



Università degli Studi di Cassino

## Il modello della conduzione stazionaria

Antonio Maffucci, Fabio Villone

Ver. 1 – settembre 2003

### INTRODUZIONE

Le equazioni da risolvere sono:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = 0 \quad \forall \gamma \quad (1a)$$

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \quad \forall \Sigma \quad (1b)$$

dove  $\mathbf{E}$  è il campo elettrico e  $\mathbf{J}$  è la densità di corrente,  $\gamma$  è una qualsiasi linea chiusa ( $\hat{\mathbf{t}}$  il suo versore tangente) e  $\Sigma$  una qualsiasi superficie chiusa ( $\hat{\mathbf{n}}$  il versore normale uscente). Tali leggi sono valide indipendentemente dalla natura dei mezzi materiali che occupano la regione di spazio di interesse. Pertanto, ad esse deve aggiungersi una relazione costitutiva (che supponiamo lineare per semplicità), il cui compito è quello di specificare i vari materiali:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (\mathbf{E} = \eta \mathbf{J}) \quad (2)$$

dove  $\eta$  è detta *resistività* (dimensioni:  $[\Omega \text{ m}]$ ), e  $\sigma = 1/\eta$  è detta *conducibilità* del materiale.

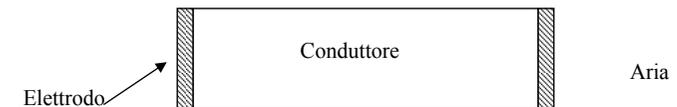


Fig. 1. Situazione tipo

Un problema tipo, esemplificativo delle situazioni che più usualmente si incontrano, è rappresentato in figura 1: un conduttore di conducibilità (resistività)  $\sigma_C$  ( $\eta_C$ ) è immerso in aria ( $\sigma_A$ ,  $\eta_A$ ), ed è compreso tra due cosiddetti *elettrodi* ( $\sigma_E$ ,  $\eta_E$ ). In genere, risulta:

$$\begin{aligned} \sigma_E &\gg \sigma_C \gg \sigma_A \\ \eta_E &\ll \eta_C \ll \eta_A \end{aligned} \quad (3)$$

Pertanto, spesso si fa l'approssimazione di considerare nulla la resistività degli elettrodi:

$$\begin{aligned} \eta_E &\rightarrow 0 \\ \sigma_E &\rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (4)$$

ossia, come si dice, si considerano gli elettrodi come costituiti di un materiale *conduttore perfetto*. Analogamente, per l'aria si fa l'approssimazione:

$$\begin{aligned} \sigma_A &\rightarrow 0 \\ \eta_A &\rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (5)$$

ossia, equivalentemente, la si considera un *isolante perfetto*.

Considerando la (2), è facile rendersi conto che, ammesso che la densità di corrente sia finita, in un conduttore perfetto il campo elettrico è nullo. Ricordando la definizione di tensione, ne segue che la tensione tra due qualsiasi punti di un conduttore perfetto è nulla, ossia che tutti i suoi punti hanno lo stesso potenziale rispetto ad un qualsiasi riferimento. Questa proprietà si esprime dicendo che un conduttore perfetto è *equipotenziale*.

Analogamente, ammettendo finito il campo elettrico, in un isolante perfetto la densità di corrente risulta nulla. Per apprezzare le conseguenze di questo fatto, si applichi la (1b) ad una superficie chiusa cilindrica  $C$  a cavallo della superficie  $S$  del conduttore, come in figura 2. Supponiamo che la superficie di base sia infinitesima ed che la superficie laterale sia infinitesima di ordine superiore; in queste ipotesi è possibile trascurare l'effetto della superficie laterale del cilindro, e assumere la densità di corrente uniforme sulle basi del cilindro. Così facendo, risulta:

$$\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}|_{S_{COND}} = \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}|_{S_{ARIA}} \quad (6)$$

dove  $S_{COND}$  ( $S_{ARIA}$ ) è la pagina di  $S$  che si affaccia nel conduttore (nell'aria). La (6), che esprime la continuità della componente normale della densità di corrente, unita alla considerazione che la densità di corrente è nulla in aria, ci permette di concludere che:

$$\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}|_{S_{COND}} = 0 \quad (7)$$

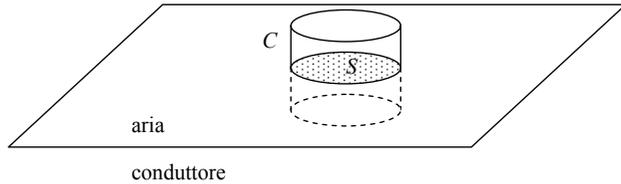


Fig. 2. Continuità della componente normale della densità di corrente

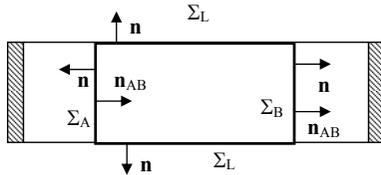


Fig. 3. Tubo di flusso per la corrente

In altri termini, la densità di corrente non può "puntare fuori" il conduttore, se esso è avvolto da un isolante perfetto; pertanto, le linee di campo di  $\mathbf{J}$  sono costrette ad essere confinate all'interno del conduttore, senza poter uscire da esso. Inoltre, applicando la (1b) alla superficie chiusa di figura 3, e sfruttando la (7) risulta:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 &\Leftrightarrow \iint_{\Sigma_A} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \iint_{\Sigma_B} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \iint_{\Sigma_L} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \Leftrightarrow \\ \iint_{\Sigma_A} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \iint_{\Sigma_B} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 &\Leftrightarrow -\iint_{\Sigma_A} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{AB} dS + \iint_{\Sigma_B} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{AB} dS = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

dove si è definito  $\mathbf{n}_{AB}$  il versore normale che punta sempre da A verso B. Ricordando la definizione di corrente attraverso una superficie, dalla (8) si ha:

$$I_A = I_B \quad (9)$$

ossia la corrente che attraversa le due sezioni A e B del conduttore è la stessa.

Pertanto, in un conduttore immerso in un isolante perfetto la corrente ad ogni sezione è la stessa; questa proprietà si esprime sinteticamente dicendo che il conduttore è un *tubo di flusso* per la corrente.

### IL RESISTORE

Studiamo ora una situazione di estremo interesse, che ricorre innumerevoli volte nella pratica: un conduttore filiforme di resistività  $\eta$ , lunghezza  $L$  e sezione  $S$  (deve risultare  $L \gg \sqrt{S}$  affinché il conduttore possa dirsi filiforme) circondato da aria. Per fissare le idee, supponiamo che la resistività e la sezione siano costanti per tutta la lunghezza, e che il conduttore sia compreso tra due elettrodi perfettamente conduttori, accessibili tramite due punti (*morsetti*) A e B, come mostrato in figura 4.

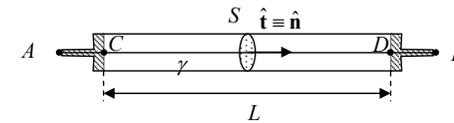


Fig. 4. Conduttore filiforme

Vogliamo dimostrare il seguente:

**Teorema.** Supponendo che valgano le equazioni della conduzione stazionaria (1)-(2), il conduttore filiforme di figura 4, visto ai morsetti A-B, si comporta come un bipolo resistore lineare di resistenza

$$R = \eta \frac{L}{S} \quad (10)$$

**Dimostrazione.** In primo luogo, dimostriamo che l'oggetto in questione si comporta da bipolo. A tale scopo, occorre mostrare che sono soddisfatte le seguenti proprietà:

- la tensione tra i punti A e B è indipendente dalla linea scelta per unire i due punti, purché questa linea non intersechi il bipolo;
- la corrente entrante nel morsetto A è uguale alla corrente uscente dal morsetto B;
- esiste un legame (caratteristica) tra tensione e corrente.

Per quanto riguarda la proprietà a), essa discende, come visto in passato, dalla (1a), che anzi garantisce che la tensione non dipende dalla linea anche se tale linea passa all'interno del bipolo. La

proprietà b) è invece garantita dalla (1b), come dimostrato poc' anzi in occasione della definizione di tubo di flusso per la corrente.

Ricaviamo ora la caratteristica. Sfruttando l'indipendenza della tensione dalla linea, utilizziamo come linea l'asse del filo stesso  $\gamma$  e scriviamo:

$$V_{AB} = \int_{A\gamma B} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_{C\gamma D} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_{C\gamma D} \eta \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl \quad (11)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che nei tratti A-C e B-D della linea il campo elettrico è nullo, essendo gli elettrodi perfettamente conduttori, ed abbiamo ricordato la caratteristica (2) del conduttore. Avendo scelto  $\gamma$  lungo l'asse del filo, il versore  $\hat{\mathbf{t}}$  ad essa tangente coincide con il versore normale  $\mathbf{n}$  alla sezione  $S$ , se quest'ultima è ortogonale all'asse. Supponendo inoltre che la sezione del filo sia abbastanza piccola da poter ritenere la densità di corrente costante su di essa, possiamo scrivere che la corrente che attraversa la sezione del filo vale:

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \cong (\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}})S = (\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{t}})S \Rightarrow (\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{t}}) \cong \frac{I}{S} \quad (12)$$

e quindi la (11) diventa:

$$V_{AB} = \int_{C\gamma D} \eta \frac{I}{S} dl = \eta \frac{I}{S} L = RI \quad (13)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che resistività e sezione sono costanti per ipotesi, e la corrente non cambia grazie alla proprietà di tubo di flusso.

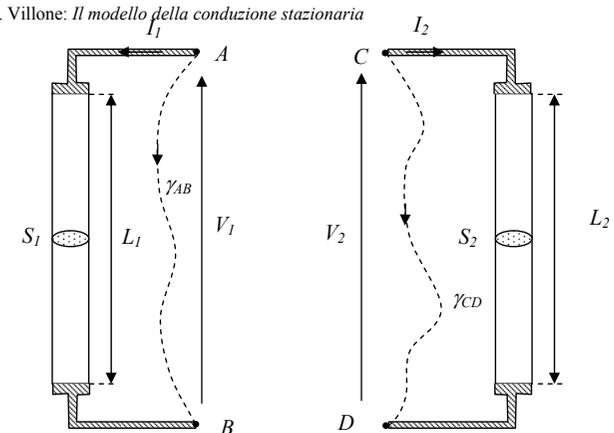
La (13) ci permette di ritenere dimostrato il teorema. ♦

Il teorema precedente ci permette di asserire che del conduttore filiforme di fig. 4 possiamo dare un *circuito equivalente*, costituito da un resistore lineare di resistenza data dalla (10). L'equivalenza tra l'oggetto fisico "conduttore filiforme" e l'oggetto matematico "bipolo resistore lineare" di resistenza opportuna, va intesa nel senso seguente: se siamo interessati solo al legame tra grandezze "globali" (tensione, corrente) ai morsetti del conduttore filiforme, possiamo indifferentemente considerare o la situazione fisica "vera" (ossia il conduttore con la sua geometria) o il suo circuito equivalente, costituito da un resistore lineare di resistenza opportuna. Chiaramente, questa equivalenza non varrebbe se occorresse studiare un dettaglio "locale" della soluzione (ad esempio, il valore del campo elettrico in un punto assegnato).

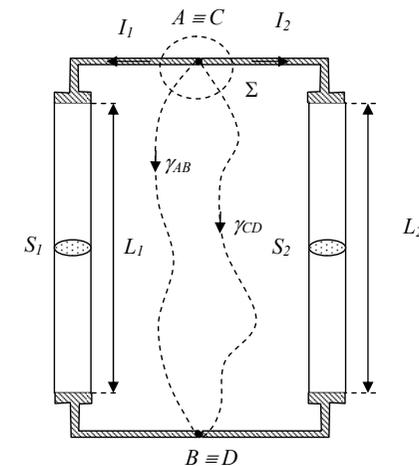
Consideriamo ora due conduttori filiformi, di resistività, lunghezze e sezioni diverse, indicate con il pedice 1 e 2 in figura 5a, ciascuno con i suoi morsetti (A e B per il conduttore 1, C e D per il conduttore 2). Ripetendo i ragionamenti fatti in precedenza, possiamo asserire che per ciascuno dei due conduttori è possibile dare un circuito equivalente, fatto in entrambi i casi da un resistore lineare (figura 6a), di resistenze rispettivamente  $R_1 = \eta_1 \frac{L_1}{S_1}$  e  $R_2 = \eta_2 \frac{L_2}{S_2}$ , tali da rappresentare correttamente il legame tra tensione e corrente su ognuno dei due conduttori.

La domanda che ora ci poniamo è la seguente: se colleghiamo ("fisicamente") i due conduttori filiformi (figura 5b), è lecito ipotizzare che il circuito equivalente della nuova situazione (ossia i due conduttori collegati tramite i morsetti) sia quello di figura 6b, ottenuto collegando i morsetti dei due resistori  $R_1$  e  $R_2$ ? Il quesito non ha una risposta scontata, perché la connessione dei due resistori rappresentata in figura 6b implica una condizione di cui dobbiamo verificare la validità anche nella connessione fisica di figura 5b: la validità delle leggi di Kirchhoff.

In altri termini, il collegamento di figura 6b impone che le correnti  $I_1$  e  $I_2$  siano tra di loro opposte e le tensioni  $V_1$  e  $V_2$  uguali; questa condizione deve essere verificata anche per il collegamento di figura 5b affinché le due situazioni possano essere ritenute equivalenti.



(a)



(b)

Figura 5. (a) Due conduttori filiformi; (b) loro connessione.

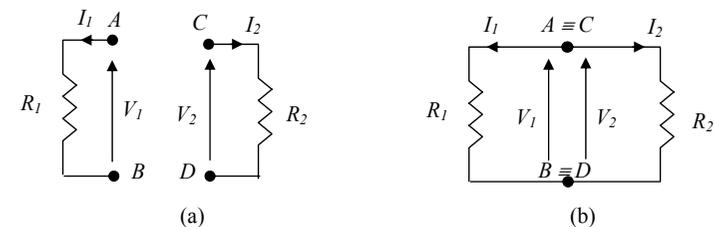


Figura 6. (a) Resistori equivalenti; (b) loro connessione.

Queste condizioni aggiuntive sono in effetti valide anche in figura 5b, supponendo vere le leggi della conduzione stazionaria. Basta infatti considerare la (1a) (conservatività del campo elettrico) applicata alla linea chiusa  $\gamma = \gamma_{AB} \cup \gamma_{CD}$ , per concludere che  $V_1 = V_2$ , mentre la (1b) (solenoidaltà della densità di corrente) applicata alla superficie chiusa  $\Sigma$  ci permette di asserire che  $I_1 = -I_2$ . La conclusione è quindi la seguente: la validità delle leggi della conduzione stazionaria permette di asserire che la connessione fisica tra i due conduttori rispetta le leggi di Kirchhoff alle tensioni e alle correnti, e quindi il circuito in figura 6b è il circuito equivalente della situazione fisica descritta in figura 5b.

A questo punto, appare immediata l'importanza e la potenza di un circuito equivalente di una struttura fisicamente complessa. Se ci limitiamo a voler trovare il valore delle grandezze globali tensione e corrente, invece di studiare la situazione fisica di figura 5b con le leggi della conduzione stazionaria, possiamo limitarci a risolvere il semplice circuito equivalente di figura 6b con le note procedure studiate in teoria dei circuiti.

Così facendo, possiamo immediatamente concludere che tutte le correnti e tutte le tensioni definite in figura 5b sono nulle, in quanto il circuito equivalente è costituito da soli resistori lineari. Dal punto di vista del circuito equivalente, questo fatto si giustifica osservando che in esso non compare alcun generatore; vogliamo capire cosa questo significa dal punto di vista del sistema fisico di figura 5b.

## IL GENERATORE REALE

Consideriamo una carica  $q$  sottoposta ad una forza  $F$ , per effetto della quale si muove a velocità  $v$ . La potenza sviluppata dalla forza sulla carica risulta essere chiaramente  $F \cdot v$ . Se studiamo un conduttore in cui sono presenti  $n$  cariche libere  $q$  per unità di volume, la densità di potenza (potenza per unità di volume) sviluppata sulle cariche libere risulta essere  $nF \cdot v$ . Se la forza agente sulle cariche è quella dovuta alla presenza di un campo elettrico  $F = qE$ , allora risulta che la densità di potenza sviluppata dal campo elettrico sulle cariche libere vale:

$$p_d = n q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \eta J^2 > 0 \quad (14)$$

Dunque, la densità potenza sviluppata dal campo elettrico sulle cariche per metterle in movimento è sempre positiva; dal punto di vista energetico, dunque, si tratta di una trasformazione irreversibile, nel senso che la potenza sviluppata dal campo alle cariche non può essere restituita al campo stesso. Dal punto di vista sperimentale, infatti, si riscontra che il movimento di cariche libere in un conduttore (macroscopicamente rappresentato da una densità di corrente), dovuto ad un campo elettrico presente nello stesso, si accompagna inevitabilmente ad un riscaldamento del conduttore stesso (*effetto Joule*), quantificato dalla (14), eventualmente integrata nel volume di interesse per avere la potenza globalmente dissipata a causa di questo fenomeno.

Ritorniamo dunque al sistema fisico di figura 5b. In esso riusciamo agevolmente ad identificare un percorso chiuso, che si sviluppa all'interno dei materiali conduttori variamente interconnessi, lungo il quale le cariche libere possono muoversi per dar luogo ad una densità di corrente macroscopica non nulla. Questo movimento di cariche si accompagna inevitabilmente, come appena visto, ad una dissipazione di potenza, e quindi può avvenire solo se la forza agente sui conduttori è in grado di sviluppare, su tale percorso chiuso, un lavoro non nullo che possa bilanciare l'effetto Joule. Ne segue che se la forza agente sulle cariche risulta essere solo il campo elettrico, il movimento delle cariche, e quindi la circolazione di una corrente non nulla, non può avere luogo, in quanto il campo elettrico, in base alla (1a), non può compiere lavoro su un percorso chiuso. Questo risultato è consistente con l'osservazione che nel circuito equivalente di figura 6b non compaiono generatori e quindi la soluzione non può che essere identicamente nulla.

La conseguenza di queste considerazioni è che per far circolare una corrente nella struttura di figura 5b serve una forza che agisca sulle cariche, aggiuntiva rispetto al campo elettrico, capace di

sviluppare sulle cariche un lavoro non nullo lungo un percorso chiuso, ossia una forza non conservativa. Un *campo elettromotore*  $\mathbf{E}_m$  è precisamente una forza per unità di carica che goda di questa proprietà:

$$\int_{\gamma} \mathbf{E}_m \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = E_{\gamma} \neq 0 \quad (15)$$

dove la quantità  $E_{\gamma}$  viene detta *forza elettromotrice (f.e.m.)* del campo elettromotore  $\mathbf{E}_m$  lungo la linea chiusa  $\gamma$ .

Dunque, dal punto di vista del sistema fisico, un *generatore* è una regione di spazio (figura 7), che goda delle proprietà di bipolo, nella quale, oltre al campo elettrico, agisce sulle cariche anche un campo elettromotore. Quest'ultimo può avere la più varia natura; ad esempio nelle batterie esso ha una natura elettrochimica. Generalizzando la (2), la sua relazione costitutiva può scriversi:

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}_m = \eta \mathbf{J} \quad (16)$$

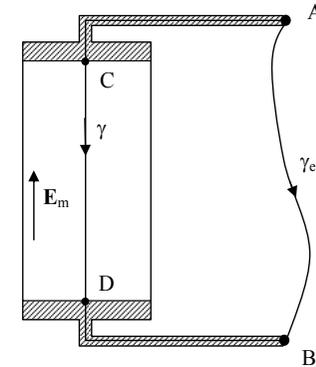


Fig. 7. Generatore

Valutiamo la caratteristica di un oggetto di questo tipo. Risulta, con passaggi analoghi a quelli fatti in precedenza:

$$V_{AB} = \int_{A \rightarrow B} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_{C \rightarrow D} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_{C \rightarrow D} \eta \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl - \int_{C \rightarrow D} \mathbf{E}_m \cdot \hat{\mathbf{t}} dl \quad (17)$$

Il primo addendo fornisce un contributo, proporzionale alla corrente che circola nell'oggetto, del tutto analogo a quello visto in precedenza; il secondo termine si scrive:

$$- \int_{C \rightarrow D} \mathbf{E}_m \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_{B \rightarrow A} \mathbf{E}_m \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_{(B \rightarrow A) \cup \gamma_{est}} \mathbf{E}_m \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = E_{\gamma} \quad (18)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che  $\mathbf{E}_m$  è nullo al di fuori della regione del conduttore, e la linea chiusa  $\gamma_{tot}$  è orientata secondo il tratto  $\gamma_{est}$ .

Raccogliendo i risultati, si ottiene:

$$V_{AB} = R_g I + E_{\gamma} \quad (19)$$

dal che risulta che di un generatore si può dare il circuito equivalente di figura 8, ossia un generatore reale.

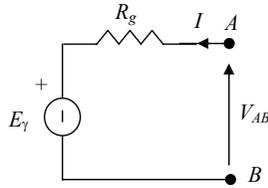


Fig. 8. Circuito equivalente del generatore

### RESISTENZA DI TERRA DI UN DISPERSORE SFERICO

Terminiamo la discussione del modello della conduzione stazionaria con il calcolo di una resistenza in una situazione di particolare interesse per le applicazioni. Consideriamo due elettrodi (perfettamente conduttori) sferici concentrici, di raggi  $a$  e  $b$  rispettivamente, tra i quali è interposto un mezzo di resistività  $\eta$  (a puntini in figura 9). I due elettrodi sono alimentati con un generatore ideale di tensione; quello interno è collegato ad un morsetto del generatore tramite un filo che buca l'elettrodo esterno ed il materiale conduttore. Vogliamo trovare la resistenza di questa struttura, intesa come il rapporto tra la tensione imposta tra gli elettrodi, e la corrente circolante da un elettrodo all'altro.

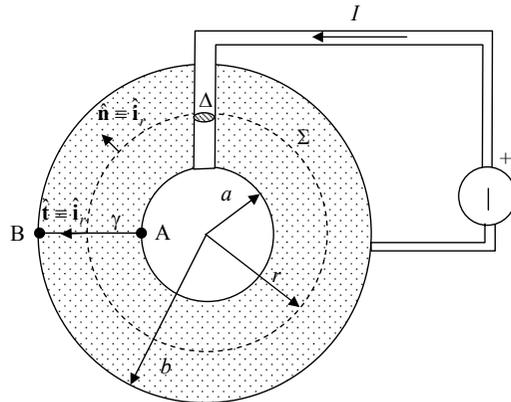


Fig. 9. Geometria per il calcolo della resistenza di terra

Semplici considerazioni di simmetria mi permettono di concludere che la densità di corrente nel materiale conduttore è diretta radialmente, e che il suo modulo dipende solo dalla distanza  $r$  dal centro delle sfere:

$$\mathbf{J} = J(r)\hat{\mathbf{i}}_r \quad (20)$$

Applicando la solenodalità della densità di corrente (1b) alla superficie sferica  $\Sigma$  di figura, di raggio  $r$  generico, otteniamo:

$$0 = \iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_{\Sigma-\Delta} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \iint_{\Delta} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (21)$$

dove  $\Delta$  è la sezione in cui  $\Sigma$  interseca il filo. Essendo la normale definita come uscente, si ha:

$$\iint_{\Delta} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -I \quad (22)$$

Osservando che la normale a  $\Sigma$  coincide con il versore radiale, e che  $\Sigma-\Delta$  è una superficie a  $r$  costante, possiamo scrivere inoltre:

$$\iint_{\Sigma-\Delta} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_{\Sigma-\Delta} J(r)\hat{\mathbf{i}}_r \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_{\Sigma-\Delta} J(r) dS = J(r) \cdot \text{area}(\Sigma - \Delta) \cong J(r) 4\pi r^2 \quad (23)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che il filo è sottile per trascurare l'area di  $\Delta$  rispetto all'area di  $\Sigma$ .

Combinando le (21)-(23) otteniamo immediatamente:

$$J(r) = \frac{I}{4\pi r^2} \quad (24)$$

Calcoliamo ora la tensione tra i due elettrodi; essendo il campo elettrico conservativo, e i due elettrodi equipotenziali, dobbiamo integrare il campo elettrico su una qualsiasi linea che congiunga un qualsiasi punto A del primo elettrodo ad un qualsiasi punto B del secondo elettrodo. Per comodità di calcolo scegliamo la linea  $\gamma$  mostrata in figura, disposta lungo il raggio; in questo modo, il versore tangente a  $\gamma$  coincide con il versore radiale, e quindi:

$$V_{AB} = \int_{A\gamma B} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_{A\gamma B} \eta \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_a^b \eta J(r) dr = \int_a^b \eta \frac{I}{4\pi r^2} dr = \eta \frac{I}{4\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (25)$$

Pertanto, la resistenza della struttura risulta:

$$R = \frac{\eta}{4\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (26)$$

A questo punto definiamo *resistenza di terra*  $R_T$  la seguente quantità:

$$R_T = \lim_{b \rightarrow +\infty} R = \frac{\eta}{4\pi a} \quad (27)$$

ossia il limite del risultato precedente quando il secondo elettrodo diventa indefinitamente lontano dal primo. Il motivo di questo nome è dovuto al fatto che il valore  $R_T$  così definito rappresenta approssimativamente la resistenza di una struttura costituita da un elettrodo cilindrico (*dispersore*) profondamente immerso nel terreno (che costituisce il mezzo conduttore), quando la corrente fluisce dal dispersore verso l'infinito (che rappresenta il secondo elettrodo indefinitamente lontano). Come si vedrà, questa situazione schematizza la cosiddetta messa a terra delle masse di un circuito elettrico.