'intensità della corrente che la attraversa. Dalla legge della conservazione della carica (equazione (24) o (25)) applicata alla regione di spazio delimitata dalle due superfici S_a e S^* e dalla superficie laterale S_l del tratto di terminale compreso tra S_a e S^*, abbiamo che

$$i_a - i^* = \frac{dQ^*}{dt}, \qquad (40)$$

dove Q^* è la carica elettrica addensata in corrispondenza della superficie laterale S_l. Questa carica nasce perché il terminale è immerso in un campo elettrico che, in generale, ha componente normale diversa da zero in corrispondenza della faccia esterna della superficie S_l[8]. Ricordiamoci che il campo elettrico all'interno del terminale è uguale a zero.
In condizioni di funzionamento variabili nel tempo è $dQ^*/dt \neq 0$, e di conseguenza $i_a(t) \neq i^*(t)$. Nel limite stazionario abbiamo $dQ^*/dt = 0$ e, quindi, $i_a = i^*$. Invece, quando le grandezze del circuito variano nel tempo, dQ^*/dt potrebbe diventare dello stesso ordine di grandezza di i_a e di i^*. È evidente, allora, che esistono condizioni di funzionamento intermedie tra il *regime stazionario* e quello "*velocemente variabile*", che denomineremo condizioni di funzionamento "*lentamente variabili*" o "*quasi-stazionarie*", in cui, pur essendo $dQ^*/dt \neq 0$, la derivata dQ^*/dt, considerata in valore assoluto, è trascurabile se confrontata con i valori assoluti delle due intensità di corrente i_a e i^*,

8 Se in corrispondenza di una superfice S è addensata carica libera sotto forma di una distribuzione di *carica superficiale* si ha (**Appendice** A1)

$$(\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_{12} = \sigma,$$

dove $\boldsymbol{D}_1$ e $\boldsymbol{D}_2$ sono i valori dei campi di spostamento elettrico sulle due faccie della superficie S, $\hat{\boldsymbol{n}}_{12}$ è il versore normale alla superficie orientato in modo tale che va dalla faccia "1" verso la faccia "2" e σ è la densità della distribuzione di carica superficiale. Per definizione $\sigma(P;t)\Delta S_P$ è la quantità di carica contenuta all'istante t all'interno della superficie elementare ΔS_P, appartenente alla superficie S, centrata nel punto P. Nel SI la densità di carica superficiale si misura un $coulomb/m^2$.

$$\left|\frac{dQ^*}{dt}\right| << |i_a| \cong |i^*|. \qquad (41)$$

In queste condizioni si ha

$$i^*(t) \cong i_a(t). \qquad (42)$$

La comprensione di quest'ultimo punto può essere agevolata se si suppone che la variabilità temporale delle grandezze elettriche del circuito sia di tipo *sinusoidale* (*armonico*), il che, come poi vedremo, non toglie molto alla generalità della trattazione. In questo caso si dice che il circuito opera in *regime sinusoidale*. Quando le grandezze elettriche del circuito sono costanti nel tempo, si dice che il circuito opera in *regime stazionario*.

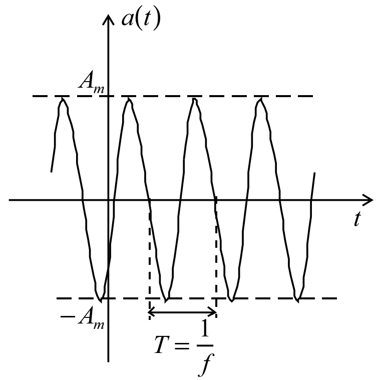


Fig. 1.12 *Andamento nel tempo di una funzione sinusoidale.*

In Figura 1.12 è riportato l'andamento temporale della funzione sinusoidale

$$a(t) = A_m\, cos(\omega t + \varphi_0) = A_m\, cos(2\pi f t + \varphi_0) \qquad (43)$$

Il parametro costante A_m è l'*ampiezza massima* dell'oscillazione sinusoidale; φ_0 è la *fase iniziale* della funzione sinusoidale (l'argomento di una funzione sinusoidale prende il nome di *fase*). Il parametro ω è una costante che prende il nome di *pulsazione* della funzione sinusoidale. Il parametro f, legato alla pulsazione attraverso la semplice relazione

$$f = \omega / 2\pi, \tag{44}$$

è la cosiddetta *frequenza* dell'oscillazione sinusoidale.
La funzione (42) è il più semplice esempio di funzione periodica. La fase si misura in *radianti* o in *gradi.* L'unità di misura della pulsazione nel SI è il *rad/s*, mentre l'unità di misura della frequenza è l'*hertz* (Hz); si ha che

$$\mathrm{Hz} = \mathrm{s}^{-1}. \tag{45}$$

Il periodo temporale dell'oscillazione è

$$T = 2\pi/\omega. \tag{46}$$

La frequenza dell'oscillazione sinusoidale rappresenta il numero di volte che un'onda dell'oscillazione sinusoidale si ripete nell'intervallo di tempo di un secondo (unità di tempo). Per $f \to 0$ (ovvero per $\omega \to 0$) la funzione $a(t)$ tende a una funzione costante, mentre al crescere di f (ovvero di ω) aumenta il numero di volte che l'onda si ripete nell'unità di tempo e quindi cresce la rapidità con cui la funzione varia nel tempo.
Poniamo, allora,

$$i_a(t) = I_m \, cos(\omega t + \alpha), \; i^*(t) = I_m^* \, cos(\omega t + \beta) \;\text{ e }\; Q^*(t) = Q_m \, cos(\omega t + \chi); \tag{47}$$

i parametri costanti I_m, I_m^* e Q_m sono le ampiezze massime delle funzioni sinusoidali e i parametri costanti α, β e χ sono le fasi iniziali. Dalla relazione (40) abbiamo, allora,

$$I_m \, cos(\omega t + \alpha) - I_m^* \, cos(\omega t + \beta) = -2\pi f Q_m \, sin(\omega t + \chi). \tag{48}$$

Il contributo dovuto alla variazione della carica è trascurabile se l'ampiezza massima del termine sinusoidale a secondo membro è molto più piccola delle ampiezze massime dei due termini sinusoidali che compaiono al primo membro. È evidente, allora, che, pur essendo $f \neq 0$, possiamo ritenere il

termine dQ^*/dt "trascurabile" se confrontato con le due intensità di corrente i_a e i^* se è verificata la condizione

$$f << f_{ct} \equiv \frac{I_m}{2\pi Q_m} \cong \frac{I_m^*}{2\pi Q_m}. \tag{49}$$

Questa trattazione è generale, perché possiamo sempre esprimere funzioni del tempo più complicate attraverso una somma discreta (*serie di Fourier*) o continua (*integrale di Fourier*) di funzioni sinusoidali con frequenze diverse. Diciamo, allora, che siamo in una condizione di funzionamento "lentamente variabile" o "quasi-stazionaria" quando le frequenze delle componenti armoniche più significative delle grandezze elettriche del circuito in esame verificano la condizione (49).
È di estrema importanza conoscere la frequenza caratteristica f_{ct}. Diciamo subito che non è possibile determinarla se non si specifica in dettaglio sia la natura fisica del componente, che il circuito in cui il componente in esame è inserito. Comunque, anche quando si conosce tutto ciò, il calcolo di f_{ct} è estremamente complesso. Esso richiede la conoscenza di teorie e strumenti molto avanzati, che sono tipicamente oggetto di corsi avanzati, tipicamente a livello delle lauree specialistiche. Tuttavia, si può mostrare che la frequenza caratteristica f_{ct} cresce man mano che si riduce la lunghezza e la sezione del filo conduttore con cui il terminale è realizzato (**Appendice** A2); quindi quanto più i terminali sono sottili e corti tanto più l'approssimazione che è alla base della relazione (49) è buona.
Come tra poco vedremo sono diverse le approssimazioni che sono alla base del modello circuitale, quella descritta dalla relazione (49) è solo una di esse. Nel **§ 1.10** formuleremo un criterio abbastanza grossolano, ma molto semplice da utilizzare, che consente di determinare la frequenza caratteristica al di sopra della quale il modello circuitale certamente non riesce più a descrivere, nemmeno qualitativamente, ciò che accade nel circuito fisico.
In conclusione, se le condizioni di funzionamento del circuito sono lentamente variabili possiamo associare in modo univoco, quindi senza alcuna ambiguità, un'<u>unica</u> intensità corrente a ciascun terminale del componente.
Si consideri l'intensità della corrente elettrica che attraversa il terminale "a" del componente in esame, Figura 1.11. Due sono le possibili orientazioni della generica superficie S_a: abbiamo indicato con i_a l'intensità della corrente elettrica ottenuta orientando S_a con la normale che punta verso la superficie

limite del componente circuitale, Figura 1.11a; se indichiamo con i'_a l'intensità della corrente elettrica ottenuta orientando S_a con la normale opposta, Figura 1.11c, si ha

$$i'_a(t) = -i_a(t). \tag{50}$$

Le frecce che accompagnano i simboli i_a e i'_a in Figura 1.11 stanno a indicare proprio i due possibili modi con cui è possibile scegliere il verso della normale alla superficie S_a. A esse diamo il nome di *versi di riferimento* per l'intensità della corrente. Quando il verso di riferimento per l'intensità della corrente è la freccia entrante nella (uscente dalla) superficie limite del componente allora la superficie attraverso cui si definisce l'intensità della corrente elettrica è orientata con la normale che punta verso la superficie limite (esce dalla superficie limite).
Le stesse considerazioni possiamo ripeterle per l'altro terminale e quindi arrivare a definire l'intensità della corrente elettrica che attraversa il terminale "b", Figura 1.11,

$$i_b(t) = -i'_b(t), \tag{51}$$

Il funzionamento di un componente circuitale con due terminali è, allora, caratterizzato da due correnti, una per ciascun terminale ? La risposta è no se siamo in condizioni di funzionamento lentamente variabili, e la ragione è la stessa per cui possiamo associare a ciascun terminale un'unica intensità della corrente elettrica.
Se si applica la legge della conservazione della carica (equazione (24) o (25)) alla superficie limite che racchiude il componente si ha

$$i_a(t) + i_b(t) = \frac{dQ_t}{dt}, \tag{52}$$

dove Q_t è la carica elettrica netta che istante per istante si trova all'interno del componente.
In condizioni stazionarie, allora, si ha

$$i_a = -i_b = i'_b, \tag{53}$$

quindi *l'intensità della corrente elettrica attraverso il terminale "a" con verso di riferimento entrante (uscente) nella superficie limite del componente è uguale all'intensità della corrente elettrica attraverso il terminale "b" con verso di riferimento uscente (entrante) dalla superficie limite.*

Pur essendo questa proprietà non più verificata in condizioni di funzionamento variabili nel tempo, valgono tutte le considerazioni che abbiamo sviluppato in precedenza, quando abbiamo affrontato il problema di definire univocamente, senza ambiguità, le intensità delle correnti elettriche che attraversano i terminali. Esistono condizioni di funzionamento "*lentamente variabili*", intermedie tra quella stazionaria e quelle "*velocemente variabili* ", in cui, pur essendo $dQ_t/dt \neq 0$, la derivata dQ_t/dt, considerata in valore assoluto, è trascurabile se confrontata con i valori assoluti delle intensità di corrente i_a e i'_b,

$$\left|\frac{dQ_t}{dt}\right| << |i_a| \cong |i_b|. \tag{54}$$

Questa è un'altra condizione che deve essere verificata affinché sia valido il modello circuitale. Se essa è verificata abbiamo

$$i'_b(t) \cong i_a(t). \tag{55}$$

Anche in questo caso è possibile introdurre una pulsazione caratteristica f_{cb}, dipendente dal particolare componente circuitale in esame e dal circuito in cui esso è inserito, tale che se le frequenze delle componenti armoniche più significative delle variabili circuitali in esame sono molto più piccole di essa, allora è verificata la condizione (55). Anche in questo caso valgono tutte le considerazioni fatte in precedenza sulla possibilità di stimare la frequenza f_{cb} e non le ripetiamo.

In conclusione, se il circuito funziona in condizioni lentamente variabili, a ciascun componente con due terminali possiamo associare, in modo univoco e senza alcuna ambiguità, un'unica intensità di corrente, una volta stabilito il verso di riferimento (che è arbitrario). Essa è, per definizione, l'*intensità della corrente elettrica che attraversa il componente*.

1.6.2 La tensione elettrica di un componente con due terminali

Nello regione di spazio circostante al componente c'è un campo elettrico e un campo magnetico, in generale, variabili nel tempo. Consideriamo una linea aperta orientata γ, esterna alla superficie limite del componente, che parte dal punto estremo A del terminale "a" e termina nel punto estremo B del terminale "b", Figura 1.13a. Sia v_γ la tensione elettrica lungo γ definita concordemente con l'espressione (29). Attenzione: per definire la tensione lungo una curva bisogna sempre orientare la curva.
La tensione v_γ non varia al variare del punto A lungo il terminale "a" e del punto B lungo il terminale "b", perché il campo elettrico nei terminali è nullo, essendo questi fatti di materiale conduttore perfetto.
Si consideri, ora, un'altra curva γ^* orientata, sempre esterna alla superficie limite del componente, che parte dal punto A e termina nel punto B, Figura 1.13a. Indichiamo con v_{γ^*} la tensione lungo γ^*.

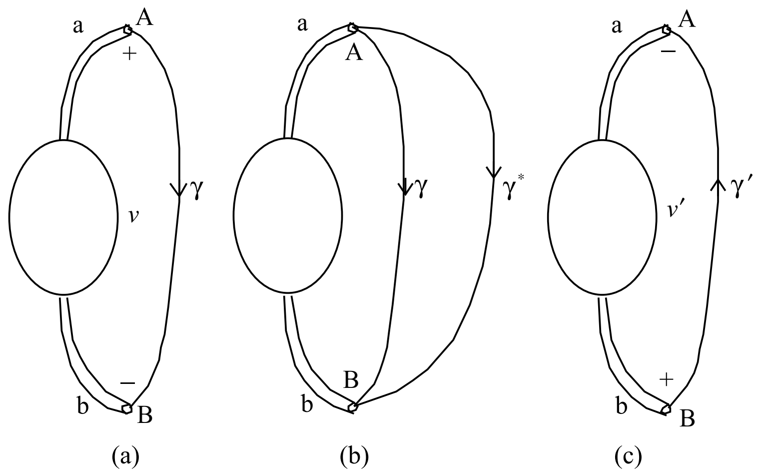


Fig. 1.13 *(a), (c) Componente con due terminali con versi di riferimento diversi per le tensioni; (b) due possibili cammini esterni alla superficie limite.*

Un componente con due terminali è, allora, caratterizzato da tante tensioni elettriche (una per ciascuna linea esterna al componente che collega i due terminali) tutte diverse tra di loro? Anche in questo caso la risposta è no se

siamo in condizioni di funzionamento lentamente variabili, e ora vedremo perché. Si consideri la linea chiusa Γ ottenuta dall'unione delle linee aperte γ e γ^*, e si orienti Γ concordemente con l'orientazione di γ; si ha che

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_\gamma \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} - \int_{\gamma^*} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = v_\gamma - v_{\gamma^*}. \tag{56}$$

Applicando, ora, la legge di Faraday-Neumann (equazione (32) o (37)) alla linea chiusa Γ si ottiene

$$v_\gamma(t) - v_{\gamma^*}(t) = -\frac{d\Phi_\Gamma}{dt}, \tag{57}$$

dove Φ_Γ è il flusso del campo magnetico concatenato con la curva Γ.
In condizioni stazionarie, essendo

$$v_\gamma - v_{\gamma^*} = 0, \tag{58}$$

abbiamo che *la tensione elettrica tra i due terminali del componente non dipende dalla particolare curva scelta.*

È evidente che questa proprietà non è più vera in condizioni di funzionamento variabili nel tempo. Anche qui valgono considerazioni analoghe a quelle che abbiamo sviluppato in precedenza, quando abbiamo definito l'intensità della corrente elettrica che attraversa il componente. In particolare, esistono condizioni di funzionamento lentamente variabili, intermedie tra quella stazionaria e quelle "velocemente variabili", in cui, pur essendo $d\Phi_\Gamma / dt \neq 0$, la derivata $d\Phi_\Gamma / dt$, considerata in valore assoluto, è trascurabile se confrontata con i valori assoluti delle tensioni v_γ e v_{γ^*},

$$\left|\frac{d\Phi_\Gamma}{dt}\right| << |v_\gamma| \cong |v_{\gamma^*}|. \tag{59}$$

Questa è un'altra condizione che deve essere verificata (si aggiunge alle (41) e (54)) affinché siano valide le approssimazioni alla base del modello circuitale. Quando è verificata la (59) abbiamo:

$$v_{\gamma^*}(t) \cong v_{\gamma}(t). \qquad (60)$$

Anche in questo caso possiamo introdurre una frequenza caratteristica f_{cv} così come abbiamo fatto in precedenza, quando abbiamo discusso la possibilità di associare, senza ambiguità, un'unica intensità di corrente al componente, e ripetere tutte le considerazioni che lì sono state sviluppate. Per il momento non diciamo di più e rimandiamo il lettore alle considerazioni che svolgeremo nel **§ 1.10**.

Osservazione

Per quanto possa essere lenta la variazione temporale del flusso del campo magnetico Φ_Γ, la condizione (59) può non essere verificata per *ogni* scelta possibile di γ^*. Se, ad esempio, si scegliesse il tratto γ^* in modo tale che una sua parte sia costituita da N spire perfettamente sovrapposte, la differenza tra le due tensioni non sarebbe più trascurabile per N sufficientemente grande. Per la validità del modello circuitale è sufficiente richiedere che la (59) sia verificata solo per curve con lunghezze caratteristiche dello stesso ordine di grandezza della dimensione caratteristica più grande del componente in esame. Ci riferiremo a cammini di questo tipo con l'espressione "cammini ragionevoli".

♦

Due sono le possibili orientazioni della linea γ: indichiamo con v la tensione quando il verso della curva γ orientata va dal terminale "a" al terminale "b", Figura 1.13a. Se indichiamo con v' la tensione ottenuta orientando γ nel verso opposto, Figura 1.13b, si ha

$$v'(t) = -v(t). \qquad (61)$$

In letteratura si usa orientare la curva lungo cui è definita la tensione del componente associando alla coppia di terminali i simboli "+" e "−", vedi Figura 1.13: la "freccia" che parte dal terminale contrassegnato con il simbolo "+" e punta verso il terminale contrassegnato con il simbolo "−" indica il verso della curva orientata lungo la quale è definita la tensione riportata tra i due simboli (v e v', rispettivamente, nelle Figure 1.13a e 1.13b). Questa "freccia" sta ad indicare il *verso di riferimento della tensione.*

In conclusione, se il circuito funziona in condizioni lentamente variabili, a ciascun componente con due terminali possiamo associare, in modo univoco e senza alcuna ambiguità, un'unica tensione elettrica, una volta stabilito il verso di riferimento (che è arbitrario). Essa è, per definizione, la *tensione elettrica del componente* .

1.6.3 Il bipolo elettrico

Dalle considerazioni svolte precedentemente, si ha che, ciascun componente con due terminali può essere rappresentato da un "componente ideale" anche esso con due terminali così definito:

- L'intensità della corrente elettrica che attraversa uno dei due terminali del componente ideale, ad esempio, con verso di riferimento entrante nella superficie limite, è istante per istante uguale all'intensità della corrente elettrica che attraversa l'altro terminale con verso di riferimento uscente dalla superficie limite.
- La tensione tra i due terminali del componente ideale è indipendente dal particolare cammino purché esso non fori nessuna superficie limite (nemmeno quelle degli altri bipoli).

Queste due proprietà del "componente ideale" sono definite con <u>precisione</u>, mentre nei componenti reali, che essi rappresentano, sono verificate <u>approssimativamente</u>: sono verificate esattamente solo nel regime stazionario. Per distinguerli da quelli reali, i componenti circuitali ideali con due terminali che verificano le due proprietà innanzi enunciate vengono chiamati *bipoli*.
Per definizione, il bipolo è caratterizzato da una sola intensità di corrente e da una sola tensione, indipendentemente dalla natura fisica del componente reale che esso rappresenta. Pertanto, un generico bipolo può essere rappresentato graficamente come indicato in Figura 1.14a. Le informazioni che il simbolo di un generico bipolo deve contenere riguardano i versi di riferimento dell'intensità della corrente e della tensione. L'intensità della corrente elettrica i è l'intensità della corrente elettrica che attraversa il terminale "a" del componente reale (schematizzato in Figura 1.14b) che il bipolo rappresenta, con il verso di riferimento entrante nella superficie limite. La tensione elettrica

v è la tensione tra i due terminali del componente reale che il bipolo rappresenta lungo una “curva ragionevole” esterna alla superficie limite, orientata concordemente con il verso che va dal terminale “a” al terminale “b”.

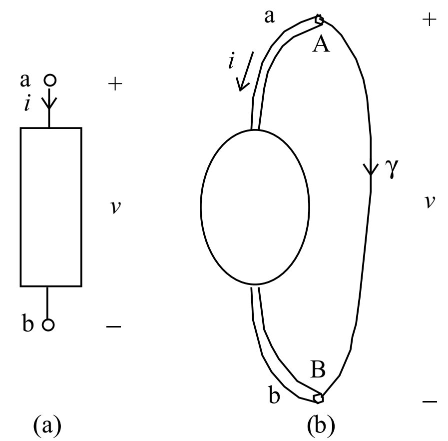


Fig. 1.14 *(a) Componente con due terminali; (b) simbolo del corrispondente bipolo.*

In generale, ci riferiremo a un componente ideale con N terminali come a un N*–polo*: un *tripolo* è un componente con tre terminali, un *quadrupolo* è un componente con quattro terminali, e così via. Studieremo questi elementi circuitali nel Capitolo 4.

Le due condizioni, appena enunciate, non bastano a definire completamente il concetto di bipolo. Affinché sia verificata pienamente la condizione *(a)*, enunciata nel **§ 1.2**, la “relazione” tra l’intensità della corrente i e la tensione v deve dipendere unicamente dalla costituzione fisica del componente (non deve dipendere, ad esempio, dal circuito in cui il componente è inserito). Questa è l’altra condizione che sta alla base del concetto di bipolo. La questione è estremamente complessa e non può essere esaminata in un corso introduttivo ai circuiti come questo. Ritorneremo brevemente su di essa quando illustreremo le relazioni caratteristiche dei componenti fondamentali di un circuito.

1.6.4 Convenzione dell’utilizzatore e del generatore

Per ciascun bipolo due sono le possibili scelte sia per il verso di riferimento dell’intensità della corrente che per quello della tensione. In totale, ne risultano quattro possibili combinazioni, così come è illustrato in Figura 1.15. Le quattro possibilità possono essere raggruppate a due a due.

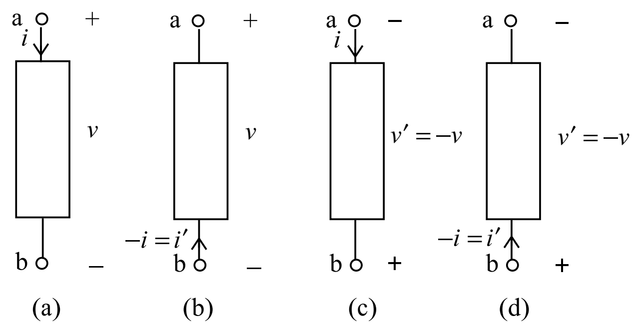


Fig. 1.15 *(a) e (d) Convenzione dell'utilizzatore (convenzione normale); (b) e (c) convenzione del generatore.*

Nella scelta di Figura 1.15a e in quella di Figura 1.15d la freccia che indica il verso di riferimento per l’intensità di corrente parte sempre dal terminale contrassegnato con il segno “$+$” e punta verso il terminale contrassegnato con il segno “$-$”. Questa è la cosiddetta *convenzione dell’utilizzatore* o *convenzione normale.*

Nella scelta di Figura 1.15b e in quella di Figura 1.15c la freccia che indica il verso di riferimento per l’intensità di corrente parte sempre dal terminale contrassegnato con il segno “$-$” e punta verso il terminale contrassegnato con il segno “$+$”. Questa è la cosiddetta *convenzione del generatore*.

Le espressioni “convenzione dell’utilizzatore” e “convenzione del generatore” indicano soltanto i modi in cui si è liberamente deciso di effettuare le due scelte (indipendenti tra loro) per i versi di riferimento dell’intensità della corrente e della tensione: esse - è bene notarlo esplicitamente - non hanno alcun significato che si riferisca alla natura fisica del bipolo considerato.

Esempio

In Figura 1.16 è rappresentato il circuito di bipoli corrispondente al circuito fisico rappresentato in Figura 1.10: è stata utilizzata la convenzione dell'utilizzatore per ciascun bipolo. Salvo avviso contrario, in queste lezioni sarà usata sempre questa convenzione.

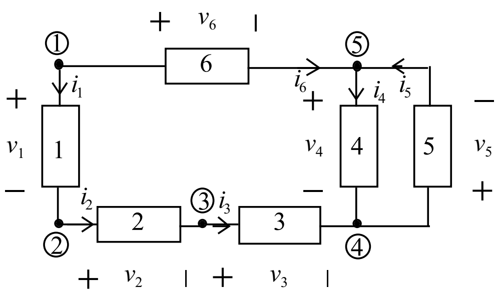


Fig. 1.16 *Circuito di bipoli corrispondente al circuito elettrico rappresentato in Figura 1.10.*

In questo tipo di rappresentazione vengono messe in evidenza le intensità di corrente e le tensioni di ciascun componente, i loro versi di riferimento e il modo in cui i componenti sono tra loro connessi. Come tra poco vedremo le leggi fondamentali dei circuiti richiedono unicamente queste informazioni. È bene notare che in questa rappresentazione non c'è nessuna informazione sulla forma, dimensione e costituzione fisica dei singoli componenti e né sulla distanza tra di essi e sulla loro effettiva posizione nello spazio.

1.7 Leggi di Kirchhoff

Le leggi di Kirchhoff descrivono i legami tra le grandezze dei diversi componenti del circuito.
La legge di Kirchhoff per le correnti descrive la relazione che c'è tra le intensità delle correnti che attraversano i bipoli collegati a uno stesso "nodo", mentre la legge di Kirchhoff per le tensioni descrive la relazione che c'è tra le tensioni dei bipoli che formano un "cammino chiuso". Per esemplificare i

concetti e le leggi che man mano introdurremo faremo sempre riferimento al circuito di Figura 1.10 e alla sua rappresentazione come circuito di bipoli riportata in Figura 1.16.
Nel limite lentamente variabile la legge della conservazione della carica per sistemi elettricamente aperti (l'equazione (24)) e la legge di Faraday-Neumann (l'equazione (32)) regolano l'interazione tra i diversi componenti di un circuito.
Non c'è bisogno di imporre l'equazione (24) per ogni superficie chiusa e l'equazione (32) per ogni curva chiusa. Come ora faremo vedere è sufficiente considerare solo un sotto insieme finito di esse per determinare le relazioni necessarie e sufficienti a descrivere le interazioni tra i componenti del circuito. Per individuare questo sotto insieme è necessario introdurre alcuni concetti preliminari.

Definizioni: nodo, percorso, maglia

- Un *nodo* è una qualsiasi giunzione di un circuito in cui i terminali (di bipoli diversi) sono collegati tra loro.
  Nell'esempio riportato in Figura 1.16, abbiamo 5 nodi, essi sono stati etichettati con i simboli ①, ②, ③, ④ e ⑤.
  La legge di Kirchhoff per le correnti si ottiene applicando la legge della conservazione della carica a superfici chiuse che contengono singoli nodi, nell'ipotesi che il circuito funzioni in condizioni stazionarie o lentamente variabili. Per il circuito riportato in Figura 1.16, abbiamo 5 superfici, Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 e Σ_5, Figura 1.17.
- Un *percorso* è un qualsiasi cammino ragionevole orientato [9] tra i due terminali di un bipolo, che non fori la superficie limite di nessun bipolo, lungo cui è definita la tensione elettrica del bipolo; il verso del cammino orientato è quello definito dal verso di riferimento della tensione.
  I "percorsi" sono tanti quanti sono i bipoli. In Figura 1.18 sono riportati i percorsi del circuito rappresentato in Figura 1.16.
- Una *maglia* è un cammino chiuso costituito da percorsi, in cui due e solo due percorsi incidono in ciascun nodo.
  Nell'esempio riportato in Figura 1.18 abbiamo le tre maglie M_1, M_2 e M_3 riportate in Figura 1.20.

[9] I cammini "ragionevoli" sono percorsi di lunghezze confrontabili con la dimensione più grande del componente.

La legge di Kirchhoff per le tensioni si ottiene applicando la legge di Faraday-Neumann alle singole maglie del circuito, nell'ipotesi che esso funzioni in condizioni stazionarie o lentamente variabili.

♦

1.7.1 Legge di Kirchhoff per le correnti

Si consideri un generico nodo di un circuito di bipoli, ad esempio, il nodo ⑤ del circuito di Figura 1.16. Si applichi la legge della conservazione della carica alla superficie chiusa Σ_5 che contiene solo questo nodo, Figura 1.17; la superficie chiusa Σ_5 è orientata con la normale che punta verso l'esterno.

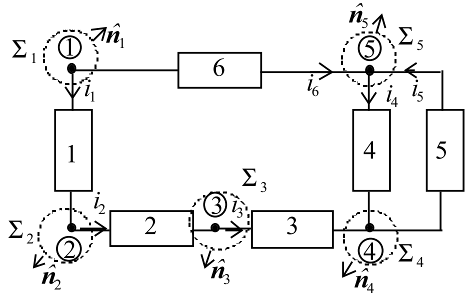


Fig. 1.17 *A ciascun nodo del circuito di Figura 1.10 (Figura 1.16) corrisponde una superficie chiusa.*

Facendo uso della definizione di intensità della corrente elettrica del bipolo, l'intensità della corrente elettrica i_{Σ_5} che attraversa la superficie chiusa orientata Σ_5 è esprimibile in funzione delle intensità di corrente dei bipoli collegati al nodo ⑤ attraverso la relazione

$$i_{\Sigma_5} = i_4 - i_5 - i_6 . \tag{62}$$

Nella somma a secondo membro di questa relazione l'intensità di corrente i_4 compare con il segno positivo perché il suo verso di riferimento è uscente dal nodo ⑤, mentre le intensità di corrente i_5 e i_6 compaiono con il segno negativo perché i loro versi di riferimento sono entranti nel nodo ⑤. Applicando la legge della conservazione della carica alla superficie Σ_5 (equazione (24)) si ha

$$i_4 - i_5 - i_6 = -\frac{dQ_5}{dt}, \tag{63}$$

dove Q_5 è la carica elettrica netta addensata sulla giunzione tra i terminali dei bipoli "4", "5" e "6" corrispondente al nodo ⑤. Ricordiamo che la giunzione è realizzata con lo stesso materiale conduttore con cui sono realizzati i terminali e, quindi, la carica nasce (sotto forma di distribuzione superficiale di carica) perché la giunzione è immersa nel campo elettrico che pervade l'intero circuito. In condizioni stazionarie abbiamo esattamente

$$i_4 - i_5 - i_6 = 0 . \tag{64}$$

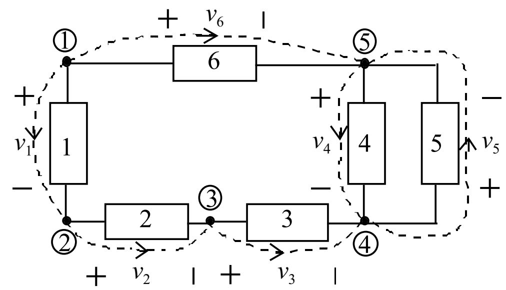


Fig. 1.18 "*Percorsi*" *del circuito elettrico rappresentato in Figura 1.10.*

È evidente che la (64) non è più vera in condizioni di funzionamento variabili nel tempo. Anche qui valgono tutte le considerazioni che abbiamo sviluppato in precedenza, quando abbiamo introdotto la corrente e la tensione del bipolo. In particolare, esistono condizioni di funzionamento lentamente variabili, intermedie tra il regime stazionario e il regime variabile "velocemente", in cui, pur essendo $dQ_5/dt \neq 0$, la derivata dQ_5/dt, considerata in valore assoluto, è trascurabile se confrontata con i valori assoluti di almeno due delle tre intensità di corrente i_4, i_5 e i_6,

$$\left|\frac{dQ_5}{dt}\right| << |i_4| \cong |i_5| \cong |i_6| . \tag{65}$$

Questa, insieme a quella che illustreremo tra poco, è una delle approssimazioni fondamentali che sono alla base del modello circuitale; essa si aggiunge a quelle descritte dalle relazioni (41), (54) e (59). Quando la (65) è verificata si ha

$$i_4 - i_5 - i_6 \cong 0. \qquad (66)$$

In generale, in condizioni di funzionamento <u>lentamente variabili</u> per ogni nodo di un circuito si ha

$$\sum_k (\pm) i_k \cong 0. \qquad (67)$$

Nella relazione (67) i_k è l'intensità di corrente del $k-$esimo bipolo collegato al nodo in considerazione. Essa deve essere sommata con il segno + se il verso di riferimento per i_k è uscente dal nodo, e con il segno − se il verso di riferimento per i_k è entrante nel nodo. Non compaiono nella sommatoria, ovviamente, le correnti dei bipoli che non sono collegati al nodo in esame.
Possiamo fare anche la scelta opposta, cioè sommare con il segno + le correnti che hanno il verso di riferimento entrante nel nodo e con il segno − le correnti che hanno il verso di riferimento uscente dal nodo. Ciò è conseguenza del fatto che l'equazione (67) è lineare e omogenea.

La legge espressa dalla (67) è una legge approssimata, che vale solo in condizioni di funzionamento lentamente variabili. <u>Essa è verificata esattamente solo in regime stazionario</u>. Nel modello circuitale si assume che essa sia esattamente verificata in qualsiasi condizioni di funzionamento. Se ne trae, allora, la *legge di Kirchhoff per le correnti*.

Legge di Kirchhoff per le correnti

La somma algebrica delle intensità delle correnti elettriche incidenti un nodo è istante per istante uguale a zero, cioè

$$\sum_k (\pm) i_k(t) = 0. \qquad (68)$$

Con l'espressione "somma algebrica" si intende quanto segue: le intensità di corrente che hanno versi di riferimento uscenti dal nodo in considerazione intervengono nella somma con lo stesso segno, mentre le intensità di corrente che hanno versi di riferimento entranti intervengono con il segno contrario. Ad esempio, l'intensità di corrente i_k deve essere sommata con il segno + se il suo verso di riferimento è uscente dal nodo e con il segno − se è entrante nel nodo.
Possiamo fare anche la scelta opposta, cioè sommare con il segno + l'intensità di corrente che ha verso di riferimento entrante nel nodo e con il segno − l'intensità di corrente che ha verso di riferimento uscente dal nodo. Ciò è conseguenza del fatto che l'equazione (68) è lineare e omogenea.
Attenzione, per scrivere la legge di Kirchhoff per le correnti bisogna, innanzi tutto, assegnare i versi di riferimento per le intensità di corrente che, come sappiamo, sono arbitrari.

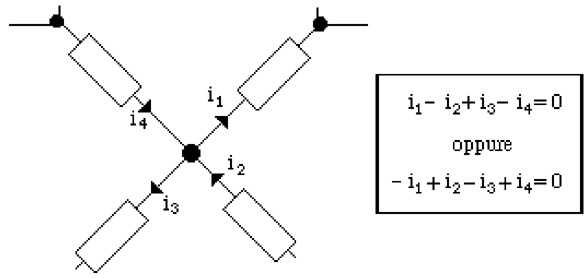


Fig. 1.19 *Applicazione della legge di Kirchhoff per le correnti.*

Esempio

Nella Figura 1.19 è riportato un esempio di applicazione della legge di Kirchhoff per le correnti al nodo di un circuito di bipoli.

1.7.2 Legge di Kirchhoff per le tensioni

Consideriamo un generica maglia di un circuito di bipoli, ad esempio, la maglia M_1 del circuito di Figura 1.16 riportata in Figura 1.20. Fissiamo arbitrariamente un verso di percorrenza per questa maglia, ad esempio, quello orario. Applichiamo al percorso chiuso orientato definito dalla maglia M_1 la legge di Faraday-Neumann (equazione (32)).

La tensione elettrica v_{M_1} lungo la maglia M_1 può essere espressa in funzione delle tensioni dei singoli bipoli che formano la maglia attraverso la relazione

$$v_{M_1} = -v_1 - v_2 - v_3 + v_4 + v_6 . \tag{69}$$

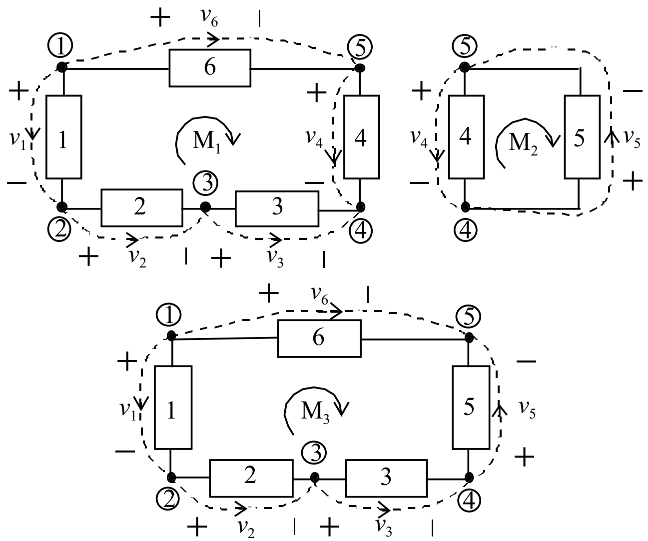


Fig. 1.20 *Le maglie del circuito di Figura 1.16.*

Le tensioni v_4 e v_6 compaiono con il segno positivo perché i versi delle curve orientate lungo le quali sono definite che, ricordiamo, vanno dal terminale contrassegnato con il segno "+" al terminale contrassegnato con il segno "–, sono concordi con il verso di percorrenza scelto per la maglia; invece, le tensioni v_1, v_2 e v_3 compaiono con il segno negativo perché i versi delle curve orientate lungo le quali esse sono definite sono discordi con il verso di percorrenza di M_1. Dall'equazione (32) si ha che

$$-v_1 - v_2 - v_3 + v_4 + v_6 = -\frac{d\Phi_{M_1}}{dt}, \tag{70}$$

dove Φ_{M_1} è il flusso del campo magnetico concatenato con la maglia M_1. Ricordiamo che oltre al campo elettrico c'è anche un campo magnetico che pervade l'intero circuito. Il campo magnetico varia nel tempo se le correnti del circuito variano nel tempo.
In condizioni stazionarie abbiamo esattamente

$$-v_1 - v_2 - v_3 + v_4 + v_6 = 0 . \tag{71}$$

Questa proprietà non è più vera in condizioni di funzionamento variabili nel tempo. Anche qui valgono di nuovo tutte le considerazioni che abbiamo sviluppato precedentemente: esistono condizioni di funzionamento lentamente variabili, intermedie tra quella stazionaria e quelle "velocemente" variabili, in cui, pur essendo $d\Phi_1 / dt \neq 0$, la derivata $d\Phi_1 / dt$, considerata in valore assoluto, è trascurabile se confrontata con i valori assoluti di almeno due delle cinque tensioni v_1, v_2, v_3, v_4 e v_6,

$$\left|\frac{d\Phi}{dt}\right| << |v_1| \approx |v_2| \approx |v_3| \approx |v_4| \approx |v_6|. \tag{72}$$

In queste condizioni abbiamo

$$-v_1 - v_2 - v_3 + v_4 + v_6 \cong 0 . \tag{73}$$

Questa è l'altra approssimazione fondamentale alla base del modello circuitale. In condizioni di funzionamento lentamente variabili per ogni maglia di un generico circuito si ha

$$\sum_k (\pm) v_k \cong 0 . \tag{74}$$

Nella (74) v_k è la tensione elettrica del $k-$esimo bipolo appartenente alla maglia in considerazione. Essa deve essere sommata con il segno + se il verso di riferimento per v_k, che per definizione è la freccia che va dal contrassegno "+" al contrassegno "–", è concorde con quello scelto per percorrere la maglia, e con il segno – se il verso di riferimento per v_k è discorde con quello scelto per percorrere la maglia. Possiamo fare anche la scelta opposta, cioè sommare con il segno + le tensioni che hanno il verso di riferimento discorde con il verso di

percorrenza della maglia e con il segno $-$ le tensioni che hanno il verso di riferimento concorde con la maglia. Ciò è conseguenza del fatto che l'equazione (74) è lineare e omogenea. Le tensioni dei bipoli che non appartengono alla maglia in considerazione non compaiono, ovviamente, nella sommatoria.
La legge espressa dalla (74) è una legge approssimata, così come lo è la (67). Entrambe valgono approssimativamente solo in condizioni di funzionamento lentamente variabili. <u>Esse valgono esattamente solo nel regime stazionario</u>. Nel modello circuitale, che stiamo costruendo, si assume che anche l'equazione (74) sia esattamente verificata in qualsiasi condizioni di funzionamento. Se ne trae, allora, la *legge di Kirchhoff per le tensioni*.

Legge di Kirchhoff per le tensioni

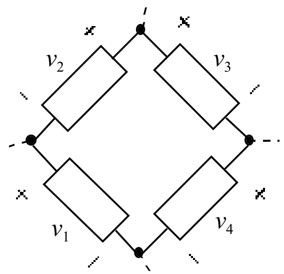
La somma algebrica delle tensioni dei bipoli che formano una maglia è istante per istante uguale a zero, cioè

$$\sum_k (\pm) v_k(t) = 0 . \qquad (75)$$

In questo caso con l'espressione "somma algebrica" si intende quanto segue: intervengono con lo stesso segno le tensioni i cui versi di riferimento sono concordi con il verso di percorrenza scelto, arbitrariamente, per la maglia, e con il segno contrario le tensioni con versi di riferimento opposti. Ad esempio, la tensione v_h deve essere sommata con il segno + se il suo verso di riferimento è concorde con il verso di percorrenza della maglia, e con il segno $-$ se è discorde. Possiamo fare anche la scelta opposta, cioè sommare con il segno $+$ le tensioni che hanno il verso di riferimento discorde con il verso di percorrenza della maglia e con il segno $-$ le tensioni che hanno il verso di riferimento concorde con la maglia. Ciò è conseguenza del fatto che l'equazione (61) è lineare e omogenea.
Attenzione, per scrivere la legge di Kirchhoff per le tensioni bisogna, innanzi tutto, assegnare i loro versi di riferimento che, come sappiamo, possono essere assegnati in maniera arbitraria.

Esempio

Nella Figura 1.21 è riportato un esempio di applicazione della legge di Kirchhoff per le tensioni alla maglia di un circuito di bipoli.



$$\boxed{\begin{array}{c} v_1 + v_2 - v_3 - v_4 = 0 \\ \text{ovvero} \\ -v_1 - v_2 + v_3 + v_4 = 0 \end{array}}$$

Fig. 1.21 *Applicazione della legge di Kirchhoff per le correnti.*

♦

A differenza delle relazioni (67) e (74), le leggi di Kirchhoff (68) e (75) sono definite con precisione, perché descrivono il funzionamento di un circuito idealizzato, il *circuito di bipoli*. Esse costituiscono le due (e sole) leggi fondamentali della Teoria dei Circuiti. Le relazioni (68) e (75) vanno anche sotto il nome di *prima legge di Kirchhoff* e *seconda legge di Kirchhoff*, rispettivamente.
Le leggi di Kirchhoff descrivono le interazioni tra i diversi componenti del circuito. Esse non dipendono né dalla natura, né dalle posizioni spaziali relative dei componenti, ma solo dal modo in cui essi sono connessi. Dunque la condizione *(b)* discussa nel **§ 1.2** è ampiamente verificata quando lo sono le leggi di Kirchhoff.

Esempio

Scriviamo le leggi di Kirchhoff per il circuito di bipoli illustrato in Figura 1.16. Ricordiamo che esso rappresenta il circuito fisico schematizzato in Figura 1.10. In questo circuito ci sono 6 bipoli, 5 nodi e tre maglie.
Applicando la legge di Kirchhoff per le correnti otteniamo le 5 equazioni

$$
\begin{array}{ll}
\text{nodo ①} & i_1 + i_6 = 0, \\
\text{nodo ②} & -i_1 + i_2 = 0, \\
\text{nodo ③} & -i_2 + i_3 = 0, \\
\text{nodo ④} & -i_3 - i_4 + i_5 = 0, \\
\text{nodo ⑤} & i_4 - i_5 - i_6 = 0.
\end{array}
\qquad (76)
$$

Le maglie del circuito sono (vedi Figura 1.20):

M_1 bipolo 1-bipolo 2-bipolo 3-bipolo 4-bipolo 6;
M_2 bipolo 4-bipolo 5;
M_3 bipolo 1-bipolo 2-bipolo 3-bipolo 5-bipolo 6.

Applicando la legge di Kirchhoff per le tensioni a queste maglie otteniamo il sistema di equazioni per le tensioni:

$$
\begin{array}{ll}
M_1: & v_1 + v_2 + v_3 - v_4 - v_6 = 0, \\
M_2: & v_4 + v_5 = 0, \\
M_3: & -v_1 - v_2 - v_3 - v_5 + v_6 = 0.
\end{array}
\qquad (77)
$$

Le equazioni dei sistemi (76) e (77) sono lineari e omogenee. Queste sono due proprietà generali delle equazioni di Kirchhoff.
Le equazioni di Kirchhoff di un circuito non sono linearmente indipendenti. Infatti, ad esempio, sommando membro a membro tutte le equazioni del sistema (76) si ottiene l'identità $0 = 0$; analogamente sommando membro a membro le equazioni del sistema (77) si ottiene di nuovo l'identità $0 = 0$. Una analisi per ispezione diretta mostra che, è possibile estrarre solo sei equazioni indipendenti, quattro dal sistema (76) e due dal sistema (77). Questa è una questione molto importante e verrà trattato ampiamente nel prossimo Capitolo.

Nel circuito in esame, in cui ci sono 6 bipoli, le grandezze elettriche fondamentali sono le sei intensità di corrente $i_1,\ldots,i_6$ e le sei tensioni $v_1,\ldots,v_6$, due grandezze per ciascun bipolo: esse sono le incognite del problema matematico definito dalle equazioni del circuito. Il sistema di equazioni (76)-(77) contiene solo sei equazioni indipendenti, quindi non è sufficiente a determinare la soluzione del circuito, perché le incognite sono 12. Di conseguenza, per ottenere un sistema chiuso e ben posto abbiamo bisogno di

altre sei equazioni tra loro indipendenti e indipendenti anche da quelle ottenute tramite le leggi di Kirchhoff.
Le equazioni che mancano sono le relazioni caratteristiche che descrivono il funzionamento dei singoli bipoli. Esse sono sei e sono linearmente indipendenti. Nel § **1.10** descriveremo le equazioni caratteristiche dei bipoli fondamentali.

♦

1.8 La potenza e l'energia elettrica

Si consideri un circuito di componenti con due terminali, ad esempio, quello riporta in Figura 1.10; in Figura 1.16 è riportata la sua rappresentazione come circuito di bipoli. Si consideri un generico componente del circuito. Lo spazio, sia interno che circostante al componente è sede di campi elettrici e magnetici, nonché di cariche e correnti elettriche.
Sulle cariche presenti al interno del componente agiscono le forze dovute al campo elettromagnetico prodotto dall'intero circuito, e queste forze compiono lavoro quando le cariche sono in moto. Pertanto, la restante parte del circuito deve produrre del lavoro contro queste forze di interazione elettromagnetica e, quindi, deve spendere dell'energia. Di conseguenza, c'è un <u>flusso di energia di natura elettromagnetica</u> tra la restante parte del circuito e il componente. Questa energia è nota come *energia elettrica.*
L'energia elettrica è solo una delle tante forme di energia, come l'energia meccanica, il calore, l'energia luminosa, ... L'energia elettrica è relativamente facile da produrre e trasportare in tutti i luoghi in cui è necessaria. Essa può essere facilmente convertita in energia meccanica, calore, luminosa, ... ed è fondamentale in tutti gli apparati industriali, negli apparati e sistemi per l'elaborazione e la trasmissioni delle informazioni, nei sistemi di trasporto, ...
Indichiamo con $w(t;t+T)$ l'energia elettrica <u>assorbita</u> dal bipolo nell'intervallo di tempo $(t,t+T)$. Per definizione, l'energia elettrica assorbita è effettivamente assorbita dal bipolo se è positiva, cioè è ceduta dal resto del circuito al bipolo; invece, se l'energia elettrica assorbita dal bipolo è negativa essa è effettivamente ceduta dal bipolo al circuito a cui è collegato e, quindi, è <u>effettivamente *erogata*</u> dal bipolo.
Nel sistema SI l'unità di misura dell'energia è denominata *joule* (simbolo J),

$$
[w] = \mathrm{J}. \qquad (78)
$$

Il rapporto

$$P(t;T) = \frac{w(t;t+T)}{T} \tag{79}$$

definisce la *potenza elettrica media* assorbita nell'intervallo $(t, t+T)$ dal bipolo. La potenza media assorbita dal bipolo coincide, dunque, con l'energia elettrica assorbita dal bipolo nell'unità di tempo.
In generale, la potenza elettrica media assorbita dipende sia dall'istante iniziale t dell'intervallo di osservazione sia dalla lunghezza T dell'intervallo di osservazione. Tuttavia, quasi sempre le cose stanno in modo tale che $P(t,T)$ tende a un valore ben definito, che in generale dipende solo da t, se la lunghezza dell'intervallo T viene fatto tendere a un valore "fisicamente infinitesimo" ΔT. In tali condizioni è possibile definire la *potenza elettrica istantanea* $p(t)$ assorbita dal bipolo al generico istante t come

$$p(t) = \lim_{T \to \Delta T} \frac{w(t;t+T)}{T} = \frac{w(t;t+\Delta T)}{\Delta T}. \tag{80}$$

Nel sistema SI l'unità di misura della potenza è denominata *watt* (simbolo W),

$$[p] = \mathrm{W}. \tag{81}$$

Nel SI l'unità di misura dell'energia e l'unità di misura della potenza sono legate attraverso la relazione

$$\mathrm{J} = \mathrm{W} \cdot \mathrm{s}.$$

Introduciamo la funzione $W = W(t)$ definita come l'energia elettrica assorbita dal componente nell'intervallo di tempo $(0,t)$. È evidente, allora, che l'energia assorbita nell'intervallo $(t, t+\Delta T)$ è esprimibile come

$$w(t;t+\Delta T) = W(t+\Delta T) - W(t) = \Delta W, \tag{82}$$

cioè è data dall'energia elettrica assorbita nell'intervallo di tempo $(0, t+\Delta T)$ meno l'energia assorbita nell'intervallo di tempo $(0,t)$.

La variazione di energia elettrica assorbita ΔW può essere determinata attraverso la derivata prima dell'energia $W(t)$,

$$\Delta W \cong \frac{dW}{dt} \Delta T. \tag{83}$$

Il segno "$\cong$", a rigore, può essere sostituito con quello di eguaglianza solo nel limite $\Delta T \to 0$. Comunque, se la funzione $W(t)$ varia lentamente sugli intervalli di tempo di ampiezza ΔT (e ciò è certamente vero per come è stata definito l'intervallo fisicamente infinitesimo ΔT), possiamo, senz'altro, sostituire nella (82) il segno "$\cong$" con il segno "$=$". Utilizzando le relazioni (81) e (82) la relazione (80) diventa

$$p(t) = \frac{dW}{dt}. \tag{84}$$

In conclusione, la potenza elettrica assorbita dal componente al generico istante t è uguale alla derivata prima dell'energia elettrica assorbita dal componente circuitale nell'intervallo $(0,t)$. E' evidente allora che l'energia assorbita nell'intervallo di tempo infinitesimo $(t, t+\Delta t)$, ΔW, può essere espressa come $\Delta W = p(t)\Delta t$. È evidente, allora, che l'energia elettrica assorbita dal bipolo in un generico intervallo di tempo (t_1, t_2) può essere espressa come

$$w(t_1;t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt. \tag{85}$$

E' possibile, anche, definire l'energia erogata dal componente $\hat{w}(t;t+T)$ come

$$\hat{w}(t;t+T) = -w(t;t+T), \tag{86}$$

e la potenza elettrica istantanea erogata $\hat{p}(t)$ come

$$\hat{p}(t) = -p(t). \tag{87}$$

Osservazione

Come già sapete dal corso di Fisica, nelle regioni nelle quali sono presenti campi elettrici e/o campi magnetici è immagazzinata energia. L'energia immagazzinata associata al campo elettrico è in parte energia interna del campo elettrico e in parte energia interna dell'eventuale materiale dielettrico presente nella regione. Analogamente, l'energia immagazzinata associata al campo magnetico è in parte energia interna del campo magnetico e in parte energia interna dell'eventuale materiale magnetico presente nella regione. Inoltre, il campo elettrico compie lavoro sulle cariche elettriche in moto presenti al interno del componente. Questo lavoro, con il segno cambiato, è uguale alla somma del lavoro del campo elettromotore [10] nella regione in cui sono presenti "sorgenti" di elettricità e del calore prodotto per effetto Joule nei conduttori.

Nella regione sia interna che circostante a ciascun componente abbiamo, nel generico istante t:

1) un'energia immagazzinata associata al campo elettrico, che indichiamo con $W_e(t)$;
2) un'energia immagazzinata associata al campo magnetico che indichiamo con $W_m(t)$;
3) il lavoro compiuto dal campo elettrico sulle cariche in moto all'interno del componente.

Indichiamo con $\mathrm{P_e}(t)$ è il lavoro per unità di tempo compiuto dal campo elettrico sulle cariche in moto all'interno del bipolo. Per la conservazione dell'energia abbiamo che:

l'energia elettrica ΔW assorbita dal componente in un intervallo di tempo infinitesimo Δt è uguale alla somma: 1) della variazione dell'energia immagazzinata associata al campo elettrico $\Delta W_e(t)$; 2) della variazione dell'energia immagazzinata associata al campo magnetico $\Delta W_m(t)$; 3) del

[10] Nelle sorgenti di elettricità (pile, accumulatori, dinamo, alternatori, ... - i cosiddetti *generatori*, vedi § 1.10.2) un *campo elettromotore*, di natura diversa dal campo elettrico macroscopico, agisce sulle cariche. Esso non è conservativo ed è, quindi, in grado di compiere un lavoro netto diverso da zero.

lavoro compiuto dal campo elettrico sulle cariche in moto all'interno del componente $\mathrm{P_e}\Delta t$.

L'energia assorbita dal bipolo nell'intervallo $(0,t)$ è data da

$$W(t) = W_e(t) + W_m(t) + \int_0^t \mathrm{P_e}\,dt\,. \tag{88}$$

E' evidente, allora, che

$$p(t) = \frac{d}{dt}\left[W_e(t) + W_m(t)\right] + \mathrm{P_e}(t)\,. \tag{89}$$

Dunque la potenza elettrica istantanea assorbita dal bipolo è uguale alla somma della derivata rispetto al tempo dell'energia immagazzinata nel bipolo, associata sia al campo elettrico che al campo magnetico, e del lavoro per unità di tempo compiuto dal campo elettrico sulle cariche in moto nel bipolo stesso.

♦

È un risultato fondamentale dell'elettromagnetismo che in condizioni lentamente variabili la potenza elettrica istantanea assorbita da un componente con due terminali è approssimativamente uguale al prodotto della tensione del componente per l'intensità della corrente elettrica che attraversa il componente, avendo scelto i versi di riferimento della tensione e dell'intensità della corrente in accordo con la *convenzione dell'utilizzatore* (Figura 1.15a o 1.15d),

$$p(t) \cong v(t)i(t) \;\; \text{o} \;\; p(t) \cong v'(t)i'(t)\,. \tag{88}$$

La dimostrazione di questa relazione (88) richiede strumenti e teorie che sono l'oggetto di corsi avanzati per le lauree specialistiche. Comunque, chi volesse approfondire questa questione troverà degli spunti nell'**Appendice** A2. Noi, nel prossimo paragrafo, ci limiteremo solo a verificarla per alcuni bipoli per i quali già conosciamo le proprietà energetiche dal corso di Fisica.
La legge espressa dalla relazione (88) è una legge approssimata, così come sono approssimate le leggi di Kirchhoff. Essa è verificata esattamente solo in regime stazionario. Nel modello circuitale, in cui al posto dei componenti reali abbiamo i bipoli, si assume che essa sia esattamente verificata in qualsiasi

condizioni di funzionamento. Se ne trae, allora, che la potenza elettrica assorbita da un bipolo è data dall'espressione

$$p(t) = v(t)i(t) = v'(t)i'(t) \tag{89}$$

dove i versi di riferimento della tensione e dell'intensità di corrente sono scelti in accordo con la convenzione dell'utilizzatore (Figura 1.15a o 1.15d).
Nel SI l'unità di misura della potenza è legata a quelle dell'intensità di corrente e della tensione dalla relazione

$$\mathrm{W} = \mathrm{V} \cdot \mathrm{A}.$$

Invece l'espressione della potenza erogata dal bipolo $\hat{p}(t)$ è

$$\hat{p}(t) = v'(t)i(t) = v(t)i'(t), \tag{90}$$

dove, ora, i versi di riferimento della tensione e della corrente sono stati scelti in accordo alla convenzione del generatore (Figura 1.15b e 1.15c).
Nel Capitolo 3 dimostreremo che le potenze elettriche assorbite dai bipoli di un circuito si conservano.

1.9 Bipoli passivi e bipoli attivi

Per introdurre due concetti che sono alla base della classificazione dei bipoli, c'è bisogno di stabilire un'altra convenzione. Con l'espressione "potenza assorbita" (energia assorbita) si intende il prodotto tra la tensione e l'intensità di corrente del bipolo scelte con la convenzione dell'utilizzatore, mentre con l'espressione "potenza erogata" (energia erogata) si intende il prodotto tra la tensione e l'intensità di corrente scelte con la convenzione del generatore. Queste potenze, a seconda del bipolo e della dinamica del circuito, possono essere, in generale, positive in alcuni istanti e negative in altri. Invece con l'espressione "il bipolo assorbe energia elettrica" (potenza elettrica) si deve intendere che si stanno considerando condizioni di funzionamento ben precise, quelle in cui l'energia assorbita (la potenza assorbita) è positiva e con l'espressione "il bipolo eroga energia elettrica" (potenza elettrica) si deve

intendere che si stanno considerando altre condizioni di funzionamento ben precise, quelle in cui l'energia erogata (la potenza erogata) è positiva.

Un bipolo può erogare energia elettrica in alcuni intervalli di tempo e assorbirla in altri. Ci sono bipoli che non possono mai erogare più energia elettrica di quella assorbita in precedenza e bipoli che, invece, possono erogare più energia elettrica di quella assorbita.
I bipoli (così come tutti gli altri componenti circuitali) vengono classificati in due tipi: *bipoli attivi* e *bipoli passivi*, a seconda se possono erogare più energia elettrica di quella assorbita in precedenza o possono erogare una quantità limitata di energia elettrica che non può superare mai quella assorbita in precedenza.

Definizione: bipoli passivi e bipoli attivi

Un bipolo si dice *passivo* se, per ogni condizione di funzionamento, non può erogare più energia elettrica di quanto ne abbia effettivamente assorbita in precedenza.
Se esiste almeno una condizione di funzionamento in cui il bipolo può erogare più energia elettrica di quanto ne abbia assorbita effettivamente in precedenza, allora il bipolo si dice che è *attivo*.

♦

Applicheremo questi concetti ai bipoli fondamentali che descriveremo nel prossimo Capitolo.

1.10 I bipoli fondamentali

Spesso nel linguaggio tecnico si fa uso dello stesso termine per indicare sia il componente che concretamente realizza una certa relazione caratteristica, sia il componente "ideale" che ritroviamo negli schemi circuitali. Naturalmente, mentre nel primo caso, la relazione caratteristica è da intendersi come approssimazione che descrive in maniera soddisfacente il comportamento del componente in certe condizioni di funzionamento, nel secondo caso essa è la legge esatta che descrive il comportamento di un componente ideale opportunamente estrapolato da quello reale. Anche se questa ambiguità di linguaggio non può comportare confusione, in quanto sono sempre ben chiari i limiti del modello entro cui si intende operare, è importante mentre si sta costruendo una teoria operare la distinzione tra il componente fisico e quello ideale che lo rappresenta nel modello che si sta costruendo. Per questa ragione useremo da ora in poi per indicare il componente ideale il termine *elemento circuitale.*

L'elemento circuitale è solo un modello e ogni modello costituisce una approssimazione. A seconda dell'applicazione, lo stesso componente può essere rappresentato da diversi elementi circuitali. Il modello di un componente può essere, in generale, anche un oggetto complesso costituito da più elementi circuitali. D'altronde, uno stesso elemento circuitale può rappresentare il funzionamento di componenti molto diversi tra loro.

Gli elementi circuitali a due terminali, cioè i bipoli, rivestono un ruolo fondamentale nella teoria dei circuiti. In questo paragrafo descriveremo i bipoli fondamentali e ne descriveremo le proprietà.

Una prima classificazione dei bipoli fondamentali li distingue in *lineari* e *non lineari.*

Un bipolo si dice lineare se la relazione tra l'intensità di corrente del bipolo e la tensione del bipolo è lineare; il bipolo si dice non lineare se la relazione tra l'intensità di corrente del bipolo e la tensione del bipolo è non lineare.

Una seconda classificazione dei bipoli, che è conveniente introdurre, è quella che li distingue in bipoli *adinamici* e bipoli *dinamici*.

I primi sono bipoli caratterizzati da un legame tra la tensione e l'intensità di corrente descrivibile attraverso relazioni *algebriche.* E' molto comodo descrivere queste relazioni attraverso le curve che esse definiscono sul piano tensione-corrente. A queste curve si dà il nome di *curve caratteristiche*.

I bipoli dinamici sono, invece, caratterizzati da un legame tra tensione e corrente più complesso nel quale è presente, ad esempio, la derivata di una delle due grandezze elettriche. Questi bipoli, quando presenti, introducono equazioni differenziali ordinarie nelle equazioni circuitali, ampliando notevolmente la complessità del comportamento dei circuiti elettrici.

1.10.1 Resistore lineare

Il *resistore lineare* è un bipolo adinamico il cui funzionamento è descritto dall'equazione caratteristica

$$v = Ri, \tag{93}$$

dove R è un coefficiente costante che prende il nome di *resistenza elettrica* del resistore; i versi di riferimento dall'intensità di corrente e della tensione sono stati scelti in accordo con la convenzione dell'utilizzatore. In Figura 1.22a è riportato il simbolo del bipolo resistore lineare.

Nel sistema SI l'unità di misura della resistenza elettrica è denominata *ohm* (simbolo Ω),

$$[R] = \Omega. \tag{94}$$

Si ha

$$\Omega = \mathrm{V} \cdot \mathrm{A}^{-1}. \tag{95}$$

Il valore della resistenza è indipendente dal valore dell'intensità di corrente e della tensione; essa dipende solo dalla costituzione fisica del componente che esso descrive, ad esempio, dalla resistività del materiale e dalle dimensioni del conduttore se si tratta di un resistore inteso come dispositivo fisico.

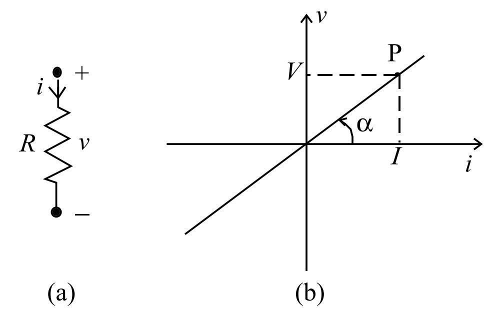


Fig. 1.22 *(a) simbolo del resistore lineare e (b) relativa curva caratteristica per* $R > 0$.

Il modo più semplice per descrivere la relazione caratteristica di un resistore consiste nel rappresentarla graficamente. Consideriamo un sistema di assi cartesiani rettangolari nel piano e riportiamo, ad esempio, sull'asse delle ascisse i valori dell'intensità di corrente e sull'asse delle ordinate i valori della tensione. Ogni coppia di valori intensità di corrente-tensione (I, V) che verifica l'equazione caratteristica rappresenta una possibile condizione di funzionamento

del resistore. Alla coppia ordinata (I,V) corrisponde un ben determinato punto del piano (i,v), che indicheremo con la lettera P e denomineremo *punto di funzionamento del resistore*, Figura 1.22b. L'insieme di tutti i possibili punti di funzionamento definiscono una curva nel piano (i,v). Essa prende il nome di *curva caratteristica* del resistore.
La relazione (93) è una relazione algebrica lineare [11]. (Essa non sarebbe lineare se vi fosse anche un termine additivo costante.) In conseguenza di ciò la *curva caratteristica del resistore* è una retta passante per l'origine. In Figura 1.22b è rappresentata la curva caratteristica di un resistore con resistenza positiva. La tangente dell'angolo che questa retta forma con l'asse delle ascisse è uguale alla resistenza elettrica R, $R = tg\alpha \cdot 1\,\Omega$.
Per $R \to 0$ (*corto circuito*) la curva caratteristica del resistore tende a coincidere con l'asse delle ascisse, mentre per $R \to \infty$ (*circuito aperto*) la curva caratteristica tende a coincidere con l'asse delle ordinate.
Questo modo di rappresentare la relazione caratteristica, consente di descrivere nel modo più semplice possibile il funzionamento di quei bipoli adinamici per i quali non è possibile esprimere analiticamente la relazione caratteristica, come, ad esempio, per i resistori non lineari. La curva caratteristica di un generico resistore, anche non lineare, può essere tracciata, a partire da misure, tramite un apposito strumento, detto "*tracer*".

Il resistore lineare può essere anche caratterizzato attraverso la conduttanza G definita come

$$G = \frac{1}{R}. \tag{96}$$

In termini di conduttanza la relazione caratteristica del resistore lineare è

$$i = Gv. \tag{97}$$

11 Una relazione $y = f(x)$ si dice lineare se, posto $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ e $x_3 = a_1x_1 + a_2x_2$, si ha $y_3 = a_1y_1 + a_2y_2$ comunqe si scelgano le variabili x_1 e x_2 e le costanti a_1 e a_2. La relazione $y = Kx$ è una relazione algebrica lineare se K è una costante, mentre, ad esempio, le relazioni $y = Kx + h$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = e^x$, $y = ln\,x$, $y = sin\,x$ non sono lineari.

Nel sistema SI l'unità di misura della conduttanza elettrica è denominata *siemens* (simbolo S),

$$[G] = \mathrm{S}\ . \tag{98}$$

Si ha

$$\mathrm{S} = \Omega^{-1}\ . \tag{99}$$

La resistenza elettrica R, in generale, può essere variabile nel tempo; quando R è costante nel tempo il resistore si dice che è tempo invariante.
Il resistore lineare è un bipolo adinamico controllato sia in tensione che in corrente, cioè per ogni valore di tensione c'è un solo valore di intensità di corrente che verifica l'equazione caratteristica, e viceversa. Inoltre, il resistore lineare è un bipolo simmetrico perché la sua curva caratteristica è simmetrica rispetto all'origine del piano (i,v): se si scambiano i terminali di un resistore lineare il funzionamento del circuito in cui esso è inserito non cambia.

Osservazioni

Il dispositivo fisico "resistore", impiegato in tutti i circuiti e che può essere acquistato in qualsiasi negozio di elettronica, è un componente a due terminali costituito da un materiale conduttore lineare di tipo ohmico [12] di resistività elevata se confrontata con quella dei due fili con i quali sono realizzati i terminali. Quando nel conduttore è presente un campo elettrico nasce una corrente elettrica . In condizioni di funzionamento lentamente variabili l'intensità della corrente elettrica che attraversa il conduttore è direttamente proporzionale alla tensione tra gli estremi del conduttore (**Appendice** A2).
Per realizzare il dispositivo fisico "resistore" basta un filo di materiale conduttore di lunghezza finita. Si consideri, per semplicità, un filo conduttore omogeneo a sezione trasversale uniforme. Come già sapete dal Corso di Fisica, in questo caso l'espressione della resistenza elettrica è data da

12 Un conduttore è lineare di tipo ohmico se la relazione tra il campo di densità di corrente elettrica e il campo elettrico è $\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E}$; σ è la *conducibilità elettrica* del materiale. Essa è legata alla resistività elettrica attraverso la relazione $\eta = 1/\sigma$.

$$R = \eta \frac{l}{A}, \qquad (100)$$

dove A è l'area della sezione trasversale del filo e l è la sua lunghezza. La resistenza elettrica di un filo cresce al crescere della lunghezza e diminuisce al crescere della sezione. La resistenza di un resistore è positiva perché la resistività è positiva.

La relazione caratteristica (93) riferita al dispositivo fisico "resistore" non è altro che la *legge di Ohm*.

La legge espressa dalla (93) è approssimata e vale solo in condizioni di funzionamento lentamente variabili: essa è verificata esattamente solo in regime stazionario (**Appendice** A2). Nel modello circuitale si assume che sia esattamente verificata in qualsiasi condizioni di funzionamento.

Al crescere della velocità con cui variano le grandezze elettriche accade che: *(i)* al termine Ri bisogna aggiunge un termine che dipende dalla storia dell'intensità di corrente e della tensione; *(ii)* la relazione tra la tensione e l'intensità di corrente dipende anche da ciò che accade nel circuito in cui il resistore è inserito a causa degli accoppiamenti di natura elettromagnetica con i componenti adiacenti. Considerazioni analoghe valgono anche per gli altri bipoli adinamici che descriveremo tra poco.

Il bipolo resistore lineare è un modello attraverso cui è possibile descrivere, oltre al funzionamento del resistore, inteso come dispositivo fisico, anche il funzionamento di tanti altri "oggetti", di notevole interesse nelle applicazioni, che si basano su meccanismi fisici completamente diversi (lampadine a incandescenza, le resistenze di una stufa elettrica, di un forno o dello scaldabagno, ...).

Come vedremo nel Capitolo 3, un resistore lineare può anche rappresentare il comportamento equivalente di un bipolo composto da tanti resistori collegati tra loro in maniera del tutto arbitraria.

Una linea di trasmissione bifilare ideale e semi-infinita si comporta ai due terminali come se fosse un resistore lineare con resistenza positiva. In questo caso, però, l'energia assorbita dalla linea, che è sempre positiva, non è trasformata in calore, ma è immagazzinata sotto forma di energia del campo.

Il resistore lineare è utilizzato anche nei modelli che descrivono il funzionamento, per piccole variazioni della tensione e dell'intensità della corrente elettrica, di componenti elettronici estremamente complessi, come, ad esempio, diodi, transistor (*modelli per piccoli segnali*).

La resistenza elettrica dei modelli per piccoli segnali di componenti elettronici attivi può essere negativa. In queste situazioni la potenza elettrica assorbita è sempre negativa. Ciò significa che in qualsiasi condizione di funzionamento il bipolo eroga energia elettrica al circuito a cui esso è collegato. Questo è un esempio di resistore lineare attivo. In questo caso la curva caratteristica del resistore, con la convenzione dell'utilizzatore, passa per il secondo e quarto quadrante del piano (i, v).

♦

L'espressione della potenza elettrica assorbita dal resistore lineare è

$$p = Ri^2, \qquad (101)$$

ovvero è

$$p = \frac{v^2}{R}. \qquad (102)$$

Il resistore, inteso come componente ideale, non è in grado di immagazzinare né energia associata al campo elettrico né energia associata al campo magnetico. L'energia assorbita per unità di tempo dal resistore è tutta spesa nel lavoro per unità di tempo che il campo elettrico compie sulle cariche elettriche in moto al suo interno, vedi **§ 1.8**,

$$\mathrm{P}_e = Ri^2.$$

L'espressione dell'energia elettrica assorbita dal resistore nell'intervallo di tempo (t_1, t_2) è data da

$$w(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} Ri^2(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{v^2(t)}{R}dt. \qquad (103)$$

L'energia assorbita dal resistore in un assegnato intervallo di tempo dipende dalla particolare forma d'onda dell'intensità della corrente elettrica (o della tensione) nell'intervallo in esame. In condizioni stazionarie, essendo

$$i(t) = I, \; v(t) = V, \qquad (104)$$

si ha

$$w(t_1, t_1 + T) = RI^2 T, \qquad (105)$$

ovvero

$$w(t_1, t_1 + T) = \frac{V^2}{R} T. \qquad (106)$$

Il segno della potenza assorbita da un resistore lineare dipende solo dal segno della resistenza elettrica. Se la resistenza è positiva la potenza elettrica assorbita dal resistore, in qualsiasi condizione di funzionamento, è positiva. In questo caso la curva caratteristica del resistore (definita in accordo alla convenzione dell'utilizzatore) passa per il primo e terzo quadrante del piano (i, v). Perciò, il resistore con resistenza positiva è un *bipolo passivo* perché assorbe sempre potenza elettrica, e quindi energia, dal circuito a cui è collegato.
Per valori positivi della resistenza elettrica il lavoro che il campo elettrico compie sulle cariche elettriche in moto è positivo. Esso è, come già sapete dal corso di Fisica, interamente trasformato in calore per effetto Joule. E' ben noto il fatto che un conduttore percorso da corrente si riscalda (si pensi alle lampade ad incandescenza, alle stufe, ecc.). Per questi resistori la relazione (100) esprime la cosiddetta *legge di Joule* in forma integrale: $Ri^2(t)\Delta t$ rappresenta la quantità di calore prodotta dal resistore nell'intervallo di tempo $(t, t+\Delta t)$ (infinitesimo fisico).
In generale, i bipoli adinamici passivi che trasformano l'energia elettrica assorbita in calore vengono detti *bipoli dissipativi*. Come poi vedremo, altri esempi di bipoli adinamici passivi e dissipativi sono il *diodo a giunzione pn* e il *diodo tunnel*.

Approfondimento

Il fatto che il funzionamento del dispositivo fisico "resistore", impiegato in qualsiasi circuito, sia descritto dalla relazione caratteristica (93) si basa su ipotesi ben precise, che per essere verificate richiedono delle condizioni abbastanza stringenti. Non stupisce, quindi, il fatto che il componente resistore "reale" si comporti come tale solo in un determinato campo dei parametri che caratterizzano le sue condizioni fisiche. Un parametro fisico che, per esempio,

condiziona il comportamento di un resistore è la temperatura. Infatti, la resistività η di un materiale è, in generale, dipendente dalla essa. In Figura 1.23 sono riportati andamenti tipici della resistività in funzione della temperatura per due diversi materiali; come si vede la resistività può sia aumentare che diminuire al crescere della temperatura. Anche per uno stesso materiale, i due comportamenti possono riscontrarsi per diversi intervalli di temperatura.

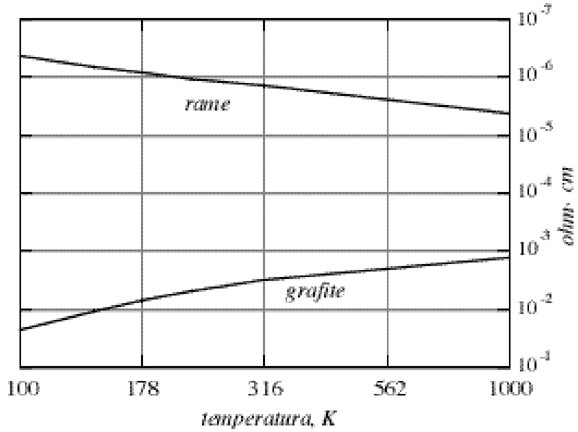


Fig. 1.23 *Resistività del rame e della grafite in funzione della temperatura.*

Il fatto che R dipenda dalla temperatura ha una conseguenza importante che vogliamo esaminare in maggiore dettaglio. Come sappiamo un resistore di resistenza R attraversato da una corrente elettrica i per un intervallo di tempo Δt assorbe un'energia elettrica pari a $Ri^2\Delta t$. Questa energia viene trasformata tutta in calore. In conseguenza di ciò la temperatura del resistore tende a crescere e quindi la sua resistenza a variare. Ne consegue, dunque, una indiretta dipendenza di R da i che modifica la caratteristica del bipolo stesso. In effetti, però, il resistore raggiunge rapidamente una temperatura di regime che si può facilmente determinare con un semplice bilancio energetico. La temperatura raggiunta sarà quella alla quale la potenza dissipata nel resistore è esattamente eguale alla quantità di calore che nell'unità di tempo il bipolo resistore trasferisce all'ambiente circostante, che a sua volta dipende dalla differenza di temperatura tra il resistore e l'ambiente circostante. Una volta che la temperatura si è stabilizzata, anche il valore di R si stabilizza, anche se su un nuovo valore diverso da quello iniziale in assenza di corrente elettrica. Ne

consegue che per ogni resistore accanto al valore della sua resistenza e della "precisione" con cui essa viene garantita, deve essere anche fornito il valore massimo della corrente - o della potenza Ri^2 - per la quale tali valori vengono assicurati.
I resistori vengono in generale classificati in base alla potenza che essi sono in grado di dissipare senza che il valore della resistenza valichi i limiti della precisione garantita, o, al limite che il resistore stesso si deteriori irreversibilmente. Naturalmente per consentire ad un resistore di dissipare una maggiore potenza, mantenendo la sua temperatura entro limiti accettabili, il metodo più semplice è quello di aumentare la superficie di scambio con l'ambiente circostante, di modo che aumenti la quantità di calore ceduta nell'unità di tempo. D'altra parte superfici più grandi comportano volumi maggiori e quindi, in generale, la dimensione del resistore è indice della sua capacità di dissipare potenza.
Un altro fattore che può influire sulle dimensioni di un resistore è la tensione di lavoro per cui esso è costruito. Questo parametro è particolarmente significativo per resistori progettati per elevate tensioni. Fino ad ora abbiamo implicitamente assunto il resistore immerso in un mezzo isolante di modo che il moto delle cariche fosse obbligato a svilupparsi esclusivamente attraverso il resistore stesso. In effetti qualsiasi mezzo isolante si comporta come tale solo se la forza dovuta al campo elettrico che agisce sulle cariche in esso presenti - si pensi alla sua struttura molecolare e atomica - non supera determinati limiti. Per valori di campo elettrico troppo elevati l'isolante perde le sue caratteristiche, si sviluppa una "scarica" al suo interno ed il passaggio di cariche non è più interdetto. Il campo di "breakdown" al di sopra del quale si sviluppa la scarica dipende in modo significativo dalle condizioni fisico - chimiche del mezzo (composizione, umidità, temperatura, etc.); per l'aria, ad esempio, in condizioni normali il campo di breakdown è di circa $25\ kV/cm$. Di conseguenza le dimensioni del resistore devono essere tali da garantire che, per i valori di tensione per cui esso è progettato, in nessun punto dell'isolante in cui è immerso può essere superato il campo di breakdown. Come si diceva questo fattore è particolarmente importante per i resistori per alte tensioni.
In generale tutte queste caratteristiche dipendono dal modo in cui il resistore è realizzato. Da questo punto di vista una classificazione a grandi linee può essere la seguente: resistori a filo avvolto, resistori a lamine, resistori a film sottile, resistori a strato e resistori massivi. Le caratteristiche specifiche di ognuna di queste classi dipendono, naturalmente, dalle diverse tecnologie impiegate per la

loro realizzazione e non saranno ulteriormente approfondite in questo articolo. Esistono numerosi manuali che affrontano in dettaglio questi argomenti. Un'altra classificazione utile è quella che vede i resistori distinti in due classi: resistori fissi e resistori variabili o potenziometri. Nella prima classe possiamo distinguerli in: resistori a bassa potenza - tipicamente da 0,05 a 2 W -, resistori ad alta potenza - tipicamente da 2 a 100 W, resistori per alte tensioni, resistori di alta resistenza, resistori a chip. Per alcune tipologie di resistori di potenza sufficientemente bassa, e quindi di ridotte dimensioni, è invalso l'uso di indicare il valore della resistenza e la relativa tolleranza mediante un codice a bande colorate la cui chiave di lettura è riportati in tutti i manuali. Nella seconda classe invece vanno inclusi tutti i resistori variabili che, a seconda del modo in cui la variabilità è ottenuta, si possono distinguere in resistori a contatto rotante, resistori a contatto strisciante e resistori a predisposizione iniziale.

♦

1.10.2 Generatori ideali

Il bipolo *generatore ideale di tensione* è un bipolo adinamico il cui funzionamento è descritto dall'equazione caratteristica

$$v = e(t), \tag{107}$$

dove e è una funzione assegnata, in generale variabile nel tempo, indipendente dall'intensità di corrente che attraversa il generatore.
Il simbolo di un generatore ideale di tensione è rappresentato in Figura 1.24a; il verso di riferimento per la tensione impressa e è quello che va dal contrassegno $+$ al contrassegno $-$ disegnati nel cerchio. Questi contrassegni ricordano quelli che ciascuno di noi avrà notato qualche volta sulle pile elettriche.
In Figura 1.24b è riportata la curva caratteristica del generatore ideale di tensione sul piano (i, v). Essa è una retta parallela all'asse delle ordinate i. Nel caso di tensione impressa variabile nel tempo la retta trasla parallelamente a se stessa secondo la legge oraria descritta dalla funzione $e(t)$.
Il generatore ideale di tensione è un bipolo adinamico <u>controllato solo in corrente</u>, cioè per ogni valore di intensità di corrente c'è un solo valore di tensione che verifica l'equazione caratteristica, mentre non è vero il viceversa.

A differenza della curva caratteristica del resistore lineare, la curva caratteristica del generatore di tensione ideale non è simmetrica: il funzionamento del circuito in cui esso è inserito può cambiare completamente se si invertono i terminali del generatore. Tutti hanno esperienza del fatto che quando si sbaglia a inserire le pile in un apparato invertendo i morsetti, ad esempio, in una radio portatile, esso non funziona.

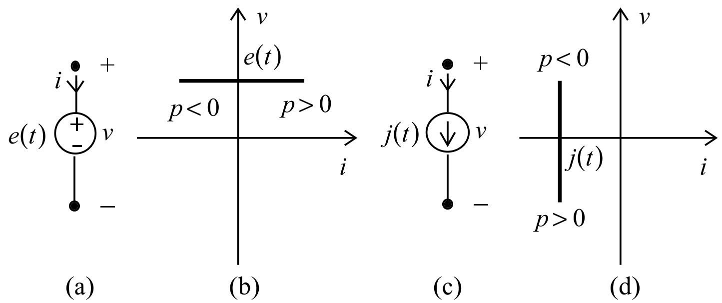


Fig. 1.24 *(a) simbolo del generatore indipendente di tensione e (b) relativa curva caratteristica; (c) simbolo del generatore ideale di corrente e (d) relativa curva caratteristica.*

Osservazioni

Il bipolo generatore ideale di tensione può descrivere il comportamento, in condizioni ideali, sia di un dispositivo o un apparato fisico che serve espressamente a fornire energia a un circuito, sia di una sorgente di segnale elettrico che contiene informazione.
Un generatore ideale di tensione costante è un generatore che imprime una tensione costante,

$$e(t) = E. \qquad (108)$$

Esso è il modello ideale di sorgenti stazionarie di energia elettrica, ad esempio, una pila, un accumulatore (quando, ovviamente, sono carichi), una dinamo.
Un generatore di tensione sinusoidale è un generatore che imprime una tensione sinusoidale a una pulsazione assegnata,

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \alpha); \qquad (109)$$

E_m è l'ampiezza massima della tensione impressa, ω è la pulsazione e α è la fase iniziale. Esso è il modello ideale di sorgenti sinusoidali di energia elettrica, come, ad esempio, un alternatore monofase. In questi casi la tensione impressa e è uguale alla *forza elettromotrice* [13] agente nel componente che il bipolo descrive. Essa rappresenta, come già sapete dal corso di Fisica, il lavoro fatto dal *campo elettromotore* presente all'interno del componente quando si sposti la carica unitaria positiva lungo il componente stesso nel verso che va dal contrassegno + a quello −.

La coppia di terminali di una presa (bipolare) di energia elettrica, sotto opportune condizioni, che in seguito preciseremo e discuteremo, si comporta come un bipolo generatore ideale di tensione (sinusoidale se si tratta di una presa inserita nella rete pubblica di distribuzione dell'energia elettrica). Le sorgenti stazionarie di energia elettrica possono essere realizzate anche attraverso circuiti elettronici estremamente complessi, i cosiddetti *alimentatori* in corrente continua. Essi, di solito, sono alimentati attraverso la rete pubblica di distribuzione dell'energia elettrica.
Esistono apparati estremamente complessi, detti *generatori di segnali*, attraverso i quali è possibile generare segnali di tensione di diverso tipo: forma d'onda sinusoidale, forma d'onda rettangolare, forma d'onda a dente di sega, etc. Essi, sotto opportune condizioni, si comportano come generatori ideali di tensione.
La forma d'onda di un generatore di segnale che rappresenta una sorgente di informazione è, in generale, estremamente complessa e non prevedibile in senso deterministico. Per questa ragione sorgenti di questo tipo vengono caratterizzate statisticamente.
Come vedremo in seguito, un generatore ideale di tensione può essere, anche, un pezzo di modelli equivalenti di bipoli estremamente complessi che non hanno né la "funzione" di fornire energia né quella di rappresentare sorgenti di informazione.

♦

[13] Il termine è infelice, non trattandosi di una forza, bensì di una grandezza avente le dimensioni di una tensione, che come sappiamo, è omogenea a un lavoro diviso per una carica.

La potenza assorbita da un generatore di tensione è data da

$$p = ei. \tag{110}$$

Anche in questo caso si ha che l'energia elettrica per unità di tempo assorbita dal bipolo è trasformata interamente nel lavoro per unità di tempo compiuto dal campo elettrico sulle cariche che si muovono al suo interno,

$$\mathrm{P}_e = ei. \tag{111}$$

Come il resistore, anche il generatore, inteso come componente ideale, non è in grado di immagazzinare né energia associata al campo elettrico né energia associata al campo magnetico.
L'energia elettrica assorbita dal generatore ideale di tensione nell'intervallo di tempo (t_1, t_2) è data da

$$w(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} e(t)i(t)dt. \tag{112}$$

Per un assegnato intervallo l'energia assorbita dal resistore dipende dalla particolare forma d'onda dell'intensità della corrente elettrica (tensione) nell'intervallo in esame. In condizioni stazionarie, essendo

$$e(t) = E,\ \ i(t) = I, \tag{113}$$

si ha

$$w(t_2, t_1) = EIT. \tag{114}$$

Siccome la curva caratteristica del generatore ideale di tensione si trova nel primo e nel quarto quadrante, o nel secondo e nel terzo quadrante, del piano (i, v) (Figura 1.24b) esistono condizioni di funzionamento in cui la potenza assorbita è positiva e condizioni di funzionamento in cui la potenza assorbita è negativa.
Nelle condizioni di funzionamento in cui la potenza assorbita è minore di zero il generatore effettivamente eroga potenza elettrica: la potenza elettrica in grado di erogare un generatore ideale di tensione cresce linearmente al crescere dell'intensità della corrente elettrica. Di conseguenza un generatore ideale di

tensione può erogare, senza alcun limite, energia elettrica al circuito a cui esso è collegato. Ciò significa che il *generatore ideale di tensione è un bipolo statico attivo*.

Il *generatore ideale di corrente* è un bipolo adinamico la cui intensità di corrente è nota e non dipende dalla tensione ai suoi terminali,

$$i = j(t). \tag{115}$$

Il verso di riferimento dell'intensità di corrente impressa j è quello concorde con quello della freccia disegnata nel cerchio che rappresenta il simbolo del generatore ideale di corrente, Figura 1.24c. In Figura 1.24d è riportata la curva caratteristica del generatore ideale di corrente sul piano (i, v). Essa è una retta parallela all'asse delle ordinate v.
Il generatore ideale di corrente è un bipolo adinamico <u>controllato solo in tensione</u>, cioè per ogni valore di tensione c'è un solo valore di intensità di corrente che verifica l'equazione caratteristica, mentre non è vero il viceversa.
Come per il generatore ideale di tensione, nella realtà non esiste il generatore ideale di corrente. Comunque, certe sorgenti (dinamo, alimentatori elettronici, ...) per certi intervalli di valori di corrente si avvicinano assai al comportamento del generatore ideale di corrente. Attraverso un generatore ideale di corrente, come poi vedremo, è possibile descrivere il comportamento equivalente di bipoli estremamente complessi.
La potenza assorbita da un generatore ideale di corrente è data da

$$p = vj. \tag{116}$$

Siccome la curva caratteristica del generatore ideale di corrente si trova nel primo e nel quarto quadrante, o nel secondo e nel terzo quadrante, del piano (i, v) esistono condizioni di funzionamento in cui il segno della potenza assorbita è positiva e condizioni di funzionamento in cui la potenza assorbita è negativa. Ciò significa che, come il generatore ideale di tensione, anche il generatore ideale di corrente è un bipolo attivo, cioè in grado di erogare effettivamente energia al circuito a cui è collegato, senza alcun limite.

Nella realtà fisica non esistono generatori ideali. Tuttavia, i generatori, intesi come dispositivi fisici, sono progettati in modo tale che, se operano in condizioni di funzionamento "nominali" (ad esempio, l'intensità di corrente, in valore assoluto, di un generatore di tensione non supera un valore fissato, caratteristico del generatore o la potenza effettivamente erogata non supera un valore fissato anche esso caratteristico del generatore) si comportano, con eccellente approssimazione, come generatori ideali.

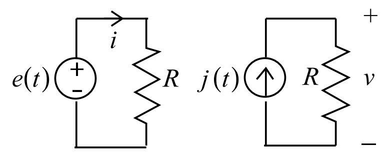
Approfondimento

Il meccanismo che è alla base di un generatore, inteso come dispositivo fisico, può essere molto diverso a seconda della sua specifica struttura.
In una pila o in un accumulatore esiste una campo elettromotore stazionario che agisce sulle cariche, di natura diversa dal campo elettrico macroscopico. Questo campo, che è di natura chimica, non è conservativo e, quindi, è in grado di compiere un lavoro netto positivo sulle cariche in moto che attraversano il generatore.
Il meccanismo fisico alla base del funzionamento di una dinamo o un alternatore è quello dell'induzione elettromagnetica, descritta dalla legge di Faraday-Neumann estesa alla situazione generale di conduttori in moto. Anche in questo caso è possibile schematizzare il funzionamento del generatore attraverso l'azione di un campo elettromotore, questa volta di natura elettrodinamica. Anche in questi apparati il campo elettromotore non è conservativo e, quindi, è in grado di compiere un lavoro netto positivo sulle cariche in moto che attraversano il generatore.
Un generatore di segnali o un alimentatore elettronico è fatto di circuiti estremamente complessi alimentati attraverso batterie o attraverso la rete di distribuzione dell'energia elettrica.
Nelle condizioni di funzionamento in cui il generatore eroga potenza elettrica al circuito in cui è inserito, l'azione che il campo elettromotore esercita sulle cariche elettriche si oppone a quella dovuta al campo elettrico prevalendo nettamente su di essa. In queste condizioni il lavoro per unità di tempo compiuto dal campo elettrico sulle cariche in moto all'interno del generatore è negativo, $P_e < 0$. Questo lavoro è uguale a quello compiuto dal campo elettromotore con il segno cambiato.

♦

1.10.3 Circuiti resistivi semplici

Consideriamo i circuiti semplici riportati in Figura 1.25: in Figura 1.25a un resistore lineare di resistenza R è collegato a un generatore ideale di tensione $e(t)$; in Figura 1.25b un resistore lineare di resistenza R è collegato a un generatore ideale di corrente di intensità $j(t)$.



(a) (b)

Fig. 1.25 *Due circuiti resistivi semplici.*

L'intensità della corrente che attraversa il resistore del primo circuito, che è incognita, è data da

$$i(t) = \frac{e(t)}{R}. \tag{117}$$

La potenza elettrica assorbita dal resistore è, quindi,

$$p(t) = \frac{e^2(t)}{R}; \tag{118}$$

essa coincide con la potenza erogata dal generatore di tensione. Il lettore risolva il circuito semplice illustrato in Figura 1.25b.

1.10.4 Corto circuito e circuito aperto

Il *corto circuito* è un bipolo adinamico definito dalla relazione costitutiva

$$v = 0 \text{ per qualsiasi valore di } i, \tag{119}$$

cioè per qualsiasi valore dell'intensità della corrente i la tensione è nulla.

Il simbolo di questo bipolo è illustrato in Figura 1.26a e la sua curva caratteristica in Figura 1.26b.
Il corto circuito può essere il modello di un resistore con $R \to 0$, ad esempio, il modello di un tratto di conduttore con elevata conducibilità (al limite infinita). I collegamenti tra i diversi componenti di un circuito possono essere schematizzati come tanti corto circuiti. Naturalmente un filo di un conduttore reale può al più approssimare il comportamento di un corto circuito, e l'approssimazione sarà tanto migliore quanto più "corto" sarà il tratto del conduttore di collegamento.

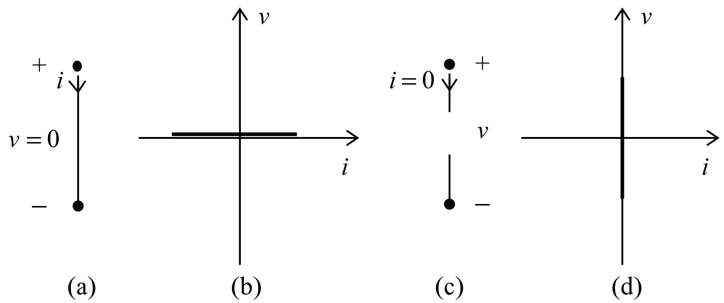


Fig. 1.26 *(a) simbolo del corto circuito e (b) relativa curva caratteristica; (c) simbolo del circuito aperto e (d) relativa curva caratteristica.*

La caratteristica di un generatore ideale di tensione coincide con quella del corto circuito quando il generatore è <u>spento</u>, cioè $e = 0$.

Il *circuito aperto* è il bipolo adinamico definito dalla relazione caratteristica

$$i = 0 \ \textit{per qualsiasi valore di } v, \tag{120}$$

cioè l'intensità della corrente elettrica che attraversa il circuito aperto è uguale a zero per qualsiasi valore della tensione v . Un tale bipolo si potrebbe realizzare frapponendo tra due fili conduttori separati un materiale perfettamente "non conduttore", cioè un *isolante ideale*. Per questo motivo il bipolo prende il nome di "*circuito aperto*".
Il simbolo del bipolo circuito aperto è illustrato in Figura 1.26c e la sua curva caratteristica in Figura 1.26d. Si osservi che la caratteristica di un generatore

ideale di corrente coincide con quella del circuito aperto quando il generatore è <u>spento</u>, cioè $j = 0$.
Sia il bipolo corto circuito che il bipolo circuito aperto verificano la proprietà di linearità; infatti le loro curve caratteristiche sono rette passanti per l'origine. Inoltre, sia la potenza elettrica assorbita da un corto circuito che quella assorbita da un circuito aperto sono istante per istante uguali a zero.

1.10.5 Interruttore

L'*interruttore* è un bipolo statico tempo-variante; il simbolo è illustrato in Figura 1.27.

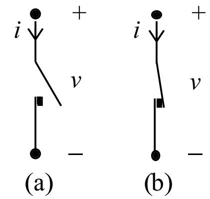


Fig. 1.27 (a) *Interruttore aperto e (b) interruttore chiuso.*

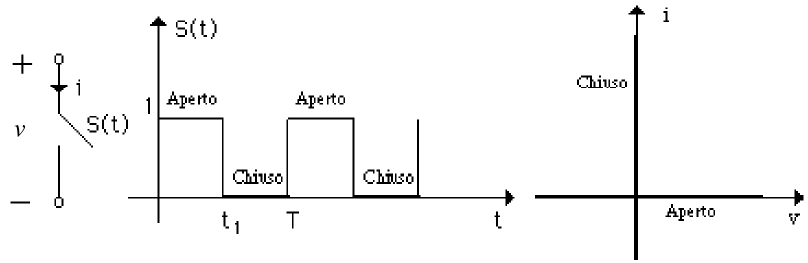


Fig. 1.28 *Interruttore periodico.*

Quando l'interruttore è aperto, l'intensità di corrente è zero indipendentemente dal valore della tensione, mentre quando è chiuso, la tensione è zero indipendentemente dal valore dell'intensità di corrente. Negli istanti di tempo in cui l'interruttore è aperto la sua curva caratteristica coincide con quella del circuito aperto, $i = 0$ per ogni valore della tensione; negli istanti in cui l'interruttore è chiuso la sua curva caratteristica coincide con quella del corto

circuito, $v = 0$ per ogni valore dell'intensità della corrente. Il bipolo interruttore è lineare e la potenza elettrica assorbita è uguale a zero.
L'*interruttore periodico* è un bipolo statico, tempo-variante e lineare. Il simbolo è illustrato in Figura 1.28. Per $0 \le t < t_1$, l'interruttore è aperto, l'intensità della corrente è zero, e la caratteristica coincide con quella del circuito aperto. Per $t_1 < t < T$, l'interruttore è chiuso, la tensione è zero, e la caratteristica coincide con quella del corto circuito. Dopo un intervallo di tempo T si ripete la sequenza.

1.10.6 Resistori non lineari

I resistori non lineari sono tutti quei bipoli adinamici che hanno relazioni caratteristiche (algebriche) non lineari. Il simbolo di un generico resistore non lineare è rappresentato in Figura 1.29.

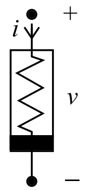


Fig. 1.29 *Simbolo di un generico resistore non lineare non simmetrico.*

Esistono molti tipi di resistori non lineari. Siccome l'analisi dei circuiti non lineari si allontana dal nostro principale obiettivo, qui ci limiteremo solo a descrivere due esempi molto importanti di resistori non lineari.
Un esempio molto importante di resistore non lineare è il *diodo a giunzione pn*. In Figura 1.30a è riportato il simbolo. La relazione caratteristica del diodo *a giunzione pn* è troppo complessa e non può essere descritta analiticamente. In questi casi è particolarmente utile il concetto di curva caratteristica. Attraverso la curva caratteristica possiamo descrivere il funzionamento del diodo. In Figura 1.30b è riportato l'andamento qualitativo della curva caratteristica del diodo a giunzione *pn*.
La curva caratteristica del diodo a giunzione *pn* passa per l'origine ma non è una retta: essa è una curva monotona, ma non è simmetrica rispetto all'origine. Di conseguenza, il funzionamento di un circuito in cui il diodo è inserito cambia completamente se il collegamento viene realizzato scambiando i

terminali. E' proprio su questa proprietà che si basano quasi tutte le applicazioni del diodo a giunzione *pn* (nei circuiti raddrizzatori, nei rivelatori di picco, ...).
Il diodo a giunzione *pn* è un bipolo adinamico <u>controllato sia in tensione che in corrente</u>, cioè per ogni valore di tensione c'è un solo valore di intensità di corrente che verifica l'equazione caratteristica, e viceversa.

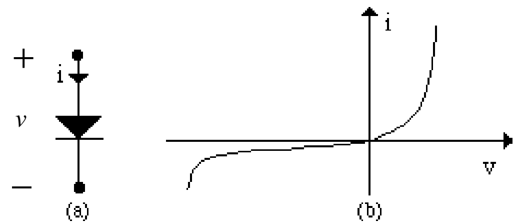


Fig. 1.30 *(a) Simbolo del diodo e (b) curva caratteristica.*

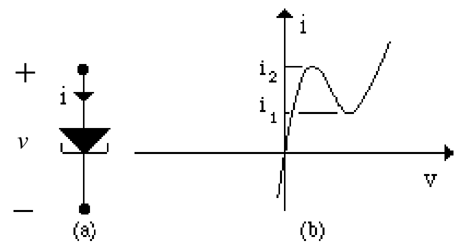


Fig. 1.31 *(a) Simbolo del diodo tunnel e (b) curva caratteristica.*

Il *diodo tunnel* è il bipolo statico non lineare descritto dalla curva caratteristica rappresentata in Figura 1.31b; in Figura 1.31a è riportato il suo simbolo. Anche in questo caso non è possibile rappresentare analiticamente la relazione caratteristica.
A differenza della curva caratteristica del diodo a giunzione *pn*, la curva caratteristica del diodo tunnel non è monotona. In conseguenza di ciò si ha che per ogni assegnato valore di tensione esiste un solo punto di funzionamento, mentre per un assegnato valore dell'intensità della corrente possono esistere più punti di funzionamento: per $i < i_1$ e $i > i_2$ esiste un solo punto di funzionamento, mentre per $i_1 < i < i_2$ esistono tre punti di funzionamento. Per questa ragione il *diodo tunnel è controllato in tensione ma non in corrente*.
Ricordiamo che un resistore si dice che è controllato in tensione se a ciascun valore della tensione corrisponde un solo punto di funzionamento;

analogamente, si dice che è controllato in corrente se a ciascun valore della corrente corrisponde un solo punto di funzionamento. Il resistore lineare e il diodo a giunzione *pn* sono esempi di bipoli controllati sia in tensione che in corrente. Il generatore ideale di tensione è controllato solo in corrente, mentre il generatore ideale di corrente è controllato solo in tensione.

1.10.7 Bipoli adinamici passivi e attivi

Le curve caratteristiche del resistore con resistenza positiva, del diodo a giunzione *pn* e del diodo tunnel, definite in accordo con la convenzione dell'utilizzatore, passano solo per il primo e terzo quadrante del piano (i, v). Questi bipoli sono passivi. Infatti, la potenza assorbita da essi è sempre positiva. In generale, un bipolo adinamico (lineare o non lineare) è passivo se la curva caratteristica del bipolo, sempre definita in accordo con la convenzione dell'utilizzatore, appartiene solo al primo e terzo quadrante del piano (i, v), Figura 1.32a.

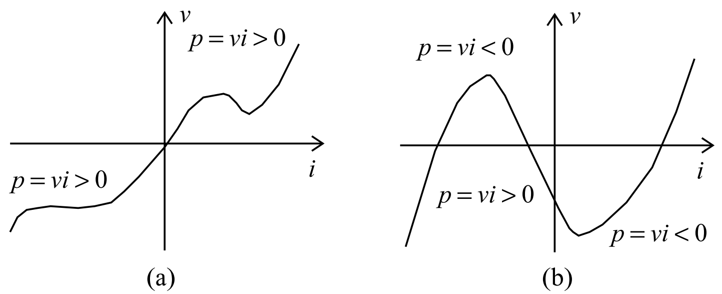


Fig. 1.32 *(a) Curva caratteristica di un generico bipolo adinamico passivo e (b) di un bipolo adinamico attivo.*

Un bipolo adinamico passivo si dice che è *strettamente passivo* se la potenza elettrica assorbita è uguale a zero solo se sia l'intensità di corrente che la tensione sono uguali a zero. Il resistore lineare con resistenza elettrica positiva, il diodo a giunzione *pn*, il diodo tunnel sono esempi di bipoli strettamente passivi (le loro curve caratteristiche passano tutte per l'origine degli assi). Esempi di bipoli passivi ma non strettamente passivi sono il circuito aperto e il corto circuito.

Se la curva caratteristica del bipolo non lineare passa anche o per il secondo o per il quarto quadrante, allora esistono condizioni di funzionamento in cui la potenza assorbita dal bipolo è negativa, Figura 1.32b. In queste condizioni il bipolo effettivamente può erogare potenza elettrica in ogni istante al circuito in cui è inserito e, quindi, energia elettrica senza alcun limite. Un bipolo di questo tipo è attivo.
Esempi di bipoli attivi sono i generatori ideali di tensione e di corrente; un altro esempio di bipolo attivo è il resistore lineare con resistenza elettrica negativa.

1.10.8 Generatori reali

I generatori ideali di tensione e di corrente sono modelli ideali di sorgenti di energia elettrica o di segnali elettrici che rappresentano informazione. Come già abbiamo osservato le sorgenti reali sono estremamente più complesse.

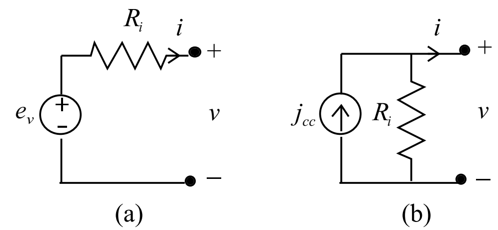


Fig. 1.33 *Modelli di un (a) generatore reale di tensione e (b) di un generatore reale di corrente.*

Uno dei fenomeni più importanti che si osserva nelle sorgenti reali e che non è contemplato dai due modelli ideali che abbiamo prima descritto, è la dissipazione di energia per effetto Joule dovuta al fatto che i materiali conduttori presenti nelle sorgenti non sono ideali.
Il modo più semplice per descrivere l'azione di questa dissipazione consiste nel considerare un resistore in serie al generatore ideale di tensione e un resistore in parallelo al generatore ideale di corrente, così come viene illustrato in Figura 1.33.
Il bipolo rappresentato in Figura 1.33a, inteso come modello di una sorgente reale di elettricità, prende il nome di *generatore reale di tensione*; invece, il bipolo rappresentato in Figura 1.33b prende il nome di *generatore reale di corrente*. Ciascuno di questi due modelli è definito da due parametri: la *resistenza interna* R_i e la *tensione a vuoto* e_v per il generatore reale di tensione;

la *resistenza interna* R_i e la *corrente di corto circuito* j_{cc} per il generatore reale di corrente.
Adottiamo la convenzione del generatore per entrambi i bipoli. Consideriamo il generatore reale di tensione. La sua relazione caratteristica è

$$v = -R_i i + e_v, \tag{121}$$

e la curva caratteristica corrispondente è riportata in Figura 1.34a. Essa è una retta che non passa per l'origine (Attenzione: c'è il segno meno davanti al parametro R perché stiamo adottando la convenzione del generatore).

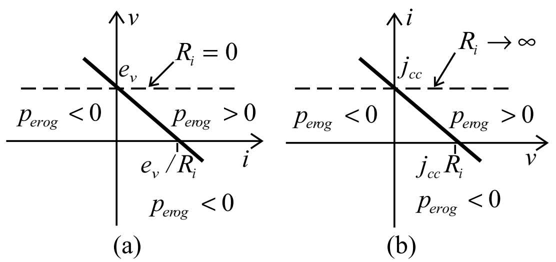


Fig. 1.34 *Curva caratteristica (concorde con la convenzione del generatore) (a) del generatore reale di tensione e (b) del generatore reale di corrente; le rette tratteggiate sono le curve caratteristiche dei rispettivi componenti considerati ideali.*

La tensione a vuoto e_v è la tensione che si ha ai capi del generatore reale quando l'intensità della corrente elettrica che lo attraversa è uguale a zero: questo è il cosiddetto funzionamento a "vuoto" (quando, appunto, il generatore è scollegato dal circuito). Quando il generatore ideale di tensione è spento, $e_v = 0$, il bipolo generatore reale si comporta come se fosse un resistore di resistenza R_i. Quando $R_i \to 0$ il comportamento del generatore reale tende a quello di un generatore ideale di tensione.
La tensione di un generatore reale di tensione, a differenza di quanto accade nel generatore ideale, non è indipendente dall'intensità di corrente. Tuttavia se le intensità delle correnti in gioco verificano la condizione

$$|i| << \frac{|e_v|}{R_i}, \tag{122}$$

allora possiamo ritenere trascurabile il contributo del termine $R_i i$ nella relazione (121) e quindi assumere $v \cong e_v$. Si osservi che quando è $i > 0$ (con $e_v > 0$), il che si verifica sempre se c'è un solo elemento attivo presente nel circuito, il termine $R_i i$ è positivo e, quindi, la tensione effettivamente presente ai terminali del generatore è <u>inferiore</u> a quella che si ha nel funzionamento a "vuoto" (si ha la cosiddetta "caduta di tensione").
L'espressione della potenza erogata dal generatore reale di tensione è data da

$$p_{erog} = vi = e_v i - R_i i^2. \tag{123}$$

Essa è sempre inferiore a quella che si avrebbe se fosse $R_i = 0$. Si osservi che, a differenza di quanto accade per il generatore ideale di tensione, solo su un tratto di lunghezza finita della curva caratteristica del generatore reale di tensione la potenza erogata è positiva, il tratto appartenente al primo quadrante, vedi Figura 1.34a (ricordate, questa volta stiamo adottando la convenzione del generatore). Dunque, la potenza effettivamente erogata da un generatore reale di tensione è limitata, non può essere infinita. Questa è una limitazione imposta dai fenomeni dissipativi presenti all'interno della sorgente reale.
In Figura 1.35 è riportato l'andamento della potenza erogata in funzione dell'intensità della corrente: la curva è una parabola con la concavità rivolta verso il basso che interseca l'asse delle ascisse a $i = 0$ e a $i = I_{cc}$, dove

$$I_{cc} = \frac{e_v}{R_i}; \tag{124}$$

I_{cc} è l'intensità della corrente elettrica che attraversa il generatore reale di tensione quando esso è collegato a un corto circuito (intensità della corrente elettrica di corto circuito del generatore). Il massimo valore della potenza erogata lo si ottiene per $i = I_{cc}/2$ ed è uguale a

$$P_m = \frac{e_v^2}{4R_i}. \tag{125}$$

Lasciamo al lettore, come esercizio, la trattazione del caso duale rappresentato dal generatore reale di corrente. La curva caratteristica del generatore reale di corrente è riportata in Figura 1.32b. Quando $R_i \to \infty$ il comportamento del generatore reale di corrente tende a quello di un generatore ideale di corrente.

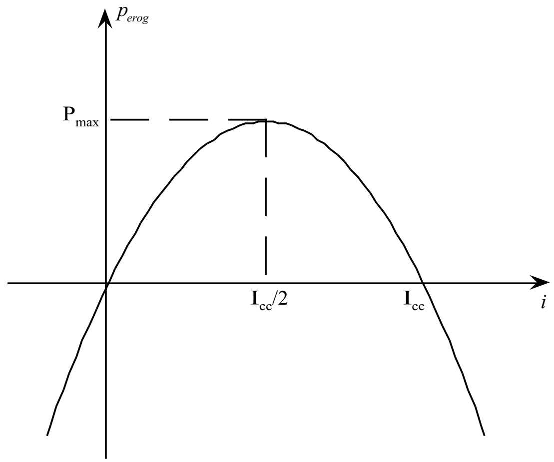


Fig. 1.35 *Andamento della potenza erogata da un generatore reale di tensione in funzione dell'intensità della corrente.*

1.10.9 Condensatore

La relazione tra tensione e l'intensità di corrente per i *bipoli dinamici* è di tipo *differenziale* (o *integrale*), e quindi il valore della tensione o dell'intensità di corrente in ogni istante dipende anche dalla storia passata. I bipoli dinamici fondamentali sono il *condensatore* e l'*induttore*. Prima descriveremo il condensatore, poi l'induttore.
Il dispositivo fisico "condensatore" è un componente a due terminali, costituito da due armature realizzate con materiale con elevatissima conducibilità elettrica (nei modelli ideali è considerata infinita). In generale, tra le due armature è interposto del materiale isolante con proprietà dielettriche per incrementare la capacità. Quando alle armature del condensatore è applicata una tensione elettrica, sulle di esse nasce una carica elettrica libera che si addensa sulle superfici: le due cariche sono eguali in valore assoluto e hanno segno opposto, (**Appendice** A2). In condizioni di funzionamento lentamente variabili la carica

sulle armature è direttamente proporzionale alla tensione applicata se il dielettrico interposto tra le armature è lineare [14].

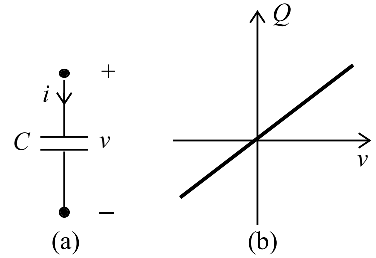


Fig. 1.36 *(a) Simbolo di un condensatore lineare e (b) curva caratteristica* $v-Q$.

Il bipolo *condensatore lineare*, il cui simbolo è riportato in Figura 1.36a, è definito dalla relazione caratteristica carica-tensione

$$Q = Cv, \tag{126}$$

dove Q è la carica elettrica depositata sull'armatura connessa al terminale contrassegnato con il simbolo "+", v è la tensione del condensatore e il coefficiente costante C è la *capacità* del condensatore.
In generale, la relazione caratteristica tensione-carica può essere rappresentata graficamente nel piano (v, Q): essa è, per definizione, la *curva caratteristica del condensatore*. La curva caratteristica del condensatore lineare è una retta passante per l'origine, Figura 1.36b. Se la capacità è costante nel tempo il condensatore si dice che è tempo invariante.
Nel sistema SI l'unità di misura della capacità elettrica è denominata *farad* (simbolo F),

$$[C] = \mathrm{F}. \tag{127}$$

Si ha

$$\mathrm{F} = \mathrm{C} \cdot \mathrm{V}^{-1}. \tag{128}$$

14 Un dielettrico è lineare se la relazione tra il campo di spostamento elettrico e il campo elettrico è lineare, $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$; ε è la costante dielettrica del materiale.

L'intensità della corrente i che attraversa il condensatore, con il verso di riferimento scelto in accordo con la convenzione dell'utilizzatore, è legata alla carica totale Q attraverso la relazione differenziale

$$i = \frac{dQ}{dt}. \tag{129}$$

Questa relazione è una diretta conseguenza della legge della conservazione della carica (24) applicata a una superficie chiusa Σ che contenga, per esempio, solo l'armatura connessa al terminale contrassegnato con il segno "$+$", orientata con il verso della normale che punta verso l'esterno. Questa superficie chiusa è forata solo dal terminale contrassegnato con il segno "$+$". Si noti che il verso di riferimento dell'intensità di corrente i punta verso l'interno di Σ.

Osservazione

La legge espressa dalla (126) è una legge approssimata, che vale solo in condizioni di funzionamento lentamente variabili: essa è verificata esattamente solo in regime stazionario (**Appendice** A2). Nel modello circuitale si assume che sia esattamente verificata in qualsiasi condizioni di funzionamento. Invece, la legge espressa dalla (129) vale esattamente in qualsiasi condizione di funzionamento.
Al crescere della velocità con cui variano le grandezze elettriche accade che: *(i)* al termine Cv bisogna aggiunge un termine che dipende dalla storia dell'intensità di corrente; *(ii)* la relazione tra la tensione e l'intensità di corrente dipende anche da ciò che accade nel circuito in cui il resistore è inserito a causa degli accoppiamenti di natura elettromagnetica con i componenti adiacenti.

♦

La relazione (126) è una relazione algebrica, mentre la relazione (129) é una relazione differenziale. Combinandole si ottiene la relazione tra la tensione e l'intensità di corrente del condensatore, che non può che essere di tipo differenziale.
Il condensatore tempo invariante è descritto dalla relazione caratteristica tensione-corrente

$$i = C\frac{dv}{dt}. \tag{130}$$

La (130) è una relazione differenziale lineare [15].
All'equazione differenziale (130) bisogna affiancare, per una descrizione completa del comportamento del condensatore e, quindi, del circuito in cui il condensatore è inserito, il valore della tensione del condensatore all'istante iniziale (che per convenzione fissiamo a $t = 0$),

$$v(t = 0) = V_0. \tag{131}$$

La relazione caratteristica tensione-intensità di corrente, in forma integrale, del condensatore (lineare tempo-invariante) è

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + V_0. \tag{132}$$

Essa si ottiene integrando l'equazione (130) e utilizzando la condizione iniziale (131).
Da questa equazione è evidente che $v(t)$ dipende sia dalla storia della corrente nell'intervallo (t_0, t) che dal valore iniziale della tensione. Per questa ragione si dice che il condensatore è un *bipolo a memoria*, cioè il suo comportamento al generico istante t dipende anche da ciò che è accaduto al suo interno negli istanti precedenti. Attraverso la condizione iniziale (131) si porta in conto l'influenza della storia del condensatore, precedente all'istante iniziale $t = 0$, sul suo comportamento nell'intervallo $(0, t)$. Il resistore, invece, non è un bipolo a memoria. Infatti la tensione del resistore ad un generico istante dipende solo dal valore dell'intensità di corrente a quell'istante e non dalla storia precedente, e viceversa.
La condizione iniziale (131) è un'informazione esterna al modello del condensatore: essa è legata all'energia immagazzinata nel condensatore all'istante $t = 0$ che, come sappiamo, dipende solo dalla "storia" del condensatore precedente a questo istante.

[15] L'operatore di derivata è un operatore lineare. Infatti, posto $y_1 = dx_1/dt$, $y_2 = dx_2/dt$ e $x_3(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$, si ha $y_3 = dx_3/dt = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$, comunque si scelgano le funzioni $x_1(t)$ e $x_1(t)$, purché derivabili, e i coefficienti costanti α_1 e α_2.

Per la configurazione standard di condensatore costituito da due armature piane e parallele, separate da un dielettrico con costante dielettrica ε, la capacità è data da (nel limite $\sqrt{A}/d \to \infty$)

$$C = \varepsilon \frac{A}{d}, \tag{133}$$

dove d è la distanza tra le due armature e A è l'area dell'armatura; la costante dielettrica, che nel sistema internazionale si misura in $\mathrm{F/m}$, è una costante che dipende solo dalla composizione del dielettrico. Siccome la costante dielettrica è una grandezza positiva, la capacità di un condensatore lineare, inteso come modello del dispositivo fisico condensatore, è positiva.

Come faremo vedere in seguito, il bipolo condensatore lineare può rappresentare anche il comportamento equivalente di componenti con due terminali estremamente complessi, la cui costituzione fisica è molto diversa da quella del dispositivo fisico condensatore.

Osservazione

Un condensatore è detto *non lineare* se la relazione caratteristica tensione-carica è non lineare.
Un condensatore non lineare può essere ottenuto interponendo tra le armature un dielettrico non lineare, ad esempio, un materiale *ferroelettrico*. Anche il *diodo varactor* si comporta come un condensatore non lineare quando la tensione è minore di una tensione caratteristica del dispositivo, che indichiamo con V_c. In queste condizioni $(v < V_c)$ la relazione tra la carica e la tensione è

$$Q = -\tfrac{3}{2} C_c V_c \left(1 - v/V_c\right)^{2/3}, \tag{134}$$

dove C_c è un altro parametro (che ha le dimensioni di una capacità) caratteristico del dispositivo.

♦

Si consideri, ora, la potenza assorbita da un condensatore lineare tempo-invariante. Si ha

$$p = vC\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Cv^2}{2}\right) = \frac{dW_e}{dt}, \tag{135}$$

dove

$$W_e(t) = \frac{1}{2} C v^2(t). \tag{136}$$

Allora, l'energia assorbita dal condensatore nel generico intervallo (t_1, t_2) è data da

$$w(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(\tau) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{d\tau}\left(\frac{Cv^2}{2}\right) d\tau = W_e(t_2) - W_e(t_1). \tag{137}$$

A differenza di quanto accade per il resistore o per il generatore, l'energia assorbita dal condensatore non dipende dalla storia della tensione nell'intervallo (t_1, t_2), ma solo dai valori che la tensione assume agli estremi di questo intervallo, cioè dal valore della tensione nell'istante iniziale, $v(t_1)$, e dal valore della tensione nell'istante finale, $v(t_2)$. Quando la tensione nell'istante finale $v(t_2)$ è uguale a quella nell'istante iniziale $v(t_1)$, allora l'energia assorbita dal condensatore è identicamente nulla, indipendentemente dalla storia della tensione. In un processo di questo tipo il condensatore assorbe energia durante una parte dell'intervallo (t_1, t_2) e eroga la stessa quantità di energia durante la restante parte dell'intervallo. Un bipolo con questa proprietà si dice *conservativo*, perché l'energia effettivamente assorbita viene immagazzinata nel bipolo sotto forma di energia interna, per poi essere eventualmente restituita al circuito in cui è inserito.
La grandezza fisica $W_e(t)$, come già sapete dal corso di Fisica, è proprio l'energia immagazzinata nel condensatore all'istante t, associata al campo elettrico in esso presente (**Appendice** A2). Essa è in parte energia interna del campo elettrico e in parte energia interna del materiale dielettrico presente nel componente. Essendo C una grandezza definita positiva, l'energia immagazzinata è positiva. Nel condensatore, inteso come componente ideale, il campo elettrico non compie lavoro sulle cariche elettriche in moto e, quindi, non c'è dissipazione; inoltre non c'è energia immagazzinata associata al campo magnetico.

Osservazione

Siccome l'energia immagazzinata nel condensatore a un generico istante di tempo dipende solo dal valore della tensione a quell'istante, la tensione del condensatore gioca un ruolo particolare rispetto a quello della corrente. Per questa ragione diciamo che la tensione (o la carica) è la *grandezza di stato* del condensatore. Conoscere lo stato iniziale del condensatore significa conoscere l'energia che in esso è immagazzinata. I resistori non immagazzinano l'energia che assorbono e, quindi, per essi non è possibile individuare nessuna grandezza di stato.

♦

Negli intervalli di tempo in cui l'energia immagazzinata nel condensatore cresce la potenza assorbita dal condensatore è positiva, mentre negli intervalli di tempo in cui l'energia immagazzinata decresce la potenza assorbita è minore di zero. In particolare abbiamo che, quando $W_e(t_2) > W_e(t_1)$ l'energia assorbita dal condensatore nell'intervallo (t_1, t_2) è positiva e, quindi, è effettivamente assorbita; se, invece, $W_e(t_2) < W_e(t_1)$ l'energia assorbita è negativa e, quindi, corrisponde ad una energia effettivamente fornita dal condensatore al resto del circuito in cui esso è inserito.

Il condensatore è un bipolo passivo o attivo? Pur potendo erogare energia, il condensatore è un bipolo passivo perché non può erogare più energia di quanto ne abbia assorbito in precedenza.

Si consideri un generico intervallo di tempo (t_1, t_2) con $t_2 > t_1$ e si fissi, in modo del tutto arbitrario, il valore della tensione del condensatore all'istante t_2, $v(t_2) = V_2$; l'energia immagazzinata in questo istante è $W_e(t_2) = CV_2^2/2$. In un <u>processo di carica</u> in cui $v(t_1) = 0$, l'energia <u>assorbita</u> dal condensatore nell'intervallo di tempo (t_1, t_2) è positiva ed è uguale a quella immagazzinata all'istante t_2, $w(t_1, t_2) = CV_2^2/2$. Siccome l'energia immagazzinata è positiva, $CV_2^2/2$ è la massima energia che il condensatore può effettivamente assorbire nell'intervallo di tempo (t_1, t_2) per assegnato valore V_2. Se il valore della tensione iniziale fosse diverso da zero, il valore dell'energia assorbita sarebbe inferiore a $CV_2^2/2$.

Si consideri, ora, un generico intervallo di tempo (t_2, t_3) con $t_3 > t_2 > t_1$ e $v(t_2) = V_2$. In un <u>processo di scarica</u> in cui $v(t_3) = 0$, l'energia <u>erogata</u> dal condensatore nell'intervallo di tempo (t_2, t_3) è positiva, ed è uguale a quella immagazzinata all'istante t_2, $\hat{w}(t_2, t_3) = CV_2^2/2$. E' evidente che questa è anche la massima energia che il condensatore è in grado di erogare, sempre perché l'energia immagazzinata è positiva. Se il valore della tensione finale fosse diverso da zero, il valore dell'energia erogata sarebbe inferiore a $CV_2^2/2$.

Di conseguenza l'energia elettrica che il condensatore può effettivamente erogare non può essere mai più grande di quella che ha effettivamente assorbito in precedenza. In altri termini, per il condensatore con $C > 0$ si ha per ogni $t \ge t^*$

$$w(t^*, t) = \int_{t^*}^{t} p(\tau) d\tau \ge 0, \tag{138}$$

dove t^* è l'istante in cui l'energia immagazzinata è uguale a zero (il condensatore è nel cosiddetto stato di riposo).

Tutte queste considerazioni portano alle seguenti conclusioni:

- il bipolo condensatore è in grado sia di assorbire energia elettrica dal circuito in cui è inserito, sia di fornire energia elettrica al circuito in cui è inserito;
- l'energia effettivamente assorbita viene immagazzinata sotto forma di energia associata al campo elettrico, a differenza di quanto accade nei resistori passivi, nei quali tutta l'energia assorbita viene trasformata in calore;
- in ogni istante il livello della sua energia immagazzinata è pari a $Cv^2(t)/2$;
- l'energia che esso può erogare, in un determinato intervallo, non è mai superiore a quella che ha assorbito precedentemente.

Osservazione

Pur essendo il condensatore con capacità positiva un bipolo passivo, la potenza che esso assorbe è negativa negli intervalli di tempo nei quali l'energia immagazzinata decresce. È una caratteristica degli elementi conservativi il fatto che, pur essendo passivi, possono erogare potenza elettrica al circuito in cui sono inseriti, ovviamente per un intervallo di tempo limitato.

♦

1.10.10 Induttore

Il dispositivo fisico "induttore" è un componente a due terminali costituito da spire di filo conduttore con elevatissima conducibilità elettrica (nei modelli ideali è considerata infinita). In generale, le spire sono avvolte su un nucleo di ferro dolce o di ferrite per incrementare il coefficiente di autoinduzione. Quando l'induttore è attraversato da una corrente nasce un campo magnetico e, quindi, un flusso del campo magnetico concatenato con avvolgimento (**Appendice** A2). In condizioni di funzionamento lentamente variabili il flusso concatenato con l'avvolgimento è direttamente proporzionale all'intensità della corrente che attraversa l'induttore se il nucleo di materiale ferromagnetico su cui è realizzato l'avvolgimento ha un comportamento lineare [16] nelle condizioni nominali di funzionamento dell'induttore.

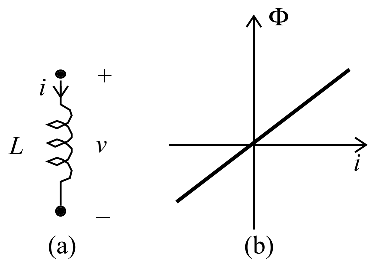


Fig. 1.37 *(a) Simbolo di un induttore lineare e (b) curva caratteristica* $i-\Phi$.

Il bipolo *induttore lineare*, il cui simbolo è riportato in Figura 1.37a, è definito dalla relazione caratteristica corrente-flusso*o*

$$\Phi = Li\,, \tag{139}$$

16 Un materiale magnetico è lineare se la relazione tra il campo di induzione magnetica $\boldsymbol{B}$ e il campo magnetico $\boldsymbol{H}$ è lineare, $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$; μ è la permeabilità magnetica del materiale.

dove i è l'intensità della corrente che attraversa l'avvolgimento dell'induttore, Φ è il flusso totale del campo magnetico concatenato con l'avvolgimento (la superficie di ciascuna spira deve essere orientata concordemente con il verso di riferimento scelto per l'intensità di corrente secondo la "regola della mano destra") e il coefficiente costante L è l'*induttanza* (o coefficiente di autoinduzione) dell'induttore.
In generale, la relazione caratteristica intensità di corrente-flusso può essere rappresentata graficamente nel piano $i-\Phi$: essa è, per definizione, la *curva caratteristica dell'induttore.* La curva caratteristica dell'induttore lineare è una retta passante per l'origine, Figura 1.37b. Quando il coefficiente di autoinduzione non cambia nel tempo l'induttore si dice tempo-invariante.
Nel sistema SI l'unità di misura dell'induttanza è denominata *henry* (simbolo H),

$$[L]=\mathrm{H}\,. \tag{140}$$

Si ha

$$\mathrm{H}=\mathrm{Wb}\cdot\mathrm{A}^{-1}\,. \tag{141}$$

La tensione v dell'induttore, con il verso di riferimento scelto in accordo con la convenzione dell'utilizzatore, è legata al flusso Φ attraverso l'equazione differenziale

$$v=\frac{d\Phi}{dt}\,. \tag{142}$$

Questa relazione è una diretta conseguenza della legge della legge di Faraday-Neumann (32) applicata a una linea chiusa costituita dall'avvolgimento e dalla linea aperta esterna alla superficie limite lungo cui è definita la tensione.

Osservazione

La legge espressa dalla (139) è una legge approssimata, che vale solo in condizioni di funzionamento lentamente variabili: essa è verificata esattamente solo in regime stazionario (**Appendice** A2). Nel modello circuitale si assume che sia esattamente verificata in qualsiasi condizioni di funzionamento. Invece,

la legge espressa dalla (142) vale esattamente in qualsiasi condizione di funzionamento.
Al crescere della velocità con cui variano le grandezze elettriche accade che: *(i)* al termine Li bisogna aggiunge un termine che dipende dalla storia della tensione; *(ii)* la relazione tra la tensione e l'intensità di corrente dipende anche da ciò che accade nel circuito in cui il resistore è inserito a causa degli accoppiamenti di natura elettromagnetica con i componenti adiacenti.

♦

La relazione (139) è una relazione algebrica, mentre la relazione (142) è una relazione differenziale. Combinandole si ha la relazione tra tensione e intensità di corrente dell'induttore che non può che essere di tipo differenziale.
L'induttore tempo invariante è descritto dalla relazione caratteristica tensione-corrente

$$v = L\frac{di}{dt}. \tag{143}$$

Come per il condensatore, la relazione tra tensione e intensità di corrente è una relazione differenziale lineare.
All'equazione differenziale (143) bisogna affiancare, per una descrizione completa del comportamento dell'induttore e, quindi, del circuito in cui l'induttore è inserito, il valore dell'intensità di corrente dell'induttore all'istante iniziale (che per convenzione fissiamo sempre a $t = 0$),

$$i(t = 0) = I_0. \tag{144}$$

La relazione caratteristica tensione-intensità di corrente, in forma integrale, dell'induttore (lineare tempo-invariante) è

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau + I_0. \tag{145}$$

Da questa equazione è evidente che $i(t)$ dipende dalla storia della tensione nell'intervallo (t_0, t) e dal valore iniziale dell'intensità di corrente. Come il condensatore, l'induttore è un bipolo a memoria, cioè il suo comportamento al generico istante t dipende anche da ciò che è accaduto al suo interno negli

istanti precedenti. Attraverso la condizione iniziale (144) si porta in conto l'influenza della storia dell'induttore, precedente all'istante iniziale $t = 0$, sul suo comportamento nell'intervallo $(0, t)$.

Per la configurazione standard di un induttore costituito da un solenoide lungo avvolto attorno ad un materiale con permeabilità magnetica μ l'espressione dell'induttanza è data da (nel limite $\sqrt{S}/l \rightarrow 0$)

$$L = \mu\frac{N^2 S}{l}, \tag{146}$$

dove S è l'area della sezione trasversale del solenoide, l è la lunghezza del solenoide e N è il numero di spire; la permeabilità magnetica, che nel sistema internazionale si misura in $\mathrm{H/m}$, è una costante che dipende dalla composizione del materiale su cui è avvolto il solenoide.

Come faremo vedere in seguito, come per il bipolo condensatore lineare, il bipolo induttore lineare può rappresentare anche il comportamento equivalente di componenti con due terminali estremamente complessi, la cui costituzione fisica è molto diversa da quella del dispositivo fisico "induttore".

Osservazione

L'*induttore saturabile* è l'induttore non lineare descritto da una curva caratteristica del tipo illustrata in Figura 1.36. Esso può rappresentare il modello di un avvolgimento realizzato su di un nucleo di materiale ferromagnetico (in cui è possibile trascurare il fenomeno dell'isteresi magnetica).
La *giunzione Josephson* è l'induttore non lineare descritto dalla relazione

$$i = I_0 \, sin(k_0 \Phi), \tag{147}$$

dove I_0 e k_0 sono due parametri caratteristici.

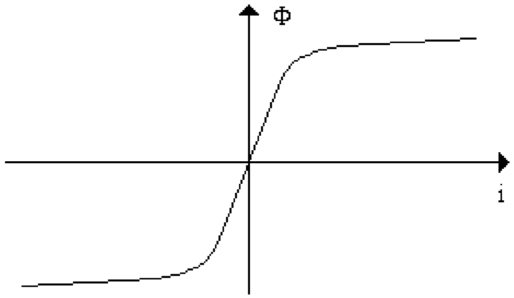


Fig. 1.36 *Curva caratteristica dell'induttore saturabile*

♦

Si consideri, ora, la potenza assorbita da un induttore lineare tempo invariante. Si ha

$$p = vi = iL\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Li^2}{2}\right) = \frac{dW_m}{dt}, \tag{148}$$

dove

$$W_m(t) = \frac{1}{2}Li^2(t). \tag{149}$$

Allora, l'energia assorbita dall'induttore nel generico intervallo (t_0, t) è data da

$$w(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau}\left(\frac{Li^2}{2}\right)d\tau = W_m(t) - W_m(t_0). \tag{150}$$

L'induttore come il condensatore è un bipolo conservativo. L'energia assorbita dall'induttore non dipende dalla storia della corrente nell'intervallo (t_0, t), ma solo dai valori che essa assume agli estremi dell'intervallo (t_0, t): dal valore della corrente $i(t_0)$ nell'istante iniziale e dal valore della corrente $i(t)$ nell'istante finale.

La grandezza $W_m(t)$, come già sapete dal corso di Fisica, è proprio l'energia immagazzinata nell'induttore all'istante t, associata al campo magnetico in esso

presente (**Appendice** A2). Essa è in parte energia interna del campo magnetico e in parte energia interna dell'eventuale materiale presente nel componente. Essendo L una grandezza definita positiva, l'energia immagazzinata è positiva.

Osservazione

Siccome l'energia immagazzinata nell'induttore a un generico istante di tempo dipende solo dal valore della corrente a quell'istante, la corrente dell'induttore gioca un ruolo particolare rispetto a quello della tensione. Per questa ragione diciamo che la corrente dell'induttore (o il flusso) è la *grandezza di stato* dell'induttore. Come per il condensatore, conoscere lo stato iniziale dell'induttore significa conoscere l'energia che in esso è immagazzinata in quell'istante.

♦

Negli intervalli di tempo in cui l'energia immagazzinata nell'induttore cresce la potenza assorbita dall'induttore è positiva, mentre negli intervalli di tempo in cui l'energia immagazzinata decresce la potenza assorbita è minore di zero. In particolare abbiamo che, quando $W_m(t_2) > W_m(t_1)$ l'energia assorbita dall'induttore nell'intervallo (t_1, t_2) è positiva e, quindi, è effettivamente assorbita; se, invece, $W_e(t_2) < W_e(t_1)$ l'energia assorbita è negativa e, quindi, corrisponde ad una energia effettivamente fornita dall'induttore al resto del circuito in cui esso è inserito.

L'induttore con $L > 0$ è un bipolo passivo. Lasciamo al lettore la verifica di questa proprietà. In altri termini, per l'induttore con $L > 0$ si ha per ogni $t \geq t^*$

$$w(t^*, t) = \int_{t^*}^{t} p(\tau)d\tau \geq 0, \tag{151}$$

dove t^* è l'istante in cui l'energia immagazzinata è uguale a zero (l'induttore è nello stato di riposo).

Tutte queste considerazioni portano a conclusioni del tutto analoghe a quelle che abbiamo già svolto per il condensatore:

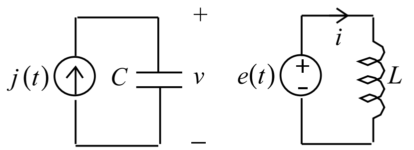
- l'induttore lineare (tempo invariante), come il condensatore lineare (tempo invariante), è in grado di assorbire o fornire energia elettrica;

- l'energia effettivamente assorbita è immagazzinata sotto forma di energia associata al campo elettrico, a differenza di quanto accade nei resistori passivi, nei quali tutta l'energia assorbita viene trasformata in calore;
- in ogni istante il livello della sua energia immagazzinata è pari a $Li^2(t)/2$;
- l'energia che esso può erogare in un determinato intervallo non è mai superiore a quella che ha assorbito nella storia precedente.

Pur essendo l'induttore con induttanza positiva un bipolo passivo, la potenza che esso assorbe è negativa negli intervalli di tempo durante i quali l'energia immagazzinata decresce.

1.10.11 Circuiti dinamici semplici

Consideriamo i circuiti dinamici semplici riportati in Figura 1.37. In Figura 1.37a un condensatore lineare tempo invariante di capacità C è collegato a un generatore ideale di corrente $j(t)$; sia V_0 il valore della tensione del condensatore all'istante iniziale $t=0$. In Figura 1.37b un induttore lineare tempo invariante di induttanza L è collegato a un generatore ideale di tensione $e(t)$; sia I_0 il valore dell'intensità di corrente dell'induttore all'istante iniziale $t=0$.



(a) (b)

Fig. 1.37 *Due circuiti dinamici semplici.*

Bisogna determinare la tensione del condensatore (circuito di Figura 1.37a) e l'intensità di corrente dell'induttore (circuito di Figura 1.37b) per $t>0$.
Per risolvere il circuito di Figura 1.37a bisogna trovare la determinare la soluzione dell'equazione

$$C\frac{dv}{dt}=j(t) \tag{152}$$

con la condizione iniziale

$$v(t=0)=V_0. \tag{153}$$

La (152) è il più semplice esempio di equazione differenziale: la derivata della funzione incognita (non la funzione incognita) è uguale al termine noto dell'equazione, che è anche esso una funzione. La soluzione di un problema di questo tipo è estremamente semplice. Si consideri l'integrale definito sull'intervallo di tempo $(0,t)$ di ambo i membri dell'equazione (152); si ha per

$$C[v(t)-v(0)]=\int_0^t j(\tau)d\tau. \tag{154}$$

Utilizzando la condizione iniziale (153) si ottiene

$$v(t)=\frac{1}{C}\int_0^t j(\tau)d\tau+V_0 \text{ per } t\geq 0. \tag{155}$$

Procedendo allo stesso modo, per l'intensità della corrente dell'induttore di Figura 1.37b si ottiene

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_0^t e(\tau)d\tau+I_0 \text{ per } t\geq 0. \tag{156}$$

1.11 Alcune riflessioni sui limiti di validità del modello circuitale

Il modello circuitale rappresenta un buon modello del circuito fisico se:

(i) valgono limitazioni del tipo (41), (54), (59), (65) e (72);
(ii) il comportamento dei singoli componenti è ben descritto dalle relazioni caratteristiche che sono state illustrate nel precedente paragrafo.

A questo punto siamo in grado di stabilire con precisione cosa intendiamo per "condizione di funzionamento lentamente variabile". Diciamo che il circuito è in condizioni di funzionamento lentamente variabili se sono verificate tutte le suddette condizioni. I componenti e i circuiti sono nella maggior parte dei casi progettati in maniera tale che in condizioni di funzionamento nominali queste condizioni siano verificate con ampio margine.

Le tensioni e le intensità di corrente di un dato circuito non possono variare nel tempo con una velocità qualsiasi ed essere ancora verificate le leggi di Kirchhoff e le altre condizioni che sono alla base del modello circuitale. Come già abbiamo commentato nel precedente paragrafo, dove è stato introdotto il concetto di bipolo, il modello circuitale è corretto solo se le pulsazioni (frequenze) che caratterizzano il contenuto armonico delle variabili circuitali (correnti e tensioni) non superano certi valori che sono proprie del circuito. Come già abbiamo osservato il calcolo di queste pulsazioni è estremamente complesso, richiede tecniche matematiche e numeriche molto avanzate e può essere fatto solo specificando in dettaglio il circuito in esame. Tuttavia è possibile stimare in maniera semplice un limite superiore che se superato mette in crisi l'intero modello circuitale.
Il modello circuitale non è in grado di prevedere il fenomeno della propagazione elettromagnetica. Condizioni del tipo (41), (54) e (65) equivalgono a trascurare gli effetti della corrente di spostamento elettrico e condizioni del tipo (59) e (72) equivalgono a trascurare il fenomeno dell'induzione elettromagnetica. Nel modello del dispositivo fisico "condensatore" sono ignorati gli effetti dell'induzione elettromagnetica, mentre nel modello del dispositivo fisico "induttore" sono ignorati gli effetti della corrente di spostamento. Inoltre, nel modello del dispositivo fisico "resistore" sono ignorati sia gli effetti della corrente di spostamento che quelli dell'induzione elettromagnetica. Di conseguenza non è possibile attraverso il modello circuitale descrivere il fenomeno della propagazione per onde. Ricordiamo che il fenomeno della propagazione delle onde elettromagnetiche risulta proprio da un'azione combinata dell'induzione elettromagnetica e della corrente di spostamento elettrico.
In quali condizioni non sono trascurabili gli effetti della propagazione elettromagnetica in un dato circuito? Nel modello circuitale l'interazione tra le diverse parti è istantanea. Si intuisce, allora, che non è possibile trascurare gli effetti della propagazione elettromagnetica se il ritardo di tempo caratteristico (più piccolo) introdotto dalla velocità finita di propagazione, che indichiamo con t_r, è più grande o confrontabile con l'intervallo di tempo caratteristico (più piccolo), che indichiamo con T_c, in cui le tensioni e le intensità di corrente del circuito in esame variano in modo apprezzabile.
Il ritardo di tempo t_{rc} può essere stimato come

$$t_{rc} \approx \frac{L_c}{c}, \tag{157}$$

dove L_c è la distanza media tra i componenti del circuito e c è la velocità di propagazione del campo elettromagnetico nella regione di spazio occupata dal circuito.
L'intervallo di tempo caratteristico (più piccolo) in cui tensioni e correnti variano può essere stimato come

$$T_c \approx \frac{1}{f_c}, \tag{158}$$

dove f_c è la frequenza caratteristica (più grande) delle intensità di corrente e tensioni presenti nel circuito. Allora, il modello circuitale non è più valido se

$$f_c \geq \frac{c}{L_c}. \tag{159}$$

In queste condizioni, le grandezze elettriche variano così velocemente che non è possibile trascurare gli effetti del ritardo introdotti dalla propagazione per onde elettromagnetiche.
Ad esempio, per $L_c = 3\text{ cm}$ si ha $t_c = 100\text{ ps}$ e $c/L_c \approx 10\text{ GHz}$ assumendo $c = 3 \cdot 10^8\text{ m/s}$. In questo caso il modello circuitale va certamente in crisi se $f_c \geq 10\text{ GHz}$.
Condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché le approssimazioni alla base delle leggi di Kirchhoff e dell'intero modello circuitale siano valide è che

$$f_c << \frac{c}{L_{max}}, \tag{160}$$

dove L_{max} è la distanza più grande tra due componenti del circuito. Per $L_{max} = 30\text{ cm}$ deve essere $f_c << 1\text{ GHz}$. Per fissata frequenza caratteristica la condizione (160) è tanto più verificata quanto più piccola è la più grande dimensione caratteristica del circuito. Si capisce allora il perché usiamo l'espressione "modello a parametri concentrati" quando ci riferiamo al modello circuitale.