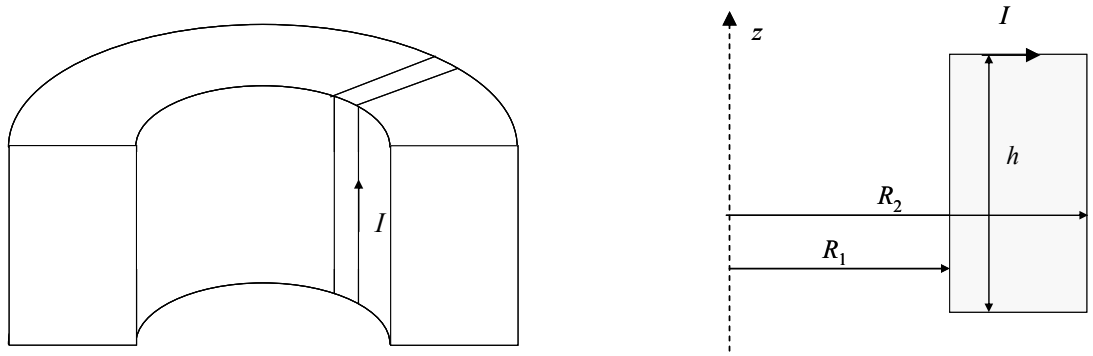

Figura 12.13. Sinistra: spaccato del toro. Destra sezione del toro nel piano (*r*,*z*).

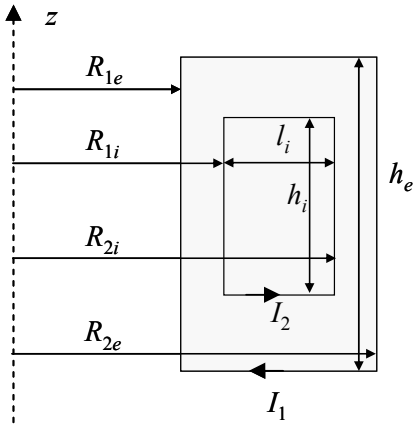

Figura 12.14. Sezione del mutuo accoppiamento nel piano (*r*,*z*).

Induttanza di un solenoide toroidale di sezione rettangolare

La geometria è descritta nella figura 12.13. Indicando con I la corrente circolante in ciascuna spira del solenoide,il campo **B** è dato dalla (12.21). Pertanto il flusso concatenato con una spira è

$$\phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I N}{2\pi} \frac{h}{r} dr = \frac{\mu_0 I N}{2\pi} h \log \frac{R_2}{R_1} \tag{12.56}$$

Il flusso totale concatenato con l'intero solenoide è pertanto:

$$\phi_\gamma = N\phi = \frac{\mu_0 I N^2}{2\pi} h \log \frac{R_2}{R_1} \tag{12.57}$$

Ne segue che l'induttanza L è

$$L = \frac{\phi_\gamma}{I} = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} h \log \frac{R_2}{R_1} \tag{12.58}$$

Coefficiente di mutua induzione di due solenoidi toroidali concentrici di sezione rettangolare

La geometria è descritta nella figura 12.14. Indicando con I_1 la corrente circolante in ciascuna spira del primo solenoide,il flusso generato I_1 e concatenato con una spira del secondo solenoide è:

$$\phi_{21} = \iint_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS = -\int_{R_{1i}}^{R_{2i}} \frac{\mu_0 I_1 N_1}{2\pi} \frac{h_i}{r} dr = \frac{\mu_0 I_1 N_1}{2\pi} h_i \log \frac{R_{2i}}{R_{1i}} \tag{12.59}$$

Il segno meno dipende dal fatto che, per $I_1>0$, con riferimento al verso assunto in fig. 12.14 per I_1, il campo $\mathbf{B}_1$ prodotto da I_1 risulta opposto alla normale $\hat{\mathbf{n}}_2$ alla superficie S_2 del secondo solenoide, orientata in modo congruente al verso assunto per I_2.
Il flusso totale concatenato col secondo solenoide è pertanto:

$$\phi_{\gamma 2} = N_2\phi_{21} = -\frac{\mu_0 I_1 N_1 N_2}{2\pi} h_i \log\frac{R_{2i}}{R_{1i}} \tag{12.60}$$

Ne segue che il coefficiente di mutua induzione M è

$$M = \frac{\phi_{\gamma 2}}{I_1} = -\frac{\mu_0 N_1 N_2}{2\pi} h_i \log\frac{R_{2i}}{R_{1i}} \tag{12.61}$$

Infine, confrontando M^2 con L_1L_2, si ha:

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{\mu_0^2 N_1^2 N_2^2}{4\pi^2} h_i^2 \left(\log\frac{R_{2i}}{R_{1i}}\right)^2 \\ L_1L_2 &= \frac{\mu_0 N_1^2}{2\pi} h_e \log\frac{R_{2e}}{R_{1e}} \frac{\mu_0 N_2^2}{4\pi^2} h_i \log\frac{R_{2i}}{R_{1i}} = \\ &\frac{\mu_0^2 N_1^2 N_2^2}{4\pi^2} h_e h_i \log\frac{R_{2e}}{R_{1e}} \log\frac{R_{2i}}{R_{1i}} > M^2 \end{aligned} \tag{12.62}$$

Se ne conclude che in questo caso l'accoppiamento tra i due solenoidi non perfetto.
Il coefficiente di accoppiamento k è:

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1L_2}} = \left[\frac{h_i}{h_e}\frac{\log\frac{R_{2i}}{R_{1i}}}{\log\frac{R_{2e}}{R_{1e}}}\right] \tag{12.63}$$

13. Misura della caratteristica *B-H*

La caratteristica B-H può essere misurata con l'apparato sperimentale mostrato in fig. 13.1. Il materiale magnetico è collocato all'interno di un solenoide toroidale come quello discusso nel paragrafo 12. L'avvolgimento è costituito da N_1 spire percorse da una corrente i la cui intensità può essere variata opportunamente, ad esempio con una resistenza[1] variabile collegata ad un generatore sinusoidale. Un'altra resistenza in serie può consentite di associare il valore $v_H(t)$ della differenza di potenziale ai suoi morsetti alla corrente i:

$$v_H(t)=R_H i(t) \tag{13.1}$$

Le linee di campo, come già si è visto, sono circonferenze con il centro sull'asse di simmetria del toro e che si sviluppano all'interno del toro stesso concatenando le N_1 spire dell'avvolgimento. Il campo magnetico è pertanto determinato dalla sola legge della circuitazione, che, applicata alla generica circonferenza γ di raggio r, fornisce

$$\oint_\gamma \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = H\oint_\gamma dl = H2\pi r = N_1 i \tag{13.1}$$

[1] La regolazione dell'intensità della corrente può essere ottenuta più convenientemente con un Variac, un auto-trasformatore a rapporto spire variabile.

Supponendo che il raggio maggiore R dell'avvolgimento toroidale sia grande rispetto alla dimensione della sua sezione, possiamo ignorare la variazione di r all'interno della sezione ed approssimare r con un raggio medio di valore R. Risulta quindi

$$H = \frac{N_1 i}{2\pi r} \cong \frac{N_1 i}{2\pi R} \tag{13.2}$$

Per misurare B si può far riferimento alla legge dell'induzione (12.27). A questo scopo avvolgiamo sul toro un altro circuito costituito da N_2 spire e chiuso con una impedenza elevata, in modo da assorbire una corrente trascurabile. In tal modo il campo H non subisce apprezzabili variazioni. Con riferimento alla fig.13.2, la tensione indotta sulle N_2 spire, nell'ipotesi che queste siano realizzate con un conduttore di resistività trascurabile, risulta essere:

$$-\frac{d\phi_\gamma}{dt} = \int_{\gamma_{spira}} \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{t}}dl = \int_{B\gamma_i A} \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{t}}dl + \int_{A\gamma_e B} \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{t}}dl = V_{AB} \tag{13.3}$$

Considerando il campo d'induzione **B** parallelo ad **H** e praticamente costante all'interno del toro, si ha per il flusso ϕ_γ

$$\phi_\gamma = \iint_{S_\gamma} \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = N_2 \iint_S \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS + \iint_{S_{ext}} \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS \cong N_2 B \iint_S dS = N_2 BS \tag{13.4}$$

e quindi

$$B = \frac{\phi_\gamma}{N_2 S} \tag{13.5}$$

Nella (13.4) si è tenuto conto che l'induzione magnetica al di fuori del circuito magnetico è trascurabile e, pertanto, ϕ_γ non dipende dalla forma di γ_{ext}.
L'induzione magnetica B può essere quindi ottenuta integrando nel tempo la tensione Vab:

$$\phi_\gamma(t) = \phi_\gamma(0) + \int_0^t V_{AB}(t)dt \tag{13.6}$$

L'integrazione può essere facilmente ottenuta con un circuito integratore, quale è ad esempio un circuito RC (fig 13.3) con una costante di tempo RC molto elevata rispetto al periodo della forma d'onda del generatore sinusoidale che alimenta l'avvolgimento di N_1 spire. Con riferimento al circuito di fig. 13.3, si ha infatti:

$$RC\frac{dv_B}{dt} + v_B = V_{AB}(t) \tag{13.7}$$

$$RC\frac{dv_B}{dt} \cong V_{AB}(t) \tag{13.9}$$

E quindi

$$v_B(t) = v_B(0) + \frac{1}{RC}\int_0^t V_{AB}(t)dt \tag{13.10}$$

Riassumendo, si ha che le due tensioni sono proporzionali rispettivamente ad H ed a B:

$$v_H = R_H i = \left(R_H \frac{2\pi R}{N_1}\right)H$$

$$v_B = \frac{1}{RC}\int_0^t V_{AB}(t)dt = \frac{1}{RC}\phi_\gamma = \left(\frac{1}{RC}N_2 S\right)B$$

Esse possono quindi consentire di tracciare la caratteristica *B-H*, utilizzando, ad esempio, un oscilloscopio, in cui i morsetti associati alla deflessione orizzontale sono alimentati da v_H e quelli della deflessione verticale sono alimentati da v_B. Il diagramma che si ottiene, nel caso di un materiale ferromagnetico è riportato schematicamente in fig. 13.3.

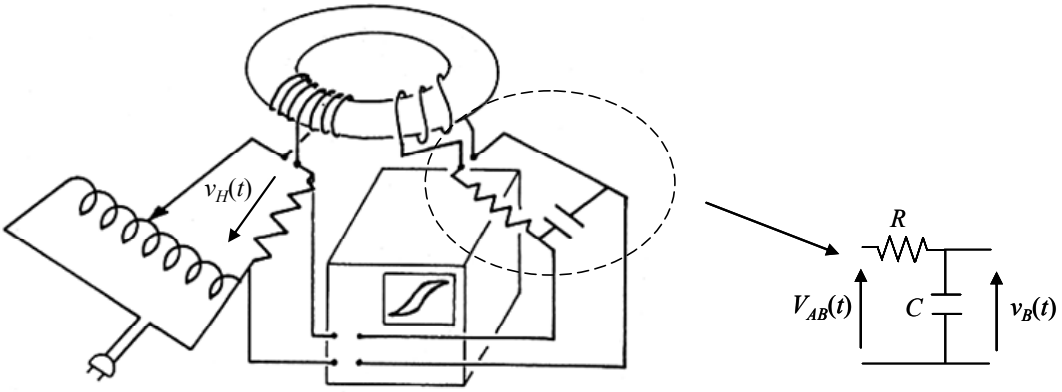

Figura 13.1 Un apparato sperimentale che consente di misurare la caratteristica *B-H*

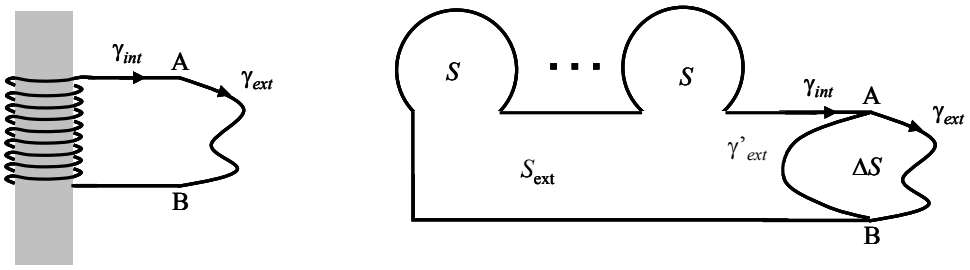

Figura 13.2 I riferimenti per il calcolo della tensione V_{AB} sulla curva gamma2

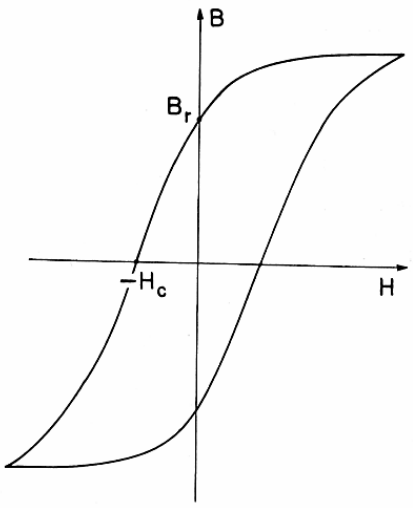

Figura 13.3 La curva del ciclo d'isteresi ottenuta in risposta ad una corrente sinusoidale