

## 1. Definizioni di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$

Si assume acquisito il concetto di carica elettrica individuata dallo scalare  $q$ . La carica è quantizzata. La carica elementare è quella dell'elettrone:

$$e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

misurata in coulomb (C), nel Sistema Internazionale di misura SI, basato sulla scelta delle unità fondamentali MKSA.

Le cariche esercitano forze le une sulle altre. Tali interazioni possono essere convenientemente descritte introducendo le nozioni di campo elettrico  $\mathbf{E}$  ed induzione magnetica  $\mathbf{B}$ , definiti dalla seguente espressione della forza che agisce sulla carica di prova  $q$  posta in  $P(x, y, z)$  e dotata di velocità  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{F}(x, y, z, t) = q [ \mathbf{E}(x, y, z, t) + \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(x, y, z, t) ]. \quad (1.1)$$

In particolare quindi  $\mathbf{E}$  è una funzione vettoriale del punto e del tempo, che descrive la forza che sarebbe esercitata al tempo  $t$  sulla carica  $q$  nelle condizioni in cui  $q$  non modifica la posizione (o il moto) di tutte le altre cariche responsabili del campo. L'introduzione del concetto di campo elettrico consente quindi di descrivere in modo alternativo a quello della forza di Coulomb (ed il più delle volte molto più comodo) le interazioni in un sistema di cariche. Si noti poi che il verso di  $\mathbf{B}$  ( $\mathbf{F}/q - \mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ) dipende dall'orientazione del sistema di coordinate: se cambia l'orientazione,  $\mathbf{B}$  viene ad assumere verso opposto.  $\mathbf{B}$  è pertanto uno *pseudovettore*<sup>1</sup>.

La (1.1) consente infine di definire le unità di misura per  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . Risulta infatti che l'intensità del campo elettrico è misurata in

newton/coulomb = chilogrammo metro/(secondo)<sup>2</sup>/coulomb

e l'intensità del campo d'induzione magnetica in

newton/(coulomb metro/secondo)=chilogrammo/(coulomb secondo).

Poiché nello studio dei campi sono d'interesse primario le grandezze elettriche e magnetiche invece di quelle meccaniche, si dimostra più utile l'introduzione di nuove unità derivate esprimenti l'intensità del campo elettrico in volt/metro (simbolo V/m) e l'intensità del campo d'induzione magnetica in Tesla (simbolo T).

## 2. Corrente elettrica e densità di corrente

La corrente elettrica si concepisce come movimento di cariche elettriche. Sia  $S$  una superficie aperta orientata arbitrariamente e sia  $T$  la durata di un intervallo temporale centrato in  $t_0$ . Si definisca  $Q_S(T, t_0)$  la carica netta che nel tempo  $T$  attraversa  $S$  nel verso definito dal suo orientamento. Si noti, a tale riguardo che:

- Se le cariche elettriche attraversano  $S$  in senso opposto, esse vanno sottratte al valore precedente di  $Q_S$ ;
- Se le cariche sono negative, esse vanno sommate algebricamente al valore precedente di  $Q_S$ .
- L'esperienza garantisce che il moto di una carica positiva è equivalente a quello di una carica negativa in senso opposto.

---

<sup>1</sup>Ci si riferisce alla seguente definizione di pseudovettore. Per determinare un vettore è sufficiente assegnare una terna  $(A_x, A_y, A_z)$  in un determinato sistema di coordinate  $x y z$ . Le componenti in  $x' y' z'$  si ottengono mediante trasformazione. Se  $x' y' z'$  hanno orientazione diversa da  $x y z$ , le componenti di uno *pseudovettore* in  $x' y' z'$  si ottengono applicando la trasformazione e cambiandone anche il segno.

Si definisce quindi  $I_S(T, t_0)$ , intensità media della corrente attraverso  $S$  nell'intervallo  $T$ , il valore:

$$I_S = \frac{Q_S}{T} \quad (2.1)$$

Il valore istantaneo della corrente  $I_S$  è conseguentemente definito come

$$i_S = \frac{dQ_S}{dt}. \quad (2.2)$$

La corrente elettrica è misurata in ampere (simbolo A), grandezza fondamentale del Sistema Internazionale di Unità di misura. Conseguentemente l'unità di carica (il coulomb) è un'unità derivata e corrisponde al prodotto di un ampere per un secondo (coulomb  $\leftrightarrow$  ampere secondo)

Si vuole ora definire la densità di corrente elettrica  $\mathbf{J}$  e metterla in relazione alla intensità di corrente  $I_S$ . A tale scopo, si consideri una situazione particolarmente semplice in cui le cariche siano distribuite in modo uniforme e siano tutte dotate di velocità  $\mathbf{v}$ , uniforme nello spazio e costante nel tempo. Con riferimento alla fig. 2.1, le cariche che attraversano la generica superficie orientata  $S$  sono tutte e sole quelle contenute nel cilindro di base  $S$  e superficie laterale di direttrice parallela a  $\mathbf{v}$  e di lunghezza  $vT$ . Infatti, le cariche esterne a questo volume o non incontrano  $S$  o non hanno tempo sufficiente per raggiungerla.

La quantità di carica che attraversa  $S$  nel tempo  $T$  è allora:

$$Q_S = qn\tau = nqT\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} S \quad (2.3)$$

dove si è introdotta la densità volumetrica di particelle  $n$  come  $n = \frac{N}{\tau}$ , essendo  $N$  il numero di particelle contenute nel volume  $\tau = S\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}T$  (non desti confusione il simbolo  $n$  associato alla densità di particelle ed il simbolo  $\hat{\mathbf{n}}$  che individua il versore della normale ad  $S$ ). Risulta pertanto:

$$I_S = \frac{Q_S}{T} = nq\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} S \quad (2.4)$$

Ancora una volta si noti come il segno di  $I_S$  dipende dal verso scelto arbitrariamente per la normale  $\hat{\mathbf{n}}$  a  $S$ .

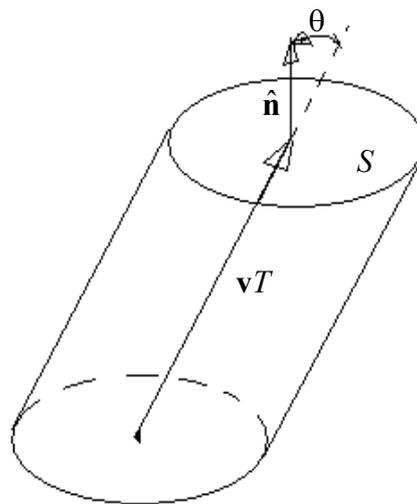


Fig. 2.1

Definendo il vettore densità di corrente elettrica  $\mathbf{J}$  come:

$$\mathbf{J} = nq\mathbf{v} \quad (2.5)$$

la corrente  $I_S$  risulta esprimibile come il flusso del vettore  $\mathbf{J}$  attraverso  $S$

$$I_S = \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}S \quad (2.6)$$

Se  $\mathbf{J}$  non è uniforme e la superficie  $S$  non più piana, la (2.6) va sostituita dalla

$$I_S = \iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}dS \quad (2.7)$$

e dalla

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_i n_i q_i \langle \mathbf{v}_i \rangle \quad (2.8)$$

dove  $\langle \mathbf{v}_i \rangle$  è la velocità media di migrazione delle cariche  $q_i$ , distribuite con densità  $n_i$ .

Si noti infine che la velocità di migrazione nei metalli risulta<sup>2</sup> dell'ordine delle frazioni di mm/s per densità di correnti dell'ordine degli A/mm<sup>2</sup>, essendo invece la velocità di agitazione termica dell'ordine di 10<sup>8</sup> mm/s.

### 3. Conservazione della carica. Equazione di continuità

Si verifica sperimentalmente che la carica netta contenuta in una regione  $\tau$  definita da una superficie chiusa  $S$ , non attraversata da corrente, è costante in ogni intervallo di osservazione. La costanza della carica va intesa come costanza della somma algebrica delle cariche contenute in  $S$ . Se la superficie  $S$  è attraversata dalla corrente elettrica  $i_s$  (supposta uscente da  $S$ ), la conservazione della carica comporta che la carica  $\Delta Q_\tau$  che esce da  $\tau$  attraverso  $S$  nell'intervallo  $t-t_1$  ( $\Delta Q_\tau = \int_{t_1}^t i_s dt$ ) vada a sottrarsi alla carica inizialmente presente  $Q_\tau(t_1)$ , sì che la carica contenuta in  $\tau$  all'istante  $t$  risulta essere

$$Q_\tau(t) = Q_\tau(t_1) - \Delta Q_\tau = Q_\tau(t_1) - \int_{t_1}^t i_s dt \quad (3.1)$$

e quindi

$$\frac{dQ_\tau}{dt} = -i_s \quad (3.2)$$

Queste relazioni esprimono la legge di conservazione della carica. Si noti la differenza concettuale tra la (2.2), che esprime il valore istantaneo della corrente  $i_s$  e la (3.2).

Tenendo conto che  $Q_\tau = \iiint_\tau \rho d\tau$  e che  $i_s = \iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}dS$  ed utilizzando il teorema di Gauss, si perviene all'equazione di continuità in forma locale

<sup>2</sup> $v = J/nq$ ,  $J \sim 100$  A/cm<sup>2</sup>,  $n \sim 10^{23}$ /cm<sup>3</sup>,  $q \sim 10^{19}$ C,  $v \sim 10^{-2}$ cm/s

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J} \quad (3.3)$$

essendo  $\rho$  la densità volumetrica di carica:

$$\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta \tau} \quad (3.4)$$

Nella (3.4)  $\Delta \tau$  è il volume infinitesimo contenente la carica  $\Delta Q$ . Data la natura discreta della carica elettrica, il volume infinitesimo è scelto in modo da garantire a  $\rho$  l'opportuna regolarità, e quindi facendo sì che contenga comunque un numero sufficientemente elevato di cariche elettriche. Considerando infatti cariche puntiformi, si giungerebbe ad una definizione di  $\rho$ , valida solo a patto di introdurre nozioni di teoria delle distribuzioni.

#### 4. Equazioni di Maxwell nel vuoto in forma integrale

Le leggi cui obbediscono i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , supponendo inizialmente, per semplicità, di essere nel vuoto, sono descritte dalle equazioni di Maxwell (J. C. Maxwell, A Treatise on Electricity and Magnetism, Clarendon, Oxford, 1873):

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint_{S_{\gamma}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (4.1)$$

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_{S_{\gamma}} \left( \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (4.2)$$

$\forall \gamma$ ,  $\forall S_{\gamma}$  orlata da  $\gamma$ ,

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \quad (4.3)$$

$$\varepsilon_0 \oiint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = Q_{\text{int}} \quad (4.4)$$

$\forall S$  purché chiusa, e dall'equazione di conservazione della carica elettrica:

$$\oiint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\frac{dQ_{\text{int}}}{dt} \quad (4.5)$$

In queste equazioni  $\hat{\mathbf{n}}$  è il versore normale alla superficie. Esso è orientato in modo congruente a  $\gamma$  (regola della mano destra) nelle equazioni (4.1), (4.2) ed è uscente dal volume  $\tau$  delimitato dalla superficie chiusa  $S$  nelle equazioni (4.4) e (4.5).  $Q_{\text{int}}$  è la carica contenuta in  $\tau$ . Infine  $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$  F/m è la costante dielettrica del vuoto e  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m è la permeabilità magnetica del vuoto. Si noti che nel Sistema SI, indicata con  $c = 2.997910^8$  m/s la velocità della luce nel vuoto, risulta  $c^2 = 1/\varepsilon_0 \mu_0$ . In particolare infine si ricorda che il farad (simbolo F, unità di misura della capacità) corrisponde al rapporto coulomb/volt e che l'henry (simbolo H, unità di misura dell'induttanza) corrisponde al rapporto newton metro/ampere<sup>2</sup> = volt secondo/ampere.

Le equazioni (4.1)-(4.4) implicano l'equazione di conservazione della carica elettrica (4.5). Infatti, con riferimento alla fig. 4.1, si particolarizzi la (4.2) alle superfici aperte  $S_{1\gamma}$  ed  $S_{2\gamma}$ , ambedue orlate dalla curva chiusa  $\gamma$ . Supponendo, per semplicità,  $S_{1\gamma}$  ed  $S_{2\gamma}$  indipendenti dal tempo, si ottiene:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_{S_{1\gamma}} \left( \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS \quad (4.6)$$

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_{S_{2\gamma}} \left( \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS \quad (4.7)$$

Sottraendo membro a membro:

$$\mu_0 \iint_{S_{1\gamma}} \left( \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS - \mu_0 \iint_{S_{2\gamma}} \left( \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS = 0 \quad (4.8)$$

Definita  $S_2'$  la superficie coincidente con  $S_2$ , ma orientata in modo opposto ( $\hat{\mathbf{n}}_2' = -\hat{\mathbf{n}}_2$ ) e osservando che  $S = S_1 \cup S_2'$  risulta essere, per costruzione, una superficie chiusa orientata con normale uscente  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}_1 = \hat{\mathbf{n}}_2'$ , si ottiene:

$$\oiint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\frac{d}{dt} \varepsilon_0 \oiint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\frac{dQ_{\text{int}}}{dt} \quad (4.9)$$

dove si è tenuto conto della (4.4) nell'esprimere il flusso di  $\mathbf{E}$ .

Se si assumono, in un certo istante iniziale  $t_0$ , nulli i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ <sup>3</sup>, è anche possibile mostrare che la (4.1), la (4.2) e la (4.5) implicano la (4.3) e la (4.4).



Fig. 4.1

## 5. Distribuzioni singolari di carica e densità di corrente

Assegnato un tratto infinitesimo di linea di lunghezza  $\Delta l$ , si definisce la *densità di carica lineare*  $\lambda$  come

$$\lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta l} \quad (5.1)$$

Pertanto, la carica  $Q$  presente su di un tratto di filo di lunghezza  $l$  risulta essere

$$Q = \int_l \lambda dl \quad (5.2)$$

Si noti che la densità di carica lineare  $\lambda$  può essere concepita come il limite di una densità di carica infinita concentrata in un sottile filamento carico al tendere a zero della sezione  $A$  del filamento:

$$\lambda = \lim_{\substack{\rho \rightarrow \infty \\ A \rightarrow 0}} \iint_A \rho dS \quad (5.3)$$

<sup>3</sup> o, più in generale, che i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  rispettino per  $t=t_0$  le condizioni (4.3)-(4.4)

In modo analogo, assegnato un elemento infinitesimo di superficie di area  $\Delta S$ , si definisce la *densità di carica superficiale*  $\sigma$  come

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta S}. \quad (5.4)$$

Pertanto, la carica  $Q$  presente su di una superficie di area  $A$  risulta essere

$$Q = \int_A \sigma dS \quad (5.5)$$

Si noti che la densità di carica superficiale  $\sigma$  può essere concepita come il limite di una densità di carica infinita distribuita in un sottile strato carico al tendere a zero dello spessore  $\Delta$  dello strato:

$$\sigma = \lim_{\substack{\rho \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \int_{\xi_0 - \Delta/2}^{\xi_0 + \Delta/2} \rho d\xi \quad (5.6)$$

Si noti che una carica puntiforme può anch'essa essere concepita a partire da una opportuna densità di carica anch'essa di natura impulsiva.

Le distribuzioni singolari di corrente sono la *corrente concentrata*  $i_\lambda$  e la *densità di corrente superficiale*  $\mathbf{J}_s$ .

Assegnato un filo di sezione infinitesima  $\Delta A$ , la *corrente concentrata*  $i_\lambda$  nel filo corrisponde al flusso di una densità di corrente infinita attraverso la sezione infinitesima  $\Delta A$ :

$$i_\lambda = \lim_{\substack{|\mathbf{J}| \rightarrow \infty \\ \Delta A \rightarrow 0}} \iint_A \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (5.7)$$

Assegnato un sottile strato superficiale di spessore  $\Delta$ , la *densità di corrente superficiale*  $\mathbf{K}$ , tangente alla superficie, può essere definita come il limite di una densità di corrente infinita distribuita nello strato al tendere a zero dello spessore dello strato stesso:

$$\mathbf{K} = \lim_{\substack{|\mathbf{J}| \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \int_{\xi_0 - \Delta/2}^{\xi_0 + \Delta/2} \mathbf{J} d\xi; \quad (5.8)$$

la coordinata  $\xi_0$ , lungo un asse normale allo strato, identifica la superficie al limite per  $\Delta \rightarrow 0$ .

In particolare, la corrente che fluisce attraverso un tratto di linea  $l_{12}$  tangente alla superficie (vedi fig. 6.1) risulta essere

$$i_{12} = \int_{l_{12}} \mathbf{K}(u, s) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12} dl \quad (5.9)$$

Il versore  $\hat{\mathbf{n}}_{12}$  è tangente alla superficie e normale in ogni punto al tratto di linea  $l_{12}$ .



Fig. 5.1

## 6. Equazioni di Maxwell nel vuoto in forma differenziale

Le leggi del campo in forma integrale si prestano a determinare i campi stessi solo in alcune particolari situazioni caratterizzate da notevoli proprietà di simmetria. Non sono, in generale, utili alla soluzione di sistemi complessi quali quelli d'interesse per le applicazioni. Da questo punto di vista, risulta molto più conveniente esprimere le stesse leggi in forma differenziale. Queste ultime sono implicitamente contenute nelle leggi del campo in forma integrale le quali, come già osservato, possono essere applicate a volumi, superfici e contorni del tutto arbitrari.

L'integrale di linea nella (4.1) può essere espresso, utilizzando il teorema di Stokes, come:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{S_{\gamma}} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (6.1)$$

per l'arbitrarietà di  $S_{\gamma}$ , segue che

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (6.2)$$

Analogo procedimento porta alla

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (6.3)$$

Utilizzando invece il teorema di Gauss, segue che la (4.3) e la (4.4) possono essere riscritte in forma locale come:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.4)$$

$$\nabla \cdot \varepsilon_0 \mathbf{E} = \rho \quad (6.5)$$

Sulle superfici ove i campi presentino discontinuità, gli operatori differenziali rotore e divergenza non sono più definibili in senso ordinario. Le equazioni (4.1)-(4.5) sono pertanto valide nei soli punti di regolarità<sup>4</sup> per i campi  $\mathbf{B}$  ed  $\mathbf{E}$ . Sulle eventuali superfici di discontinuità esse devono essere sostituite da opportune condizioni di raccordo, ottenibili a partire dalle analoghe equazioni scritte in forma integrale, nel modo esposto nel successivo paragrafo.

## 7. Condizioni di raccordo nel vuoto, in presenza di distribuzioni singolari di carica e densità di corrente.

Ciascuna delle equazioni del campo elettromagnetico in forma integrale implica una relazione di raccordo tra i valori delle componenti dei campi calcolate da parti opposte ad una generica superficie.

Si consideri una superficie  $S$  su cui è presente una carica distribuita con densità superficiale  $\sigma$ . Lo spazio sia suddiviso da  $S$  nelle regioni  $a$  e  $b$ . Si definisca su  $S$  la normale  $\hat{\mathbf{n}}$  diretta dalla regione  $b$  alla regione  $a$ . Si applichi la legge di Gauss (4.3) ad una superficie chiusa  $M$  di volume  $\tau_M$  avente la forma di una moneta (fig. 7.1) con le due facce situate da parte opposta alla superficie e di volume pari ad  $hA$ . Sia trascurabile l'altezza  $h$  della moneta rispetto alle facce  $A_a$  e  $A_b$  di area  $A$ , supposte anch'esse di dimensione piccola abbastanza da poter essere considerate piane e tangenti ad  $S$ . Risulta allora, con ovvi passaggi al limite, tenendo conto che  $\hat{\mathbf{n}}_a = -\hat{\mathbf{n}}_b = \hat{\mathbf{n}}$  e indicando con  $\mathbf{E}^a$  ed  $\mathbf{E}^b$  i valori del campo elettrico  $\mathbf{E}$  su  $S$ , considerati dall'uno e dall'altro lato di  $S$ , come indicato dai suffissi  $a$  e  $b$ :

<sup>4</sup> cioè punti nei quali i campi sono continui e sono univocamente definite le loro derivate

$$\oint_M \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_{A_a} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}_a dS + \iint_{A_b} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}_b dS + \iint_{S_h} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}_h dS \cong \mathbf{E}^a \cdot \hat{\mathbf{n}}_a A + \mathbf{E}^b \cdot \hat{\mathbf{n}}_b A = \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E}^a - \mathbf{E}^b) A \quad (7.1)$$

$$Q_{\text{int}} = \iiint_{\tau_M} \rho d\tau = A \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-h/2}^{h/2} \rho d\xi = \sigma A \quad (7.2)$$

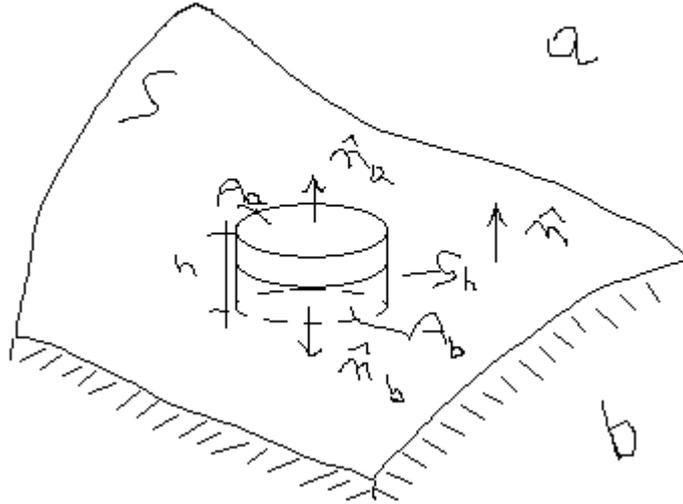


Fig. 7.1

La legge di Gauss applicata alla superficie elementare  $M$  richiede pertanto che

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot [\varepsilon_0 \mathbf{E}^a(\mathbf{r}) - \varepsilon_0 \mathbf{E}^b(\mathbf{r})] = \sigma(\mathbf{r}) \quad (7.3)$$

Con analoghi passaggi, utilizzando la (4.4) risulta:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}^a(\mathbf{r}) - \mathbf{B}^b(\mathbf{r})) = 0 \quad (7.4)$$

Si consideri ora una superficie  $S$  sulla quale è localizzata una densità di corrente superficiale  $\mathbf{K}$ . Si orienti su di essa la normale  $\hat{\mathbf{n}}$  diretta dalla regione  $b$  alla regione  $a$ . Si applichi la legge di Ampère (4.2) ad una superficie rettangolare  $S_\gamma$  ortogonale ad  $S$  che intersechi  $S$  come mostrato in fig. 7.2. Sia  $\gamma$  l'orlo di  $S_\gamma$ , di area  $lh$ . La lunghezza  $l$  del rettangolo sia piccola abbastanza da potersi ritenere tangente alla superficie  $S$ . L'altezza del rettangolo  $h$  sia molto più piccola di  $l$ . Per convenienza si introducano i versori  $\hat{\mathbf{i}}_s$  ed  $\hat{\mathbf{i}}_n$  mutuamente ortogonali ad  $\hat{\mathbf{n}}$ , come mostrato in figura. Risulta allora con ovvi passaggi al limite, tenendo conto che il contributo all'integrale di linea dei lati corti del rettangolo è trascurabile ( $l \gg w$ ):

$$\oint_\gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \cong \hat{\mathbf{i}}_s \cdot (\mathbf{B}^a - \mathbf{B}^b) \quad (7.5)$$

$$\mu_0 \iint_{S_\gamma} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n dS + \mu_0 \varepsilon_0 \iint_{S_\gamma} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n dS \cong \mu_0 \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n w l + \mu_0 \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n l + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n w l \cong \mu_0 \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n l \quad (7.6)$$

La legge di Ampère richiede pertanto che

$$\hat{\mathbf{i}}_s \cdot (\mathbf{B}^a - \mathbf{B}^b) = \mu_0 \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n l \quad (7.7)$$

Tenendo conto che  $\hat{\mathbf{i}}_s = \hat{\mathbf{i}}_n \times \hat{\mathbf{n}}$

$$\hat{\mathbf{i}}_n \times \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}^a - \mathbf{B}^b) = \mu_0 \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n \quad (7.8)$$

Poiché il prodotto misto non cambia scambiando il prodotto scalare con quello vettoriale ( $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ ) risulta:

$$\hat{\mathbf{i}}_n \cdot \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{B}^a - \mathbf{B}^b) = \mu_0 \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n \quad (7.9)$$

Si noti che la direzione  $\hat{\mathbf{i}}_n$  è arbitraria a patto che giaccia su  $S$ . Poiché  $\hat{\mathbf{i}}_n$  moltiplica un vettore che risulta ortogonale ad  $\hat{\mathbf{n}}$  e, quindi, tangente ad  $S$ , esso può essere omissso:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{B}^a - \mathbf{B}^b) = \mu_0 \mathbf{K} \quad (7.10)$$

C'è quindi un salto nella componente tangente di  $\mathbf{B}$  in presenza di una corrente superficiale, in assenza di mezzi materiali.

Con analoghi passaggi, utilizzando la (4.4) risulta, se l'intensità dei campi è finita in prossimità di  $S$ :

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}^a - \mathbf{E}^b) = \mathbf{0} \quad (7.11)$$

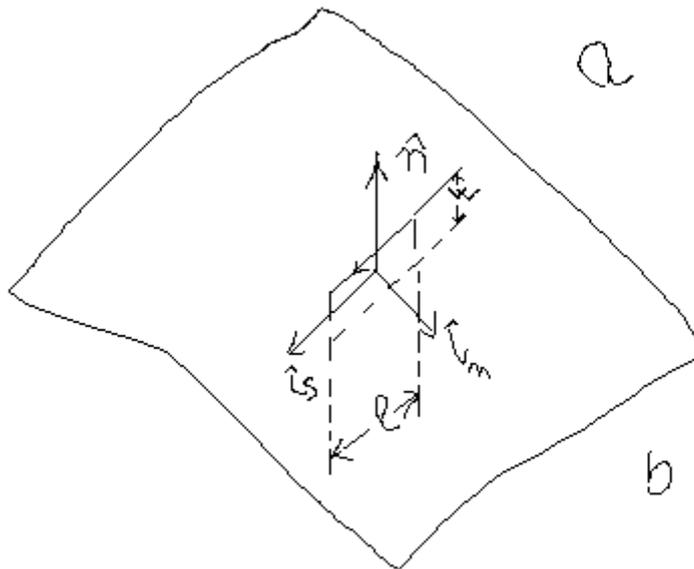


Fig. 7.2