Le equazioni del campo:

Nel caso stazionario le equazioni di Maxwell si disaccoppiano.

Le equazioni del campo elettrostatico nel vuoto risultano essere:

$$\oint_{\mathcal{F}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{I} = 0 \tag{8.1}$$

$$\varepsilon_0 \oint_{S} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = Q_{\text{int}}$$
(8.2)

Distribuzioni di carica a simmetria sferica

Si assuma che la carica sia distribuita all'interno di una sfera di raggio *a* con densità ρ uniforme. Si consideri un sistema di coordinate sferico (r, θ, ϕ) con origine nel centro della distribuzione di carica (fig. 8.1). In questo sistema il campo sarà in genere espresso come:

$$\mathbf{E}(r,\theta,\phi) = E_r(r,\theta,\phi)\mathbf{\hat{i}}_r + E_{\theta}(r,\theta,\phi)\mathbf{\hat{i}}_{\theta} + E_{\phi}(r,\theta,\phi)\mathbf{\hat{i}}_{\phi}$$



Fig. 8.1

La simmetria impone l'invarianza del sistema per rotazione¹. Il campo elettrico presenta pertanto la sola componente nella direzione \hat{i}_r , che dipenderà soltanto da *r*:

 $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{i}}_r E_r(r) \tag{8.3}$

Infatti, si supponga presente anche la componente, ad esempio, in direzione ϕ . Sia allora il campo in un generico punto quello mostrato nella figura 8.2. La rotazione del sistema intorno all'asse individuato dal versore \hat{i}_r comporta la presenza di una componente di E in una nuova direzione perpendicolare ad *r*. Ma la rotazione lascia la distribuzione di carica, sorgente del campo, e quindi

$$\frac{\partial}{\partial \theta}E_{i}=0, \frac{\partial}{\partial \phi}E_{i}=0, i=r, \theta, \phi$$

il campo, inalterata. Segue che E_{ϕ} deve essere nulla. Con analogo ragionamento si può dimostrare che deve essere nulla anche la componente E_{θ} .



Fig. 8.2

L'intensità di E_r può essere ottenuta applicando la legge di Gauss ad una sfera di raggio r concentrica alla distribuzione di carica. Risulta:

$$\hat{\mathbf{n}}dS = \mathbf{i}_r(rd\,\mathcal{G})(r\sin\,\mathcal{G}d\varphi) \tag{8.4}$$

$$d\tau = (dr)(rd\vartheta)(r\sin\vartheta d\varphi) \tag{8.5}$$

$$\varepsilon_0 \oint_{S} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \varepsilon_0 \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{2\pi} E_r (r d \mathcal{P}) (r \sin \mathcal{P} d \varphi) = \varepsilon_0 E_r 4\pi r^2$$
(8.6)

$$Q_{\rm int} = \iiint_{\tau} \rho_0 d\tau = \begin{cases} \iint_{0}^{\pi} \iint_{0}^{2\pi r} \rho_0 (dr') (r' d\vartheta) (r' \sin \vartheta d\varphi) = \rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3 & r \le a \\ \iint_{0}^{\pi} \iint_{0}^{2\pi a} \int_{0}^{2\pi a} \rho_0 (dr) (r d\vartheta) (r \sin \vartheta d\varphi) = \rho_0 \frac{4}{3} \pi a^3 & r \ge a \end{cases}$$
(8.7)

e quindi

$$\varepsilon_{0}E_{r}4\pi r^{2} = \rho_{0}\frac{4}{3}\pi r^{3} \Longrightarrow E_{r} = \frac{\rho_{0}r}{3\varepsilon_{0}} \qquad r \le a$$

$$\varepsilon_{0}E_{r}4\pi r^{2} = \rho_{0}\frac{4}{3}\pi a^{3} \Longrightarrow E_{r} = \frac{\rho_{0}a^{3}}{3\varepsilon_{0}r^{2}} \qquad r \ge a$$
(8.8)

L'andamento del campo è illustrato in fig. 8.3. Si noti che per $r \ge a$ il campo può anche essere espresso nel modo seguente:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{i}}_r \,, \tag{8.9}$$

 $\operatorname{con} q = \rho_0 \frac{4}{3} \pi a^3.$

E' facile convincersi che tale risulta essere anche il campo della carica puntiforme collocata nell'origine del sistema di riferimento.

Si provi ad impostare il calcolo nel caso in cui la carica sia distribuita nella sfera di raggio a con densità $\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{a}$



Fig. 8.3

Il principio di sovrapposizione

Nel caso di più sorgenti vale il principio di sovrapposizione in virtù del quale il campo prodotto in un punto da più sorgenti comunque distribuite è la somma (vettoriale) dei campi prodotti dalle singole sorgenti supposte agenti una per una separatamente.

Il principio di sovrapposizione consente di esprimere il campo nel vuoto dovuto ad una distribuzione spaziale caratterizzata da una densità ρ , funzione del punto.

Il campo nel punto *P*, individuato dal raggio vettore \mathbf{r}_P , dovuto alla sorgente elementare $dq = \rho(\mathbf{r}_Q)d\tau_Q$ che compete al volumetto $d\tau_Q$ centrato nel punto *Q*, individuato dal raggio vettore \mathbf{r}_Q risulta essere

$$d\mathbf{E}(\mathbf{r}_{P},\mathbf{r}_{Q}) = \frac{\rho(\mathbf{r}_{Q})d\tau_{Q}}{4\pi\varepsilon_{0}|\mathbf{r}_{PQ}|^{2}}\hat{\mathbf{r}}_{PQ} = \frac{(\mathbf{r}_{P}-\mathbf{r}_{Q})\rho(\mathbf{r}_{Q})d\tau_{Q}}{4\pi\varepsilon_{0}|\mathbf{r}_{P}-\mathbf{r}_{Q}|^{3}}$$
(8.10)

Sovrapponendo i contributi di tutte le sorgenti elementari contenute nel volume τ , si ottiene infine:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_{P}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \iiint_{\tau} \frac{(\mathbf{r}_{P} - \mathbf{r}_{Q})\rho(\mathbf{r}_{Q})d\tau_{Q}}{\left|\mathbf{r}_{P} - \mathbf{r}_{Q}\right|^{3}}$$
(8.11)

Si noti che, supponendo le cariche concentrate in un volume di dimensione finita, l'intensità del campo elettrico tende a zero all'infinito almeno come $\frac{1}{r^2}$. Infatti, tenendo conto che, per $|\mathbf{r}_P| \rightarrow \infty$, $|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_O| \cong |\mathbf{r}_P|$, si ha

$$E(\mathbf{r}_{P}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \left| \iiint_{\tau} \frac{(\mathbf{r}_{P} - \mathbf{r}_{Q})\rho(\mathbf{r}_{Q})d\tau_{Q}}{\left|\mathbf{r}_{P} - \mathbf{r}_{Q}\right|^{3}} \right| \leq \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \iiint_{\tau} \frac{\left|\rho(\mathbf{r}_{Q})\right|d\tau_{Q}}{\left|\mathbf{r}_{P} - \mathbf{r}_{Q}\right|^{2}} \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{1}{\left|\mathbf{r}_{P}\right|^{2}} \iiint_{\tau} \left|\rho(\mathbf{r}_{Q})\right|d\tau_{Q}$$
(8.12)

Distribuzioni di carica a simmetria cilindrica

Si assuma che la carica sia distribuita all'interno di un cilindro indefinito di asse z e sezione circolare di raggio a con densità ρ uniforme. Si consideri un sistema di coordinate cilindrico (r, θ, z) coassiale alla distribuzione di carica. Per un osservatore posto a distanza r dall'asse, la distribuzione di carica non varia per traslazione lungo z e per rotazione intorno a z. Il campo elettrico, pertanto dipende solo da r. Inoltre il campo elettrico presenta la sola componente nella direzione $\hat{\mathbf{i}}_r$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}_r E_r(r) \tag{8.13}$$

Infatti, si supponga presente anche la componente, ad esempio, in direzione z. Sia allora il campo in un generico punto quello mostrato nella figura 8.4. La rotazione del sistema di 180 gradi intorno all'asse individuato dal versore \hat{i}_r comporta l'inversione di segno della componente z del campo. D'altra parte, tale rotazione lascia la distribuzione di carica, sorgente del campo, inalterata. La contraddizione è risolta assumendo $E_z=0$. Con analogo ragionamento si può dimostrare che deve essere nulla anche la componente E_{θ}

Fig. 8.4

L'intensità di E_r può essere ottenuta applicando la legge di Gauss ad un cilindro di raggio r e lunghezza l coassiale alla distribuzione di carica. Risulta, per l'elemento di superficie laterale:

$$\hat{\mathbf{n}}dS = \hat{\mathbf{i}}_{r}(rd\theta)(dz) \tag{8.14}$$

per le due basi:

$$\hat{\mathbf{n}}dS = \hat{\mathbf{i}}_{z}(rd\theta)(dr) \tag{8.15}$$

$$\hat{\mathbf{n}}dS = -\hat{\mathbf{i}}_z(rd\theta)(dr) \tag{8.16}$$

per l'elemento di volume:

$$d\tau = (dr)(rd\theta)(dz) \tag{8.17}$$

Il contributo al flusso di E delle due basi è nullo poiché il campo è ortogonale alla direzione della normale alla superficie. Si ottiene pertanto:

$$\varepsilon_0 \oiint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \varepsilon_0 \int_0^l \int_0^{2\pi} E_r(dz) (rd\theta) = \varepsilon_0 E_r 2\pi rl$$
(8.18)



$$Q_{\rm int} = \iiint_{\tau} \rho_0 d\tau = \begin{cases} \int_{0}^{l} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{r} \rho_0(dz)(r'd\theta)(dr') = \rho_0 \pi r^2 l \quad r \le a \\ \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \rho_0(dz)(rd\theta)(dr) = \rho_0 \pi a^2 l \quad r \ge a \end{cases}$$
(8.19)

e quindi

$$\varepsilon_{0}E_{r}2\pi r l = \rho_{0}\pi r^{2}l \Longrightarrow E_{r} = \frac{\rho_{0}r}{2\varepsilon_{0}} \qquad r \le a$$

$$\varepsilon_{0}E_{r}2\pi r l = \rho_{0}\pi a^{2}l \Longrightarrow E_{r} = \frac{\rho_{0}a^{2}}{2\varepsilon_{0}r} \qquad r \ge a$$
(8.20)

L'andamento del campo è illustrato in fig. 8.5. Si noti che per $r \ge a$ il campo può anche essere espresso nel modo seguente:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \hat{\mathbf{i}}_r, \qquad (8.21)$$

con $\lambda = \rho_0 \pi a^2$. E' facile convincersi che tale risulta essere anche il campo di una distribuzione lineare di carica λ collocata sull'asse del sistema di riferimento.



Distribuzioni di carica a simmetria piana

Si assuma che la carica sia distribuita all'interno di una lastra piana di spessore Δ con densità ρ uniforme. Si introduca un sistema di coordinate cartesiano (*x*,*y*,*z*) con origine al centro dello spessore della lastra e l'asse *z* diretto ortogonalmente alla lastra. Per un osservatore posto a distanza *z* dalla lastra, la distribuzione di carica non varia per traslazione lungo *x* e *z*. Il campo elettrico, pertanto, dipende solo da *z*. Inoltre il campo elettrico presenta la sola componente nella direzione $\hat{\mathbf{i}}_z$:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{i}}_z E_z(z) \tag{8.22}$$

Infatti, si supponga presente anche la componente, ad esempio, in direzione x. Sia allora il campo in un generico punto quello mostrato in fig. 8.6. La rotazione del sistema di 180 gradi intorno all'asse individuato dal versore $\hat{\mathbf{i}}_z$ comporta l'inversione di segno della componente x del campo. D'altra parte, tale rotazione lascia la distribuzione di carica, sorgente del campo, inalterata. La

contraddizione è risolta assumendo $E_x=0$. Con analogo ragionamento si dimostra facilmente che deve essere nulla anche la componente E_y .



Fig. 8.6

Il valore di E_z può essere ottenuto applicando la legge di Gauss ad un parallelepipedo con facce parallele ai piani coordinati e simmetricamente disposto rispetto alla lastra. Sia $\pm z$ la distanza dall'origine delle basi A_1 e A_2 di area A. Il contributo al flusso di **E** attraverso le superfici laterali del parallelepipedo è nullo poiché il campo è ortogonale alla direzione delle normali alle superfici. Si ottiene pertanto:

$$\varepsilon_0 \oiint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \varepsilon_0 \iint_{A_1} E_z(z) dx dy - \varepsilon_0 \iint_{A_2} E_z(-z) dx dy = \varepsilon_0 A(E_z(z) - E_z(-z))$$
(8.23)

$$Q_{\text{int}} = \iiint_{\tau} \rho_0 d\tau = \begin{cases} \int_{-z/A}^{z} \int_{A/2} \rho_0 dz dx dy = 2\rho_0 z A & 0 \le z \le \Delta/2 \\ \int_{-\Delta/2}^{-z/A} \int_{A} \rho_0 dz dx dy = \rho_0 \Delta A & z \ge \Delta/2 \end{cases}$$
(8.24)

Per la simmetria della distribuzione di cariche, il campo deve restare inalterato ruotando il sistema di 180 gradi intorno all'asse x e scambiando così z con (-z). Deve allora risultare

$$E_z(z) = -E_z(-z) \tag{8.25}$$

La legge di Gauss comporta quindi il seguente risultato

$$2\varepsilon_0 E_z(z)A = 2\rho_0 zA \Longrightarrow E_z = \frac{\rho_0 z}{\varepsilon_0} \quad 0 \le z \le \Delta/2$$

$$2\varepsilon_0 E_z(z)A = \rho_0 \Delta A \Longrightarrow E_z = \frac{\rho_0 \Delta}{2\varepsilon_0} \quad z \ge \Delta/2$$
(8.26)

L'andamento del campo è illustrato in fig. 8.7. Si noti che per $|z| > \Delta/2$ il campo può anche essere espresso nel modo seguente:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{\mathbf{i}}_z & z > \Delta/2 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{\mathbf{i}}_z & z < \Delta/2 \end{cases},$$
(8.27)

con $\sigma = \rho_0 \Delta$. E' facile convincersi che tale risulta essere anche il campo di una distribuzione superficiale di carica σ collocata sul piano di simmetria della lastra. In tal caso, si osservi che la

componente del campo ortogonale alla lastra, coerentemente a quanto previsto dalla (7.1), subisce una discontinuità di valore pari a σ/ϵ_{θ} .

In presenza di un sistema costituito da due lastre piane indefinite e parallele, poste l'una a z=d/2 con densità di carica superficiale σ e l'altra a z=-d/2 con densità di carica superficiale di valore $-\sigma$. Il campo può essere ottenuto facilmente sovrapponendo i campi dovuti alle due distribuzioni σ e $-\sigma$. Risulta:

$$E_{z}^{+} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_{0}} \quad z < d/2 \quad E_{z}^{-} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_{0}} \quad z < -d/2$$

$$E_{z}^{+} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_{0}} \quad z > d/2 \quad E_{z}^{-} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_{0}} \quad z > -d/2$$

$$E_{z} = E_{z}^{+} + E_{z}^{-} = 0 \quad z < -d/2$$

$$E_{z} = E_{z}^{+} + E_{z}^{-} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_{0}} \quad -d/2 < z < d/2$$

$$E_{z} = E_{z}^{+} + E_{z}^{-} = 0 \quad z > d/2$$
(8.28)
(8.28)
(8.29)

Tensione e differenza di potenziale

Si definisce tensione tra i punti A e B lungo la linea γ l'integrale di linea

$$T_{A\gamma B} = \int_{A\gamma B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{I}$$
(8.30)

L'equazione (8.1) implica che la tensione lungo una qualunque curva che colleghi due punti $A \in B$ è indipendente dalla curva stessa

$$T_{A\gamma_1B} = \int_{A\gamma_1B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = T_{A\gamma_2B} = \int_{A\gamma_2B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{A}^{B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_{AB} \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \text{ tra } A \text{ e } B$$
(8.31)

Infatti:

$$0 = \oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{A_{\gamma_1 B}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{B_{\gamma_2 A}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{A_{\gamma_1 B}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_{A_{\gamma_2 B}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$
(8.32)

Parleremo in tal caso di differenza di potenziale V_{AB} :

$$V_{AB} = \int_{A}^{B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{A}^{Q} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{Q}^{B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{A}^{Q} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_{B}^{Q} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_{AQ} - V_{BQ}$$
(8.33)

Si noti che la differenza di potenziale è indipendente dalla posizione del punto Q.

Fissato ora un punto P_0 come riferimento, l'integrale $\int_{P}^{P_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ definisce, al variare della posizione di P, una funzione scalare $V(\mathbf{r})$ del punto P individuato dal raggio vettore \mathbf{r} , che assume valore 0 nel punto P_0 , individuato dal raggio vettore \mathbf{r}_0 :

$$V_{PP_0} = V(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$
(8.34)

L'operatore gradiente

L'espressione $V(\mathbf{r})$ = costante rappresenta una superficie in tre dimensioni. Un esempio è costituito dall'espressione $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ che rappresenta una superficie sferica di raggio *R*. Superfici a potenziale costante sono dette equipotenziali.

Si disegnino le superfici equipotenziali che passino per i punti individuati dal vettore **r** e dal vettore **r**+ Δ **r**. Nella ipotesi che Δ **r** sia molto piccolo (infinitesimo), il potenziale V(**r**+ Δ **r**) della superficie passante per **r** + Δ **r** differirà di una quantità Δ V altrettanto piccola dal potenziale della superficie passante per **r**. Le superfici inoltre non possono per ipotesi intersecarsi. Sia Δn la distanza tra il punto **r** e l'equipotenziale passante per **r** + Δ **r**. Risulta (vedi fig. 8.7) $\Delta n = \cos \theta \Delta r = \hat{\bf{n}} \cdot \Delta {\bf{r}}$ e quindi:

$$\Delta V = \frac{\Delta V}{\Delta n} \cos \theta \Delta r = \frac{\Delta V}{\Delta n} \hat{\mathbf{n}} \cdot \Delta \mathbf{r}$$
(8.35)



Fig. 8.7

Tenendo conto che il rapporto $\frac{\Delta V}{\Delta n}$ è un rapporto tra quantità differenziali ed è quindi indipendente

da $\Delta \mathbf{r}$, si ha

$$\Delta V = gradV \cdot \Delta \mathbf{r} \tag{8.36}$$

dove il gradiente della funzione potenziale è definito come

$$gradV = \lim_{\Delta n \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta n} \hat{\mathbf{n}}$$
(8.37)

In coordinate cartesiane si ha

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}}_x + y\hat{\mathbf{i}}_y + z\hat{\mathbf{i}}_z, \ \Delta \mathbf{r} = \Delta x\hat{\mathbf{i}}_x + \Delta y\hat{\mathbf{i}}_y + \Delta z\hat{\mathbf{i}}_z$$
(8.38)

$$\Delta V = V(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - V(x, y, z) = \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \Delta z$$
(8.39)

Allora ΔV può essere espresso come

$$\Delta V = (\hat{\mathbf{i}}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\mathbf{i}}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{\mathbf{i}}_z \frac{\partial V}{\partial z}) \cdot (\Delta x \hat{\mathbf{i}}_x + \Delta y \hat{\mathbf{i}}_y + \Delta z \hat{\mathbf{i}}_z) = gradV \cdot \Delta \mathbf{r}$$
(8.40)

Segue pertanto che

$$gradV = \nabla V = (\hat{\mathbf{i}}_{x} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\mathbf{i}}_{y} \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{\mathbf{i}}_{z} \frac{\partial V}{\partial z})$$
(8.41)

Nell'ultima equazione si è introdotto il simbolo ∇ che identifica l'operatore *nabla* definito come segue:

$$\nabla \equiv \hat{\mathbf{i}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{i}}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{i}}_z \frac{\partial}{\partial z}$$
(8.42)

La funzione potenziale può essere utilizzata per esprimere il campo elettrostatico in modo univoco:

$$\Delta V = V(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - V(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$
(8.43)

Poiché $\Delta \mathbf{r}$ è una grandezza differenziale, il campo può essere ritenuto costante lungo $\Delta \mathbf{r}$:

$$\Delta V = -\int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{r}$$
(8.44)

Il confronto tra l'espressione (8.44) e l'analoga (8.40) mostra che

$$\mathbf{E} = -\nabla V \tag{8.45}$$

L'unità di misura del potenziale è il joule/coulomb che assume il nome di volt (V). Conseguentemente, è possibile esprimere il campo elettrico in volt/metro (V/m).

L'equazione di Poisson. Il potenziale associato ad una distribuzione di carica

Utilizzando l'espressione di E in termini del gradiente di una funzione potenziale, la legge della circuitazione (8.1) è identicamente soddisfatta. Deve quindi essere presa in considerazione la sola legge di Gauss che in forma locale è espressa in ogni punto di regolarità del campo dalla seguente equazione:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{8.46}$$

Sostituendo per E l'espressione (8.45) si ottiene la seguente equazione di Poisson scalare

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{8.47}$$

dove il simbolo $\nabla^2 V \equiv \nabla \cdot \nabla V$ assume la forma seguente in coordinate cartesiane

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$
(8.48)

Utilizzando il principio di sovrapposizione, è possibile esprimere la soluzione dell'equazione di Poisson in presenza di una distribuzione assegnata di cariche nel vuoto, in analogia a quanto già fatto per il campo elettrico.

A questo scopo si consideri il potenziale associato ad una carica puntiforme. Esso può essere ottenuto per integrazione diretta del campo elettrostatico valutato in precedenza. A questo scopo si consideri un cammino di integrazione che si sviluppi dal punto in esame lungo una direzione radiale e quindi lungo un arco di circonferenza di raggio pari alla coordinata r_0 del punto di riferimento, così come mostrato in figura:

$$V(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_0} E_r dr + \int_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}_0} \mathbf{E} \cdot (\hat{\mathbf{i}}_{\mathcal{G}} r_0 d\mathcal{G}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} (\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}) = V(r)$$
(8.49)

Si noti che il potenziale, conseguentemente alla simmetria della distribuzione, dipende dalla sola coordinata *r*. Ponendo il punto di riferimento all'infinito, il potenziale di una carica puntiforme assume la forma seguente

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{8.50}$$

Il potenziale nel punto P, individuato dal raggio vettore \mathbf{r}_P , dovuto alla sorgente elementare $dq = \rho(\mathbf{r}_Q) d\tau_Q$ che compete al volumetto $d\tau_Q$ centrato nel punto Q, individuato dal raggio vettore \mathbf{r}_Q risulta quindi essere

$$dV(\mathbf{r}_{P},\mathbf{r}_{Q}) = \frac{\rho(\mathbf{r}_{Q})d\tau_{Q}}{4\pi\varepsilon_{0}|\mathbf{r}_{PQ}|} = \frac{\rho(\mathbf{r}_{Q})d\tau_{Q}}{4\pi\varepsilon_{0}|\mathbf{r}_{P}-\mathbf{r}_{Q}|}$$
(8.51)

Sovrapponendo i contributi di tutte le sorgenti elementari contenute nel volume τ , si ottiene infine:

$$V(\mathbf{r}_{P}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \iiint_{\tau} \frac{\rho(\mathbf{r}_{Q})d\tau_{Q}}{\left|\mathbf{r}_{P} - \mathbf{r}_{Q}\right|}$$
(8.52)

9. Elettrostatica dei conduttori

Campo e carica nei conduttori

Abbiamo visto finora come calcolare il campo quando sia nota la distribuzione delle sorgenti. Nella maggior parte dei casi d'interesse pratico, tuttavia, la distribuzione delle sorgenti deve essere determinata contemporaneamente al campo. E' questo sicuramente il caso dei conduttori. I conduttori contengono un numero elevatissimo di particelle cariche libere di muoversi al loro interno. In condizioni normali, tali particelle molto difficilmente possono uscire dal corpo. Diremo che un conduttore è in equilibrio elettrostatico quando in esso non si riscontra alcun moto macroscopico di cariche. Questa condizione di equilibrio è ottenuta quando la somma di tutte le forze che agiscono sulle cariche è nulla. Pertanto il campo elettrico macroscopico è nullo in ogni punto interno del conduttore. Di conseguenza, per la legge di Gauss, è nulla anche la densità di carica all'interno del conduttore.

Diversa è la situazione sulla superficie che delimita il conduttore dove le forze associate al campo elettrico sono equilibrate da quelle che impediscono alle cariche di abbandonare il corpo. Nasce una distribuzione di carica superficiale cui è associata, in virtù della (7.3) una discontinuità della componente normale di E:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}^a - \varepsilon_0 \mathbf{E}^b) = \sigma \tag{9.1}$$

Poiché E è nullo all'interno del conduttore, sulla superficie, dal lato esterno si ha

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}^a = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{9.2}$$

Si noti che poiché la componente tangente del campo è continua ed il campo elettrico è nullo all'interno del conduttore, il campo elettrico nel vuoto, nei punti adiacenti alla superficie del conduttore è normale ad essa.

Ciò risulta altrettanto evidente in base a considerazioni diverse. Essendo nullo il campo, il potenziale all'interno del conduttore è costante. Poiché il potenziale è una funzione continua del punto, risulta costante anche il valore del potenziale sulla superficie del conduttore. Da ciò consegue immediatamente che il campo, normale alle superfici equipotenziali, è normale al conduttore.

La capacità di un conduttore isolato

Definiamo capacità del conduttore isolato rispetto all'infinito il rapporto tra la carica depositata sul conduttore ed il potenziale del conduttore riferito all'infinito:

$$C = \frac{\oint \mathcal{E}_0 \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}{\int \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} = \frac{Q}{V}$$
(9.3)

dove P è un generico punto sulla superficie del conduttore.

Si noi che tale coefficiente dipende dalla sola geometria del conduttore, essendo indipendente dal valore di Q e di V.

L'unità di misura della capacità è il coulomb/volt che assume il nome di farad (F).

Si consideri come primo esempio un elettrodo sferico di raggio a sulla cui superficie è distribuita uniformemente una carica q. Si noti che il campo ed il potenziale all'esterno di una distribuzione di cariche a simmetria sferica sono gli stessi di quelli ottenuti concentrando una carica puntiforme di valore pari alla carica totale nel centro della distribuzione sferica. Le superfici equipotenziali di una carica puntiforme posta nel centro della sfera, descritte dalla equazione

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \text{costante}$$
(9.4)

sono sferiche. Infatti, la superficie equipotenziale di raggio r=a risulta essere

$$V(a) = v = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} \tag{9.5}$$

Da quest'ultima espressione segue che la capacità di una sfera isolata di raggio a è

$$C = \frac{q}{v} = 4\pi\varepsilon_0 a \tag{9.6}$$

Estensione al caso di più conduttori

Per introdurre il caso di più conduttori si consideri il semplice caso di una coppia di elettrodi sferici, rispettivamente di raggio a e b, posti a distanza tale da ritenere trascurabili le influenze reciproche. In tale ipotesi i potenziali dei due elettrodi assumono i seguenti valori rispetto all'infinito:

$$v_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a}, \ v_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 b}$$
(9.7)

e quindi

$$q_1 = (4\pi\varepsilon_0 a)v_1; \ q_2 = (4\pi\varepsilon_0 b)v_2$$
 (9.8)

Il processo di carica sia stato tale che $q_1 = -q_2$.

In questo caso, tutte le linee di campo che si dipartono dalla sfera (1) terminano sulla sfera (2). Il flusso di E attraverso una superficie che contiene i due elettrodi è infatti nullo, perché tale è la carica in essa racchiusa. In caso contrario, si localizza una carica anche all'infinito, data dall'opposto della carica sui due elettrodi:

$$q_{\infty} = \bigoplus_{S_{\infty}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -q_1 - q_2$$
(9.9)

11

Questa ultima situazione implica che le linee che originano da q_1 e q_2 devono necessariamente terminare all'infinito.

Nel caso che si sta considerando $(q_1 = -q_2)$, è possibile mettere in relazione la carica q_1 alla differenza di potenziale tra le due sfere. Infatti

$$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 b} = v_1 - v_2 \equiv v_{12}$$
(9.10)

Poiché $q_1 = -q_2$

$$\frac{q_{1}}{4\pi\varepsilon_{0}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = v_{12};$$

$$q_{1} = Cv_{12},$$

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_{0}}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$$
(9.11)

C è ora la capacità di una sfera rispetto all'altra.

Riassumendo, nell'ipotesi che $q_1 = -q_2$, può essere definita una capacità *C* tra i due elettrodi come il rapporto tra la carica sull'elettrodo (1) diviso la differenza di potenziale tra i due elettrodi:

$$C = \frac{Q_1}{V_{12}} = \frac{\oint_{S_1} \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}{\int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}$$
(9.12)

Cenni sulle capacità parziali

Nel caso in cui non è possibile trascurare l'effetto di un elettrodo sull'altro, la carica su ciascun elettrodo dipende da entrambi i potenziali. Ciò può essere compreso utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti.

Facendo agire la sola carica Q_1 , il potenziale assunto dai due conduttori sarà funzione lineare di Q_1 . $V'_1 = a_{11}Q_1; V'_2 = a_{21}Q_1$ (9.13)

Analogo discorso vale in presenza della carica Q_2 .

$$V_1^{"} = a_{12}Q_2; V_2^{"} = a_{22}Q_2$$
 (91.14)

Sovrapponendo gli effetti:

$$V_1 = a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2$$

$$V_2 = a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2$$
(9.15)

Risolvendo rispetto a Q_1 e Q_2 :

$$Q_{1} = C_{11}V_{1} + C_{12}V_{2}$$

$$Q_{2} = C_{21}V_{1} + C_{22}V_{2}$$
(9.16)

Si può dimostrare che $C_{12}=C_{21}$

Si confrontino queste ultime relazioni con quelle dell'esempio precedente.

Riscriviamo ora il sistema (9.16), mettendo esplicitamente in evidenza la differenza di potenziale V_1-V_2 :

$$Q_{1} = C_{11}V_{1} + C_{12}V_{1} - C_{12}V_{1} + C_{12}V_{2} = C_{11}^{*}V_{1} + C_{12}^{*}(V_{1} - V_{2})$$

$$Q_{2} = C_{21}V_{1} - C_{21}V_{2} + C_{21}V_{2} + C_{22}V_{2} = C_{21}^{*}(V_{2} - V_{1}) + C_{22}^{*}V_{2}$$
(9.17)

I coefficienti con asterisco rappresentano le capacità parziali del sistema costituito dai due conduttori. In particolare la capacità parziale mutua $C_{12}^* = -C_{12} = C_{21}^*$ è la carica assunta dal conduttore (1) posto a potenziale zero, quando il potenziale del conduttore (2) vale –1. La capacità parziale del conduttore (1) rispetto all'infinito $C_{11}^* = C_{11} + C_{12}$ è la carica assunta dal conduttore (1) quando questo assume il potenziale unitario assieme al conduttore (2). Analoghe definizioni valgono per $C_{22}^* = C_{21} + C_{22}$ e C_{21}^* . Si può facilmente dimostrare che $C_{rr}^* \ge 0$ e $C_{rs}^* \ge 0$

Imponendo che sui due conduttori si localizzino cariche uguali ed opposte:

$$Q_{1} = C_{11}^{*}V_{1} + C_{12}^{*}(V_{1} - V_{2}) -Q_{1} = C_{21}^{*}(V_{2} - V_{1}) + C_{22}^{*}V_{2}$$
(9.18)

e quindi:

$$\frac{Q_1}{C_{11}^*} = V_1 + \frac{C_{12}^*}{C_{11}^*} (V_1 - V_2)
- \frac{Q_1}{C_{22}^*} = V_2 - \frac{C_{21}^*}{C_{22}^*} (V_1 - V_2) =$$
(9.19)

Sottraendo membro a membro:

$$Q_{1}\left(\frac{1}{C_{11}^{*}} + \frac{1}{C_{22}^{*}}\right) = (V_{1} - V_{2}) + C_{12}^{*}\left(\frac{1}{C_{11}^{*}} + \frac{1}{C_{22}^{*}}\right)(V_{1} - V_{2})$$
(9.20)

In conclusione si ricava

$$Q_1 = C(V_1 - V_2) \tag{9.21}$$

con

$$C = C_{12}^* + \left(\frac{1}{C_{11}^*} + \frac{1}{C_{22}^*}\right)^{-1}$$
(9.22)

Nelle applicazioni le armature sono configurate in modo da dar luogo a opportune localizzazioni del campo elettrico. In genere si tende a fare sì che uno dei due coefficienti $C_{11}^* \in C_{22}^*$ sia trascurabile rispetto alla capacità parziale mutua C_{12}^* . Realizzando le due armature una all'interno dell'altra, si riscontra che $C_{11}^* = \frac{Q_1}{V_1}\Big|_{V_1=V_2} = 0$, essendo la carica Q_1 nulla perché situata all'interno

del conduttore equipotenziale costituito dalle due armature. Si ha allora

$$Q_{1} = C_{12}^{*}(V_{1} - V_{2})$$

$$Q_{2} = C_{21}^{*}(V_{2} - V_{1}) + C_{22}^{*}V_{2}$$
(9.23)

Le due equazioni si interpretano nel modo seguente. Posto

$$C_{12}^* = C (9.24)$$

la carica sull'armatura interna vale

$$Q_1 = C(V_1 - V_2) \tag{9.25}$$

e quella complessivamente dislocata sull'armatura esterna:

$$Q_2 = -C(V_1 - V_2) + C_{22}^* V_2 = -Q_1 + Q'$$
(9.26)

La carica complessiva del sistema $Q_1 + Q_2$ vale dunque

$$Q' = C_{22}^* V_2 \tag{9.27}$$

e si distribuisce sulla faccia esterna dell'elettrodo 2, sulla faccia interna si localizza invece la carica $-Q_1$.

Schematizzazioni circuitali

Nella schematizzazione circuitale un condensatore è un elemento caratterizzato da una coppia ordinata di terminali (morsetti) tra i quali esiste la tensione V e ai quali sono assegnate le cariche $\pm Q$.

Nel costruire una schematizzazione circuitale del sistema costituito da due conduttori isolati, è opportuno far sì che ciascuna delle due cariche sia formalmente scomposta in un insieme di due cariche e che ognuna di queste sia legata, tramite un opportuno coefficiente di capacità, alla tensione tra il supporto della carica stessa e gli altri supporti. Ciò può essere espresso attraverso le relazioni seguenti:



Fig. 9.1

$$Q_{1} = C_{11}^{*}V_{1} + C_{12}^{*}(V_{1} - V_{2}) = Q_{1\infty} + Q_{12}$$

$$Q_{2} = C_{12}^{*}(V_{2} - V_{1}) + C_{22}^{*}V_{2} = Q_{21} + Q_{2\infty}$$
(9.28)

Si noti che $Q_{rs}=-Q_{sr}$. e che $Q_1 + Q_2 = Q_{1\infty} + Q_{2\infty}$. Sul terminale all'infinito si deposita la carica $Q_{\infty} = Q_{\infty 1} + Q_{\infty 2}$, che, coerentemente a quanto già osservato vale anche $Q_{\infty} = -Q_1 - Q_2$. Nella figura (9.1) è illustrata la rete di condensatori corrispondente a due conduttori isolati

Condensatore piano

Si consideri il sistema costituito da due armature piane parallele, poste a distanza *d* luna dall'altra. Si è già visto che il campo è uniforme e vale

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{i}}_z \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{9.29}$$

La differenza di potenziale tra le due armature è quindi

$$V_1 - V_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d \tag{9.30}$$

La carica distribuita sulla superficie S dell'elettrodo (1) è

$$Q_1 = \sigma S . \tag{9.31}$$

Trascurando gli effetti di bordo, la capacità del condensatore piano è dunque

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$
(9.32)

Condensatore sferico

Si consideri il sistema costituito da due armature sferiche concentriche di raggi a e b. Il potenziale assunto dai due elettrodi può essere ottenuto utilizzando il principio di sovrapposizione.

Quando agisce la sola carica Q_1 , posta sull'elettrodo interno, si ha

$$V_{1}' = \frac{Q_{1}}{4\pi\varepsilon_{0}a}; V_{2}' = \frac{Q_{1}}{4\pi\varepsilon_{0}b}$$
(9.33)

L'elettrodo (2), quando è distribuita sulla sua superficie la carica $-Q_1$, assume il potenziale

$$V_2^{"} = \frac{-Q_1}{4\pi\varepsilon_0 b} \tag{9.34}$$

Poiché in questa ultima configurazione, il campo è nullo all'interno dell'elettrodo (2), il potenziale risulta uniforme in tutto il volume interno e pari quindi a $V_2^{"}$:

$$V_1^{"} = \frac{-Q_1}{4\pi\varepsilon_0 b} \tag{9.35}$$

Sovrapponendo gli effetti:

$$V_{1} = V_{1}' + V_{1}'' = \frac{Q_{1}}{4\pi\varepsilon_{0}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$V_{2} = V_{2}' + V_{2}'' = 0$$
(9.36)

La capacità è pertanto

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} = 4\pi\varepsilon_0 a \frac{b}{b - a}$$
(9.37)

Condensatore cilindrico

Si consideri il sistema costituito da due armature cilindriche coassiali di raggi *a* e *b*.

In un sistema di coordinate cilindrico (r, θ, z) coassiale alle armature, la simmetria delle armature e la conseguente simmetria della distribuzione di carica impone che la funzione potenziale dipende solo da r e, conseguentemente, il campo elettrostatico, anch'esso dipendente solo da r $(\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV(r)}{dr}\hat{\mathbf{i}}_r)$, è diretto lungo r e vale (si applichi la legge di Gauss, in modo analogo a quanto già fatto nel paragrafo 8):

$$\mathbf{E} = \frac{2\pi a \sigma}{2\pi \varepsilon_0 r} \hat{\mathbf{i}}_r \tag{9.38}$$

dove si è indicata con σ la densità di carica distribuita sulla superficie dell'elettrodo interno.

La differenza di potenziale tra le due armature può essere agevolmente calcolata utilizzando un cammino d'integrazione che colleghi le due armature lungo la direzione radiale:

$$V_1 - V_2 = \int_a^b E_r dr = \frac{2\pi a\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \int_a^b \frac{1}{r} dr = \frac{2\pi a\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \log \frac{b}{a}$$
(9.39)

Poiché la carica su un tratto di lunghezza *l* dell'elettrodo (1) vale $Q_1 = 2\pi a l \sigma$, si ottiene la seguente espressione della capacità di un condensatore cilindrico

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\log\frac{b}{a}}$$
(9.40)

Il campo elettrico nel condensatore cilindrico è massimo in prossimità dell'elettrodo *a*. Sostituendo l'espressione di σ ottenuta dalla (9.39) nella (9.38) si ottiene il seguente valore per il campo massimo

$$E_{\max} = \frac{V_1 - V_2}{a \log \frac{b}{a}}$$
(9.41)

Questo campo risulta minimo, fissato *b*, per $\log \frac{b}{a} = 1$, cioè per b = 2.71a

Per questa scelta, il campo massimo vale

$$E'_{\max} = \frac{V_1 - V_2}{a} \,. \tag{9.42}$$

In un condensatore piano di uguale spessore, il campo è uniforme:

 $E = \frac{V_1 - V_2}{b - a} = \frac{V_1 - V_2}{a(2.71 - 1)} = \frac{V_1 - V_2}{1.71a}$ ed è 1.71 volte più piccolo di quello del condensatore cilindrico

Capacità parziali per due conduttori sferici

Si consideri il sistema costituito da due elettrodi sferici di raggio r_1 e r_2 , rispettivamente, posti a distanza *d* l'una dall'altra.

Siano Q_1 e Q_2 , rispettivamente, le quantità di carica distribuite sugli elettrodi. In generale, i due elettrodi interagiscono e, pertanto, la densità di carica sulla superficie degli stessi non è uniforme (effetto di prossimità). Nella ipotesi che la distanza di separazione *d* sia molto maggiore di r_1 e r_2 , la densità di carica sulle superfici degli elettrodi può essere ritenuta uniforme (effetto di prossimità trascurabile) e il potenziale prodotto da un elettrodo è approssimativamente costante nella regione occupata dall'altro elettrodo. Pertanto, i potenziali degli elettrodi in presenza della sola carica Q_1 valgono:

$$V_{1}' = \frac{Q_{1}}{4\pi\varepsilon_{0}r_{1}}, \quad V_{2}' = \frac{Q_{1}}{4\pi\varepsilon_{0}d};$$
(9.43)

e, analogamente, in presenza della sola carica Q_2 :

$$V_1^{"} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 d}, \quad V_2^{"} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$
 (9.44)

Sovrapponendo gli effetti:

$$V_1 = a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2$$

$$V_2 = a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2$$
(9.45)

con $a_{11} = (4\pi\varepsilon_0 r_1)^{-1}$, $a_{22} = (4\pi\varepsilon_0 r_2)^{-1}$ e $a_{12} = a_{21} = (4\pi\varepsilon_0 d)^{-1}$. Invertendo le (9.45) rispetto a Q_1 e Q_2 si ha:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{(r_1r_2)^{-1} - d^{-2}} \begin{bmatrix} 1/r_2 & -1/d \\ -1/d & 1/r_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}.$$
(9.46)

Le capacità parziali valgono

$$C_{11}^{*} = \frac{4\pi\varepsilon_{0}(d-r_{2})r_{1}d}{d^{2}-r_{1}r_{2}}, \ C_{22}^{*} = \frac{4\pi\varepsilon_{0}(d-r_{1})r_{2}d}{d^{2}-r_{1}r_{2}}, \ C_{12}^{*} = C_{21}^{*} = \frac{4\pi\varepsilon_{0}r_{1}r_{2}d}{d^{2}-r_{1}r_{2}}$$
(9.47)

e la capacità di un elettrodo rispetto all'altro vale

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{1/r_1 + 1/r_2 - 2/d}$$
(9.48)

in accordo con la (9.11) nel limite $d \to +\infty$.

La (9.48) è ottenuta utilizzando la (9.22) o, in modo equivalente, imponendo la condizione di induzione completa nelle (9.45) e andando a valutare la differenza di potenziale tra gli elettrodi:

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} \Big|_{Q_2 = -Q_1}$$

= $\frac{Q_1}{a_{11}Q_1 - a_{12}Q_1 - (a_{21}Q_1 - a_{22}Q_1)}$
= $\frac{1}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$
= $\frac{4\pi\varepsilon_0}{1/r_1 + 1/r_2 - 2/d}$. (9.49)

Capacità per unità di lunghezza di una linea bifilare costituita da due conduttori cilindrici, paralleli, indefiniti, filiformi

Si consideri il sistema costituito da due elettrodi cilindrici di raggio r_1 e r_2 , rispettivamente, di lunghezza infinita. Si supponga che gli assi dei cilindri siano paralleli e distanti d. Siano Q_1 e Q_2 , rispettivamente, le quantità di carica per unità di lunghezza distribuite sulle superfici degli elettrodi. In generale, le densità di carica non sono uniformi a causa dell'effetto di prossimità (i due elettrodi interagiscono). Nella ipotesi che d sia molto maggiore di r_1 e r_2 , le densità di carica possono essere ritenute uniformi (effetto di prossimità trascurabile) e il potenziale prodotto da un elettrodo è approssimativamente costante nella regione occupata dall'altro elettrodo. Per il calcolo della capacità per unità di lunghezza del sistema in esame, procediamo imponendo la condizione di induzione completa, cioè mediante la:

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2}\Big|_{Q_2 = -Q_1}$$
(9.50)

Assumendo, per semplicità, come riferimento il punto P_0 posto sulla congiungente gli assi dei due cilindri (fig. 9.2) i potenziali degli elettrodi in presenza della sola carica Q_1 possono essere calcolati nello stesso modo in cui si è proceduto per ottenere la (9.39).



Si ricordi che il campo elettrostatico \mathbf{E}_1 prodotto da Q_1 nella regione esterna all'elettrodo 1 (nella regione interna è nullo) è dato dalla (9.38), ponendo $2\pi r_1 \sigma_1 = Q_1$:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 r} \hat{\mathbf{i}}_r \tag{9.52}$$

dove $\hat{\mathbf{i}}_r$ è il versore radiale associato ad un sistema di coordinate in cui l'asse *z* coincide con l'asse del cilindro 1. Integrando \mathbf{E}_1 lungo una curva radiale che inizia in corrispondenza della superficie dell'elettrodo 1 e termina sul punto P_0 di coordinata r_0 :

$$V_{1}' = \frac{Q_{1}}{2\pi\varepsilon_{0}} \int_{r_{1}}^{r_{0}} \frac{dr}{r} = \frac{Q_{1}}{2\pi\varepsilon_{0}} \ln\left(\frac{r_{0}}{r_{1}}\right)$$

$$V_{2}' = \frac{Q_{1}}{2\pi\varepsilon_{0}} \int_{d-r_{2}}^{r_{0}} \frac{dr}{r} = \frac{Q_{1}}{2\pi\varepsilon_{0}} \ln\left(\frac{r_{0}}{d-r_{2}}\right) \cong \frac{Q_{1}}{2\pi\varepsilon_{0}} \ln\left(\frac{r_{0}}{d}\right)$$
(9.49)

Analogamente, in presenza della sola carica Q_2 :

$$V_{1}^{"} = \frac{Q_{2}}{2\pi\varepsilon_{0}}\log\frac{r_{0}}{d}, \quad V_{2}^{"} = \frac{Q_{2}}{2\pi\varepsilon_{0}}\log\frac{r_{0}}{r_{2}}$$
(9.50)

In modo analogo al caso precedente possono essere calcolate le capacità parziali. Si ricordi ora che si deve imporre $Q_1=-Q_2=Q$. Risulta allora:

$$V_1' - V_2' = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r_1}\right) - \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{d}\right) = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{d}{r_1}\right)$$
(9.51)

$$V_{1}^{"} - V_{2}^{"} = \frac{Q_{2}}{2\pi\varepsilon_{0}} \ln\left(\frac{r_{0}'}{d}\right) - \frac{Q_{2}}{2\pi\varepsilon_{0}} \ln\left(\frac{r_{0}'}{r_{2}}\right) = \frac{Q_{2}}{2\pi\varepsilon_{0}} \ln\left(\frac{r_{2}}{d}\right) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_{0}} \ln\left(\frac{d}{r_{2}}\right)$$
(9.52)

$$V_{1} - V_{2} = V_{1}' + V_{1}'' - V_{2}' - V_{2}'' = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_{0}} \ln\left(\frac{d}{r_{2}}\right) + \frac{Q}{2\pi\varepsilon_{0}} \ln\left(\frac{d}{r_{2}}\right) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_{0}} \ln\left(\frac{d^{2}}{r_{1}r_{2}}\right)$$
(9.53)

Si noti che le differenze di potenziale sono indipendenti dalla scelta del punto P_0 . La capacità *C* per unità di lunghezza vale pertanto:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{d^2}{r_1 r_2}\right)}.$$
(9.54)

Nell'ipotesi $r_1 = r_2 = a$, la capacità di una linea bifilare di lunghezza l è:

$$Cl = \frac{\pi\varepsilon_0 l}{\log\frac{d}{a}} = \frac{27.8l}{\log\frac{d}{a}} 10^{-12} F$$
(9.55)

10. Cenni sui dielettrici

Un materiale dielettrico si differenzia da un conduttore in quanto le forze elettriche non consentono spostamenti macroscopici di cariche. Nei dielettrici i portatori restano legati alle rispettive posizioni di equilibrio e la separazione macroscopica è impossibile.

Un elemento di volume $\Delta \tau$ "fisicamente infinitesimo" di dielettrico contiene un gran numero di molecole ed, anche se polarizzato, rimane globalmente neutro. In assenza di polarizzazione la distribuzione di cariche non altera il campo elettrico macroscopico. In presenza di polarizzazione, a seguito degli spostamenti delle cariche di segno diverso, l'elemento di volume acquista un momento di dipolo non nullo:

$$\Delta \mathbf{p} = \sum_{i} q \mathbf{d}_{i} = N \frac{\sum_{i} \mathbf{p}_{i}}{N} = N < \mathbf{p} >= n < \mathbf{p} > \Delta \tau$$
(10.1)

Il dipolo elementare è costituito da due cariche puntiformi $\pm q$ separate da una distanza vettoriale \mathbf{d}_i diretta dalla carica negativa a quella positiva. N è il numero di dipoli nel volume $\Delta \tau$, n è il numero di dipoli per unità di volume $\mathbf{e} < \mathbf{p} >$ è il momento di dipolo medio nel volume $\Delta \tau$

Si definisce vettore densità di polarizzazione P il momento di dipolo per unità di volume:

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta \tau \to 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta \tau} = n < \mathbf{p} >= nq\mathbf{d}$$
(10.2)

Per calcolare la carica netta di polarizzazione contenuta in un assegnato volume τ si osserva che essa è data dai soli dipoli che attraversano la superficie che delimita τ . Si ipotizzi, senza perdita di generalità, che le cariche negative restino fisse e che si spostino nel processo di polarizzazione le sole cariche positive. Allora, si considerino le particelle in un intorno di un elemento orientato di superficie $\mathbf{\hat{n}}\Delta S = \Delta \mathbf{S}$. Con riferimento alla figura 10.1, tutte le cariche positive esterne ad *S* nel volumetto $\Delta V = \mathbf{d} \cdot \Delta \mathbf{S}$ hanno lasciato una carica negativa all'interno di *S*.



Fig. 10.1

Poiché vi sono $-nq\mathbf{d} \cdot \Delta \mathbf{S}$ cariche negative in ΔV , la carica di polarizzazione contenuta in τ risulta essere

$$Q_P = -\oint_S (nq\mathbf{d}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\oint_S \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$
(10.3)

La legge di Gauss (8.2) può allora essere espressa utilizzando la densità di polarizzazione, nel modo seguente:

$$\varepsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = Q_{lib} + Q_P = Q_{lib} - \oint_S \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$
(10.4)

dove Q_{lib} rappresenta la carica libera, già introdotta nella sezione precedente. Riordinando:

$$\oint_{\mathcal{S}} (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = Q_{lik}$$

Risulta conveniente introdurre il vettore spostamento elettrico $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, che, nell'ipotesi che il legame tra campo elettrico e densità di polarizzazione sia lineare, risulta

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$
(10.5)

Il coefficiente ε prende il nome di costante dielettrica e, poiché la suscettività dielettrica χ e sempre positiva (o nulla in assenza di dielettrico), si ha in ogni caso $\varepsilon \ge \varepsilon_0$. Nella Tabella 10.1 sono riportati i valori della costante dielettrica relativa $\varepsilon / \varepsilon_0$, per alcuni materiali di uso comune.

Materiale	$\varepsilon/\varepsilon_0$
Carta	2÷2.5
Porcellana	5÷7
Aria	1.00059
Vetro ordinario	5÷7.6
Mica	5.7÷6.5
Olio per trasformatori	2.2
Acqua distillata	80.1

Tabella 10.1 – Costante dielettrica relativa di alcuni materiali

In presenza di dielettrici lineari, le equazioni del campo vengono pertanto riscritte nel modo seguente:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{I} = 0 \tag{10.6}$$

$$\oint_{S} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = Q_{lib} \tag{10.7}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{10.8}$$

Sulle superfici di discontinuità del campo alla (7.3) va sostituita la seguente relazione di continuità per le componenti normali di **D**:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{D}^{a}(\mathbf{r}) - \mathbf{D}^{b}(\mathbf{r})] = \sigma_{lib}(\mathbf{r})$$
(10.9)

che, in presenza di un conduttore diventa:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}^a(\mathbf{r}) = \sigma_{lib}(\mathbf{r}) \tag{10.10}$$

Vediamo ora come la presenza di un dielettrico modifica il valore della capacità. Si consideri per semplicità un condensatore piano e si immagini di introdurre un dielettrico, mantenendone i morsetti isolati. In questo caso la carica libera sulle armature resta inalterata. Si vanno però ad addensare in prossimità delle superfici metalliche due strati di carica di polarizzazione il cui effetto è quello di ridurre il campo elettrico risultante e quindi la differenza di potenziale ai morsetti. La capacità quindi, essendo il rapporto tra la carica immagazzinata sull'armatura a potenziale maggiore e la differenza di potenziale tra le armature, aumenta. Dal punto di vista quantitativo risulta:

Si è già visto che il campo di una lastra piana di cariche è uniforme e vale

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{i}}_{z} \frac{(\sigma_{lib} + \sigma_{P})}{\varepsilon_{0}}$$
(10.11)

La differenza di potenziale tra le due armature è quindi

$$V_1 - V_2 = \frac{(\sigma_{lib} + \sigma_P)}{\varepsilon_0} d \tag{10.12}$$

La carica distribuita sulla superficie S dell'elettrodo 1 è ora

$$Q_1 = \sigma_{lib}S = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}S = \hat{\mathbf{i}}_z \cdot \varepsilon \mathbf{E}S = \varepsilon \frac{(\sigma_{lib} + \sigma_P)}{\varepsilon_0}S.$$
(10.13)

Trascurando gli effetti di bordo, la capacità del condensatore piano è dunque

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon S}{d}$$
(10.14)

Nel caso di un condensatore costituito da due dielettrici di differente costante dielettrica, se la superficie di separazione coincide con una superficie equipotenziale, la distribuzione del campo elettrostatico non varia se si sostituisce la superficie equipotenziale con una lamina metallica (principio di metallizzazione delle superfici equipotenziali. Sulle due facce di tali superfici compaiono infatti due cariche uguali ed opposte che, essendo infinitamente vicine tra loro non perturbano il campo. La presenza di tale superficie equipotenziale consente di sostituire al condensatore a due dielettrici la serie di due condensatori di dielettrico omogeneo. La capacità risulta quindi facilmente calcolabile come la capacità equivalente di due condensatori connessi in serie:

 $Q=C_1V_1=C_2V_2$ Questo perché sui due condensatori è immagazzinata la stessa carica. $V=V_1+V_2=Q/C_1+Q/C_2$ $Q=C_{eq}V$ $C_{eq}=(1/C_1+1/C_2)^{-1}$