12. Il campo magnetostatico nel vuoto

Le equazioni del campo

Nel caso stazionario le equazioni che descrivono il campo magnetostatico sono

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_{S_\gamma} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \tag{12.1}$$

$$\oiint_{S} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \tag{12.2}$$

Nella (12.1) l'orientamento di γ e di $\hat{\mathbf{n}}$ su S_γ sono scelti in accordo con la regola della mano destra. Il secondo membro della (12.1) rappresenta, a meno della costante μ_0, la somma algebrica delle correnti concatenate con la curva chiusa γ (Il segno più è associato alle correnti concatenate che hanno orientamento concorde ad $\hat{\mathbf{n}}$). Le (12.1) e (12.2) vanno completate con opportune condizioni di regolarità all'infinito. Si noti che, in virtù della (12.2) i flussi attraverso due generiche superfici aperte aventi lo stesso orlo γ sono uguali: il flusso dipende solo da γ, e pertanto si parla di flusso concatenato con una linea chiusa γ, senza specificare la superficie:

$$\phi_\gamma = \iint_{S\gamma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

dove si è indicato con S_γ la generica superficie di orlo γ.
Sulle eventuali superfici di discontinuità per il campo, quali quelle dove si localizza una densità di corrente superficiale $\mathbf{K}$(vedi paragrafo 5), la (12.1) si particolarizza con la seguente condizione sulle componenti tangenti del campo d'induzione magnetica $\mathbf{B}$:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{B}^a - \mathbf{B}^b) = \mu_0 \mathbf{K} \tag{12.3}$$

La (12.2) dà luogo invece alla seguente condizione di continuità delle componenti normali:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}^a - \mathbf{B}^b) = 0\,. \tag{12.4}$$

La magnetostatica delle distribuzioni di corrente ha per obbiettivo il calcolo del campo d'induzione magnetica quando le correnti sono note.

Il campo in assenza di sorgenti

Si assuma che la densità di corrente sia nulla in ogni punto dello spazio. Il problema è invariante per traslazioni, pertanto, l'induzione magnetica è uniforme. Sia, ad esempio, $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_0\hat{\mathbf{i}}_z$. L'invarianza per rotazioni comporta che B_0=0. Infatti, detto $\mathbf{B}'$ il campo induzione magnetica associato al problema ottenuto ruotando lo spazio di π intorno all'asse x, risulta che $\mathbf{B}'(\mathbf{r}) = -B_0\hat{\mathbf{i}}_z$. Poiché i due precedenti problemi sono indistinguibili deve risultare che in uno stesso punto dello spazio il campo è identico, pertanto $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}'(\mathbf{r})$ da cui segue B_0=0.

Distribuzioni di corrente a simmetria cilindrica

Si assuma che una corrente uniforme di densità $\mathbf{J} = J\hat{\mathbf{i}}_z$ sia presente all'interno di un cilindro di lunghezza infinita di asse z e sezione circolare di raggio a (figura 12.1(a)). Si consideri un sistema di coordinate cilindrico (r,θ,z) coassiale alla distribuzione di corrente. Per un osservatore posto a distanza r dall'asse, la distribuzione di corrente non varia per traslazione lungo z e per rotazione intorno a z. Pertanto, le componenti dell'induzione magnetica in coordinate cilindriche dipendono solo da r:

$$B_r = B_r(r),\ B_\theta = B_\theta(r),\ B_z = B_z(r). \tag{12.5}$$

Dalla legge di Ampère per la curva γ_1 (vedi figura 12.1(b)) si ha che B_z è costante. Infatti:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{r_1}^{r_2} B_r(r')dr' + \int_0^{\Delta z} B_z(r_2)dz + \int_{r_2}^{r_1} B_r(r')dr' + \int_{\Delta z}^{0} B_z(r_1)dz \\ &= [B_z(r_2) - B_z(r_1)]\Delta z \end{aligned} \tag{12.6}$$

con r_1 e r_2 arbitrari (positivi). Ne consegue che B_z è indipendente dalla posizione e quindi uniforme in tutto lo spazio.
Dalla legge di Gauss per la superficie cilindrica S (figura 12.1(c)), si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{S_+} B_{z0}dS - \iint_{S_-} B_{z0}dS + \iint_{S_l} B_r(r^*)dS \\ &= B_r(r^*)\cdot area(S_l) \end{aligned} \tag{12.7}$$

dove S_l è la superficie laterale del cilindro ed S_+ e S_- sono le superfici che corrispondono alle basi del cilindro. I contributi dovuti a queste due basi di normali $\hat{\mathbf{i}}_z$ e $-\hat{\mathbf{i}}_z$ si cancellano essendo le due basi di area uguale e B_z uniforme. La componente B_r è pertanto nulla.
La corrente concatenata con una curva circolare del tipo γ_2 (figura 12.1(b)) dipende dal raggio r della medesima:

$$I_c = \begin{cases} I \text{ per } r \geq a \\ I\dfrac{r^2}{a^2} \text{ per } r \leq a \end{cases} \tag{12.8}$$

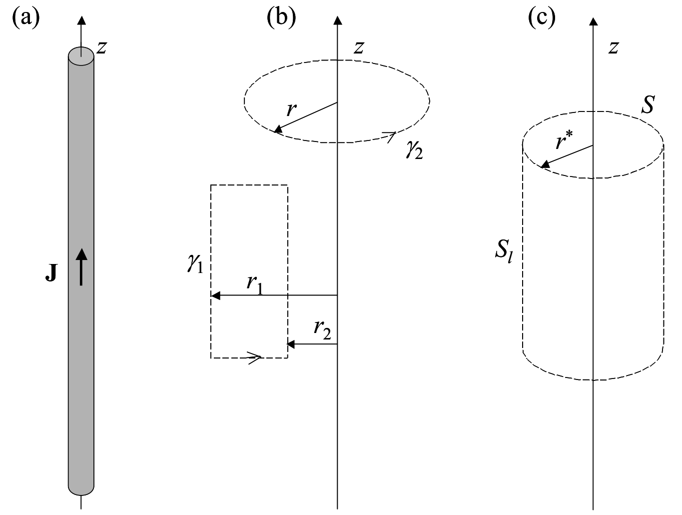

Figura 12.1. La densità di corrente (a) insieme alle curve e superfici utilizzate per la legge di Ampére (b) e Gauss (c).

dove $I = J\pi a^2$ è la corrente totale attraverso una sezione ortogonale all'asse z. Dalla legge di Ampère per la curva γ_2 si ha che

$$\int_0^{2\pi} B_\theta(r) r d\theta' = \mu_0 I_c \tag{12.9}$$

da cui

$$B_\theta(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \text{ per } r \geq a \\ \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \text{ per } r \leq a \end{cases}. \tag{12.10}$$

Riassumendo, l'induzione magnetica è data da $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{i}}_\theta B_\theta(r) + \hat{\mathbf{i}}_z B_{z0}$ dove B_{z0} è una costante che risulta essere nulla, in assenza di sorgenti all'infinito. Infatti, si consideri il campo differenza $\Delta\mathbf{B} \hat{=} \mathbf{B} - \hat{\mathbf{i}}_\theta B_\theta(r)$. Per costruzione, il campo vettoriale $\hat{\mathbf{i}}_\theta B_\theta(r)$ soddisfa le equazioni (12.1) e (12.2) e non presenta sorgenti all'infinito all'infuori della regione cilindrica ove circola la corrente I. Pertanto, il campo $\Delta\mathbf{B}$ soddisfa le equazioni della magnetostatica in assenza di sorgenti. In base a quanto dimostrato in precedenza, l'induzione magnetica in assenza di sorgenti è nulla e quindi $\Delta\mathbf{B} = \mathbf{0}$, cioè $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{i}}_\theta B_\theta(r)$.

Per $a \to 0^+$ (mantenendo costante la corrente I) la (12.10) fornisce l'espressione del campo prodotto da una corrente filiforme.

Infine, si noti che l'induzione magnetica è ortogonale all'asse della densità di corrente in ogni punto dello spazio.

Distribuzioni di corrente a simmetria piana

Si assuma che una corrente uniforme sia presente all'interno di uno strato piano infinito di spessore $2h$ con densità $\mathbf{J} = J\hat{\mathbf{i}}_x$ (figura 12.2). Si consideri un sistema di coordinate cartesiano il cui piano xy coincide con il piano di simmetria dello strato. La distribuzione di corrente non varia per traslazione lungo x e lungo y. Pertanto, le componenti dell'induzione magnetica in coordinate cartesiane dipendono solo da z:

$$B_x = B_x(z),\ B_y = B_y(z),\ B_z = B_z(z). \tag{12.11}$$

Inoltre, la distribuzione di corrente è invariate a seguito di una rotazione di π intorno all'asse x (fig. 12.2). Da ciò risulta che B_x è una funzione pari ($B_x(z)=B_x(-z)$) mentre B_y e B_z sono funzioni dispari della coordinata z [$B_y(z)= -B_y(-z)$ e $B_z(z)= -B_z(-z)$].

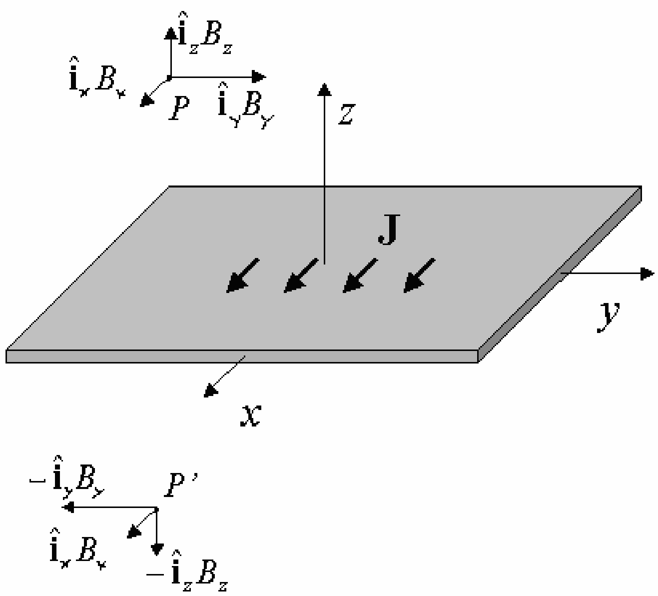

Fig. 12.2

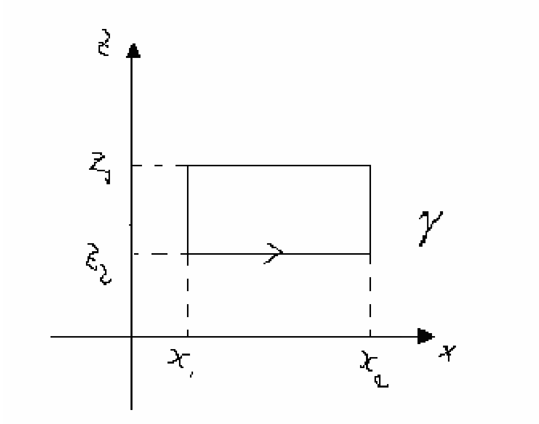

Fig. 12.3

Dalla legge di Ampère per la curva γ_1 (vedi figura 12.3) si ha che B_x è uniforme in tutto lo spazio (B_x=B_{x0}), essendo z_2 e z_1 qualsiasi:

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} B_x(z_2)dx + \int_{z_2}^{z_1} B_z(z)dz + \int_{x_2}^{x_1} B_x(z_1)dx + \int_{z_1}^{z_2} B_z(z)dz = [B_x(z_2) - B_x(z_1)](x_2 - x_1) \quad (12.12)$$

Calcolando il flusso di **B** attraverso la superficie chiusa di un parallelepipedo con le basi poste in $z=z_1$ e $z=-z_1$ e le altre quattro facce sui piani $x=x_1$, $x=x_2$, $y=y_1$, $y=y_2$, dalla (12.2) risulta che B_z è uniforme in tutto lo spazio (B_z=B_{z0}), essendo z_1 qualsiasi:

$$0 = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} B_z(z_1)dxdy - \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} B_z(-z_1)dxdy + \int_{-z_1}^{z_1}\int_{y_1}^{y_2} B_{x0}dydz - \int_{-z_1}^{z_1}\int_{y_1}^{y_2} B_{x0}dydz + \int_{-z_1}^{z_1}\int_{x_1}^{x_2} B_y(z)dxdz - \int_{-z_1}^{z_1}\int_{x_1}^{x_2} B_y(z)dxdz =$$
$$= [B_z(z_1) - B_z(-z_1)](x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \quad (12.13)$$

Poiché B_z è una funzione dispari, segue che B_{z0}=0.

La corrente concatenata con la curva γ (figura 12.3) vale (z_1>0):

$$I_c = \begin{cases} J(2hy_1) & \text{per } z_1 \geq h \\ J(2zy_1) = J2h\dfrac{z}{h}y_1 & \text{per } 0 \leq z_1 \leq h \end{cases} \quad (12.14)$$

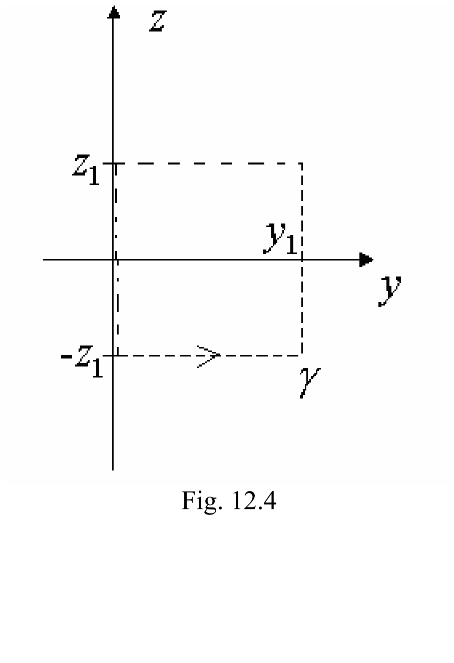

Fig. 12.4

La circuitazione di **B** lungo la curva γ vale:

$$\oint_\gamma \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \int_0^{y_1} B_y(-z_1)dy + \int_{y_1}^{0} B_y(z_1)dy = -2y_1 B_y(z_1) \qquad (12.15)$$

Dalla legge di Ampère applicata alla curva γ si ricava

$$B_y(z_1) = \begin{cases} -\mu_0 \dfrac{K}{2} \text{ per } z_1 \geq h \\ -\mu_0 \dfrac{K}{2}\dfrac{z}{h} \text{ per } 0 \leq z_1 \leq h \end{cases}. \qquad (12.16)$$

dove si è posto $K=2Jh$. Per $h \to 0^+$ (mantenendo costante la densità di corrente superficiale K) la (12.16) fornisce l'espressione del campo prodotto da una corrente superficiale.
L'annullamento della componente uniforme B_{x0}, segue invocando l'unicità con considerazioni analoghe al caso del filo rettilineo indefinito.
Il campo prodotto da una distribuzione piana di corrente diretta lungo l'asse x è diretto lungo l'asse y. L'espressione (12.13), fornisce quindi il valore dell'induzione in ogni punto dello spazio.

La spira circolare

Si assuma che una corrente filiforme di intensità I circoli in una spira piana di raggio R contenuta nel piano xy il cui asse è coincidente con l'asse z (figura 12.5). La distribuzione di corrente non varia per rotazioni intorno all'asse z. Pertanto, le componenti dell'induzione magnetica in coordinate cilindriche dipendono solo dalle coordinate r e z:

$$B_r = B_r(r,z),\ B_\theta = B_\theta(r,z),\ B_z = B_z(r,z). \qquad (12.17)$$

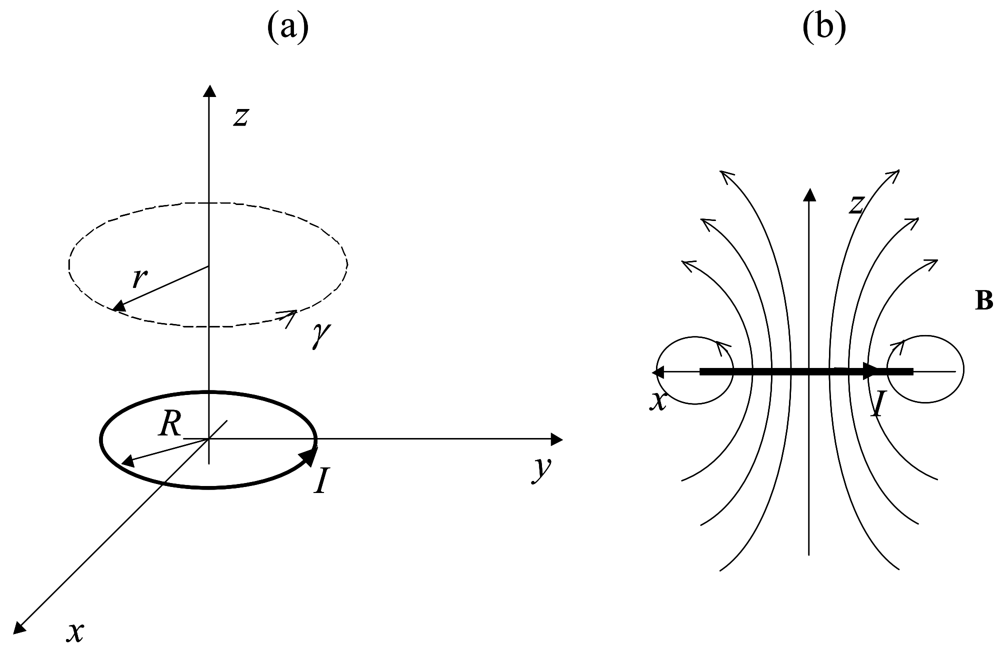

Figura 12.5. La densità di corrente insieme alla curva utilizzata per la legge di Ampére (a). L'andamento delle linee di forza dell'induzione magnetica **B** (b).

Dalla legge di Ampère alla curva γ (figura 12.3) segue che la componente B_θ è identicamente nulla, infatti

$$0 = \oint_\gamma \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} B_\theta(r,z) r d\theta = 2\pi B_\theta(r,z) \qquad (12.18)$$

Le componenti B_r e B_z sono funzioni della coordinata z dispari e pari, rispettivamente. Infatti, preso il punto di coordinate (r, 0, z), una rotazione di π intorno all'asse x seguita da un cambio di segno alla corrente I lascia le sorgenti inalterate (figura 12.6). L'andamento qualitativo delle linee di forza dell'induzione magnetica è riportato in figura 12.5(b).

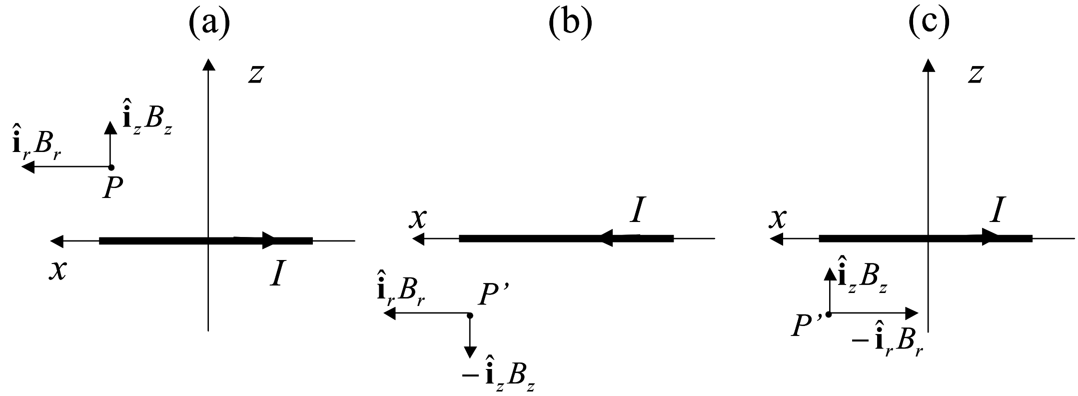

Figura 12.6. La sequenza di trasformazioni che lascia il campo inalterato. Il punto P ha coordinate (r, 0, z). Il punto immagine P' ha coordinate (r, 0, $-z$). La configurazione (a) è identica alla configurazione (c), pertanto,

$$\hat{\mathbf{i}}_r B_r(P') + \hat{\mathbf{i}}_z B_z(P') = \mathbf{B}(P') = -\hat{\mathbf{i}}_r B_r(P) + \hat{\mathbf{i}}_z B_z(P).$$

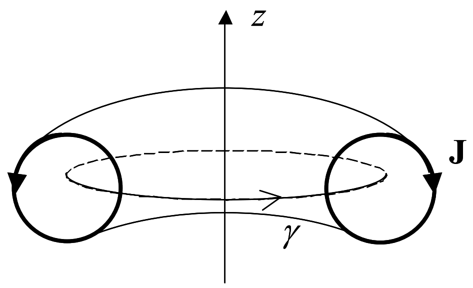

Figura 12.7. Il solenoide toroidale con la curva utilizzate per la legge di Ampére.

Il solenoide toroidale

Il solenoide toroidale (figura 12.6) è ottenuto dalla rivoluzione intorno all'asse z di una spira piana di forma generica il cui asse è ortogonale all'asse z.
Per simmetria, le componenti in coordinate cilindriche non dipendono da θ:

$$B_r = B_r(r,z),\ B_\theta = B_\theta(r,z),\ B_z = B_z(r,z). \tag{12.19}$$

Il calcolo di B_θ segue agevolmente dalla legge di Ampère. Infatti, con riferimento alla curva γ (contenuta nel toro) si ha che

$$\mu_0 I_T = \int_0^{2\pi} B_\theta(r,z) r d\theta = 2\pi r B_\theta(r,z), \tag{12.20}$$

dove I_T è la corrente netta che circola sulla superficie del toro. Si noti che $I_T = NI$ nel caso in cui il sistema sia costituito da un unico conduttore filiforme avvolto ripetutamente intorno ad un supporto solido avente la forma della cavità del solenoide toroidale, in modo che il numero totale N delle spire sia il più grande possibile e che ciascuna spira sia praticamente contenuta in uno dei semipiani di asse z. Una analoga circonferenza γ, sempre con centro sull'asse z e giacente su un piano ortogonale a z, ma esterna al solenoide toroidale, non concatena corrente. In questo caso, segue ancora dalla legge di Ampère che B_θ è nulla nella regione esterna al toro. Riassumendo, si ha:

$$B_\theta(r,z)=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 I_T}{2\pi r}\ \text{se } (r,\theta,z) \text{ è all'interno del toro}\\ 0 \ \text{se } (r,\theta,z) \text{ è all'esterno del toro}\end{cases}. \qquad (12.21)$$

Le componenti B_r e B_z sono identicamente nulle. Questo risultato segue agevolmente, nel caso che le spire siano circolari, dalla osservazione che (vedi le proprietà di simmetria del campo prodotto da una spira) coppie di spire elementari percorse dalla stessa corrente e disposte simmetricamente rispetto ad un assegnato punto di osservazione P, producono, in corrispondenza di P, un campo in direzione del versore $\hat{\mathbf{i}}_\theta$. Il risultato è più generale e può essere ottenuto utilizzando, come nei casi precedenti, l'unicità del campo.

Infatti, sia $\mathbf{B}$ la soluzione del problema. L'induzione $\mathbf{B}^* = B_\theta(r,z)\hat{\mathbf{i}}_\theta$ soddisfa le (12.1) e (12.2), pertanto la differenza $\Delta\mathbf{B} = \mathbf{B} - \mathbf{B}^*$ soddisfa le equazioni della magnetostatica con sorgenti nulle. Da ciò deriva che $\Delta\mathbf{B} = \mathbf{0}$, quindi $\mathbf{B} = B_\theta(r,z)\hat{\mathbf{i}}_\theta$.

Il solenoide rettilineo indefinito

Il solenoide rettilineo indefinito è costituito da una distribuzione di corrente invariante lungo l'asse z avente solo componenti nel piano xy. Esso può essere immaginato come caso limite del solenoide toroidale, in cui il raggio del toro tenda ad infinito. Estrapolando i risultati precedenti, si conclude agevolmente che il campo magnetico all'interno del solenoide indefinito è diretto lungo l'asse del solenoide stesso ed è nullo all'esterno.

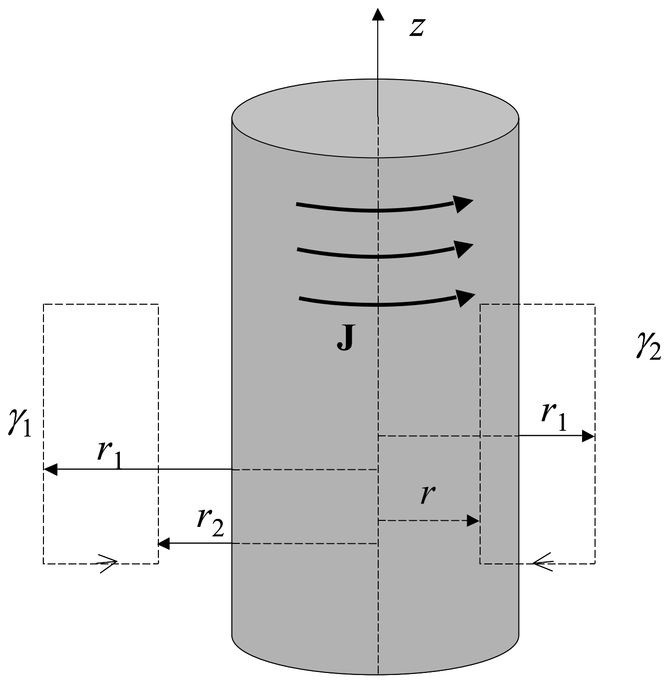

Figura 12.8. Il solenoide rettilineo infinito con le curve utilizzate per la legge di Ampére.

Dalla legge di Ampère alla curva γ_1 (figura 12.8) risulta che B_z è uniforme all'interno del solenoide; infatti, assumendo che la corrente sia uniformemente distribuita in uno spessore Δ:

$$\int_0^h B_z(r,\theta)dz + \int_h^0 B_z(r_1,\theta)dz = \mu_0 J\Delta h$$

$$h[B_z(r,\theta) - B_z(r_1,\theta)] = \mu_0 J\Delta h \qquad (12.22)$$

La quantità $J\Delta$ può anche essere espressa in funzione del numero di spire per unità di lunghezza, supponendo anche in questo caso che sistema sia costituito da un unico conduttore filiforme avvolto ripetutamente intorno al solenoide. Si ha $J\Delta h = NI$ e quindi $J\Delta = N/h\ I = nI$.
Segue pertanto che il valore del campo all'interno del solenoide è pari a

$$B_z(r,\theta) = \mu_0 nI$$

dove n è il numero di spire per unità di lunghezza e I il valore della corrente circolante in ciascuna di esse. Le linee di **B** risultano essere rette parallele all'asse z ed orientate rispetto alla corrente secondo la consueta regola della mano destra.

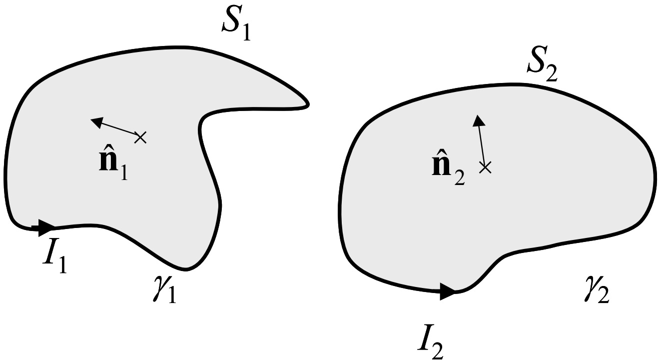

Figura 12.9. Riferimenti e convenzioni per la definizione dei coefficienti di auto e mutua induzione.

Coefficienti di auto e mutua induzione

Siano assegnati due circuiti quasi filiformi percorsi dalle correnti I_1 e I_2, rispettivamente, e descritti dalle curve γ_1 e γ_2. Si supponga di orientare le curve γ_1 e γ_2 concordi con il verso di riferimento per le correnti e siano S_1 e S_2 due generiche superfici che hanno per bordo γ_1 e γ_2, rispettivamente. Sia $\hat{\mathbf{n}}_1$, ($\hat{\mathbf{n}}_2$) il versore normale definito su S_1 (S_2) scelto secondo la regola della mano destra (figura 12.9).
Calcoliamo i flussi ϕ_1 e ϕ_2 attraverso le superfici S_1 e S_2 definiti come:

$$\phi_1 = \iint_{S_1} \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1 dS\ ,\ \phi_2 = \iint_{S_2} \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}_2 dS\,. \qquad (12.23)$$

Come già evidenziato precedentemente, si vuole esplicitamente rilevare ancora una volta che, in virtù della (12.2), i flussi attraverso due generiche superfici aperte aventi lo stesso orlo γ sono uguali: il flusso dipende solo da γ, e pertanto si parla di *flusso concatenato con una linea chiusa γ,* senza specificare la superficie. Ciò può essere facilmente dimostrato applicando la (12.2) alla superficie chiusa di figura 12.10, ottenuta per unione delle due superfici generiche $S_{1\gamma}$ e $S_{2\gamma}$, aventi lo stesso orlo γ. Risulta

$$0 = \oint\!\!\!\oint_S \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = \iint_{S_{1\gamma}} \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1 dS + \iint_{S_{2\gamma}} \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}'_2 dS$$

e quindi

$$\iint_{S_{1\gamma}} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS = -\iint_{S_{2\gamma}} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2^{'} dS = \iint_{S_{2\gamma}} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS$$

L'assunto segue per l'arbitrarietà di $S_{1\gamma}$ e $S_{2\gamma}$.

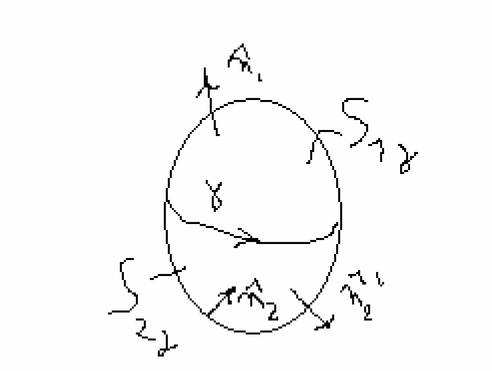

Fig. 12.10

Tenuto conto della linearità del problema, si riconosce che sussiste una "proporzionalità" tra campo d'induzione magnetica e corrente. Si vede allora che (principio di sovrapposizione degli effetti) quando agisce la sola corrente I_1 i flussi dell'induzione magnetica attraverso le superfici S_1 e S_2 valgono:

$$\phi_{11} = \iint_{S_1} \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS = L_1 I_1 \,,\; \phi_{21} = \iint_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS = M_{21} I_1 \qquad (12.24)$$

dove L_1 e M_{21} sono opportune costanti e $\mathbf{B}_1$ è l'induzione magnetica prodotta dalla corrente I_1. In modo analogo, quando agisce la sola corrente I_2, si ha:

$$\phi_{12} = \iint_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS = M_{12} I_2 \,,\; \phi_{22} = \iint_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS = L_2 I_2 \qquad (12.25)$$

con ovvio significato dei simboli. Sovrapponendo gli effetti si ha:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= L_1 I_1 + M_{12} I_2 \\ \phi_2 &= M_{21} I_1 + L_2 I_2 \end{aligned}, \qquad (12.26)$$

Il coefficiente L_1 (L_2) è detto coefficiente di autoinduzione mentre il coefficiente M_{21} (M_{12}) è detto di mutua induzione. L'unità di misura dei coefficienti di auto e mutua induzione è l'henry (H).
Per via delle convenzioni (regola della mano destra) scelte per orientare il verso positivo per i flussi concatenati, si ha che il coefficiente di autoinduzione è sempre positivo. Infatti, quando I_1 è positiva le linee del campo magnetico "puntano" dalla stessa parte di $\hat{\mathbf{n}}_1$ rispetto a γ_1, e ciò implica che anche ϕ_1 risulta positivo. Analogamente, quando I_1 è negativa anche ϕ_1 è tale: in tutti e due i casi il rapporto ϕ_1 / I_1 sarà positivo. Il coefficiente di mutua induzione può essere sia positivo che negativo. Per passare da un segno all'altro è sufficiente invertire il verso di riferimento per la corrente in uno dei due circuiti.
L'ipotesi che i circuiti siano quasi filiformi è indispensabile per definire correttamente il coefficiente di autoinduzione. Infatti, se un circuito fosse rigorosamente filiforme, allora l'induzione magnetica risulterebbe non limitata in prossimità del circuito stesso (si tenga presente il campo prodotto da una corrente filiforme rettilinea infinita) e, conseguentemente, il flusso concatenato sarebbe infinito. Tale problema non si presenta nei confronti del coefficiente di mutua induzione M_{ij} il quale è il rapporto tra il flusso dell'induzione $\mathbf{B}_j$ attraverso la superficie S_i e la corrente I_j. Infatti, la superficie S_i è a una distanza non nulla dal circuito j che genera il campo $\mathbf{B}_j$ e, conseguentemente, si ha che $\mathbf{B}_j$ (e ϕ_i) è limitato in corrispondenza di S_i.

Energia magnetica e coefficienti di auto e mutua induzione

Si consideri una spira conduttrice percorsa da corrente i e collegata ad un generatore di f.e.m costante E_g. Se non esistono altri circuiti percorsi da corrente, l'unico campo magnetico è quello prodotto da i.
Si consideri la legge di Faraday-Neumann-Lenz[1]

$$\oint_\gamma \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{t}}dl = -\frac{d}{dt}\iint_{S_\gamma}\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS \tag{12.27}$$

estesa alla linea chiusa γ costituita dalla linea media della spira ed il cui versore tangente $\hat{\mathbf{t}}$ è orientato nel verso di i.
Ricordando la definizione di coefficiente di autoinduzione L, il flusso concatenato con la linea γ è pari a

$$\phi_\gamma = \iint_{S_\gamma}\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = Li \tag{12.28}$$

Ricordiamo altresì la definizione di f.e.m.

$$E_\gamma = \oint_\gamma \mathbf{E}_T\cdot\hat{\mathbf{t}}dl \tag{12.29}$$

si vede che la spira è sede di una f.e.m. indotta di valore

$$E_\gamma = -\frac{d\phi_\gamma}{dt} = -\frac{dLi}{dt} = -L\frac{di}{dt} \tag{12.30}$$

Si noti che il verso di percorrenza di γ che determina il verso di E_γ è quello assunto positivo per i (convenzione del generatore).

Si consideri ancora la linea chiusa γ, costituita dalla spira e dal generatore. La *f.e.m. totale* che agisce lungo γ risulta

$$E_T = \oint_\gamma(\mathbf{E}_m + \mathbf{E})\cdot\hat{\mathbf{t}}dl = E_g - \frac{d\phi_\gamma}{dt} \tag{12.31}$$

dove $\mathbf{E}_m$ è il campo elettromotore del generatore.
Poiché, d'altra parte nella spira $\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$ e nel generatore $\mathbf{J}=\sigma_g(\mathbf{E}_m+\mathbf{E})$, si ha:

$$\int_{\gamma_{spira}}\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{t}}dl = \int_{\gamma_{spira}}\frac{1}{\sigma}\mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{t}}dl \tag{12.32}$$

$$\int_{\gamma_g}(\mathbf{E}_m + \mathbf{E})\cdot\hat{\mathbf{t}}dl = \int_{\gamma_g}\frac{1}{\sigma_g}\mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{t}}dl \tag{12.33}$$

Nell'ipotesi che il sistema sia filiforme di sezione S:

$$\mathbf{J} = \frac{i}{S}\hat{\mathbf{t}} \tag{12.34}$$

dove $\hat{\mathbf{t}}$ è di nuovo il versore tangente a γ orientato nel verso di i. Risulta

$$E_T = \oint_\gamma(\mathbf{E}_m + \mathbf{E})\cdot\hat{\mathbf{t}}dl = \int_{\gamma_g}(\mathbf{E}_m + \mathbf{E})\cdot\hat{\mathbf{t}}dl + \int_{\gamma_{spira}}\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{t}}dl = i\int_{\gamma_g}\frac{1}{\sigma_g S}dl + i\int_{\gamma_{spira}}\frac{1}{\sigma S}dl = i(R_g + R_{sp}) \tag{12.35}$$

dove R_g ed R_{sp} sono le resistenze dei tratti di circuito costituiti dalla spira e dal generatore.

---

[1] Per introdurre alcune considerazioni sull'energia magnetica è necessario abbandonare l'ipotesi di stazionarietà del campo. Si suppongono pertanto acquisite dal corso di Fisica II alcune nozioni introduttive sulla legge di Faraday-Neumann_Lenz. Le implicazioni più significative della legge dell'induzione verranno discusse successivamente.

Pertanto, la somma di tutte le f.e.m. agenti (applicate e indotte) nel circuito è bilanciata dalla tensione $(R_g+R_{sp})i=R_Ti$:

$$E_g - \frac{d\phi_\gamma}{dt} = R_T i \qquad (12.36)$$

moltiplicando ambo i membri per idt si ottiene:

$$E_g idt = R_T i^2 dt + id\phi_\gamma \qquad (12.37)$$

che esprime il bilancio energetico, nel tempo dt, tra l'energia erogata dalla sorgente, l'energia dissipata per effetto Joule e la quantità $id\phi_\gamma$, energia che viene immagazzinata nel sistema sotto altra forma. In un processo che parta da flusso nullo e pervenga al flusso Φ, si immagazzina nel sistema l'energia:

$$W_m = \int_0^\Phi id\phi_\gamma \qquad (12.38)$$

che viene denominata energia magnetica.
Si noti che, nel caso in esame

$$W_m = \int_0^\Phi id\phi_\gamma = \int_0^{LI} idLi = \frac{1}{2}LI^2 \qquad (12.39)$$

La variazione di energia $id\phi_\gamma$ può essere espressa in funzione del campo d'induzione magnetica:

$$dW_m = \int_\tau (\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot d\mathbf{B})d\tau \qquad (12.40)$$

in cui l'integrale è esteso a tutto lo spazio.
La quantità

$$w_m = \int_0^B \frac{B}{\mu_0} \cdot dB = \frac{B^2}{2\mu_0} \qquad (12.41)$$

viene chiamata energia magnetica specifica.
Risulta allora che

$$W_m = \int_\tau w_m d\tau = \int_\tau \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \frac{1}{2}LI^2 \qquad (12.42)$$

da cui

$$L = 2W_m / I^2 \qquad (12.43)$$

Si noti ancora una volta che L risulta essere una grandezza positiva per definizione.
La definizione di energia magnetica può essere estesa ad un sistema costituito da due o più circuiti con semplici passaggi. In particolare, l'energia magnetica specifica risulta anche in questo caso data dalla (12.41), e pertanto nei sistemi lineari, quali quelli in esame, dipende solo dalla configurazione delle spire e non dalle modalità in cui la configurazione è stata ottenuta. Ciò consente di affermare che la variazione elementare di energia è un differenziale esatto. Ciò implica, nel caso di due circuiti mutuamente accoppiati che deve essere

$$M_{12} = M_{21} = M \,. \qquad (12.44)$$

Infatti, si verifica immediatamente che la condizione (12.44) assicura che la variazione elementare di energia magnetica sia un differenziale esatto:

$$dW_m = i_1 d\phi_1 + i_2 d\phi_2 = i_1 L_1 \frac{di_1}{dt}dt + i_1 M_{12}\frac{di_2}{dt}dt + i_2 L_2 \frac{di_2}{dt}dt + i_2 M_{21}\frac{di_1}{dt}dt =$$
$$d\left(\frac{1}{2}L_1 i_1^2\right) + d\left(\frac{1}{2}L_2 i_2^2\right) + M_{12} i_1 di_2 + M_{21} i_2 di_1 = d\left(\frac{1}{2}L_1 i_1^2\right) + d\left(\frac{1}{2}L_2 i_2^2\right) + d(M i_1 i_2) \tag{12.45}$$

Inversamente, si assegni una configurazione finale di correnti I_1 e I_2 e si valuti la variazione di energia conseguente a due diverse traiettorie, partendo, ad esempio, da una configurazione iniziale di correnti nulle. Se l'energia è un differenziale esatto, la variazione deve essere indipendente dalla traiettoria. Vediamo ciò cosa richiede. Sia, ad esempio, la prima traiettoria quella che si ottiene facendo crescere prima i_1 da 0 a I_1 e tenendo fissa i_2=0 e poi facendo variare i_2 da 0 a I_2. In questo caso, facendo variare i1 si ottiene

$$W_{m1}^{'} = \int_0^{I_1} L_1 i_1 di_1 = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 \tag{12.46}$$

La successiva variazione di i_2 comporta l'aggiunta dell'ulteriore contributo,

$$W_{m1}^{''} = \int_0^{I_2} L_2 i_2 di_1 + I_1 \int_0^{I_2} M_{12} di_2 = \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + I_1 M_{12} I_2 \tag{12.47}$$

per cui il risultato finale è il seguente:

$$W_{m1} = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + I_1 M_{12} I_2 \tag{12.48}$$

Facendo crescere prima i_2 e poi i_1, si ottiene facilmente, per permutazione degli indici:

$$W_{m2} = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + I_2 M_{21} I_1 \tag{12.49}$$

Imponendo che le due traiettorie diano lo stesso risultato, segue immediatamente la (12.44)

Accoppiamento perfetto

Si vuole ora mostrare che $M^2 \le L_1 L_2$. A tal fine si osservi che se agisce la sola corrente I_1 ci sono alcune linee dell'induzione magnetica che si concatenano con la curva γ_1 e non con γ_2, pertanto il flusso medio per spira concatenato con il circuito 1 è maggiore del flusso medio per spira concatenato con il circuito 2. Risulta cioè:

$$\frac{\phi_{11}}{N_1} \ge \frac{|\phi_{21}|}{N_2} \tag{12.50}$$

e quindi

$$\frac{L_1}{N_1} \ge \frac{|M|}{N_2} \tag{12.51}$$

Analogamente, se agisce la sola corrente I_2, si ha:

$$\frac{\phi_{22}}{N_2} \ge \frac{|\phi_{12}|}{N_1} \tag{12.52}$$

e quindi

$$\frac{L_2}{N_2} \ge \frac{|M|}{N_1} \tag{12.53}$$

Combinando le (12.47) e (12.49), si ottiene

$$L_1 L_2 \ge M^2 \tag{12.54}$$

Il coefficiente di accoppiamento tra due circuiti è definito come:

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} . \tag{12.55}$$

Per quanto osservato sopra, si ha che il coefficiente *k* varia da 0 a 1. Quando *k*=1 si dirà che i due circuiti sono accoppiati perfettamente. In questo caso è necessario che entrambe le relazioni (12.51) e (12.53) siano verificate.

Induttanza per unità di lunghezza di un cavo coassiale

Un cavo coassiale è costituito da un conduttore cilindrico di raggio R_i e da una guaina superficiale esterna coassiale e di raggio R_e. Si supponga che i due conduttori siano percorsi da correnti uguali e opposte, distribuite uniformemente sulle superfici dei due cilindri.
Assunto un sistema di coordinate cilindriche,, il campo ha la sola componente θ, che, utilizzando la legge di Ampere, risulta essere data da:

$$B_\theta(r) = \begin{cases} 0 \quad \text{per } r \le R_i \\ \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad \text{per } R_i \le r \le R_e \\ 0 \quad \text{per } R_e \le r \end{cases} \tag{12.56}$$

Per calcolare l'induttanza per unità di lunghezza del cavo, si deve calcolare il flusso che si concatena con la linea chiusa rettangolare AA'B'B, e cioè il flusso attraverso la sezione tratteggiata di fig. 12.11:

$$\phi = \iint_S \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = l\int_{R_i}^{R_e}\frac{\mu_0 i}{2\pi r}dr = l\frac{\mu_0 i}{2\pi}\log\frac{R_e}{R_i} \tag{12.57}$$

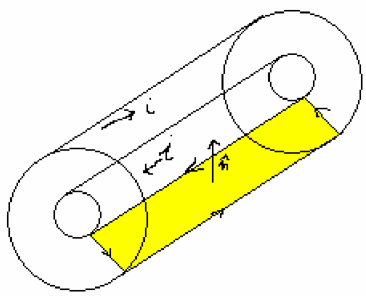

Fig. 12.11

Il coefficiente di autoinduzione per unità di lunghezza L è quindi:

$$L = \frac{\phi}{il} = \frac{\mu_0}{2\pi}\log\frac{R_e}{R_i} \tag{12.58}$$

Si noti che il prodotto LC per tale configurazione vale

$$LC = \mu_0\varepsilon_0 \tag{12.59}$$

Lo stesso risultato poteva essere ottenuto utilizzando l'espressione (12.43), in termini di energia magnetica. Risulta infatti:

$$W_m = \iiint_V \frac{B^2}{2\mu_0}dV = \frac{2\pi l}{2\mu_0}\int_{R_i}^{R_e}\frac{{\mu_0}^2 i^2}{4\pi^2 r^2}rdr = \frac{l\mu_0 i^2}{4\pi}\log\frac{R_e}{R_i} \tag{12.60}$$

e quindi

$$L = 2W_m / i^2 l = \frac{\mu_0}{2\pi}\log\frac{R_e}{R_i} \tag{12.61}$$

Induttanza per unità di lunghezza di un una linea bifilare

Un linea bifilare è costituita da due conduttori cilindrici indefiniti quasi filiformi di raggi r_1 ed r_2, rispettivamente. Si supponga che gli assi dei cilindri siano paralleli e distanti d. Si supponga infine che i due conduttori siano percorsi da correnti uguali e opposte, distribuite uniformemente sulle superfici dei due cilindri.

Il campo può essere ottenuto utilizzando la sovrapposizione degli effetti. Nei punti del piano che contiene gli assi dei due conduttori esso risulta normale al piano stesso. Con riferimento ai versi illustrati in figura 12.11, si ha che il campo è con buona approssimazione nullo all'interno dei due conduttori , nell'ipotesi $r_1 << d$, $r_2 << d$, e vale nei punti della superficie S $0<z<l$, $r_1<r<d-r_2$:

$$\mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} = B_{1\theta} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \tag{12.62}$$

$$\mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} = B_{2\theta} = \frac{\mu_0 i}{2\pi (d-r)} \tag{12.63}$$

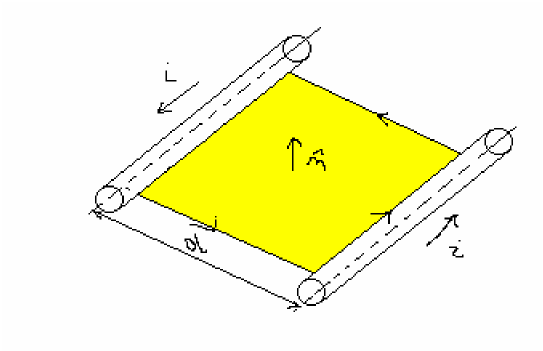

Fig. 12.12

Il flusso ϕ concatenato con la linea γ che orla la superficie S:

$$\phi = l\frac{\mu_0 i}{2\pi}\int_{r_1}^{d-r_2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{d-r}\right)dr = l\frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\log\frac{d-r_2}{r_1}+\log\frac{d-r_1}{r_2}\right) \cong l\frac{\mu_0 i}{2\pi}\log\frac{d^2}{r_1 r_2}$$

Il coefficiente di autoinduzione per unità di lunghezza L è quindi:

$$L = \frac{\phi}{il} = \frac{\mu_0}{2\pi}\log\frac{d^2}{r_1 r_2} \tag{12.64}$$

Si noti che il prodotto LC anche per tale configurazione vale $\mu_0 \varepsilon_0$