



Università degli Studi di Cassino

Note su forza ed energia del campo elettromagnetico

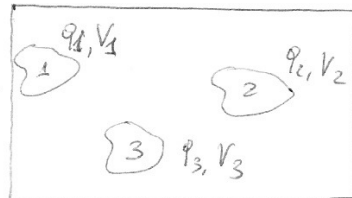
prof. Antonio Maffucci

maffucci@unicas.it

1. ENERGIA ASSOCIATA AD UN SISTEMA ELETTROSTATICO

Si consideri il sistema in figura, costituito da N conduttori nel vuoto aventi carica q_i e potenziale V_i .

Analizziamo dapprima un singolo conduttore con carica q ; il lavoro infinitesimo necessario a portare la carica dq da potenziale 0 a V è dato da:



$$(1) \quad dW = V dq = C V dV \quad (\text{supposto che } dq = C dV)$$

quindi l'energia fornita a tale sistema nel processo di carica è data da:

$$(2) \quad W_k = \int_0^V C V dV = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} V Q$$

L'energia accumulata dal sistema di N cariche q_k poste a potenziale V_k sarà dunque esprimibile come

$$(3) \quad W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N V_k Q_k$$

Il risultato (3) è generale: si può mostrare che ad un qualsiasi insieme N di cariche puntiformi q_k a potenziale V_k è associata l'energia (3). Si osserva che il potenziale V_k è il potenziale nella posizione della carica k dovuto alle cariche (escluse k) del sistema. Se la carica è distribuita in modo continuo si ha:

$$(4) \quad W_e = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} V \rho d\tau \quad (\text{dove } \Omega \text{ è il volume occupato da } \rho)$$

Per esprimere la W_e in funzione dei campi, si consideri il tratto di tubo di flusso del campo $\vec{E}$ disegnato in figura.

Consideriamo un volume elementare $d\tau = dS \cdot dl$.

Per la (3) l'energia elettrostatica immagazzinata in $d\tau$ è data da

$$W_{e\tau} = \frac{1}{2} dV dQ$$

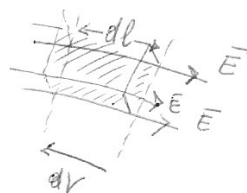
Essendo $dV = E dl$ e $dQ = D dS$ si ha $W_{e\tau} = \frac{1}{2} E D dl dS = \frac{1}{2} E D d\tau$

quindi l'energia associata ad un volume Ω sarà esprimibile come:

$$(5) \quad W_{e\Omega} = \iiint_{\Omega} W_{e\tau} d\tau = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} E D d\tau = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \epsilon E^2 d\tau = \iiint_{\Omega} \frac{D^2}{2\epsilon} d\tau$$

dalla (5) si conclude che è possibile introdurre una DENSITA' VOLUMICA DI ENERGIA ELETTROSTATICA

$$(6) \quad w_e = \frac{1}{2} E D = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon}$$



Si osserva che i risultati (5) e (6) valgono per dielettrici lineari, isotropi e omogenei, cioè per mezzi per i quali $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$. In generale si avrà

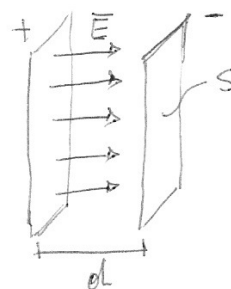
$$(7) \quad W_e = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D}$$

ESEMPIO: CAPACITA' DI UN CONDENSATORE PIANO

Consideriamo il condensatore piano in figura. Si può calcolare il valore di C a partire dal calcolo dell'energia immagazzinata:

$$\frac{1}{2} eV^2 = W_e = \iiint_{\Omega} \frac{\epsilon E^2}{2} d\tau = \frac{\epsilon E^2}{2} dS = \frac{\epsilon (V/d)^2}{2} dS$$

$$C = \frac{2W_e}{V^2} = \frac{\epsilon \int \frac{V^2}{d^2} dS}{V^2} = \frac{\epsilon S}{d}$$

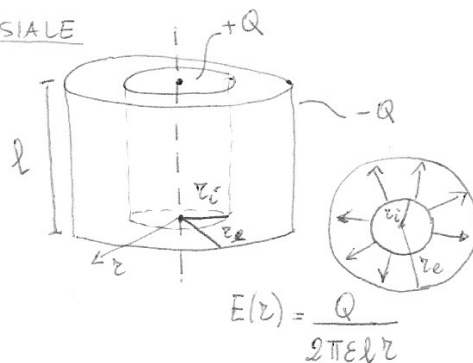


ESEMPIO: CAPACITA' PER UNITA' DI LUNGHEZZA DI UN CAVO COASSIALE

$$W_e = \frac{1}{2} eV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \iiint_{\Omega} \frac{\epsilon E^2}{2} d\tau = \frac{\epsilon}{2} \int_0^l dz \int_{r_i}^{r_e} E^2 2\pi r dr$$

$$\frac{1}{C} = \frac{2W_e}{Q^2} = \frac{\epsilon l 2\pi}{Q^2} \int_{r_i}^{r_e} \frac{Q^2}{4\pi^2 \epsilon^2 l^2 r^2} r dr = \frac{1}{2\pi \epsilon l} \int_{r_i}^{r_e} \frac{dz}{r} = \frac{\ln(r_e/r_i)}{2\pi \epsilon l}$$

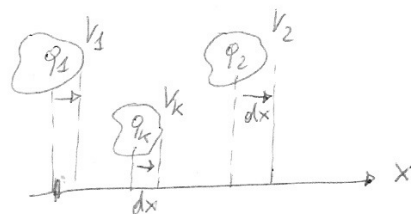
$$C' = \frac{C}{l} = \frac{2\pi \epsilon}{\ln(r_e/r_i)}$$



2. FORZA ELETTROSTATICA

Consideriamo un sistema di N conduttori nel vuoto, ciascuno di essi aventi carica q_k e potenziale V_k . Supponiamo che i conduttori possano traslare rigidamente in una certa direzione $\hat{x}$; il lavoro necessario per operare una variazione di posizione elementare dx , a parità di carica e in condizioni di isolamento sarà proprio pari alla variazione infinitesimale di energia:

$$(8) \quad \delta \mathcal{L} = dW_e = \left. \frac{dW_e}{dx} \right|_{P=P_0}$$



Nelle (8) la derivata è calcolata nella posizione iniziale ($P=P_0$) dei conduttori. Se supponiamo che il processo evolva attraverso "stati di equilibrio", istante per istante la risultante delle forze ^{elettrostatiche} agenti sul k -mo conduttore è equilibrata dalle forze esterne responsabili della trasformazione. Pertanto la forza elettrica

agente sul conduttore k -mo e' data (da modulo) da:

$$(8) \quad F_k = - \left. \frac{dW_e}{dx} \right|_{x=x_{k0}} \quad \text{dove } x_{k0} \text{ e' la posizione iniziale del } k\text{-mo conduttore.}$$

Se i conduttori vengono traslati in una direzione arbitraria le derivate che compaiono nelle (8) e nelle (9) saranno derivate parziali.

Osserviamo che se la traslazione avviene a potenziali costanti, nel bilancio energetico (8) occorre considerare che parte del lavoro fornito dall'esterno serve a variare la carica q_k delle quantit' dq_k mentre la lesione V_k costante.

ESEMPIO: FORZA TRA LE ARMATURE DI UN CONDENSATORE PIANO

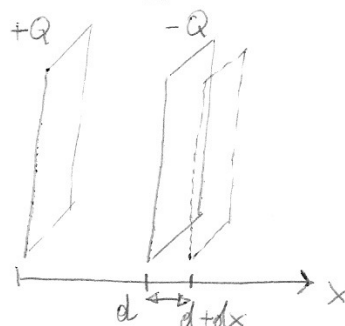
Consideriamo un condensatore piano in cui sia possibile variare la distanza tra le armature. Per uno spostamento dx si avra' una variazione dC della capacita' e quindi dell'energia W_e .

Mantenendo costante la carica Q si avra' dalle (8):

$$F_x = - \left. \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} C(x) V^2 \right) \right|_{x=d} = - \left. \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(x)} \right) \right|_{x=d} = + \frac{Q^2}{2C^2(d)} \left. \frac{dC}{dx} \right|_{x=d}$$

poiche' $C(x) = \frac{\epsilon S}{x}$

$$F_x = \frac{Q^2}{2\epsilon^2 S^2} d^2 \left(- \frac{\epsilon S}{d^2} \right) = - \frac{Q^2}{2\epsilon S}$$



quindi tra le armature si ~~esercitano~~ instaura una forza di attrazione.

Se supponiamo di mantenere costante la tensione V occorre considerare nel bilancio energetico l'energia fornita dall'esterno per far variare la carica di $dQ = d(CV)$: detta dW_g tale energia si ha che

$$\delta L + dW_g + dW_e = 0 \quad \Rightarrow \quad F_x dx = - \frac{dW_e}{dx} + dW_g$$

quindi

$$F_x = - \frac{dW_e}{dx} + \frac{dW_g}{dx}$$

tenuto conto che $dW_g = V dQ = V d(CV) = V^2 dC$, si ha:

$$F_x = - \left. \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} C(x) V^2 \right) \right|_{x=d} + \left. \frac{V^2 dC(x)}{dx} \right|_{x=d} = \frac{1}{2} \left. \frac{V^2 dC(x)}{dx} \right|_{x=d} = \frac{1}{2} \frac{V^2 \epsilon S}{dx(x)} \bigg|_{x=d} = - \frac{1}{2} \frac{V^2 \epsilon S}{d^2}$$

Osserviamo che si ha

$$(10) \quad F_x = - \left. \frac{dW_e(x)}{dx} \right|_{Q \text{ cost}} = \left. \frac{dW_e(x)}{dx} \right|_{V \text{ cost}}$$

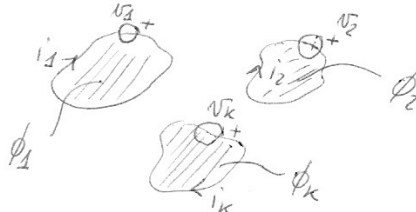
3. ENERGIA ASSOCIATA AD UN SISTEMA DI CORRENTI

pag. 4

Consideriamo un sistema di N correnti nel vuoto o in un mezzo lineare; ciascuno dei circuiti sia alimentato da un generatore di f.e.m. v_k , percorso da corrente i_k e concatenato col flusso ϕ_k :

Una variazione del flusso concatenato ϕ_k fa nascere una f.e.m. nel circuito k -mo:

$$e_k = - \frac{d\phi_k}{dt}$$



Il bilancio di tensioni sul circuito k -mo impone che:

$$(11) \quad v_k + e_k = R_k i_k = v_k - \frac{d\phi_k}{dt} \quad \text{essendo } R_k \text{ la resistenza del conduttore } k\text{-mo}$$

moltiplicando m.e.m. per i_k si ottiene il bilancio di potenza:

$$v_k i_k = R_k i_k^2 + i_k \frac{d\phi_k}{dt}$$

Il bilancio di energia nell'intervallo infinitesimo è fornito dalla relazione precedente, moltiplicando per dt :

$$(12) \quad v_k i_k dt = R_k i_k^2 dt + i_k d\phi_k$$

Il 1° membro è l'energia dW_g fornita dai generatori, che viene in parte dissipata dai resistori, in parte immagazzinata sotto forma di energia del campo magnetico:

$$(13) \quad dW_{mk} = i_k d\phi_k \Rightarrow W_{mk} = \int_0^{i_k} i_k d\phi_k = \int_0^{i_k} i_k d(L_k i_k) = \int_0^{i_k} i_k L_k di_k = \frac{1}{2} L_k i_k^2$$

Ragionando come nel caso elettrostatico si conclude che l'energia magnetica immagazzinata dal circuito k -mo per portarsi da corrente 0 a corrente i_k è:

$$(14) \quad W_{mk} = \frac{1}{2} i_k \phi_k$$

e quindi l'energia magnetica totale sarà:

$$(15) \quad W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N i_k \phi_k$$

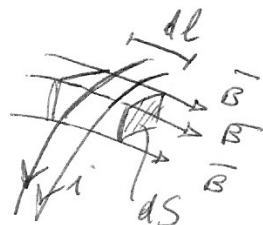
Ragionando come nel caso elettrostatico e considerando un ~~da B~~, si può ricavare l'energia per unità di volume -

Essendo $di = H dl$, $d\phi = B dS$, $d\tau = dl dS \Rightarrow W_m d\tau = \frac{1}{2} H B d\tau$

$$(16) \quad W_m = \iiint_V \frac{1}{2} H B d\tau = \iiint_V \frac{1}{2} \mu H^2 d\tau = \iiint_V \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} d\tau$$

$$(17) \quad W_m = \frac{1}{2} H B = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$

volumetto elementare come in figura



La relazione (17) esprime la densità di energia di magnetizzazione per unità di volume, e si generalizza come

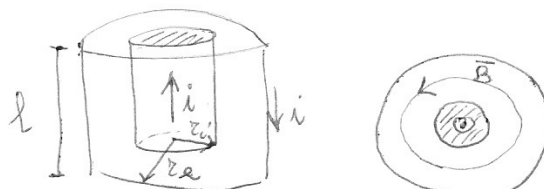
$$(18) \quad w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

ESEMPIO: INDUTTANZA PER UNITÀ DI LUNGHEZZA DI UN COASSIALE

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \iiint_{\Omega} \frac{B^2}{2\mu} d\tau = \frac{1}{2\mu} \int_0^l dl \int_{r_i}^{r_e} B^2 2\pi r dr$$

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{l}{\mu I^2} \int_{r_i}^{r_e} \frac{\mu^2 I^2}{4\pi^2 r^2} 2\pi r dr =$$

$$= \frac{l\mu}{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} \frac{dr}{r} = \frac{l\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right) \Rightarrow L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)$$



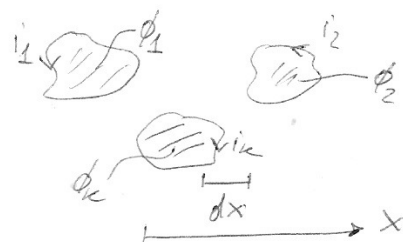
$$B(r) = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

4. FORZE AGENTI SU UN SISTEMA DI CORRENTI

Propagando come nel caso elettrostatico, le forze magnetiche che agiscono su un sistema di correnti si possono valutare andando a seguire un bilancio energetico relativo alla variazione infinitesimale di posizione dei circuiti.

Supposto che tale variazione avvenga lungo x , la forza che agisce sul k -mo circuito è data da:

$$(19) \quad F_k = - \left. \frac{dW_m}{dx} \right|_{\substack{x=x_0 \\ \text{funz. cost.}}} = \left. \frac{dW_m}{dx} \right|_{\substack{x=x_0 \\ \text{con. costate}}}$$



ESEMPIO: FORZA SUL NUCLEO DI UN SOLENOIDE

Consideriamo il solenoide in figura, nel quale il nucleo è inserito solo fino ad una lunghezza x .

Dal punto di vista elettrico la $L = L_1 + L_2$, dove:

$$L_1 = \mu \frac{N^2 S}{x} = \mu \frac{S}{x} \left(\frac{N}{l} x \right)^2 = \frac{\mu S N^2}{l^2} x, \quad L_2 = \mu_0 \frac{S}{l-x} N^2 = \mu_0 \frac{S}{l-x} \left(\frac{N}{l} (l-x) \right)^2 = \frac{\mu_0 S N^2}{l^2} (l-x)$$

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{S N^2}{l^2} [\mu x + \mu_0 (l-x)] I^2$$

$$F_x = \left. \frac{dW_m}{dx} \right|_{I \text{ cost.}} = \frac{1}{2} \frac{S N^2}{l^2} [\mu - \mu_0] I^2 > 0$$

quindi il nucleo sarà attratto all'interno.

