Università degli Studi di Cassino

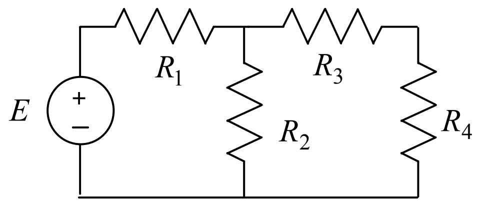
Esercitazioni di Teoria dei Circuiti: circuiti in regime stazionario

prof. Antonio Maffucci

ver. 3.1 – ottobre 2007

1. Serie, parallelo e partitori.

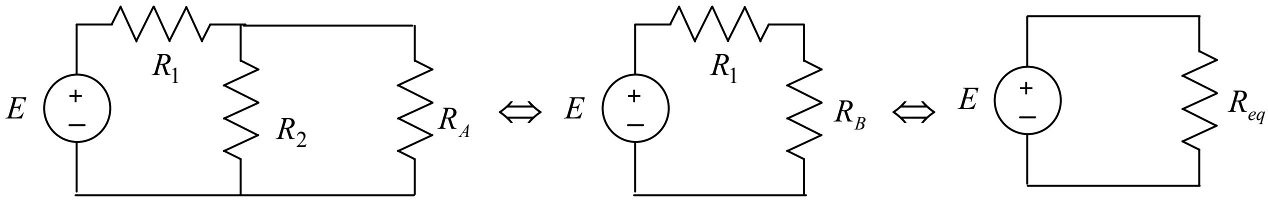
<u>ES. 1.1</u> Calcolare la resistenza equivalente vista ai capi del generatore E.



$R_1 = 1\,\Omega \quad R_2 = 4\,\Omega$

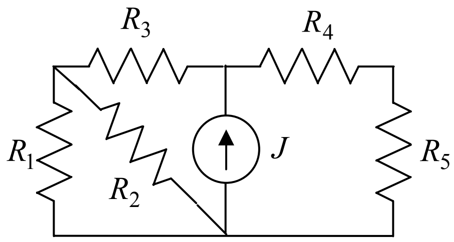
$R_3 = 3\,\Omega \quad R_4 = 2\,\Omega$

Utilizzando l'equivalenza serie e parallelo, il circuito di resistenze visto da E si può ridurre ad un unico resistore attraverso i seguenti passi:



$R_A = R_3 + R_4 = 5\,\Omega \qquad R_B = R_A \,//\, R_2 = \dfrac{R_A R_2}{R_A + R_2} = 2.22\,\Omega \qquad R_{eq} = R_B + R_1 = 3.22\,\Omega$

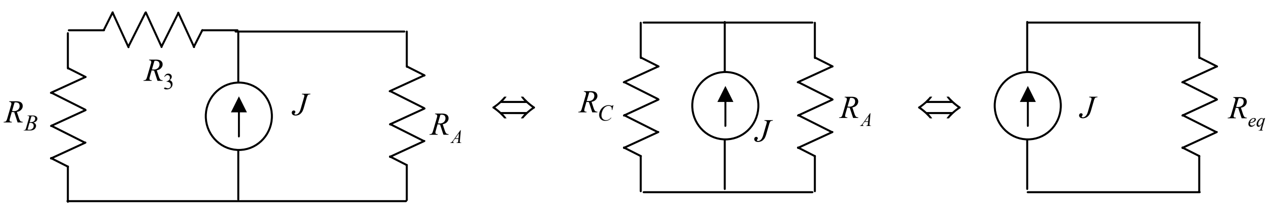
<u>ES. 1.2</u> Calcolare la resistenza equivalente vista dal generatore J.



$R_1 = R_4 = 5\,\Omega \quad R_2 = 3\,\Omega$

$R_3 = R_5 = 2\,\Omega$

Utilizzando l'equivalenza serie e parallelo, il circuito di resistenze visto da E si può ridurre ad un unico resistore attraverso i seguenti passi:



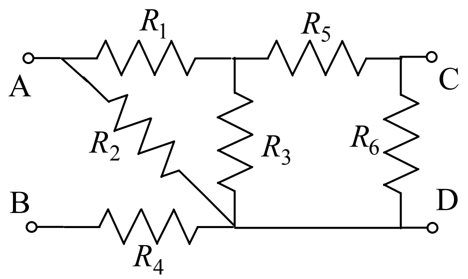
$R_A = R_4 + R_5 = 7\,\Omega$

$R_B = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 1.87\,\Omega$

$R_C = R_B + R_3 = 3.87\,\Omega$

$R_{eq} = \dfrac{R_A R_C}{R_A + R_C} = 2.49\,\Omega$

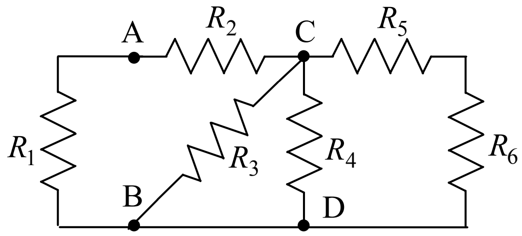
ES. 1.3 - Calcolare la R_{eq} vista ai morsetti A-B e quella vista ai morsetti C-D.



$R_1 = R_2 = 5\,\Omega \quad R_3 = 10\,\Omega$
$R_4 = 4\,\Omega \quad R_5 = 3\,\Omega$
$R_6 = 2\,\Omega$

Risultato: $R_{eqAB} = 7.125\,\Omega$, $R_{eqCD} = 1.600\,\Omega$.

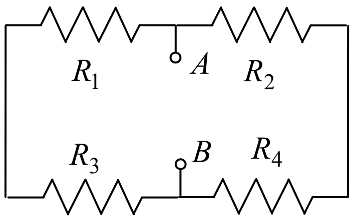
ES. 1.4 - Calcolare la R_{eq} vista ai morsetti A-B e quella vista ai morsetti C-D.



$R_1 = R_3 = 0.2\,\Omega \quad R_2 = 0.4\,\Omega$
$R_4 = R_5 = 1\,\Omega \quad R_6 = 3\,\Omega$

Risultato: $R_{eqAB} = 0.147\,\Omega$, $R_{eqCD} = 0.126\,\Omega$.

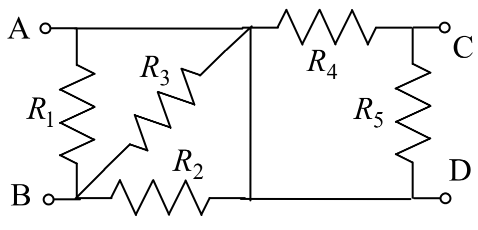
ES. 1.5 - Calcolare il valore di R_4 tale che ai morsetti A-B si abbia $R_{eq} = R$.



$R_1 = R_2 = R \quad R_3 = R/2$

Risultato: $R_4 = 2R$.

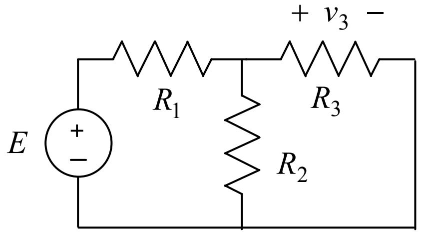
ES. 1.6 - Calcolare la R_{eq} vista ai morsetti A-B e quella vista ai morsetti C-D.



$R_1 = 2.3\text{ m}\Omega \quad R_2 = 1.4\text{ m}\Omega$
$R_3 = 1\text{ m}\Omega,\ R_4 = 3\text{ m}\Omega,\ R_5 = 0.8\text{ m}\Omega$

Risultato: $R_{eqAB} = 0.47\text{ m}\Omega$, $R_{eqCD} = 0.63\text{ m}\Omega$.

ES. 1.7 - Calcolare la tensione v_3 usando il partitore di tensione.

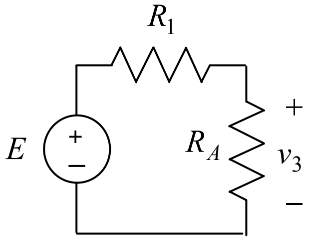


$E = 220\,V$

$R_1 = 50\ \Omega$

$R_2 = R_3 = 100\ \Omega$

Il partitore di tensione si applica a due resistori in serie, quindi occorre preliminarmente ricondursi alla rete equivalente seguente:

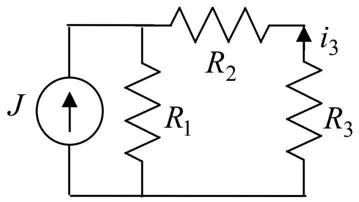


$$R_A = R_2 \,//\, R_3 = \frac{R_3 R_2}{R_3 + R_2} = 50\ \Omega$$

Applicando ora il partitore di tensione si ha:

$$v_3 = E\frac{R_A}{R_A + R_1} = 110\,V.$$

ES. 1.8 - Calcolare la corrente i_3 usando il partitore di corrente.

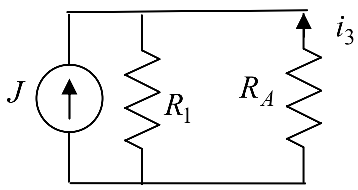


$J = 10\ mA$

$R_1 = R_3 = 5\ \mu\Omega$

$R_2 = 3\ \mu\Omega$

Il partitore di corrente si applica a due resistori in parallelo, quindi occorre riferirsi alla rete equivalente seguente:

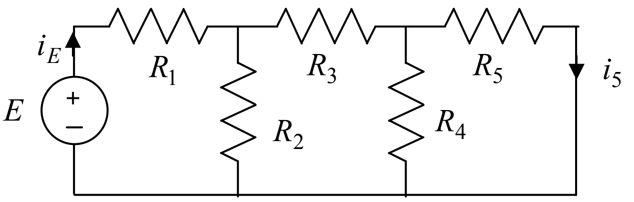


$$R_A = R_2 + R_3 = 8\ \mu\Omega$$

Applicando ora il partitore di corrente si ha (tenuto conto dei versi):

$$i_3 = -J\frac{R_1}{R_A + R_1} = -3.84\ \text{mA}.$$

<u>ES. 1.9</u> - Calcolare la potenza erogata dal generatore E e quella assorbita dal resistore R_5



$E = 10\ V$

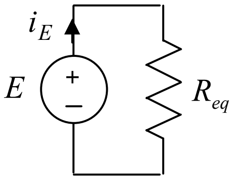
$R_1 = 10\ \Omega \quad R_2 = 2\ \Omega$

$R_3 = 3\ \Omega \quad R_4 = 5\ \Omega \quad R_5 = 2\ \Omega$

Scegliendo le correnti come in figura, le potenze richieste sono date da:

$$P_E^{erog} = Ei_E\,, \quad P_{R_5} = R_5 i_5^2\,.$$

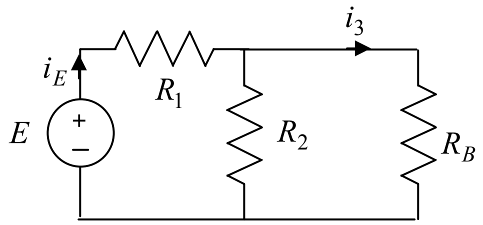
La i_E si valuta a partire dal calcolo della resistenza equivalente vista ai capi del generatore:



$$\begin{aligned} R_A &= R_4 // R_5 \\ R_B &= R_3 + R_A \\ R_C &= R_B // R_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad R_{eq} = R_1 + R_C = 11.36\,\Omega \quad \Rightarrow \quad i_E = \frac{E}{R_{eq}} = 0.88\,\text{A}$$

da cui si ricava: $P_E^{erog} = 8.80\ \text{W}$.

Nota la corrente i_E, si può ricavare la i_5 applicando due volte il partitore di corrente. Dapprima ricaviamo i_3 dalla rete equivalente seguente

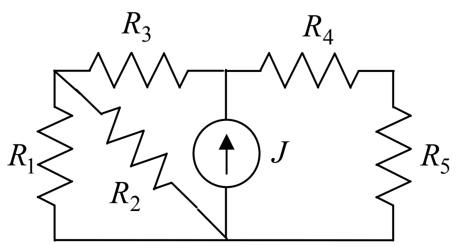


$$i_3 = i_E \frac{R_2}{R_2 + R_B}$$

quindi ricaviamo i_5 ripartendo i_3 tra i resistori R_4 ed R_5 :

$$i_5 = i_3 \frac{R_4}{R_4 + R_5} = 0.19\text{A} \quad \Rightarrow \quad P_{R_5} = 72.20\,mW.$$

<u>ES. 1.10</u> - Calcolare la **potenza erogata dal generatore J e quella assorbita dal resistore** R_1 **.**



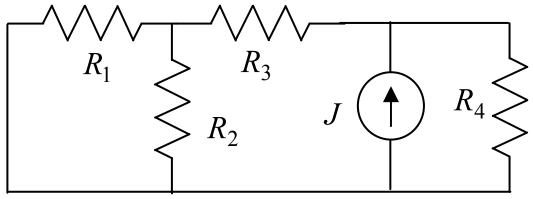
$J = 5\ A$

$R_1 = R_4 = 5\ \Omega \quad R_2 = 3\ \Omega$

$R_3 = R_5 = 2\ \Omega$

Risultato: $P_J^{erog} = 62.25\,W$, $P_{R_1} = 7.25\,W$.

<u>ES. 1.11</u> - Calcolare la potenza erogata dal generatore e quella assorbita da ogni resistore. Verificare la conservazione delle potenze.



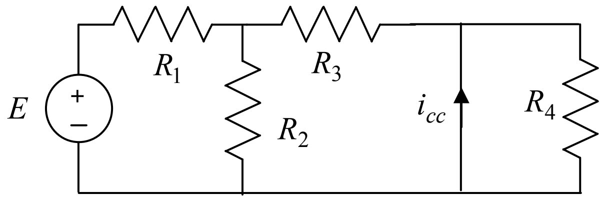
$J = 10\ A$

$R_1 = 2\ \Omega \quad R_2 = 10\ \Omega$

$R_3 = 20\ \Omega \quad R_4 = 15\ \Omega$

Risultato: $P_J^{erog} = 0.886\,\text{kW}, P_{R_1} = 0.023\,\text{kW}, P_{R_2} = 0.004\,\text{kW}, P_{R_3} = 0.335\,\text{kW}, P_{R_4} = 0.524\,\text{kW}.$

<u>ES. 1.12</u> - Calcolare la corrente i_{cc} che circola nel corto-circuito.



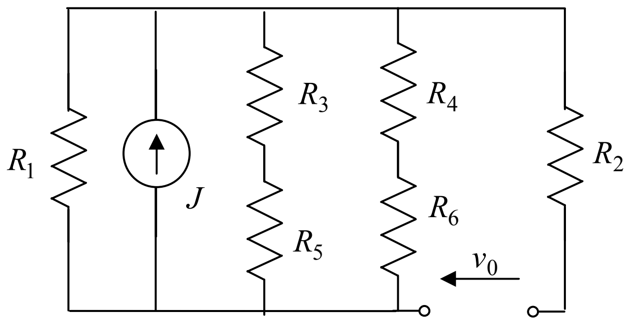
$E = 220\ V$

$R_1 = 10\ \Omega \quad R_2 = 0.1\ \text{k}\Omega$

$R_3 = 25\ \Omega \quad R_4 = 2\ \text{k}\Omega$

Risultato: $i_{cc} = -5.87$ A.

<u>ES. 1.13</u> - Calcolare la tensione v_0 sul circuito aperto in figura.



$J_1 = 1\ A$

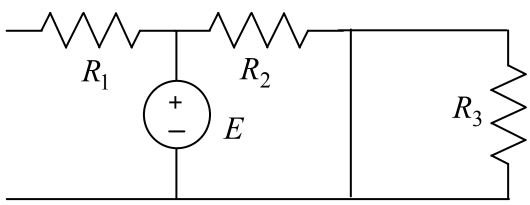
$R_1 = 10\ \Omega \quad R_2 = 10\ \Omega$

$R_3 = 15\ \Omega \quad R_4 = 5\ \Omega$

$R_5 = 30\ \Omega \quad R_6 = 25\ \Omega$

Risultato: $v_0 = -6.43$ V .

<u>ES. 1.14</u> - Valutare la potenza assorbita dai resistori della rete in figura.



$E = 10\ V$

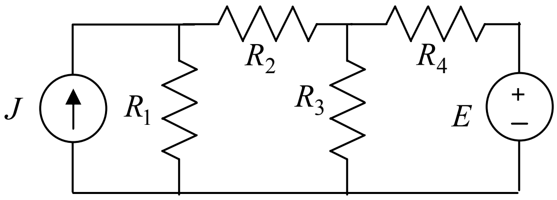
$R_1 = 10\ \Omega \quad R_2 = 1\ \Omega$

$R_3 = 100\ \Omega$

Risultato: $P_{R_1} = P_{R_3} = 0, P_{R_2} = 100$ W.

2. Sovrapposizione degli effetti.

ES. 2.1 - Calcolare la potenza totale erogata dai generatori.



$E = 10\,V \quad J = 20\,A$

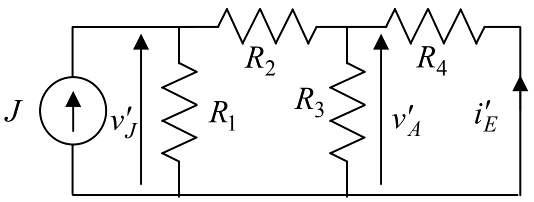
$R_1 = R_2 = 3\,\Omega$

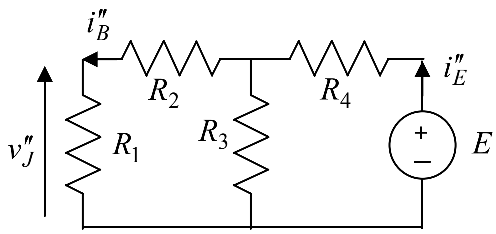
$R_3 = 2\,\Omega \quad R_4 = 5\,\Omega$

Adottando la convenzione del generatore sui due generatori della rete, la potenza erogata da ciascuno di essi sarà data da:

$$P_E^{erog} = Ei_E, \;\; P_J^{erog} = Jv_J.$$

La tensione v_J e la corrente i_E si possono valutare applicando la sovrapposizione degli effetti, risolvendo i due circuiti ausiliari ottenuti considerando un solo generatore acceso:





Con riferimento al primo circuito ausiliario, il contributo v'_J è ottenuto valutando la resistenza equivalente vista dal generatore:

$$R_{eq\,J} = (R_3 \,//\, R_4 + R_2) \,//\, R_1 = 1.79\,\Omega \quad \Rightarrow \quad v'_J = R_{eq\,J} J = 35.80 V.$$

Per valutare i'_E si può utilizzare la tensione v'_A sul parallelo $R_A = R_3 \,//\, R_4$:

$$v'_A = v'_J \frac{R_A}{R_2 + R_A} \quad \Rightarrow \quad i'_E = -\frac{v'_A}{R_4} = -2.31\,A$$

(nell'ultimo passaggio si è tenuto conto della convenzione adottata su R_4). Nel secondo circuito ausiliario, il contributo i''_E è ottenuto valutando la resistenza equivalente vista dal generatore:

$$R_{eq\,E} = (R_1 + R_2) \,//\, R_3 + R_4 = 6.50\,\Omega \quad \Rightarrow \quad i''_E = E / R_{eq\,E} = 1.54\,A.$$

Per valutare v''_J è utile passare attraverso il calcolo della corrente i''_B della serie $R_B = R_1 + R_2$:

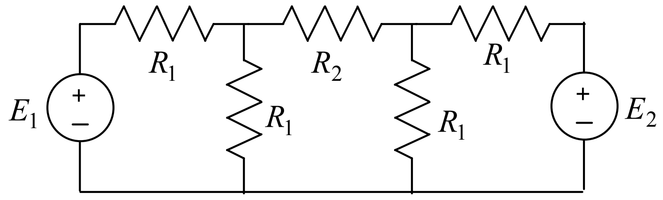
$$i''_B = i''_E \frac{R_3}{R_B + R_3} \quad \Rightarrow \quad v''_J = R_1 i''_B = 1.14\,V\,.$$

Se ne conclude che:

$$P_E^{erog} = Ei_E = E(i'_E + i''_E) = -7.70\,\text{W}, \quad P_J^{erog} = Jv_J = J(v'_J + v''_J) = 0.74\,\text{kW}.$$

(Si osservi che in questa rete il generatore di tensione sta assorbendo potenza elettrica positiva).

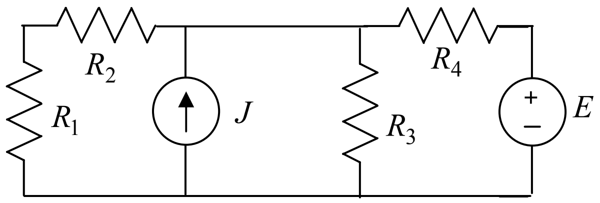
<u>ES. 2.2</u> - Calcolare la potenza totale erogata dai generatori.



$E_1 = 10$ V, $E_2 = 20$ V
$R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 1\ \Omega$

Risultato: $P_{E_1}^{erog} = 16.67$ W, $P_{E_2}^{erog} = 0.12$ kW.

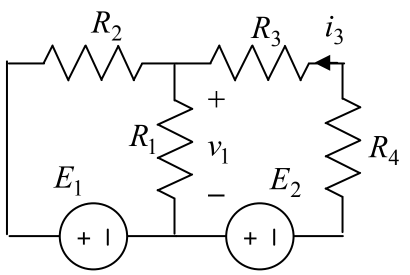
<u>ES. 2.3</u> - Calcolare la potenza totale erogata dai generatori.



$E = 50\ V$ $J = 20\ A$
$R_1 = 1\ \Omega$ $R_2 = 5\ \Omega$
$R_3 = R_4 = 10\ \Omega$

Risultato: $P_{E}^{erog} = -0.09$ kW, $P_{J}^{erog} = 1.36$ kW.

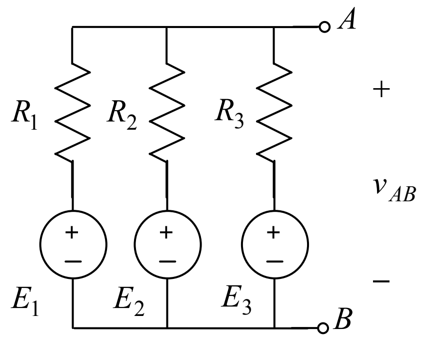
<u>ES. 2.4</u> - Calcolare la tensione v_1 e la corrente i_3.



$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2\ \Omega$
$E_1 = 5$ V, $E_2 = 2$ V

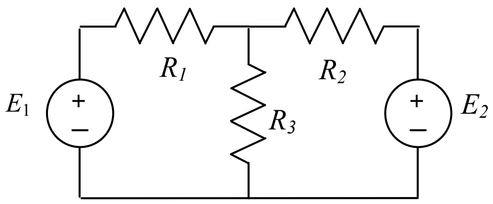
Risultato: $v_1 = 1.60$ V, $i_3 = -0.90$ A.

<u>ES. 2.5</u> - Utilizzando la sovrapposizione degli effetti, dimostrare la Formula di Millmann.



$$v_{AB} = \frac{\dfrac{E_1}{R_1} + \dfrac{E_2}{R_2} + \dfrac{E_3}{R_3}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}}$$

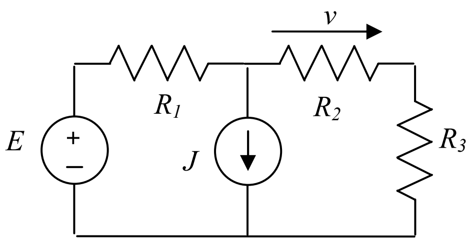
ES. 2.6 - Determinare la potenza erogata dal generatore E_1.



$E_1 = 5\,V, E_2 = 12,$
$R_1 = 3.5\,\Omega, R_2 = 2.3\,\Omega, R_3 = 3.2\,\Omega.$

Risultato: $P_{E_1}^{erog} = -2.05$ W.

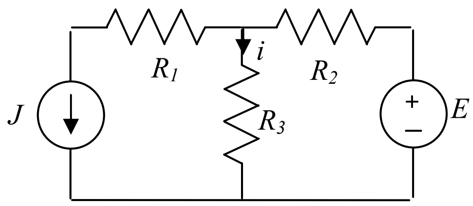
ES. 2.7 - Utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, determinare la tensione v.



$E = 5\,V, J = 2\,mA$
$R_1 = 3$ kΩ, $R_2 = 2.4$ kΩ, $R_3 = 3.2$ kΩ

Risultato: $v = 0.28$ V.

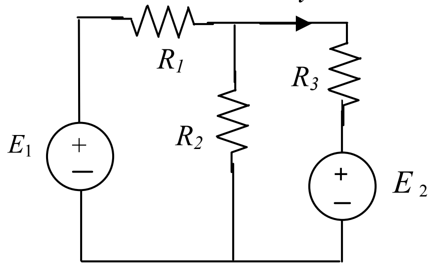
ES. 2.8 - Utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, determinare la corrente i e la potenza assorbita da R_3



$E = 10\,V, J = 1\,mA$
$R_1 = 3.2$ kΩ, $R_2 = 2.2$ kΩ, $R_3 = 3.5$ kΩ

Risultato: $i = 1.37$ mA, $P = 6.57$ mW.

ES. 2.9 - Valutare la corrente i e la potenza erogata dal generatore E_1.

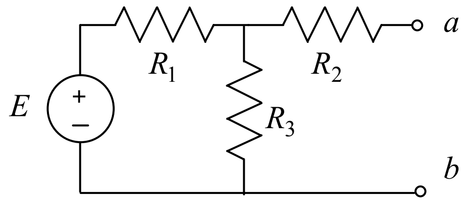


$E_1 = 10\,V, \quad E_2 = 20\,V$
$R_1 = 5\,\Omega, \quad R_2 = 20\,\Omega, \quad R_3 = 10\,\Omega$

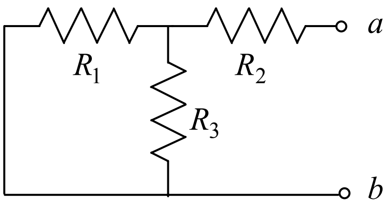
Risultato: $i = -0.86$ A, $P_{E_1}^{erog} = -2.86$ W.

3. Generatori equivalenti di Thévenin e di Norton.

ES. 3.1 - Calcolare l'equivalente di Thévenin visto ai capi dei morsetti a-b.



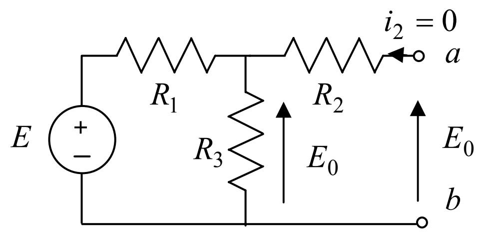
La resistenza equivalente si ottiene spegnendo l'unico generatore, quindi studiando la rete seguente



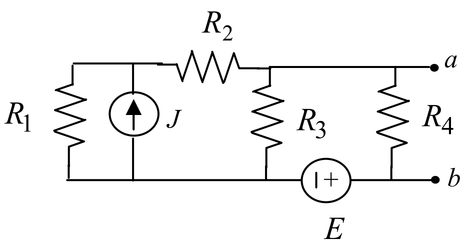
$$R_{eq} = R_2 + R_1 // R_3 = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}.$$

La tensione a vuoto E_0 si ottiene valutando la tensione tra i morsetti aperti. Tenuto conto che in queste condizioni non circola corrente sul resistore R_2 è evidente che la E_0 è anche la tensione su R_3. Poiché R_1 ed R_3 sono in serie, la tensione E_0 si può ricavare da un semplice partitore di tensione:

$$E_0 = E \frac{R_3}{R_1 + R_3}.$$



ES. 3.2 - Calcolare l'equivalente di Norton visto ai capi dei morsetti a-b.



$J = 20\ A \qquad E = 10\ V$

$R_1 = R_2 = 2\ \Omega$

$R_3 = R_4 = 4\ \Omega$

La resistenza equivalente si ottiene spegnendo i generatori:

$$R_{eq} = R_4 //[R_3 //(R_1 + R_2)] = 1.33\,\Omega$$

La corrente I_{cc} è la corrente che circola da a a b quando i due morsetti sono in corto-circuito. Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, il contributo I'_{cc} dovuto al solo generatore di corrente si valuta sostituendo il generatore di tensione con un corto-circuito e applicando la formula del partitore di corrente:

$$I'_{cc} = J \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 10\ A$$

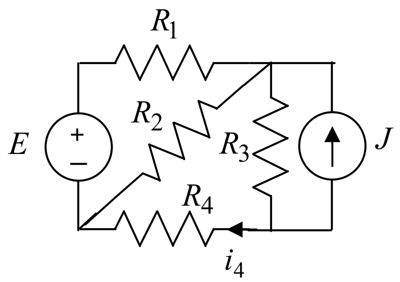
(si noti che R_3 ed R_4 sono cortocircuitate). Il contributo I''_{cc} dovuto al generatore di tensione si valuta sostituendo il generatore di corrente con un circuito aperto. In questo circuito I''_{cc} è proprio la corrente che circola nel generatore di tensione (si noti che su tale generatore è fatta la convenzione dell'utilizzatore):

$$I''_{cc} = -\frac{E}{R_E} = -5\ A\,,$$

dove $R_E = (R_1 + R_2) // R_3 = 2\,\Omega$. Pertanto la I_{cc} sarà

$$I_{cc} = I'_{cc} + I''_{cc} = 5\ A\,.$$

<u>ES. 3.3</u> - Utilizzando l'equivalente di Norton calcolare la corrente che circola in R_4.



$E = 54\ V$

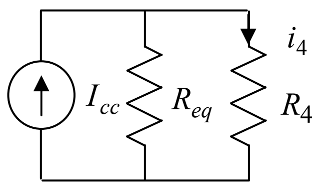
$J = 10\ A$

$R_1 = 6\,\Omega \quad R_2 = R_3 = 4\,\Omega$

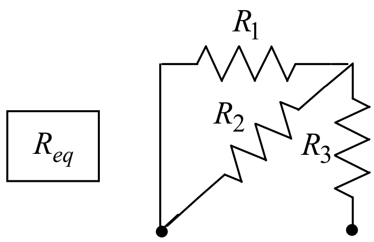
$R_4 = 12\,\Omega$

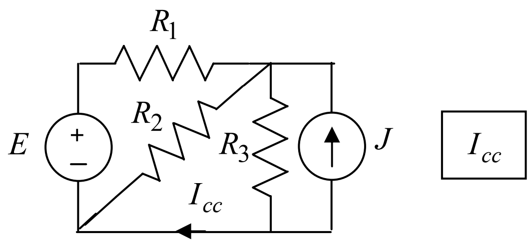
Riducendo la rete vista ai capi di R_4 con il teorema di Norton, si ottiene la rete seguente, dalla quale si evince che

$$i_4 = I_{cc} \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R_4}.$$



I circuiti per valutare i parametri di Norton sono riportati di seguito:





Si avrà allora

$$R_{eq} = R_1 // R_2 + R_3 = 6.40\,\Omega\,.$$

La corrente I_{cc} si può valutare applicando il principio di sovrapposizione degli effetti. Il contributo I'_{cc} dovuto al solo generatore di corrente si valuta sostituendo il generatore di tensione con un corto-circuito e applicando la formula del partitore di corrente:

$$I'_{cc} = -J \frac{R_3}{R_3 + (R_1 // R_2)} = -6.250 \text{ A}$$

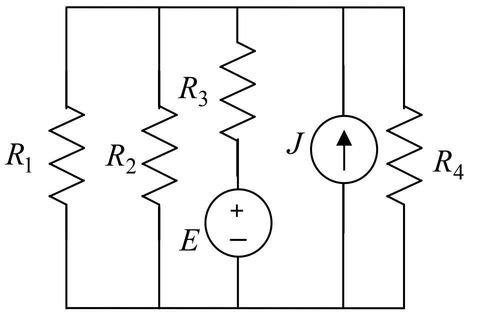
Il contributo I''_{cc} dovuto al generatore di tensione si valuta sostituendo il generatore di corrente con un circuito aperto. Applicando il partitore di tensione si può ricavare la tensione sul parallelo $R_p = R_2 // R_3$ e quindi ricavare la corrente richiesta (che circola in R_3).

$$v''_p = E \frac{R_p}{R_1 + R_p} \quad \Rightarrow \quad I''_{cc} = \frac{v''_p}{R_3} = 3.375 \text{ A}.$$

Si ottiene in definitiva

$$I_{cc} = I'_{cc} + I''_{cc} = -2.875 \text{ A} \qquad \Rightarrow \qquad i_4 = -1.000 \text{ A}.$$

<u>ES. 3.4</u> - Utilizzando il teorema di Thévenin calcolare la potenza assorbita dal resistore R_2.



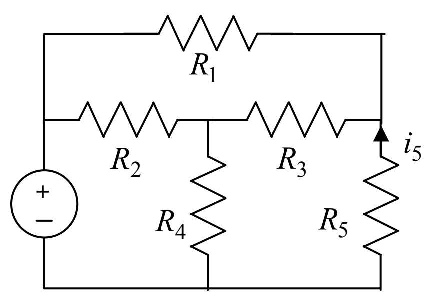
$E = 1\,V \quad J = 2\,mA$

$R_1 = R_2 = 1\,k\Omega \quad R_3 = 2\,k\Omega$

$R_4 = 5\,k\Omega$

Risultato: $P_{R_2} = 0.85\,mW$.

<u>ES. 3.5</u> - Utilizzando il teorema di Thévenin calcolare la corrente i_5.



$E = 12\,V$

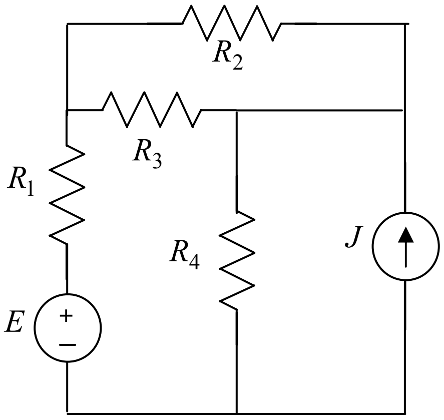
$R_1 = R_3 = 0.2\,k\Omega$

$R_2 = 0.6\,k\Omega$

$R_4 = R_5 = 0.4\,k\Omega$

Risultato: $i_5 = -18\,mA$.

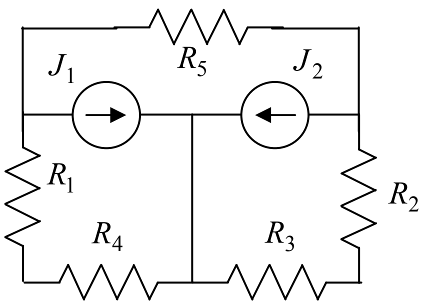
ES. 3.6 - **Utilizzando il teorema di Norton calcolare la potenza assorbita dal resistore R_3.**



$E = 5\,V$
$J = 1\,\mu A$
$R_1 = R_3 = 2\,M\Omega$
$R_2 = 800\,k\Omega$
$R_4 = 300\,k\Omega$

Risultato: $P_{R_3} = 0.43\,\mu W$.

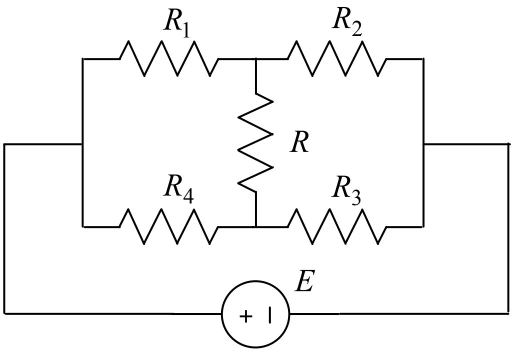
ES. 3.7 - **Utilizzando il teorema di Thévenin calcolare la potenza assorbita da R_5.**



$J_1 = 2$ mA
$J_2 = 1$ mA
$R_1 = R_2 = 2$ kΩ
$R_3 = R_5 = 10$ kΩ
$R_4 = 3$ kΩ

Risultato: $P_{R_5} = 54.87\,\mu W$.

ES. 3.8 - **Verificare che il resistore R non è percorso da corrente se tra le resistenze vi è la seguente relazione (ponte di Wheatstone):**

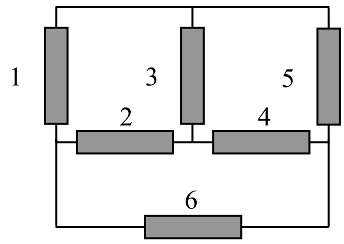


$$\frac{R_1}{R_4} = \frac{R_2}{R_3}$$

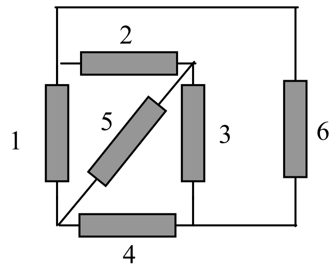
(Suggerimento: applicare Norton ai capi di R ed imporre che sia nulla la corrente I_{cc})

4. Metodi generali per l'analisi delle reti in regime stazionario.

<u>ES. 4.1</u> - Date le seguenti reti di bipoli, scrivere un sistema completo di equazioni di Kirchhoff indipendenti.



(a)



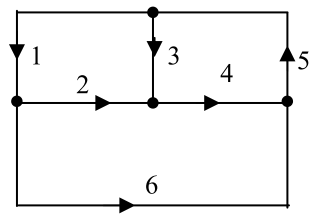
(b)

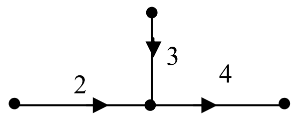
Rete (a)

Orientando il grafo come in figura e scegliendo, ad esempio, l'albero indicato, un possibile sistema completo di equazioni di Kirchhoff è dato da:

$$\text{LKC}\quad \begin{cases} -i_1 + i_2 + i_6 = 0 \\ -i_2 - i_3 + i_4 = 0 \\ -i_4 + i_5 - i_6 = 0 \end{cases}$$

$$\text{LKT}\quad \begin{cases} v_1 + v_2 - v_3 = 0 \\ v_3 + v_4 + v_5 = 0 \\ -v_2 - v_4 + v_6 = 0 \end{cases}$$



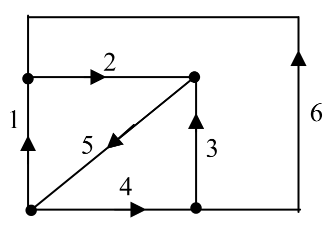


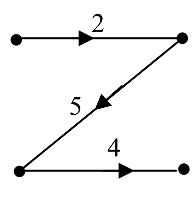
Rete (b)

Orientando il grafo come in figura e scegliendo, ad esempio, l'albero indicato, un possibile sistema completo di eq. di Kirchhoff è dato da:

$$\text{LKC}\quad \begin{cases} -i_1 + i_2 - i_6 = 0 \\ -i_2 - i_3 + i_5 = 0 \\ i_3 - i_4 + i_6 = 0 \end{cases}$$

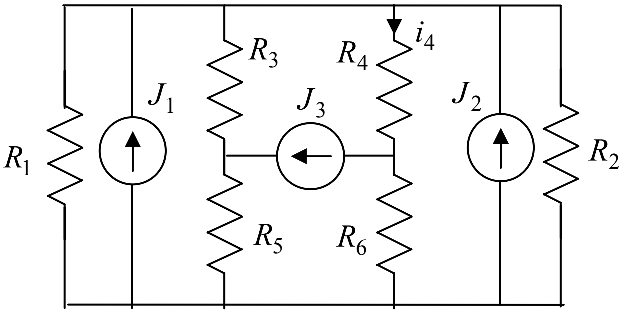
$$\text{LKT}\quad \begin{cases} -v_1 - v_2 - v_5 = 0 \\ v_2 + v_4 + v_5 + v_6 = 0 \\ v_3 + v_4 + v_5 = 0 \end{cases}$$





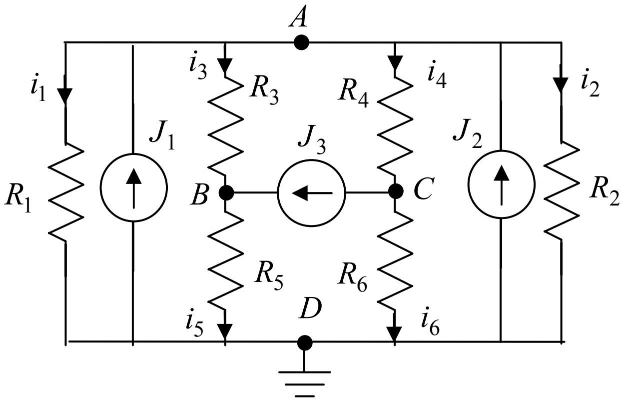
Si osservi che su tutti i bipoli delle reti (a) e (b) è stata adottata la stessa convenzione.

ES. 4.2 - Utilizzando il metodo dei potenziali nodali calcolare la corrente nel resistore R_4.



$J_1 = J_2 = 1\ A \quad J_3 = 3\ A$
$R_1 = 30\ \Omega \quad R_2 = 10\ \Omega$
$R_3 = 25\ \Omega \quad R_4 = 5\ \Omega$
$R_5 = 35\ \Omega \quad R_6 = 15\ \Omega$

Si individuino i nodi della rete e si orientino tutte le correnti nei resistori, adottando su di essi la convenzione normale:



Avendo scelto come potenziale di riferimento quello del nodo D, le incognite saranno i potenziali degli altri tre nodi: e_A, e_B, e_C . Per le convenzioni adottate si ha:

$$v_1 = v_2 = e_A,\ v_3 = e_A - e_B,\ v_4 = e_A - e_C,\ v_5 = e_B,\ \ v_6 = e_C.$$

Applicando la LKC ai nodi A, B, C e sostituendo le caratteristiche dei resistori (scritte con riferimento alle conduttanze) si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = J_1 + J_2 \\ -i_3 + i_5 = J_3 \\ -i_4 + i_6 = -J_3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_1 e_A + G_2 e_A + G_3(e_A - e_B) + G_4(e_A - e_C) = J_1 + J_2 \\ -G_3(e_A - e_B) + G_5 e_B = J_3 \\ -G_4(e_A - e_C) + G_6 e_C = -J_3 \end{cases}$$

Si osservi che tale sistema può essere posto nella forma matriciale:

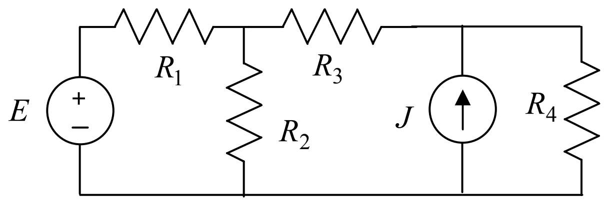
$$\begin{vmatrix} G_1 + G_2 + G_3 + G_4 & -G_3 & -G_4 \\ -G_3 & G_3 + G_5 & 0 \\ -G_4 & 0 & G_4 + G_6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e_A \\ e_B \\ e_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_1 + J_2 \\ J_3 \\ -J_3 \end{vmatrix}$$

Risolvendo tale sistema si ottiene:

$$e_A = 7.500\,V, \quad e_B = 48.125\,V, \quad e_C = -5.625\,V$$

da cui: $\quad i_4 = \dfrac{v_4}{R_4} = G_4(e_A - e_C) = 2.625\ A.$

ES. 4.3 - Utilizzando il metodo dei potenziali nodali modificato calcolare la potenza erogata dai due generatori e la potenza assorbita dai resistori (verificare la conservazione delle potenze).

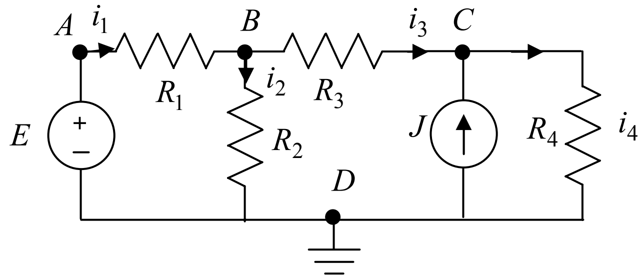


$E = 50\,V \quad J = 60\,A$

$R_1 = 5\,\Omega \quad R_2 = 40\,\Omega$

$R_3 = 80\,\Omega \quad R_4 = 120\,\Omega$

Si individuino i nodi della rete e si orientino tutte le correnti nei resistori, adottando su di essi la convenzione normale:



Avendo scelto come potenziale di riferimento quello del nodo D, le incognite saranno i potenziali degli altri tre nodi: e_A, e_B, e_C . Per la presenza del generatore di tensione tra nodo A e nodo D, si ha banalmente $e_A = E$. Con le convenzioni adottate si ha:

$$v_1 = E - e_B,\ v_2 = e_B,\ v_3 = e_B - e_C,\ v_4 = e_C.$$

Applicando la LKC ai nodi B e C e sostituendo le caratteristiche dei resistori (scritte con riferimento alle conduttanze) si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} -i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ -i_3 + i_4 = J \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (G_1 + G_2 + G_3)e_B - G_3 e_C = G_1 E \\ -G_3 e_B + (G_3 + G_4)e_C = J \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si ottiene:

$$e_B = 0.20\,kV, \quad e_C = 3.00\,kV\ .$$

Adottando la convenzione del generatore sui due generatori si ha:

$$P_E^{erog} = Ei_E = Ei_1 = EG_1 v_1 = EG_1(E - e_B) = -1.50\,kW$$

$$P_J^{erog} = Jv_J = Jv_4 = Je_C = 180.00\,kW$$

$$P_{R_1} = G_1 v_1^2 = G_1(E - e_B)^2 = 4.50\,kW$$

$$P_{R_2} = G_2 v_2^2 = G_2 e_B^2 = 1.00\,kW$$

$$P_{R_3} = G_3 v_3^2 = G_3(e_B - e_C)^2 = 98.00\,kW$$

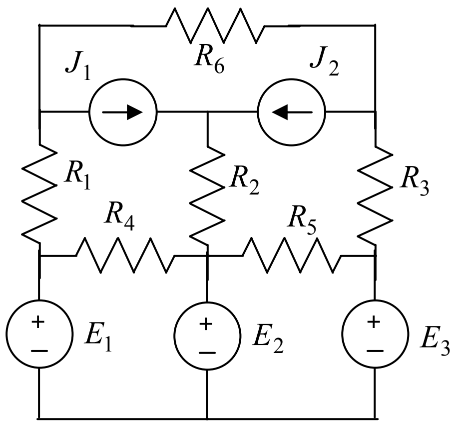
$$P_{R_4} = G_4 v_4^2 = G_4 e_C^2 = 75.00\,kW$$

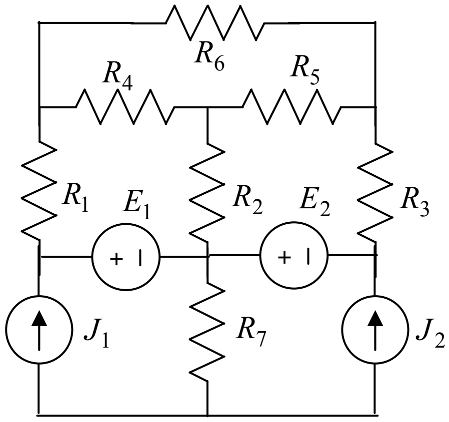
È facile verificare che $P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} + P_{R_4} = P_E^{erog} + P_J^{erog}$.

<u>ES. 4.4</u> - Con riferimento alla seguenti reti:

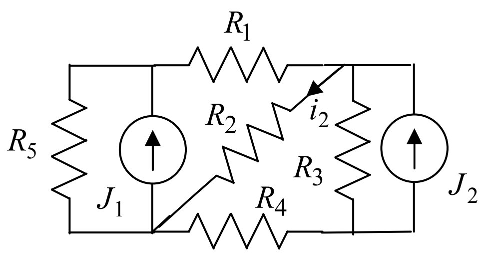
a) scrivere il sistema completo delle equazioni di Kirchhoff e delle equazioni caratteristiche (utilizzare grafo, albero e co-albero).

b) scrivere il suddetto sistema in forma matriciale, individuando le matrici di incidenza ridotta e di maglia fondamentale.





<u>ES. 4.5</u> - Utilizzando il metodo delle correnti di maglia calcolare la corrente in R_2.



$J_1 = 10\ A$

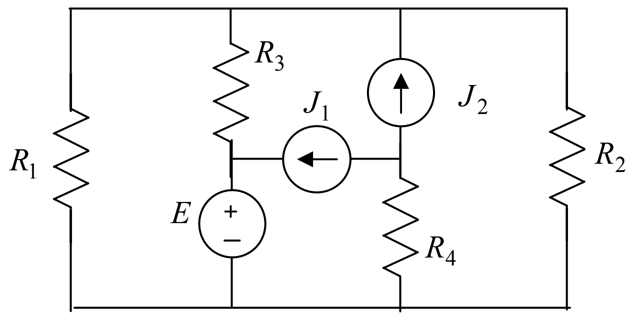
$J_2 = 5\ A$

$R_1 = 2\ \Omega \quad R_2 = R_3 = 3\ \Omega$

$R_4 = R_5 = 5\ \Omega$

Risultato: $i_2 = 5\ A.$.

<u>ES. 4.6</u> - Utilizzando il metodo delle correnti di maglia calcolare la potenza erogata da ciascun generatore della rete.



$J_1 = J_2 = 1\ \text{mA},\ E = 2\ \text{mV}$

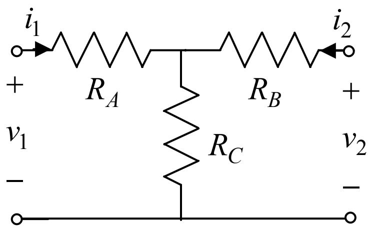
$R_1 = 0.3\ \Omega \quad R_2 = 0.2\ \Omega$

$R_3 = 0.4\ \Omega \quad R_4 = 0.5\ \Omega$

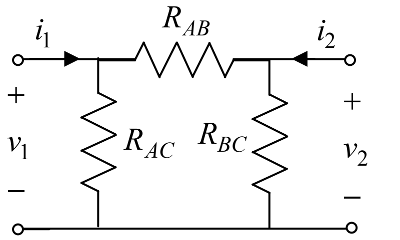
Risultato: $P_E^{erog} = 5.2\ \mu\text{W},\ P_{J_1}^{erog} = 3.0\ \mu\text{W},\ P_{J_2}^{erog} = 1.6\ \mu\text{W}.$

5. Analisi di reti con doppi-bipoli resistivi e generatori pilotati

ES. 5.1 - Analizzando i seguenti doppi-bipoli:



schema a T (stella)



schema a Π (triangolo)

a) **verificare che lo schema a T realizza una qualunque matrice R con le posizioni seguenti (formule di sintesi):** $R_A = R_{11} - R_m,\ R_B = R_{22} - R_m, R_C = R_m;$

b) **verificare che lo schema a Π realizza una qualunque matrice G con le posizioni seguenti (formule di sintesi):** $G_{AC} = G_{11} + G_m,\ G_{BC} = G_{22} + G_m,\ G_{AB} = -G_m;$

c) **verificare le seguenti formule di trasformazione stella-triangolo (suggerimento: imporre l'equivalenza tra gli schemi a T e a Π):**

$Y \rightarrow \Delta$

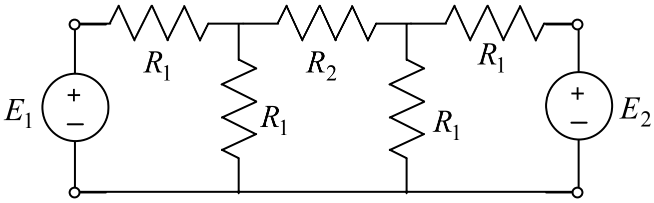
$$R_{AB} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_C}$$
$$R_{AC} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_B}$$
$$R_{BC} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_A}$$

$\Delta \rightarrow Y$

$$R_A = \frac{R_{AB} R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$
$$R_B = \frac{R_{AB} R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$
$$R_C = \frac{R_{AC} R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

ES. 5.2 - Con riferimento alla seguente rete:

a. **caratterizzare attraverso la matrice G il doppio bipolo resistivo visto ai capi dei generatori;**
b. **utilizzare la matrice G per calcolare la potenza assorbita dal doppio-bipolo;**

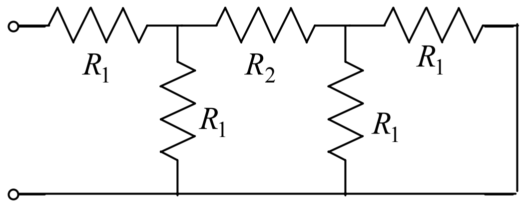


$E_1 = E_2 = 10\ V$

$R_1 = 2\ \Omega \quad R_2 = 1\ \Omega$

a.) L'elemento G_{11} è definito come:

$$G_{11} = \left.\frac{i_1}{v_1}\right|_{v_2=0}$$

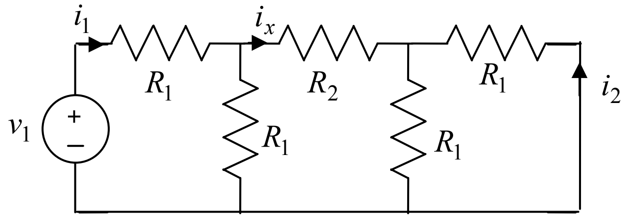


quindi corrisponde alla conduttanza di ingresso della rete descritta in alto. Applicando le regole di equivalenza serie e parallelo di conduttanze si ottiene:

$$G_{11} = \frac{G_1\left(G_1 + \dfrac{2G_1G_2}{2G_1+G_2}\right)}{2G_1 + \dfrac{2G_1G_2}{2G_1+G_2}} = 0.33\ S\,.$$

Per la simmetria della rete rispetto alle due porte, si ha anche $G_{11} = G_{22}$ (si provi a dimostrarlo). L'elemento G_{12} è definito come:

$$G_{12} = \left.\frac{i_2}{v_1}\right|_{v_2=0}$$



Il circuito per il calcolo di tale parametro è disegnato in alto. Si osservi che:

$$G_{12} = \left.\frac{i_2}{v_1}\right|_{v_2=0} = \left.\frac{i_1}{v_1}\right|_{v_2=0} \cdot \left.\frac{i_2}{i_1}\right|_{v_2=0} = G_{11} \cdot \left.\frac{i_2}{i_1}\right|_{v_2=0}$$

quindi ci si riporta al calcolo di $\left.\dfrac{i_2}{i_1}\right|_{v_2=0}$, che può essere effettuato con l'applicazione reiterata del partitore di corrente:

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{-i_x/2}{i_1} = -\frac{1}{2i_1} i_1 \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_1/2} = -0.25$$

da cui: $G_{12} = -0.25 \cdot G_{11} = -0.08\ S$.

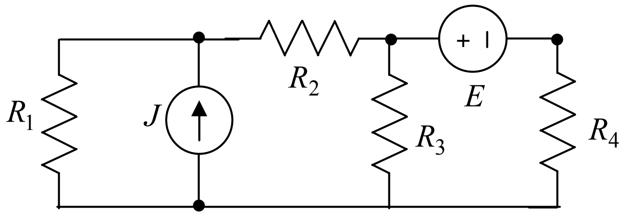
Si provi a verificare che $G_{12} = G_{21} = G_m$, proprietà valida per tutti i doppi-bipoli reciproci.

b.) Introdotto il vettore $\mathbf{e}^T = |E_1 \quad E_2|$, la potenza assorbita dal doppio-bipolo è esprimibile come:

$$P = \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{i} = \mathbf{e}^T \cdot \underline{\underline{G}} \cdot \mathbf{e} = G_{11}E_1^2 + G_{22}E_2^2 + 2G_m E_1 E_2 = 50\ W.$$

ES. 5.3 - **Con riferimento alla seguente rete:**

a) caratterizzare attraverso la matrice H il doppio bipolo resistivo visto ai capi dei generatori;
b) utilizzare la matrice H per calcolare la potenza assorbita da tale doppio-bipolo;

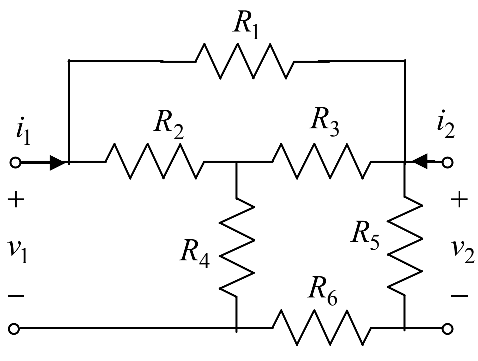


$E = 50\,V \quad J = 20\,A$
$R_1 = 1\,\Omega \quad R_2 = 5\,\Omega$
$R_3 = R_4 = 10\,\Omega$

Risultato: a) $H_{11} = 0.909\,\Omega,\ H_{22} = 0.073\,S,\ H_{12} = -H_{21} = 0.045$; b) $P = 0.546\,kW$.

ES. 5.4 - **Con riferimento al seguente doppio-bipolo:**

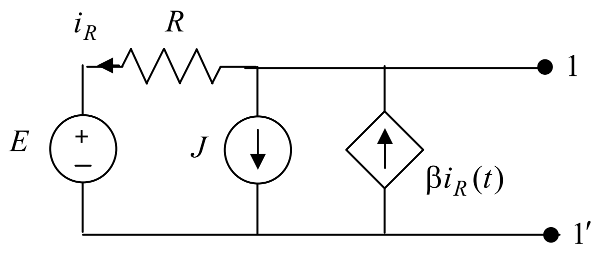
a) caratterizzarlo attraverso la matrice R;
b) sintetizzare un doppio-bipolo equivalente con uno schema a T;



$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$
$R_5 = \frac{2}{3}R \quad R_6 = \frac{1}{3}R$
$R = 24\,\Omega$

Risultato: a) $R_{11} = 24\,\Omega,\ R_{22} = 12\,\Omega,\ R_m = 8\,\Omega$; b) $R_A = 16\,\Omega,\ R_B = 4\,\Omega,\ R_C = 8\,\Omega$.

ES. 5.5 - **Valutare l'equivalente di Thévenin ai capi dei morsetti 1-1'**



Risultato: $V_0 = E + \frac{RJ}{\beta - 1}$, $R_{eq} = \frac{R}{1-\beta}$.

Per calcolare V_0 basta applicare la LKC e la LKT:

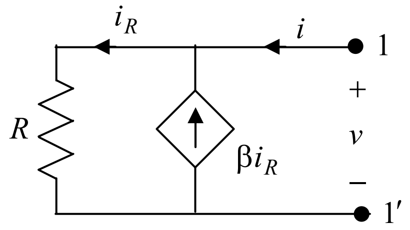
$$i_R - \beta i_R = -J \quad \Rightarrow \quad i_R = \frac{J}{\beta - 1}, \qquad\qquad V_0 = E + Ri_R = E + \frac{RJ}{\beta - 1}$$

Per calcolare R_{eq} occorre spegnere tutti (e soli) i generatori indipendenti, cioè E e J, e valutare

$$i = i_R - \beta i_R \Rightarrow \; i = (1-\beta) i_R$$

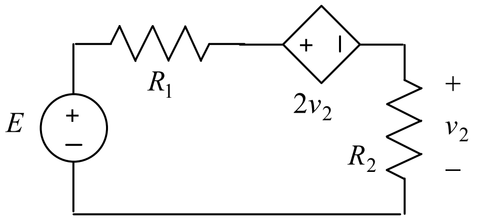
$$i_R = \frac{v}{R}$$

$$R_{eq} = \frac{v}{i} = \frac{R}{1-\beta}$$



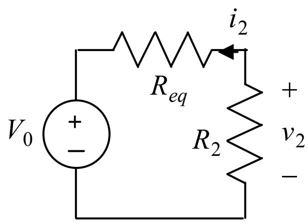
Per $\beta > 1$ si ha $R_{eq} < 0$, risultato plausibile visto che nella rete è presente un bipolo attivo. Per $\beta = 1$ non esiste il circuito equivalente di Thévenin.

<u>ES. 5.6</u> - Per il circuito in esame, determinare il valore di R_2 che rende massima la potenza assorbita dallo stesso resistore R_2.



$E = 6\,V$
$R_1 = 6\,\Omega$

La condizione di massimo trasferimento di potenza su R_2 si può trovare immediatamente una volta rappresentata tutta la rete vista ai capi di R_2 attraverso il generatore equivalente di Thévenin: $R_2 = R_{eq}$.



Il calcolo di R_{eq} può essere effettuato facilmente applicando Kirchhoff:

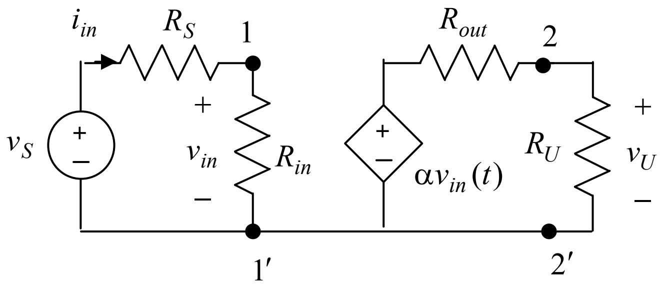
$$R_{eq} = \left.\frac{v_2}{i_2}\right|_{E=0} = \frac{v_2}{\dfrac{v_2 + 2v_2}{R_1}} = \frac{R_1}{3} = 2\,\Omega\,.$$

<u>ES. 5.7</u> - Per il circuito Il seguente circuito rappresenta lo schema equivalente di un amplificatore di tensione. Calcolare:

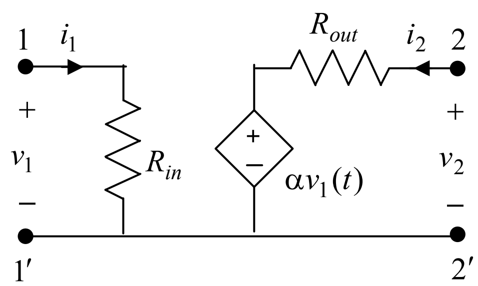
a) la matrice delle conduttanze del doppio bipolo ai capi dei morsetti 1-1' e 2-2';

b) il guadagno di tensione $A_v = v_U / v_S$

c) i valori dei parametri R_{in} **ed** R_{out} **per cui il guadagno** A_v **è massimo.**



a) Orientando correnti e tensioni del doppio-bipolo come nella figura a lato, la matrice delle conduttanze si valuta applicando la definizione:



$$G_{11} = \left.\frac{i_1}{v_1}\right|_{v_2=0} = \frac{i_1}{R_{in} i_1} = \frac{1}{R_{in}};$$

$$G_{12} = \left.\frac{i_1}{v_2}\right|_{v_1=0} = \left.\frac{v_1}{R_{in} v_2}\right|_{v_1=0} = 0\,;$$

$$G_{21} = \left.\frac{i_2}{v_1}\right|_{v_2=0} = -\frac{\alpha v_1}{R_{out} v_1} = -\frac{\alpha}{R_{out}}; \qquad G_{22} = \left.\frac{i_2}{v_2}\right|_{v_1=0} = \frac{v_2}{R_{out} v_2} = \frac{1}{R_{out}}.$$

Si osservi che $G_{12} \neq G_{21}$, cioè il doppio-bipolo non è reciproco.

b) analizzando la maglia alla porta 1 e quella alla porta 2 si ottiene:

$$v_{in} = v_s \frac{R_{in}}{R_{in} + R_S}, \qquad v_u = \alpha v_{in} \frac{R_U}{R_{out} + R_U},$$

da cui

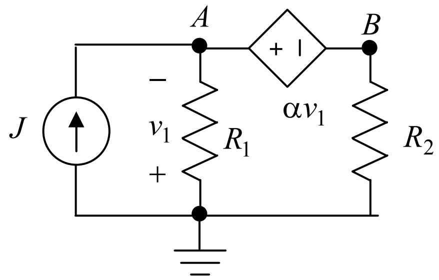
$$A_v = \frac{v_u}{v_s} = \alpha \frac{R_{in}}{R_{in} + R_S} \frac{R_U}{R_{out} + R_U}.$$

c) Osservando l'espressione di A_v è semplice verificare che il massimo è dato da

$$A_{v\max} = \alpha$$

e si ottiene per $R_{in} \to \infty,\ R_{out} \to 0$.

ES. 5.8 - Calcolare i potenziali di nodo del circuito seguente.



$J = 3\ A$
$R_1 = 4\ \Omega \quad R_2 = 10\ \Omega$
$\alpha = 4$

Indicando con V_A, V_B i potenziali dei nodi A e B si ha che

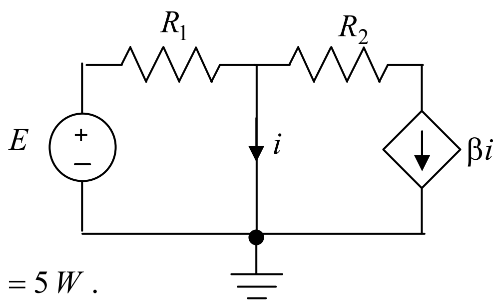
$$V_A = -v_1 \quad \Rightarrow \quad V_A - V_B = \alpha v_1 = -\alpha V_A \quad \Rightarrow \quad V_B = (1+\alpha)V_A .$$

Applicando il metodo dei potenziali nodali (modificato) si ha:

$$\begin{cases} \dfrac{V_A}{R_1} - i = J \\ \dfrac{V_B}{R_2} + i = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_A}{R_1} + \frac{V_B}{R_2} = J \quad \Rightarrow \quad \frac{V_A}{R_1} + \frac{(1+\alpha)}{R_2} V_A = J \quad \Rightarrow \quad V_A = \frac{J}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{(1+\alpha)}{R_2}} = 4\ V$$

$V_B = (1+\alpha)V_A = 20\ V$.

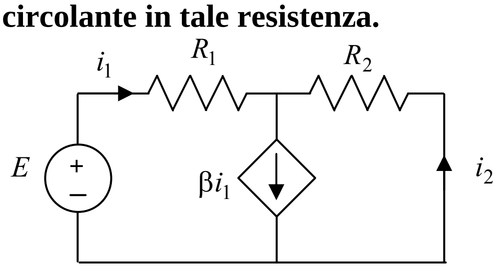
ES. 5.9 - Calcolare la potenza dissipata in R_2.



$E = 6\ V$
$R_1 = 10\ \Omega \quad R_2 = 20\ \Omega$
$\beta = 5$

Risultato: $P_2 = 5\ W$.

ES. 5.10 - Con riferimento al seguente circuito, valutare l'equivalente di Norton ai capi di R_2 e la corrente i_2 circolante in tale resistenza.



Risultato: $I_{cc} = (1-\beta)\dfrac{E}{R_1}$, $R_{eq} = \dfrac{R_1}{1-\beta}$, $i_2 = -I_{cc}\dfrac{R_{eq}}{R_2 + R_{eq}}$.