

15. Forze associate alla presenza del campo magnetico

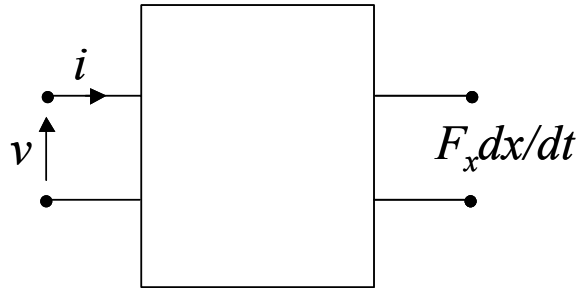


Figura 15.1. Un sistema elettromeccanico di tipo magnetico con un grado di libertà elettrico (i) e un grado di libertà meccanico (x).

Si assuma che il sistema elettromagnetico, costituito da conduttori percorsi da corrente ed eventualmente materiali magnetici, sia ricondotto schematicamente a quello mostrato in fig. 15.1.

Nella figura sono evidenziati una coppia di morsetti elettrici, attraverso i quali può essere assorbita potenza elettrica, ed una coppia di morsetti simbolici che identifica la potenza meccanica che il sistema eroga all'esterno, ipotizzando un solo possibile grado di libertà meccanico. Si suppone che nel sistema non vi sia dissipazione.

Si supponga di far effettuare dal sistema uno spostamento elementare rilassando un vincolo. Il sistema compie pertanto un lavoro meccanico elementare dato dalla

$$\delta L_m = F_x dx. \quad (15.1)$$

Per la conservazione dell'energia si ottiene allora che l'energia elettrica erogata dai generatori esterni $v dt$ ed assorbita dal sistema ai morsetti elettrici, in parte si converte in incremento di energia magnetica dW ed in parte nel lavoro meccanico elementare δL_m :

$$v dt = dW + F_x dx \quad (15.2)$$

Il generatore fornisce una tensione che, in assenza di dissipazione, è in equilibrio con la sola tensione induttiva. Si ha pertanto (si veda anche la (12.36))

$$v = d\phi / dt$$

e quindi

$$i d\phi = dW + F_x dx \quad (15.3)$$

Poiché la forza dipende solo dalla configurazione del sistema all'equilibrio e non dalla modalità con cui è effettuato lo spostamento virtuale, ipotizziamo che lo spostamento avvenga a flusso costante ($v=0$). Risulta allora

$$0 = dW + F_x dx \quad (15.4)$$

e quindi:

$$F_x = - \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{\phi=\text{cost.}} \quad (15.5)$$

Spesso conviene ipotizzare invece che lo spostamento virtuale avvenga a corrente costante. In questo caso, riferendosi per semplicità ad un sistema lineare ($\phi = Li$, $W = Li^2 / 2 = \phi^2 / 2L = i\phi / 2$), si ha:

$$i^2 dL = \frac{1}{2} i^2 dL + F_x dx \quad (15.6)$$

e quindi

$$F_x = \frac{1}{2} i^2 \left. \frac{\partial L}{\partial x} \right|_{i=\text{cost.}} = \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{i=\text{cost.}}. \quad (15.7)$$

Non tragga in inganno la differente espressione ottenuta. Le due valutazioni (15.5) e (15-7) infatti coincidono. Basta osservare che

$$-\left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{\phi=\text{cost.}} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\phi^2}{2L}\right) = -\frac{\phi^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{L}\right) = \frac{\phi^2}{2L^2}\frac{\partial L}{\partial x} = \left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{i=\text{cost.}} \quad (15.8)$$

Vale la pena estendere questa valutazione anche al caso di due induttori indeformabili magneticamente accoppiati. In questo caso, i gradi di libertà elettrici sono due, ipotizzando di alimentare indipendentemente i due circuiti. Il bilancio (15.3) va pertanto modificato come segue:

$$i_1 d\phi_1 + i_2 d\phi_2 = dW + F_x dx \quad (15.9)$$

Nella (15.9) ϕ_1 e ϕ_2 sono i flussi concatenati con i due circuiti e $W = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$.

Operando a correnti costanti e tenendo conto che le autoinduttanze sono costanti si ha

$$i_1 i_2 dM + i_2 i_1 dM = i_1 i_2 dM + F_x dx \quad (15.10)$$

e quindi

$$F_x = i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial x} = \left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{i_1, i_2 = \text{cost.}} \quad (15.11)$$

Esempio: forza esercitata da un elettromagnete

Si consideri l'elettromagnete schematizzato in figura 15.2. La parte superiore è fissa a differenza della parte inferiore che può traslare verticalmente (grado di libertà meccanico x). Nell'ambito della approssimazione a $\mu=\infty$, l'induttanza del sistema è dovuta solo ai traferri e vale

$L = \frac{N^2}{R} = \mu_0 N^2 S / (4x)$ dove R esprime la riluttanza del tratto in aria ed S è l'area complessiva dei

traferri supposti uguali. Da ciò, si ha che $F_x = -\mu_0 i^2 N^2 S / (8x^2)$. Si noti che la forza è sempre attrattiva indipendentemente dal verso della corrente i , inoltre, la pressione magnetica esercitata sulla parte inferiore vale $p = -\mu_0 i^2 N^2 / (8x^2)$. Questa pressione può essere espressa in funzione del campo d'induzione magnetica, osservando come di consueto che

$$Ni = B_t(2x) / \mu_0$$

Pertanto

$$p = \frac{B_t^2}{2\mu_0}$$

La pressione risulta quindi pari numericamente alla densità di energia magnetica. Supponendo che il campo d'induzione sia di un tesla, risulta $p \cong 4 \times 10^5 \text{ N/m}^2$

Esempio: forza per unità di lunghezza tra due correnti parallele

Si consideri il circuito di figura 12.2 nel quale d rappresenta il grado di libertà meccanico e $r_1=r_2=r_0$. Il coefficiente di induttanza per unità di lunghezza è dato dalla (12.64) e vale

$L = \frac{\mu_0}{\pi} \log \frac{d}{r_0}$. La forza per unità di lunghezza data dalla (15.7) vale, pertanto, $F = i \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi d} \right)$. Si noti

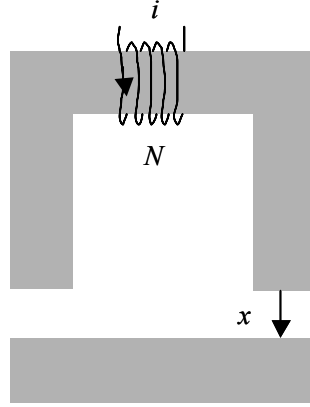


Figura 15.2. Un elettromagnete esercita una forza su una barra metallica. Sia l'elettromagnete che la barra sono supposti possedere una permeabilità magnetica infinita.

che il fattore in parentesi corrisponde al modulo dell'induzione magnetica prodotta dalla prima corrente. Ne consegue che la forza per unità di lunghezza può essere scritta anche come $F = iB$. In generale, si ha che la forza elementare esercitata su un tratto di lunghezza dl di un conduttore filiforme attraversato dalla corrente i da parte di un campo magnetico $\mathbf{B}$ esterno è data dalla relazione:

$$d\mathbf{F} = i \hat{\mathbf{t}} dl \times \mathbf{B} \quad (15.12)$$

dove il versore $\hat{\mathbf{t}}$ è tangente alla corrente nel punto considerato è diretto nel verso del riferimento utilizzato per definire i .

Forza specifica esercitata da una sorgente di campo assegnata

Supponiamo che una sorgente di campo produca un campo elettrico $\mathbf{E}$ e un campo induzione magnetica $\mathbf{B}$. Supponiamo, inoltre, di considerare delle cariche in moto descritte da una densità di corrente $\mathbf{J}$ e da una densità di carica volumetrica ρ .

Partendo dalla espressione della forza su una singola carica in moto ($\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$), è possibile ricavare la densità di forza per unità di volume. A tal fine si supponga, per semplicità, che ci sia una unica specie di portatori di carica di valore q_p descritta da una densità volumetrica n e si considerino le cariche contenute in un volume elementare $\Delta\tau$. La forza che agisce complessivamente sul volume elementare è data dalla somma delle forze che agiscono sulle singole cariche:

$$\Delta\mathbf{F} = \sum_k q_p (\mathbf{E}_k + \mathbf{v}_k \times \mathbf{B}_k) \quad (15.13)$$

dove $\mathbf{E}_k$ e $\mathbf{B}_k$ sono, rispettivamente, il campo elettrico e l'induzione magnetica valutate in corrispondenza della posizione $\mathbf{r}_k$ occupata dalla k -esima carica. Posto $\mathbf{r}_0$ pari, ad esempio, al baricentro di $\Delta\tau$, si ha che:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_k &= \mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v}_k \\ \mathbf{E}_k &= \mathbf{E}_0 + \underline{\underline{\mathbf{M}}}_0^E \Delta\mathbf{r}_k + O(|\Delta\mathbf{r}_k|^2) \\ \mathbf{B}_k &= \mathbf{B}_0 + \underline{\underline{\mathbf{M}}}_0^B \Delta\mathbf{r}_k + O(|\Delta\mathbf{r}_k|^2) \end{aligned} \quad (15.14)$$

dove $\mathbf{v}_0$ è la velocità media delle cariche e $\mathbf{E}_0$ e $\mathbf{B}_0$ sono il campo elettrico e l'induzione magnetica, rispettivamente, valutati in corrispondenza di $\mathbf{r}_0$ e, infine, $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_0^E$ e $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_0^B$ sono opportune matrici ottenute dalla sviluppo in serie di Taylor di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$.

Sostituendo le (15.14) nella (15.13) e trascurando i termini di ordine pari o superiore al primo, si ricava:

$$\Delta\mathbf{F} = \sum_k q_p (\mathbf{E}_0 + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0) = q_p n_0 \Delta\tau (\mathbf{E}_0 + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0). \quad (15.15)$$

Tenendo conto che $\rho_0 = q_p n_0$ e $\mathbf{J}_0 = q_p n \mathbf{v}_0$ (singola specie di portatore di carica) e facendo il limite per $\Delta\tau \rightarrow 0$ si ha:

$$\left. \frac{d\mathbf{F}}{d\tau} \right|_{\mathbf{r}_0} = \rho_0 \mathbf{E}_0 + \mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_0 \quad (15.16)$$

dove il pedice 0 indica quantità valutate in corrispondenza del punto $\mathbf{r}_0$.

16. Cenni sulla conversione elettromeccanica.

Si consideri, per fissare le idee, il dispositivo illustrato in fig. 16.1, costituito da due rotaie conduttrici parallele di resistenza trascurabile, distanti w l'una dall'altra, su cui può scorrere, in contatto elettrico, con velocità $\mathbf{v}_\gamma$ una sbarretta anch'essa di resistenza trascurabile. Ad una delle estremità delle rotaie è collegato un tratto conduttore (c) quasi-filiforme avente resistenza R . Nel suo insieme il dispositivo si presenta come un circuito completo di area variabile. Il dispositivo sia immerso in un campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$, perpendicolare al piano delle rotaie, uniforme nello spazio e costante nel tempo.

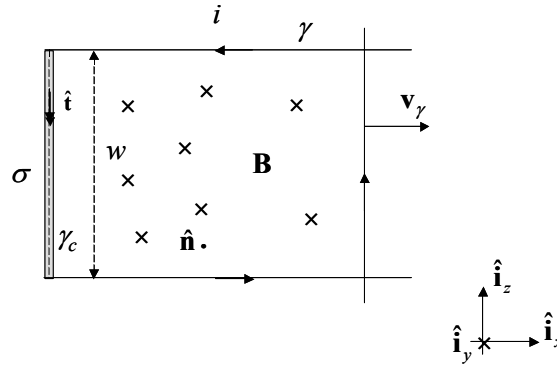


Figura 16.1. La configurazione di riferimento. Il tratto a sinistra (grigio) è costituito da un materiale conduttore quasi-filiforme di conducibilità σ .

Le leggi che descrivono il fenomeno sono l'equazione della forza agente sulle cariche in moto e l'equazione di Maxwell che esprime la legge di Faraday:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (16.1)$$

$$\oint_\gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_{S_\gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (16.2)$$

Si assume inoltre trascurabile la corrente di spostamento e, pertanto, la densità di corrente risulta essere solenoidale.

Essendo in presenza di un conduttore, la relazione costitutiva da imporre è la classica legge di Ohm per le grandezze specifiche:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_T \quad (16.3)$$

dove $\mathbf{E}_T = \mathbf{F}/q$ è la forza totale specifica agente sulle cariche.

Si integri la (16.3) lungo la linea media γ del circuito, così come determinata ad un fissato istante t , e orientata nel verso della corrente i . Tenendo conto che $\mathbf{J}$ è parallelo al versore $\hat{\mathbf{t}}$ della linea orientata γ , si ottiene:

$$\oint_\gamma \frac{J}{\sigma} dl = E_\gamma \quad (16.4)$$

dove

$$E_\gamma = \oint_\gamma \mathbf{E}_T \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \oint_\gamma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \oint_\gamma \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl + \oint_\gamma \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl \quad (16.5)$$

definisce la f.e.m. lungo la linea γ

La velocità delle cariche, nel tratto mobile, è data dalla somma della velocità di diffusione $\mathbf{v}_d$ all'interno del conduttore, in relazione alla densità di corrente $\mathbf{J}$, e della velocità di trascinamento $\mathbf{v}_\gamma$ nel tratto mobile. Poiché $\mathbf{v}_d$ e $\hat{\mathbf{t}}$ sono paralleli risulta:

$$\mathbf{v}_d \times \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{t}} = 0 \quad (16.6)$$

Tenendo conto della (16.2), la forza elettromotrice E_γ è data dalla equazione seguente

$$E_\gamma = - \iint_{S_\gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \oint_\gamma \mathbf{v}_\gamma \times \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl. \quad (16.7)$$

Nella (16.7) si riconoscono due componenti della forza elettromotrice indotta. La prima viene denominata *trasformatorica* e descrive gli effetti induttivi tra circuiti fissi, su cui si basa il funzionamento dei trasformatori, mentre la seconda viene denominata *mozionale* o *dinamica*.

Nella semplice geometria di riferimento la (16.7) può essere riscritta nel modo seguente

$$E_\gamma = - \frac{dB_n}{dt} (wx) - v_x B_n w = - \frac{d}{dt} (B_n wx) = - \frac{d\phi_\gamma}{dt} \quad (16.8)$$

dove B_n è la componente di $\mathbf{B}$ nella direzione $\hat{\mathbf{n}}$ e v_x è la componente di $\mathbf{v}_\gamma$ nella direzione x .

E' questo il classico enunciato della legge di Faraday-Neumann, che lega, nel caso generale, la forza elettromotrice indotta lungo una linea chiusa orientata γ al flusso di $\mathbf{B}$ con essa concatenato:

$$E_\gamma = - \frac{d\phi_\gamma}{dt} \quad (16.9)$$

La dimostrazione dell'equivalenza della (16.7) e della (16.9) può essere sviluppata nel caso generale con strumenti di analisi vettoriale che non si ritiene, in queste note, necessario approfondire.

L'analisi del circuito in esame si completa osservando che il primo membro della (16.5) si riduce con facili passaggi, tenendo conto che la conducibilità è finita nel solo tratto (c):

$$\oint_\gamma \frac{J}{\sigma} dl = i \int_{\gamma_c} \frac{dl}{\sigma S} = Ri \quad (16.10)$$

Il circuito si comporta quindi come un generatore di f.e.m. pari a:

$$E_\gamma = -v_x B_n w = v_x B_y w. \quad (16.11)$$

Per maggiore chiarezza si sono riferite le componenti dei vettori al sistema di riferimento cartesiano illustrato in fig. 16.1.

La potenza assorbita dal resistore è:

$$P_j = (Ri)i = E_\gamma i \quad (16.12)$$

ed è uguale alla potenza generata dal generatore di f.e.m. Sembrerebbe, a questo punto che, in assenza di attrito, sarebbe disponibile, senza alcun lavoro meccanico, una potenza elettrica.

Il bilancio va invece interpretato correttamente, tenendo conto della potenza meccanica richiesta per mantenere in movimento la barretta percorsa da corrente i .

Nel paragrafo precedente si è visto che un tratto elementare $d\mathbf{l}$ di un conduttore filiforme immerso in un campo d'induzione magnetica $\mathbf{B}$ e percorso da corrente i è sede di una forza elementare

$$d\mathbf{F} = i d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \quad (16.13)$$

In particolare, l'ipotesi che il sistema sia in equilibrio alla velocità $\mathbf{v}$, impone che

$$\mathbf{F}_{em} + \mathbf{F}_m = \mathbf{0}$$

Nel caso in esame, quindi, si può facilmente verificare che, se si assume la corrente orientata nel verso di E_γ , la forza esercitata da $\mathbf{B}$ è tale da opporsi al moto e vale $\mathbf{F}_{em} = -i\omega B_y \hat{\mathbf{i}}_x$; essa sviluppa una potenza meccanica $P_{em} = \mathbf{F}_{em} \cdot \mathbf{v}_\gamma = -i\omega B_y v_x$.

Per mantenere in equilibrio il sistema alla velocità costante v_x è necessario applicare una forza meccanica uguale ed opposta (e quindi nella direzione del moto) che sviluppa una potenza positiva pari a

$$P_m = F_{mx} v_x. \quad (16.14)$$

Si noti che

$$P_m = i\omega B_y v_x = E_\gamma i. \quad (16.15)$$

Volendo riassumere si ha che la potenza elettrica specifica indotta può essere espressa in funzione della forza elettrica mozionale specifica $\mathbf{E}_v = \mathbf{v}_\gamma \times \mathbf{B}$ come:

$$p_g = \mathbf{E}_v \cdot \mathbf{J} \quad (16.16)$$

mentre la forza specifica associata al campo magnetico sviluppa una potenza per unità di volume pari a:

$$p_{em} = (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}_\gamma. \quad (16.17)$$

Si verifica immediatamente, permutando uno dei due prodotti misti che

$$p_g + p_{em} = 0. \quad (16.18)$$

Nel caso in esame $p_g > 0$ e $p_{em} < 0$, e ovviamente anche $P_g > 0$, $P_{em} < 0$ (funzionamento da generatore).

Il dispositivo è reversibile. Si supponga infatti di sostituire al tratto (c) un tratto di circuito di resistenza anch'essa trascurabile, ma caratterizzato dalla presenza di un campo elettromotore $\mathbf{E}_m$. La forza totale che ora agisce sulle cariche nel tratto (c) è modificata dalla presenza di $\mathbf{E}_m$ e risulta nulla, a causa dell'ipotesi di conducibilità infinita.

Procedendo come nel caso precedente, si ha questa volta

$$E_\gamma + E_g = 0 \quad (16.19)$$

dove

$$E_g = \int_{\gamma_c} \mathbf{E}_m \cdot \hat{\mathbf{t}} d\ell \quad (16.20)$$

è la forza elettromotrice del generatore.

L'equilibrio meccanico impone anche in questo caso che se è presente una forza meccanica che si oppone al moto, viene richiamata nel circuito una corrente tale che la potenza elettrica P generata dal campo elettromotore $P = E_g i = -E_\gamma i = -P_g$ uguaglia la potenza meccanica P_m spesa per mantenere il sistema in moto a velocità v_γ . Infatti, in questo caso, è necessario che la forza di origine elettromagnetica equilibri la forza meccanica, mettendo in gioco la potenza

$$P_{em} = F_{emx} v_x = iw B_y v_x,$$

da cui si ha che $P_m = F_m v_x = -P_{em} = -iw B_y v_x = -E_\gamma i$ dove l'ultimo passaggio è stato ricavato tenendo conto della (16.11)¹.

Risulta in questo caso $P_g < 0$ e $P_{em} > 0$.

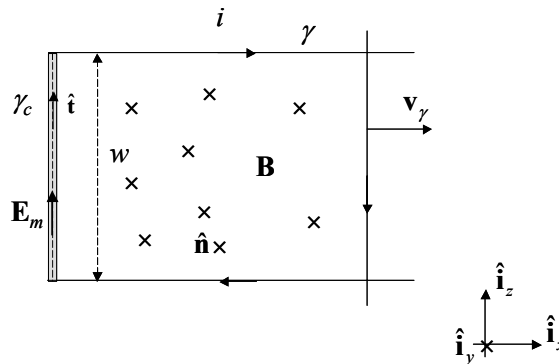


Figura 16.2. La configurazione di riferimento. Si noti che il verso di alcuni riferimenti è cambiato.

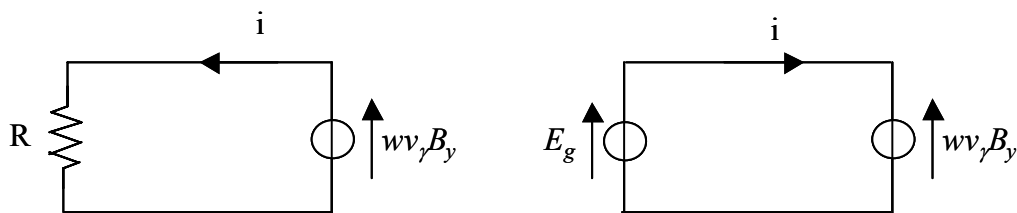


Figura 16.3. Sinistra: il circuito equivalente associato alle (16.4), (16.10) e (16.11). Destra: il circuito equivalente associato alle (16.19), (16.20) e (16.11).

17. Cenni sulle correnti indotte in un conduttore massiccio

Si consideri un nucleo cilindrico di materiale conduttore di raggio a ed altezza h , investito da un campo magnetico uniforme di direzione assiale, variabile nel tempo con legge sinusoidale. Si scelga un sistema di riferimento cilindrico con l'asse z coincidente con l'asse del conduttore. Il campo d'induzione magnetica ha solo la componente B_z .

$$B_z = B_M \cos \omega t \quad (17.1)$$

¹ Si noti che con i riferimenti di fig. 16.2, risulta $B_n = B_y$ nella (16.11).

Applicando la (16.2) ad una generica circonferenza di raggio r centrata sull'asse del conduttore, la f.e.m. indotta dalla variazione di flusso con essa concatenato può essere facilmente espressa dalla

$$E_{\gamma}(r,t) = \int_0^{2\pi} E_{\theta} r d\theta = \pi r^2 B_M \omega \sin \omega t \quad (17.2)$$

Il campo elettrico indotto associato a questa forza elettromotrice, può essere ritenuto indipendente da θ . Dalla (17.2) si ottiene allora

$$E_{\theta} = \frac{r B_M \omega \sin \omega t}{2} \quad (17.3)$$

La densità di corrente indotta all'ascissa r è pertanto:

$$J_{\theta} = \sigma E_{\theta} = \sigma \frac{r B_M \omega \sin \omega t}{2} \quad (17.4)$$

La potenza ohmica istantanea assorbita nel volume del conduttore si ottiene integrando nel volume la potenza specifica $J_{\theta}(r,t)E_{\theta}(r,t)$:

$$\begin{aligned} p(t) &= \iiint_V J_{\theta}(r,t) E_{\theta}(r,t) d\tau = \sigma \left(\frac{B_M \omega \sin \omega t}{2} \right)^2 2\pi h \int_0^a r^3 dr \\ &= \sigma \left(\frac{B_M \omega \sin \omega t}{2} \right)^2 (\pi h a^4 / 2) = \sigma \left(\frac{B_M \omega \sin \omega t}{2} \right)^2 \frac{h S^2}{2\pi} \end{aligned} \quad (17.5)$$

dove S è l'area della sezione trasversa del materiale.

La potenza media in un periodo, per unità di volume, tenendo conto che il volume del cilindro è pari a $V = h\pi a^2$ è allora espressa come

$$P = \frac{1}{2} \frac{\sigma B_M^2 \omega^2 a^2}{8} . \quad (17.6)$$