

## 14. Circuiti magnetici

### Introduzione

L'utilizzo di materiali ad alta permeabilità magnetica consente di realizzare i cosiddetti circuiti magnetici, cioè circuiti nei quali l'induzione magnetica è "canalizzata" all'interno dei medesimi. Per comprendere quali siano gli "ingredienti" necessari alla realizzazione di un circuito magnetico, si confrontino le equazioni della conduzione stazionaria, ove il concetto di circuito elettrico è stato già introdotto, e le equazioni della magnetostatica. Assumendo che i materiali siano lineari, si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\gamma} \\ \oiint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \oint_{\gamma} \mathbf{E}_T \cdot d\mathbf{l} = E_{\gamma} \\ \oiint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_T \end{array} \right. \quad (14.1)$$

dove  $\mathbf{E}_T = \mathbf{E} + \mathbf{E}_m$ , ed  $\mathbf{E}_m$  è il campo elettromotore. Si verifica immediatamente che le equazioni della magnetostatica corrispondono alle equazioni della conduzione stazionaria a patto di effettuare le seguenti corrispondenze:

$$\begin{array}{l} \mathbf{H} \leftrightarrow \mathbf{E}_T \\ \mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{J} \\ \mu \leftrightarrow \sigma \\ I_{\gamma} \leftrightarrow E_{\gamma} \end{array} \quad (14.2)$$

dove  $E_{\gamma} = \oint_{\gamma} \mathbf{E}_T \cdot d\mathbf{l}$ , ricordiamo ancora, è la forza elettromotrice agente sul percorso  $\gamma$ .

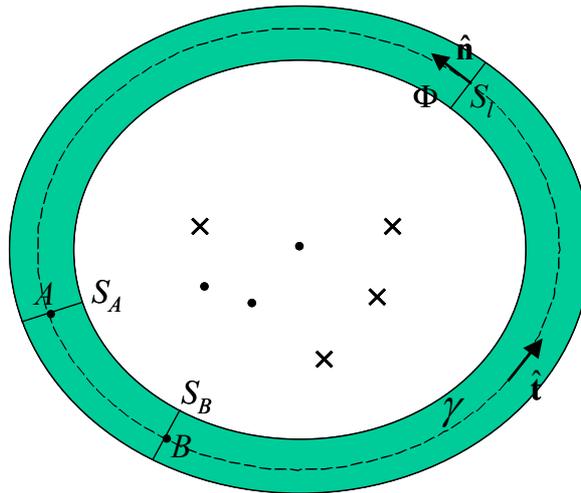
Il funzionamento dei circuiti magnetici può essere compreso ed il loro modello può essere formalizzato convenientemente, tenendo conto della corrispondenza stabilita nelle (14.2). In modo particolare, ricordiamo che in un circuito elettrico la densità di corrente è "canalizzata" nei conduttori elettrici grazie al fatto che il conduttore elettrico è a contatto con un isolante (la guaina di plastica o l'aria). In altri termini, la circostanza che  $\sigma_c / \sigma_{est} \rightarrow \infty$  ( $\sigma_c$  e  $\sigma_{est}$  sono la conducibilità del conduttore e del mezzo esterno, rispettivamente) limita la circolazione della corrente elettrica all'interno dei conduttori i quali, in aggiunta, sono un tubo di flusso per  $\mathbf{J}$ . Ciò suggerisce che per realizzare un circuito magnetico è necessario avere  $\mu_c / \mu_{est} \rightarrow \infty$  e che il medesimo consente di "canalizzare"  $\mathbf{B}$ , il corrispondente di  $\mathbf{J}$  nella magnetostatica. Poiché non sono noti materiali che si comportano da isolanti magnetici ( $\mu_{est} = 0$ ), la condizione  $\mu_c / \mu_{est} \rightarrow \infty$  deve essere soddisfatta, almeno approssimativamente, impiegando materiali con elevata permeabilità magnetica, cioè con  $\mu_c \rightarrow \infty$ . La scelta del materiale da impiegare per la realizzazione di un circuito magnetico ricade, pertanto, sui materiali ferromagnetici.

Di seguito analizziamo il comportamento di sistemi magnetici nell'ambito dell'approssimazione a  $\mu$ -infinito, cioè sistemi nei quali i materiali magnetici presentano una permeabilità magnetica infinita.

*Tensione magnetica, forza magnetomotrice e legge di Hopkinson*

Consideriamo il tubo di flusso<sup>1</sup> indicato in figura 14.1 e la curva  $\gamma$  contenuta all'interno del medesimo. La legge di Ampère riferita alla curva  $\gamma$  si scrive  $\oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\gamma}$ ; assumendo che il materiale attraversato dal tubo di flusso sia lineare ( $\mu$  non è necessariamente uguale a  $+\infty$ ) si ha:

$$I_{\gamma} = \oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\gamma} \mu^{-1} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl \quad (14.3)$$



**Figura 14.1.** Un tubo di flusso con le sue correnti concatenate indicate con “.” e “×”.

dove  $\hat{\mathbf{t}}$  è il versore tangente alla curva. Sia  $\Phi$  il flusso nella sezione trasversa del tubo di flusso corrispondente all'ascissa curvilinea  $l$ , orientata in modo coerente al verso di  $\hat{\mathbf{t}}$ :

$$\Phi = \iint_{S_l} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (14.4)$$

Se il tubo di flusso è sufficientemente piccolo, si ha che  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{t}}$  e la (14.4) diventa:

$$\Phi = S_l \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{t}} \quad (14.5)$$

Da ciò si ha che:

$$I_{\gamma} = \Phi \oint_{\gamma} \frac{1}{S_l \mu_l} dl \quad (14.6)$$

dove  $\mu_l$  è la permeabilità magnetica all'ascissa curvilinea  $l$ . Si presti particolare attenzione ai riferimenti utilizzati per ricavare la (14.6): il flusso  $\Phi$  è valutato nel verso concorde con il versore  $\hat{\mathbf{t}}$  e la somma delle correnti concatenate  $I_{\gamma}$  è valutata secondo la regola della mano destra associata al verso di percorrenza definito da  $\hat{\mathbf{t}}$ .

Tenuto conto che  $I_{\gamma}$  corrisponde alla forza elettromotrice (vedi 14.2)  $E_{\gamma}$ , essa è anche detta forza magnetomotrice. La (14.6) è la legge di Hopkinson, comunemente scritta con l'introduzione della riluttanza  $R$ :

<sup>1</sup> Un tubo di flusso per un campo vettoriale solenoidale è definito con riferimento ad una linea chiusa non coincidente con una linea di campo. L'insieme delle linee di campo che la intersecano individua una superficie  $S_l$  che costituisce la frontiera del volume chiamato tubo di flusso. Il tubo di flusso è caratterizzato da un valore costante del flusso associato ad una qualsiasi sezione del tubo stesso, orientata con coerenza rispetto al verso delle linee di campo. Per costruzione, infatti, il flusso uscente da  $S_l$  è nullo. Risulta quindi identico il flusso associato a due generiche sezioni del tubo. Basta, a questo scopo considerare il flusso uscente dalla superficie chiusa costituita dalle due sezioni in esame e dalla superficie laterale del tubo da esse delimitata, flusso che è nullo per la solenoidalità del campo.

$$f.m.m. = R\Phi \quad (14.7)$$

La riluttanza  $R = \oint_{\gamma} \frac{1}{S_l \mu_l} dl$  ha una espressione che formalmente corrisponde alla resistenza elettrica

introdotta nella conduzione stazionaria.

La (13.6) fornisce la definizione di riluttanza per un tubo di flusso chiuso. Il concetto può essere esteso ad un tratto di tubo di flusso. Si consideri il tratto compreso tra le superfici  $S_A$  e  $S_B$  perpendicolari alle linee di campo nel tubo di flusso. Con gli stessi argomenti utilizzati per derivare la (14.6), si ha che:

$$\int_{A\gamma B} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = R_{A\gamma B} \Phi \quad (14.8)$$

dove  $\int_{A\gamma B} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$  è la cosiddetta tensione magnetica che compete al tratto AB del tubo di flusso ed

$R_{A\gamma B} = \int_{A\gamma B} \frac{1}{S_l \mu_l} dl$  è la riluttanza che compete a tale tratto. Si noti che la caduta di tensione

magnetica, in generale, non dipende dagli estremi di integrazione se le superfici  $S_A$  e  $S_B$  sono ortogonali al tubo di flusso e se la densità di corrente nel volume del tubo è nulla.

### Circuiti magnetici

Consideriamo la situazione di figura 14.2 nella quale un materiale con  $\mu \rightarrow \infty$  presenta un traferro e sul quale è stato realizzato un avvolgimento costituito da  $N$  spire percorse dalla corrente  $I$ .

Per quanto osservato in precedenza, la superficie del materiale magnetico è approssimativamente un tubo di flusso per l'induzione magnetica. Tuttavia, è evidente che se una generica linea di flusso si chiudesse all'interno del materiale la legge di Ampère verrebbe violata. Pertanto, ed è questa la differenza principale con i circuiti elettrici, dobbiamo ammettere che alcune linee di campo si sviluppino anche all'esterno del materiale. Comunque, se il traferro è molto piccolo rispetto alle altre dimensioni geometriche, si può dimostrare che l'induzione magnetica "attraversa" l'esterno del materiale solo in corrispondenza del traferro. Infatti, date due tubi di flusso elementari che concatenano l'avvolgimento, identificati dalle linee di campo<sup>2</sup>  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , si ha che  $\oint_{\gamma_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\gamma_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$  e,

tenuto conto che la tensione magnetica del tratto delle curve nel materiale è nulla (la corrispondente riluttanza è nulla) si ha che:

$$\int_{\gamma_1^{est}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma_2^{est}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} . \quad (14.8)$$

Poiché la curva  $\gamma_2^{est}$  passando nel traferro ha lunghezza molto minore di  $\gamma_1^{est}$ , si ha che  $\mathbf{B}$  al traferro è molto maggiore di  $\mathbf{B}$  su  $\gamma_1^{est}$ .

Chiarita la struttura geometrica dei tubi di flusso, possiamo passare alla rappresentazione circuitale di una rete magnetica. Per la costruzione della rappresentazione circuitale introduciamo come incognite i flussi nelle sezioni dei tubi di flusso. Ad esempio, per il circuito magnetico di figura 14.3 introduciamo i flussi  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  e  $\Phi_3$  con i rispettivi orientamenti:

$$\Phi_k = \iint_{S_k} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_k dS$$

Dalla solenoidalità di  $\mathbf{B}$  si ha che  $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$ ; infatti, presa una superficie chiusa  $S$  che interseca il materiale in corrispondenza di  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  si ha:

<sup>2</sup> Per un tubo di flusso sottile si può infatti supporre che la linea media del tubo sia una linea di campo

$$\begin{aligned}
0 &= \iint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_L} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_{S_L} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS - \iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS + \iint_{S_2} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS + \iint_{S_3} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_3 dS \\
&= -\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3
\end{aligned}
\tag{14.9}$$

Una analoga relazione può essere scritta in corrispondenza dell'altro "nodo" della rete magnetica. Si noti che la (14.9) esprime la conservazione del flusso e corrisponde ad una LKC.

Per individuare le LKT, le quali fanno riferimento alle tensioni lungo i lati delle maglie, dobbiamo analizzare le tensioni magnetiche. In particolare, abbiamo già osservato che nei tratti in cui  $\mu \rightarrow \infty$  la tensione è nulla, ovvero il tratto è schematizzabile come un corto circuito.

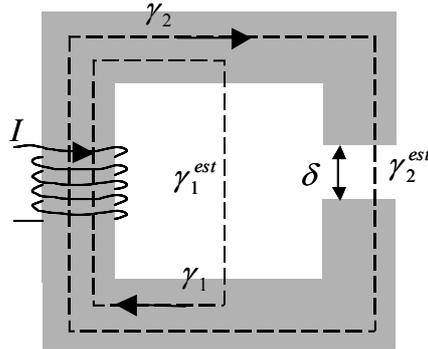


Figura 14.2. circuito magnetico che presenta un traferro di lunghezza  $\delta$ .

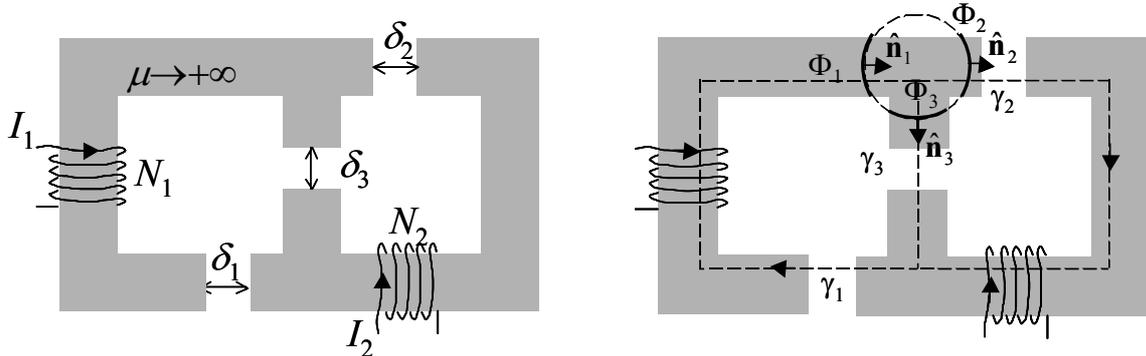


Figura 14.3. Sinistra: un circuito magnetico. Destra: i riferimenti utilizzati per definire i flussi e i percorsi per gli integrali di linea.

I tratti in aria presentano, invece, una tensione magnetica (attenzione ai riferimenti) data dalla (14.8); utilizzando la legge di Ampère, alla curva chiusa che attraversa i traferri 1 e 3 e, successivamente, a quella che coinvolge i traferri 2 e 3, si ha:

$$N_1 I_1 = \int_{\gamma_3} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\gamma_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = R_3 \Phi_3 + R_1 \Phi_1
\tag{14.10}$$

$$N_2 I_2 = - \int_{\gamma_3} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\gamma_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = -R_3 \Phi_3 + R_2 \Phi_2
\tag{14.11}$$

le quali sono interpretabili come LKT associate al circuito elettrico di figura 14.4 (destra) dove la

riluttanza  $R_k$  vale  $\int_{\gamma_k} \frac{1}{S_k \mu_k} dl \cong \frac{\delta_k}{S_k \mu_0}$ .

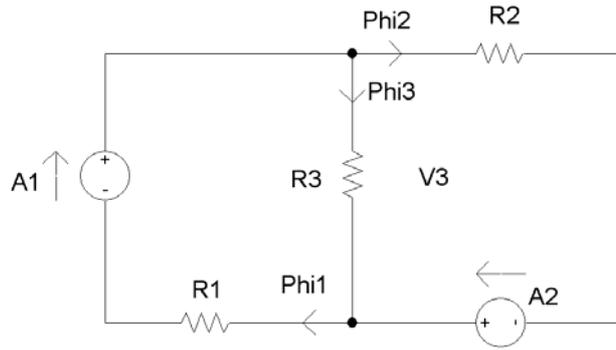


Figura 14.4. La rete elettrica equivalente.

*Esercizio: calcolo dei coefficienti di auto e mutua induzione in presenza di un circuito magnetico*

Calcolare i coefficienti di auto e mutua induzione per il circuito magnetico riportato in figura 14.4 (sinistra). Gli avvolgimenti sono costituiti da  $N_1$  e  $N_2$  spire, rispettivamente. I traferri, di spessore  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  e  $\delta_3$  hanno sezioni trasverse di area  $S_1$ ,  $S_1$  e  $S_3$ , rispettivamente.

L'obiettivo è il calcolo dei seguenti coefficienti:

$$L_1 = \left. \frac{\phi_1^c}{I_1} \right|_{I_2=0}; \quad L_2 = \left. \frac{\phi_2^c}{I_2} \right|_{I_1=0}; \quad M = \left. \frac{\phi_1^c}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad (14.12)$$

dove  $\phi_1^c$  e  $\phi_2^c$  sono i flussi concatenati con l'avvolgimento 1 e con l'avvolgimento 2, rispettivamente.

Per il calcolo dei flussi  $\phi_1^c$  e  $\phi_2^c$  si ricorre al modello circuitale (rete magnetica) equivalente. Tale modello si costruisce sostituendo gli avvolgimenti con opportuni generatori di f.m.m. e i tratti del circuito magnetico con opportune riluttanze.

Si ricorda che la riluttanza di un tubo di flusso "sufficientemente piccolo"<sup>3</sup> è espressa dall'integrale curvilineo:

$$R_\gamma = \int_\gamma \frac{1}{\mu_l S_l} dl \quad (14.13)$$

dove  $\gamma$  è una curva contenuta nel tubo di flusso ed ortogonale alla sezione trasversa del tubo stesso,  $\mu$  è la permeabilità magnetica e  $S$  è la sezione trasversa del tubo di flusso. L'intensità del generatore di f.m.m. associato ad un avvolgimento composto da  $N$  spire e percorso dalla corrente  $I$  vale  $NI$  ed è orientato in accordo con la regola della mano destra riferita alla corrente  $I$ .

La figura 14.1 (destra) mostra il modello circuitale del sistema fisico in questione. I valori dei parametri dei componenti sono dati da:

$$R_1 = \frac{\delta_1}{\mu_0 S_1}; \quad R_2 = \frac{\delta_2}{\mu_0 S_2}; \quad R_3 = \frac{\delta_3}{\mu_0 S_3}; \quad A_1 = N_1 I_1; \quad A_2 = N_2 I_2 \quad (14.14)$$

dove si è tenuto conto che la riluttanza associata ai tratti di materiale magnetico vale zero in quanto abbiamo assunto che la permeabilità magnetica sia infinita.

Osserviamo che, con le convenzioni utilizzate sulla rete equivalente, si ha:

$$\phi_1^c = N_1 \phi_1; \quad \phi_2^c = N_2 \phi_2 \quad (14.15)$$

<sup>3</sup> Sufficientemente piccolo significa tanto piccolo da poter considerare l'induzione magnetica uniforme in ogni sezione trasversa.

pertanto, il problema del calcolo dei coefficienti (14.12) equivale al calcolo di  $\phi_1$  e  $\phi_2$  in corrispondenza di opportune condizioni di alimentazione.

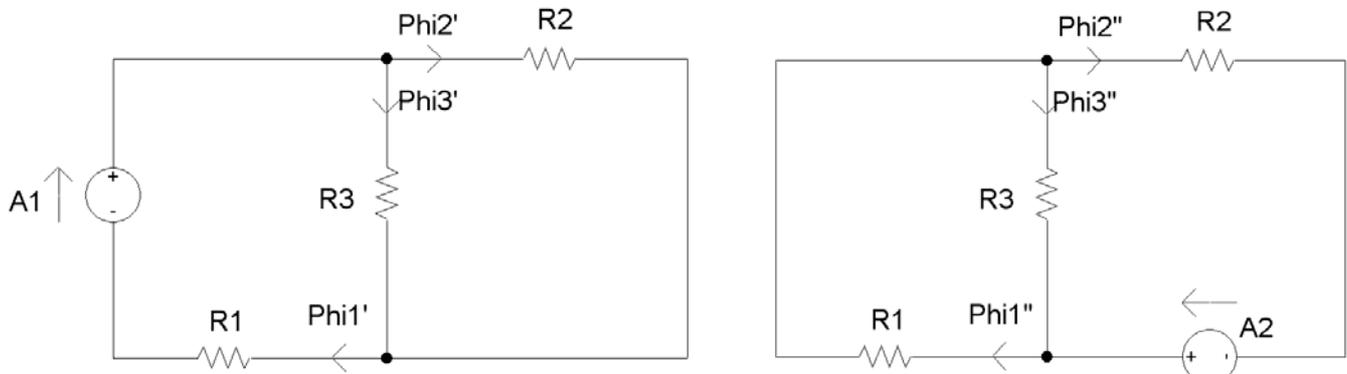


Figura 14.5. Le reti equivalenti per il calcolo dei coefficienti di auto e mutua induzione.

La rete equivalente richiesta per il calcolo di  $L_1$  si ottiene imponendo  $I_2=0$  (figura 14.5, sinistra). Considerando che gli elementi  $R_2$  e  $R_3$  sono in parallelo, segue che:

$$\phi_1' = \frac{A_1}{R_1 + R_2 // R_3} \quad (14.16)$$

da cui

$$L_1 = \frac{N_1 \phi_1'}{I_1} = \frac{N_1^2}{R_1 + R_2 // R_3}. \quad (14.17)$$

La rete equivalente richiesta per il calcolo di  $L_2$  e  $M$  si ottiene imponendo  $I_1=0$  (figura 14.5, destra). Il flusso  $\phi_2''$  vale:

$$\phi_2'' = \frac{A_2}{R_2 + R_1 // R_3}. \quad (14.18)$$

Applicando il partitore di corrente agli elementi  $R_1$  e  $R_3$  si ha che il flusso  $\phi_1''$  vale:

$$\phi_1'' = \frac{R_3 \phi_2''}{R_1 + R_3} = \frac{R_3}{R_1 + R_3} \frac{A_2}{R_2 + R_1 // R_3}. \quad (14.19)$$

Dalle (7) e (8) si ha:

$$L_2 = \frac{N_2 \phi_2''}{I_2} = \frac{N_2^2}{R_2 + R_1 // R_3} \quad (14.20)$$

$$M = \frac{N_1 \phi_1''}{I_2} = \frac{N_1}{I_2} \frac{R_3 \phi_2''}{R_1 + R_3} = \frac{N_1 N_2 R_3}{(R_1 + R_3) R_2 + R_1 R_3}. \quad (14.21)$$

Per fissare le idee, si consideri il caso descritto da  $N_1 = 100$ ,  $N_2 = 200$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 2mm$ ,  $S_1 = 25mm^2$ ,  $S_2 = 49mm^2$ ,  $S_3 = 36mm^2$ . Sostituendo i valori numerici nelle (14.14), (14.17), (14.20) e (14.21), si ha  $L_1 = 0.12mH$ ,  $L_2 = 0.68mH$ ,  $M = 0.14mH$ .

### Circuito magnetico non lineare

Sia dato un nucleo di materiale ferromagnetico con un traferro di piccola ampiezza (fig 14.6). Indichiamo con  $S_t$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  le sezioni dei vari tronchi di lunghezza media  $t$ ,  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  in cui si suppone di poter scomporre il circuito magnetico (fig. 14.6), ciascuno approssimativamente caratterizzato da uno stesso valore di flusso, indicato, rispettivamente con  $\Phi_t$ ,  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$ .

Il materiale ferromagnetico “dolce” sia caratterizzato, in assenza di isteresi da una relazione costitutiva B-H non lineare (fig. 14.7)

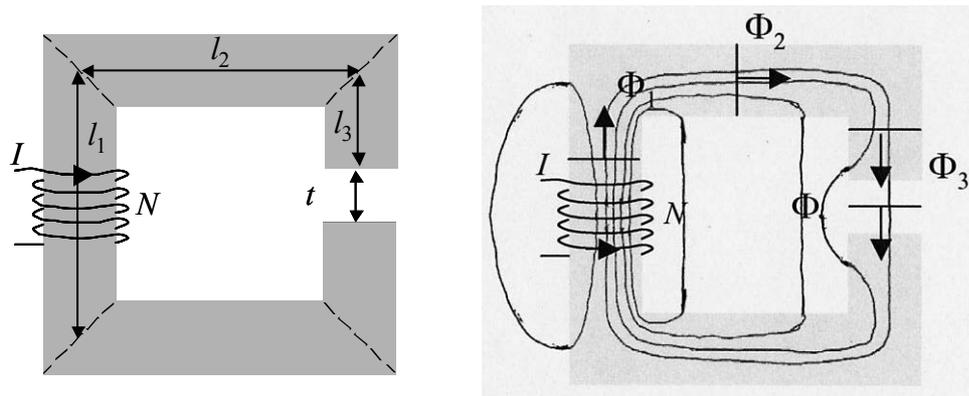


Figura 14.6. Un circuito magnetico (sinistra). Alcune linee di campo ed i riferimenti scelti per i flussi (destra).

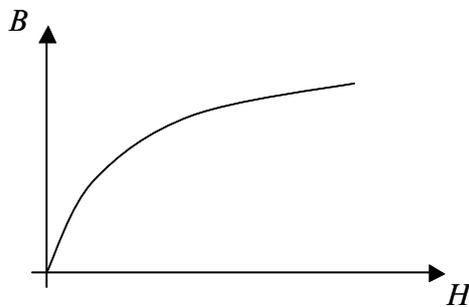


Figura 14.7. Legame B-H per un materiale ferromagnetico “dolce”. L’area del ciclo di isteresi è trascurabile.

### Problema diretto

Si vogliono calcolare le amperspire necessarie per ottenere una determinata induzione  $B_t$  nel traferro.

A causa del flusso disperso in area, non tutto il flusso concatenato con l’avvolgimento interessa il traferro e, pertanto, ciò giustifica la definizione di differenti valori di flusso associati ai differenti tratti del circuito magnetico. E’ possibile definire approssimativamente, con il calcolo o in via sperimentale, dei coefficienti  $k_1, k_2, k_3$ , che esprimano il rapporto tra il flusso nei differenti tratti del nucleo rispetto al flusso nel traferro. Si ha così

$$\Phi_1 = k_1 \Phi_t, \quad \Phi_2 = k_2 \Phi_t, \quad \Phi_3 = k_3 \Phi_t. \quad (14.22)$$

dove

$$\Phi_t = B_t S_t$$

La legge della circuitazione, applicata alla linea media del magnete, impone  $\oint \mu^{-1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = Ni$ . Tenendo conto dei vari tratti in cui è stato scomposto il circuito magnetico, si ha

$$\frac{B_t}{\mu_0} t + \frac{B_1}{\mu_1} l_1 + \frac{B_2}{\mu_2} 2l_2 + \frac{B_3}{\mu_3} 2l_3 = Ni \quad (14.23)$$

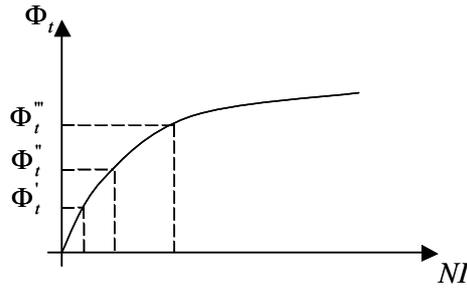


Figura 14.8. Curva di magnetizzazione totale.

I valori medi di induzione  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  possono essere ottenuti dai corrispondenti valori di flusso, noti, in virtù delle (14.22):

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1} = k_1 \frac{\Phi_t}{S_1}, \quad B_2 = k_2 \frac{\Phi_t}{S_2}, \quad B_3 = k_3 \frac{\Phi_t}{S_3} \quad (14.24)$$

In base poi alla curva caratteristica del materiale (fig. 14.7) si ricavano il corrispondenti valori di  $H$  e quindi delle permeabilità  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$ . Si ottiene infine dalla (14.23)

$$Ni = \Phi_t \left( \frac{t}{\mu_0 S_t} + \frac{k_1 l_1}{\mu_1 S_1} + \frac{2k_2 l_2}{\mu_2 S_2} + \frac{2k_3 l_3}{\mu_3 S_3} \right) \quad (14.25)$$

#### Problema inverso

Si voglia calcolare l'induzione  $B_t$  nel traferro corrispondente ad una certa *f.m.m.*  $Ni$ .

Si noti che non è possibile, in questo caso, utilizzare direttamente l'espressione (14.25), poiché non sono noti i valori delle permeabilità nei singoli tratti. Conviene allora prefissare un certo numero di valori del flusso al traferro (ad esempio  $\Phi_t'$ ,  $\Phi_t''$ ,  $\Phi_t'''$ ) e, per ciascuno di essi calcolare la corrispondente *f.m.m.*. Riportando questi valori su un diagramma, è possibile ottenere per interpolazione la caratteristica di magnetizzazione totale (fig. 14.8), che esprime per ogni valore della *f.m.m.* il corrispondente valore di flusso al traferro. Tracciata la caratteristica, essa può servire sia per determinare la *f.m.m.* corrispondente ad un determinato flusso, sia per risolvere il problema inverso.

#### Potenza di eccitazione

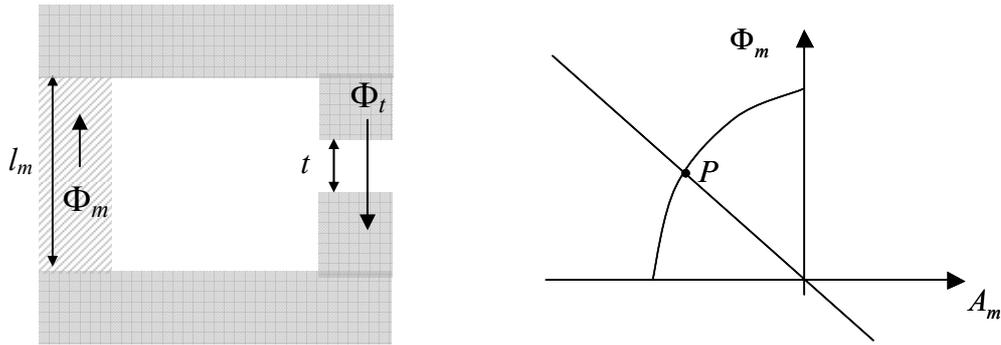
Il numero di spire  $N$  che caratterizzano la *f.m.m.*  $A=Ni$  viene determinato in base alla potenza elettrica disponibile. Infatti il circuito elettrico è caratterizzato da una resistenza  $R = Nl / \sigma S$ , dove  $l$  ed  $S$  sono la lunghezza e la sezione di ciascuna spira attraversata dalla corrente  $i$ , e quindi assorbe una potenza  $P = Ri^2$ . Si noti che, a parità di amperspire, la potenza assorbita non dipende dal numero di spire.

Definita  $S_T = NS$  la sezione complessiva dell'avvolgimento e ragionando a parità di amperspire e di densità di corrente ammissibile ( $J = i/S = Ni/S_T$ ), risulta infatti

$$P = \frac{Nl}{\sigma S} i^2 = \frac{l(Ni)^2}{\sigma NS} = \frac{lA}{\sigma S_T}$$

Fissata  $J$  e, con essa,  $S_T$  il numero di spire dipende dalla tensione di alimentazione:

$$V = Ri = \frac{Nl}{\sigma S} i = \frac{Nl}{\sigma} J$$



**Figura 14.9.** Circuito magnetico con magnete permanente (Sinistra). Determinazione grafica del punto di lavoro  $P$ .

Si noti che se la resistenza ohmica fosse nulla, nessuna potenza sarebbe necessaria per sostenere la magnetizzazione. In tal caso, la sola energia richiesta è quella ceduta dal circuito elettrico al campo magnetico durante il tempo in cui la corrente passa dal valore zero ad  $i$ .

### *Circuito magnetico con magnete permanente*

Si consideri il circuito magnetico di figura 14.9, costituito da un magnete permanente ( $m$ ) di sezione  $S_m$  e lunghezza  $l_m$ , da due tratti ad elevata permeabilità e da un traferro di piccola ampiezza  $t$  e sezione  $S_t$ . Si supponga che il circuito magnetico sia un tubo di flusso caratterizzato dal flusso  $\Phi_t = B_t S_t$  al traferro e  $\Phi_m = B_m S_m$ , essendo  $B_t$  e  $B_m$  e valori medi dell'induzione nel traferro e nel magnete. In assenza di dispersioni deve essere

$$\Phi_m = \Phi_t \quad (14.26)$$

Poiché non esistono correnti concatenate con la linea media del circuito magnetico, la legge (14.7) dei circuiti magnetici si riduce alla

$$R_m \Phi_m + R_t \Phi_t = 0 \quad (14.27)$$

essendo nulla la  $f.m.m.$  totale e trascurabile la riluttanza dei tratti ad alta permeabilità. Nella (14.27) le riluttanze sono date, come di consueto, dalle espressioni approssimate

$$R_t = \frac{t}{\mu_0 S_t} \quad (14.28)$$

$$R_m = \frac{l_m}{\mu_m S_m} \quad (14.29)$$

E' conveniente esprimere la relazione costitutiva ( $H_m, B_m$ ) del materiale ferromagnetico del magnete permanente, con un cambio opportuno di scala degli assi, in modo da esplicitare il legame tra tensione magnetica  $A_m = H_m l_m$  e flusso  $\Phi_m = B_m S_m$  (fig. 14.9).

Il punto di funzionamento del magnete, nel piano  $(A_m, \Phi_m)$ , è pertanto determinato, utilizzando le relazioni (14.26-14.27), imposte dal circuito magnetico, dal vincolo

$$A_m = R_m \Phi_m = -A_t = -R_t \Phi_t \quad (14.30)$$

e quindi dalla retta

$$\Phi_m = -\frac{A_m}{R_t} \quad (14.31)$$

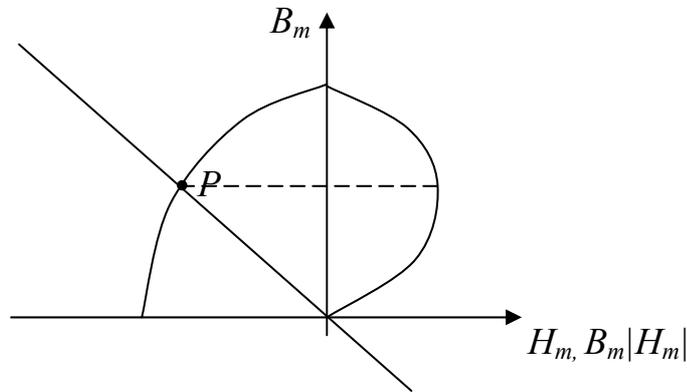
che passa per l'origine con pendenza negativa  $-1/R_t$ .

Il punto di lavoro del magnete deve inoltre appartenere alla sua curva caratteristica ed è quindi dato dall'intersezione di questa curva con la retta (14.31), così come illustrato in fig. 14.9.

Si noti che, mentre nel traferro campo magnetico e induzione sono equiversi, nel magnete,  $H$  e  $B$  sono discordi.

Se si vogliono determinare le dimensioni (lunghezza  $l_m$  e sezione  $S_m$ ) di un magnete per ottenere un assegnato valore di  $B_t$  in un dato traferro di lunghezza  $t$  e sezione  $S_t$  si può procedere come segue.

Si riscriva la (14.30),  $A_m = -A_t$ , esplicitando le tensioni magnetiche in termini del campo magnetico  $H$  ( $A_m = H_m l_m$  e  $A_t = H_t t$ ). Si ottiene



**Figura 14.10.** Individuazione del punto di lavoro che consente di minimizzare il volume del materiale ferromagnetico utilizzato.

$$H_t t = |H_m| l_m \quad (14.32)$$

Risulta anche dalla (14.26)

$$B_t S_t = B_m S_m \quad (14.33)$$

Moltiplicando tra loro la (14.32) e la (14.33) si ottiene

$$B_t H_t V_t = B_m |H_m| V_m \quad (14.34)$$

dove  $V_m$  e  $V_t$  sono i volumi di magnete e traferro. E' opportuno scegliere il punto di lavoro minimizzando il volume del magnete e conseguentemente massimizzando il prodotto  $B_m |H_m|$ . Si ricordi infatti che, nel caso in esame, il primo membro della (14.34) è assegnato. La figura 14.10 mostra come si determina il punto P con  $\{B_m |H_m|\}_{\max}$

Una volta determinato il punto P (e, quindi,  $H_m$  e  $B_m$ ), in base alle (14.32) e (14.33) si determinano  $l_m$  ed  $S_m$