

Scelta del passo di campionamento in funzione del ritardo introdotto dallo ZOH

(Controllo digitale: prof. Giuseppe Fusco)

Si indichi con $-\Delta_{m_\varphi}$ ($\Delta_{m_\varphi} > 0$) il massimo decremento tollerabile, espresso in gradi, del margine di fase m_φ , tale che:

$$m_\varphi - \Delta_{m_\varphi} > 0$$

Il passo di campionamento dovrà quindi soddisfare la disequaglianza

$$\angle ZOH(j\omega_t) = -\omega_t \frac{T}{2} \leq -\Delta_{m_\varphi} \frac{\pi}{180}$$

dove ω_t rappresenta la pulsazione di attraversamento della funzione di risposta armonica ad anello aperto $F(j\omega)$.

Si deve quindi imporre

$$T \leq \frac{2\pi}{180} \frac{\Delta_{m_\varphi}}{\omega_t} = 0.0349 \frac{\Delta_{m_\varphi}}{\omega_t}. \quad (1)$$

Indicando con ω_3 la pulsazione di banda a -3 dB del sistema ad anello chiuso, il soddisfacimento del teorema di Shannon impone

$$\frac{\pi}{T} > \omega_3$$

e cioè

$$T < t_s$$

avendo utilizzato l'approssimazione $t_s \approx \pi/\omega_3$ con t_s tempo di salita della risposta indiciale del sistema. Scegliendo T compreso fra $1/20$ ed $1/10$ di t_s si ha

$$\frac{t_s}{20} < T < \frac{t_s}{10}$$

ovvero

$$\frac{\pi}{20\omega_3} < T < \frac{\pi}{10\omega_3}$$

che conduce a

$$20\omega_3 \leq \omega_s \leq 40\omega_3. \quad (2)$$

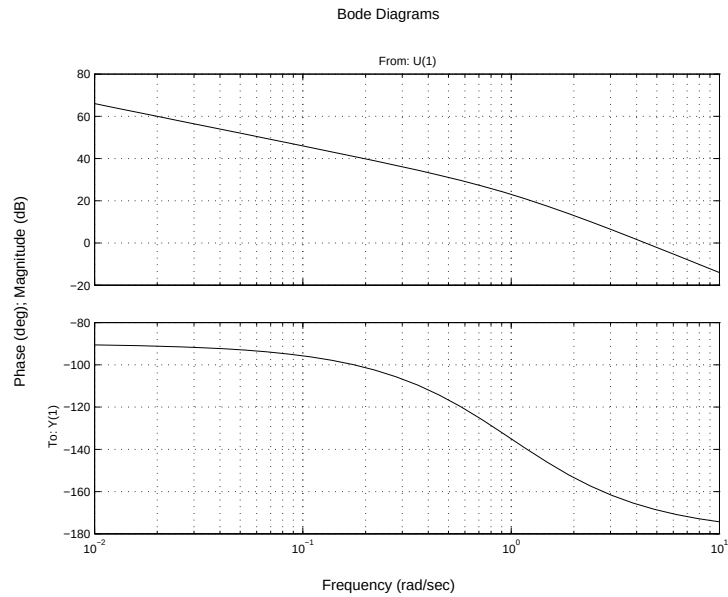
La (2) esprime una relazione empirica per la scelta di ω_s . Tale scelta andrà corretta se non vi è rispondenza del sistema alle specifiche assegnate.

Esempio:

Si consideri la funzione

$$F(j\omega) = \frac{20}{j\omega(1 + j\omega)}$$

il cui diagramma di Bode è riportato nella figura seguente.



Dalla lettura del diagramma risulta:

$$\omega_t = 4.4 \text{ rad/s} \quad m_\varphi = 12.76^\circ.$$

Imponendo $\Delta_{m_\varphi} = 5^\circ$, dalla (1) si ottiene

$$T \leq 0.0396 \text{ s.}$$

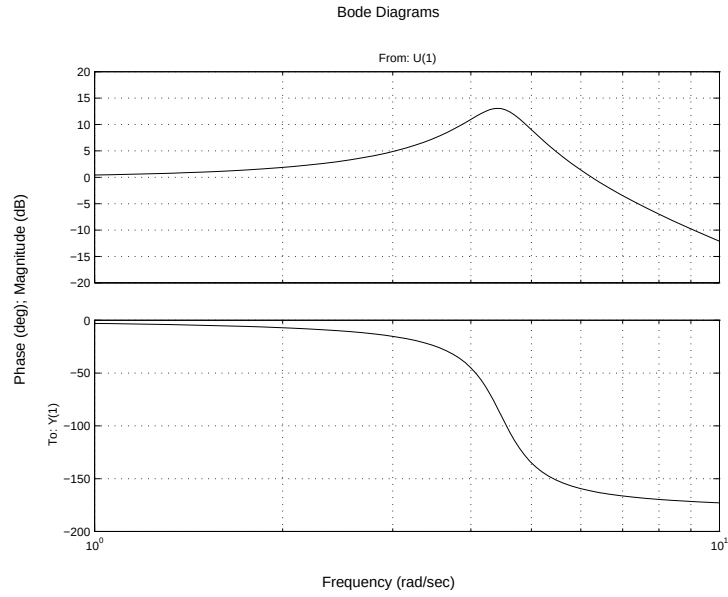
Per l'implementazione in digitale dello schema di controllo ad anello chiuso si sceglie

$$T = 0.03 \text{ s.}$$

La funzione di risposta armonica ad anello chiuso è

$$W(j\omega) = \frac{20}{-\omega^2 + j\omega + 20}$$

il cui diagramma di Bode è riportato nella figura seguente



Poichè

$$\omega_3 = 6.9 \text{ rad/s}$$

il valore scelto per T soddisfa anche la (2); infatti

$$138 \leq 210 \leq 276.$$

La pulsazione di campionamento ω_s è quindi pari a circa 30 volte la pulsazione di banda a -3 dB.

In particolare si ha:

$$\angle ZOH(j\omega_t) = -(4.4) (0.015) \frac{180}{\pi} = -3.78^\circ$$

ed

$$\left| \text{sinc}\left(\omega_t \frac{T}{2}\right) \right| = 0.9993$$