

Capitolo 4

Campionamento e ricostruzione

Sommario. In questo capitolo vengono richiamati brevemente i risultati fondamentali (teorema di Shannon e sue conseguenze) sul campionamento e la ricostruzione di segnali. Tali operazioni vengono caratterizzate in termini di spettro di Fourier.

4.1 Spettro di Fourier di un segnale

Definizione 4.1 Lo *spettro (trasformata) di Fourier* di un segnale $f(t)$ (integrabile in valore assoluto sull'insieme dei reali) è una funzione $F(j\omega) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Si noti che per segnali tali che $f(t) = 0 \quad \forall t < 0$, lo spettro $F(j\omega)$ coincide con la trasformata di Laplace $F(s)$ del segnale valutata sull'asse immaginario, i.e. per $s = j\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Sotto ipotesi opportune, la trasformata di Fourier determina univocamente il segnale, e risulta

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.1)$$

In questo caso, $f(t)$ è detto *antitrasformata di Fourier* di $F(j\omega)$.

Lo spettro $F(j\omega)$ si presta ad un'interpretazione intuitiva come generalizzazione della serie di Fourier per segnali periodici. Scomponendo $F(j\omega)$ in modulo e fase, dalla (4.1) si ottiene

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)| e^{j(\omega t + \arg[F(j\omega)])} d\omega \quad (4.2)$$

dove

$$e^{j(\omega t + \arg[F(j\omega)])} = \cos(\omega t + \arg[F(j\omega)]) + j \sin(\omega t + \arg[F(j\omega)]) \quad (4.3)$$

Se si suppone che $f(t)$ sia un segnale reale, la sua parte immaginaria è ovviamente zero e allora

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)| \cos(\omega t + \arg[F(j\omega)]) d\omega \quad (4.4)$$

Il segnale $f(t)$ risulta quindi dalla sommatoria integrale rispetto a ω di sinusoidi infinitesime di pulsazione ω ed ampiezza $|F(j\omega)| d\omega$. Il modulo dello spettro di Fourier, $|F(j\omega)|$, può quindi essere interpretato come densità di ampiezza (rispetto a ω) del continuo di sinusoidi che compongono $f(t)$ ed è detto *contenuto frequenziale* o spettro di ampiezza di $f(t)$ (figura 4.1).

4.2 Spettro del segnale campionato

Si consideri la sequenza $f_k = f(kT)$ che risulta dal campionamento con periodo T di un segnale continuo $f(t)$ nullo per $t < 0$, ed il segnale a modulazione impulsiva $f^*(t)$ equivalente a f_k . Si ha il seguente risultato.

Teorema 4.1 Tra la trasformata di Laplace $F(s)$ di un segnale $f(t)$ nullo per $t < 0$ e la trasformata di Laplace $F^*(s)$ di $f^*(t)$ sussiste la relazione

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(s - jk\omega_s) \quad ; \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T} \quad (4.5)$$

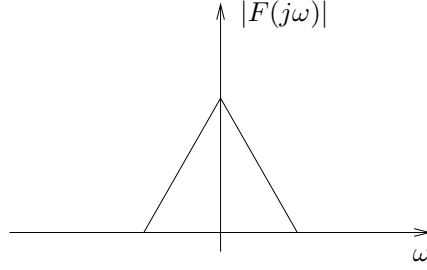


Figura 4.1: Spettro di ampiezza di un segnale $f(t)$

Proof: Sviluppando il segnale periodico $\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$ in serie complessa di Fourier si ottiene

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} e^{jk \frac{2\pi}{T} t} \quad (4.6)$$

pertanto

$$f^*(t) = f(t)\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} f(t) e^{jk \frac{2\pi}{T} t} \quad (4.7)$$

e dunque, applicando la proprietà di moltiplicazione per esponenziale della trasformata di Laplace

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(s - jk \frac{2\pi}{T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(s - jk\omega_s) \quad (4.8)$$

In base al risultato precedente, poichè $f^*(t)$ è nullo per $t < 0$, lo spettro di $f^*(t)$ è dato da

$$F^*(j\omega) = F^*(s)|_{s=j\omega} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F[j(\omega - k\omega_s)] \quad (4.9)$$

Si noti come l'andamento dello spettro del segnale $f^*(t)$ sia costituito da infinite repliche (*alias*) dello spettro del segnale originale $f(t)$ spaziate tra loro della pulsazione di campionamento ω_s e scalate di un fattore $1/T$ (figura 4.2).

4.3 Modello del ricostruttore ideale e teorema di Shannon

Si consideri un segnale $f(t)$ a banda limitata, il cui spettro di ampiezza sia cioè nullo per $|\omega| > |\omega_f|$ dove ω_f è un dato valore (figura 4.3). Data la sequenza $f_k = f(kT)$ di campioni di $f(t)$, si considera il problema di ricostruire, se possibile, il segnale originale $f(t)$ a partire da f_k .

Elaboriamo innanzitutto un modello concettuale di questa operazione impiegando l'equivalente a modulazione impulsiva del segnale campionato. Tenendo presente la forma dello spettro del segnale impulsivo $f^*(t)$ che rappresenta f_k , si osserva che lo spettro di $f(t)$ può essere ricostituito a partire da quello di $f^*(t)$ mediante un'operazione ideale di filtraggio passa-basso che (a parte un fattore d'ampiezza T) elimini il contenuto frequenziale di $f^*(t)$ esterno alla pulsazione

$$\omega_N = \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T} \quad \text{pulsazione di Nyquist} \quad (4.10)$$

Tale operazione equivale ad elaborare $f^*(t)$ attraverso un filtro la cui risposta in frequenza sia quella indicata in figura 4.4.

Si osserva facilmente che l'operazione sopra descritta può dare due esiti diversi a seconda della relazione che esiste tra la pulsazione di taglio ω_N del filtro e la banda ω_f del segnale $f(t)$. In particolare,

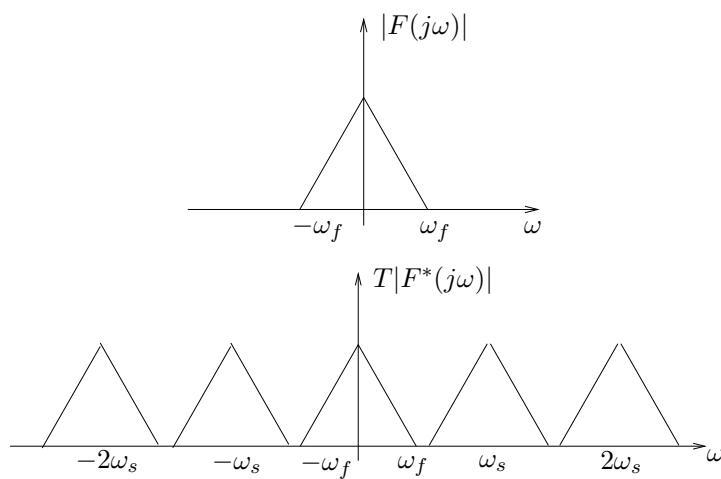


Figura 4.2: Spettro di ampiezza di un segnale $f(t)$ e spettro di ampiezza del segnale campionato equivalente $f^*(t)$

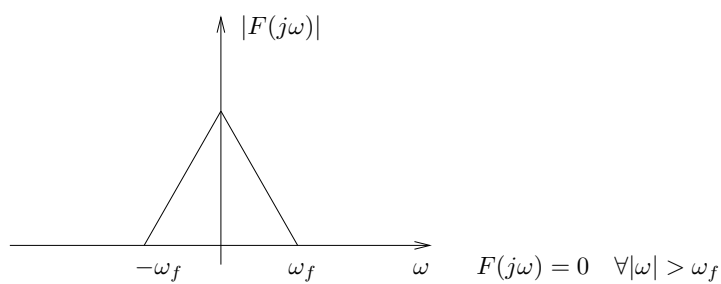


Figura 4.3: Segnale a banda limitata

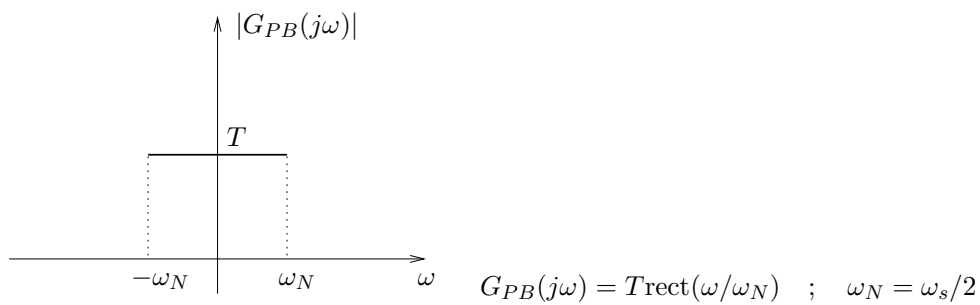
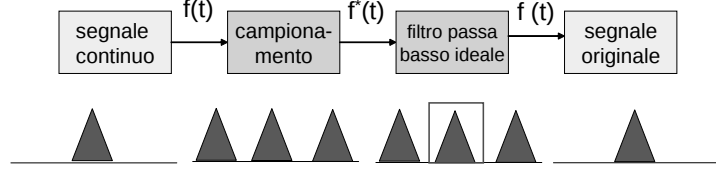
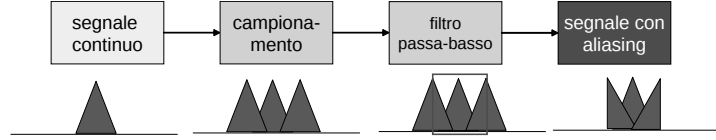


Figura 4.4: Filtro passa-basso ideale

- Se $\omega_N > \omega_f$, il filtro rivela lo spettro corretto del segnale originale



- Se $\omega_N < \omega_f$, il filtro isola lo spettro del segnale originale sovrapposto a componenti spurie dovute alle repliche



Sotto la condizione $\omega_N > \omega_f$ il segnale $f(t)$ può essere quindi ottenuto applicando al segnale $f^*(t)$ un filtro la cui risposta in frequenza $G_{PB}(j\omega)$ vale T per $-\omega_N \leq \omega \leq \omega_N$ e zero altrove. Questo risultato è alla base del noto

Teorema 4.2 (di Shannon) Dato un segnale $f(t)$ a banda limitata ω_f , i.e.

$$F(j\omega) = 0 \quad \forall |\omega| > \omega_f \quad (4.11)$$

esso è ricostruibile a partire dalla sequenza di campioni $f_k = f(kT)$ se e solo se risulta

$$\omega_f < \omega_N. \quad (4.12)$$

In tal caso, il segnale $f(t)$ è dato da

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \frac{\sin(\omega_N(t - kT))}{\omega_N(t - kT)} \quad (4.13)$$

Proof: Poiché, sotto le ipotesi fatte, lo spettro $F(j\omega)$ è pari allo spettro $F^*(j\omega)$ filtrato per un passa basso ideale che taglia a ω_N [$G_{PB}(j\omega) = T \text{rect}(\omega/\omega_N)$], il segnale ricostruito $f(t)$ sarà dato dalla convoluzione di $f^*(t)$ con la risposta impulsiva del filtro passa basso, la quale vale

$$g_{PB}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{PB}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin(\omega_N t)}{\omega_N t} \quad -\infty < t < +\infty \quad (4.14)$$

Dunque

$$f(t) = g_{PB}(t) * f^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{PB}(t - \tau) f^*(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega_N(t - \tau))}{\omega_N(t - \tau)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \delta(\tau - kT) d\tau \quad (4.15)$$

ovvero

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega_N(t - \tau))}{\omega_N(t - \tau)} \delta(\tau - kT) d\tau \quad (4.16)$$

e tenendo presente le proprietà di $\delta(t)$ rispetto all'integrale

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \frac{\sin(\omega_N(t - kT))}{\omega_N(t - kT)}. \quad (4.17)$$

Osservazione 4.1 L'espressione (4.13) del segnale $f(t)$ ricostruito in base ai suoi campioni $f_k = f(kT)$ mette in evidenza la non causalità dell'operazione di ricostruzione secondo il teorema di Shannon. Infatti, si nota facilmente che per ogni t_0 , il valore di $f(t_0)$ è funzione di *tutti* i campioni $f(kT)$ per k che va da 0 a $+\infty$. Evidentemente, qualunque sia t_0 esiste sempre k tale che $kT > t_0$, per cui il valore di $f(t_0)$ dipende da campioni del segnale relativi ad istanti futuri rispetto a t_0 . Questo rende la formula di ricostruzione di Shannon non applicabile in contesti, quali i sistemi di controllo, che siano soggetti al principio di causalità, dove cioè ci sia la necessità di calcolare *in linea*, ossia conoscendo ad ogni istante solo i campioni già acquisiti, il segnale ricostruito. D'altra parte, il teorema di Shannon fornisce comunque una condizione necessaria per la ricostruibilità del segnale a partire dal suo campionamento: se le ipotesi del teorema non sono soddisfatte, il segnale non è ricostruibile nemmeno in condizioni ideali.

4.3.1 Aliasing e filtro anti-aliasing

Campionare un segnale $f(t)$ con un periodo T per cui non siano soddisfatte le ipotesi del teorema di Shannon costituisce un errore irreversibile, nel senso che dai campioni f_k che si ottengono non c'è alcun modo di ricostituire successivamente il segnale originale. Questa condizione è detta *aliasing* ed è, per quanto detto, una situazione da prevenire a livello di acquisizione dei campioni.

Al fine di evitare fenomeni di aliasing, di solito dovuti al campionamento di rumore ad alta frequenza sovrapposto al segnale d'interesse, si introduce un filtro passa-basso (analogico) a monte del campionatore (figura 4.5). Il filtro anti-aliasing deve tagliare significativamente tutto il contenuto frequenziale a

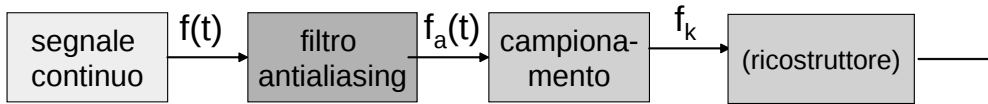
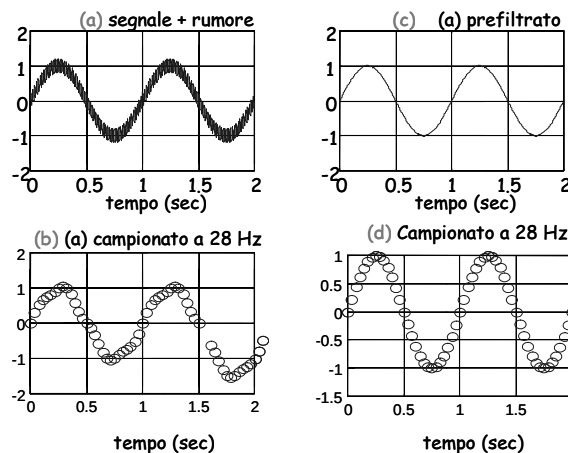


Figura 4.5: Filtro anti-aliasing

pulsazioni superiori a ω_N , ovvero tutte le componenti del segnale che verrebbero campionate in condizioni di aliasing. Naturalmente, se il segnale utile, senza cioè rumore sovrapposto, ha componenti a pulsazione maggiore di ω_N , significa che è stato scelto in modo errato il periodo di campionamento (e non il filtro). Il filtro anti-aliasing non può essere un filtro ideale, dunque sono necessari particolari accorgimenti che verranno esposti in seguito.

Esempio 4.1 Campionamento di una sinusoide a 1 Hz affetta da rumore a 60 Hz

$$f_s = 28 \text{ Hz} \quad (4.18)$$



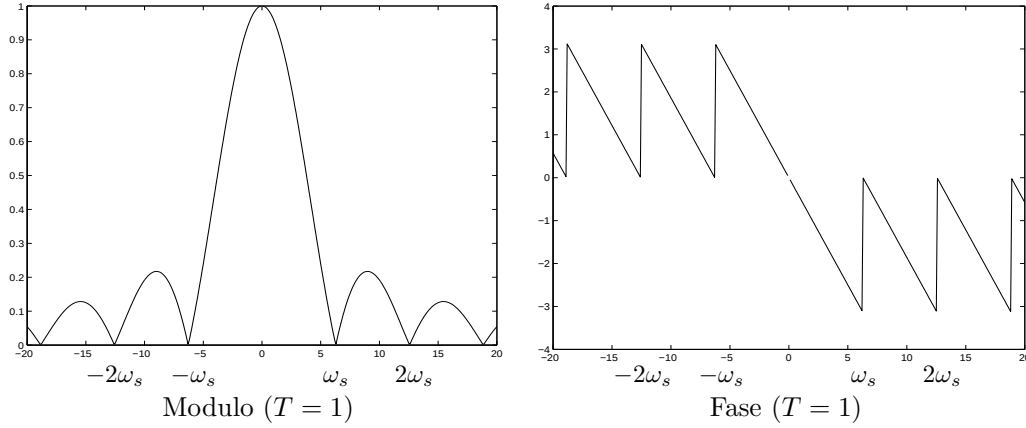


Figura 4.6: Risposta in frequenza dello ZOH

(a),(b) Non filtrato

(c),(d) Filtrato a 3.2 Hz

Dall'esempio precedente risulta evidente che, qualora il campionamento di un segnale rumoroso avvenga in condizioni di aliasing, il segnale ricostruito presenta, nella banda del segnale utile (la cosiddetta *banda base*), componenti spurie che non sono caratteristiche né del segnale né del disturbo.

4.4 Ricostruzione causale

Nella formula di ricostruzione ideale di Shannon, l'espressione del segnale ricostruito può essere vista come ciò che si ottiene come risultato dell'applicazione di un filtro passa-basso ideale al segnale impulsivo $f^*(t)$ che rappresenta $f_k = f(kT)$. La risposta in frequenza di tale filtro è data da

$$G_{PB}(j\omega) = T \text{rect}(\omega/\omega_N) \quad (4.19)$$

Si noti che il filtro passa basso ideale ha fase nulla a tutte le pulsazioni.

Abbiamo già osservato che la ricostruzione che si ottiene è non causale. In alcune applicazioni di telecomunicazioni risulta accettabile fornire il segnale ricostruito con un certo ritardo, in modo da poter basare la ricostruzione del segnale ad un dato istante anche su un certo numero di campioni acquisiti ad istanti successivi. Questo approccio è evidentemente impraticabile nei sistemi di controllo in retroazione, poiché l'introduzione di ritardi nell'anello è dannosa per la stabilità del sistema.

Il mantenitore di ordine zero (ZOH) comunemente usato nei sistemi di controllo, pur essendo un filtro causale, non realizza evidentemente la formula di Shannon, per cui ricostruisce, anche in assenza di aliasing, solo un'approssimazione del segnale che si otterrebbe secondo Shannon conoscendo ad ogni istante i campioni futuri. Poiché, come noto, la ricostruzione con ZOH equivale al filtraggio di $f^*(t)$ attraverso $G_{ZOH}(s)$, la differenza tra ricostruzione ideale e con ZOH si può interpretare confrontando la risposta in frequenza di $G_{ZOH}(s)$ con quella del passa-basso ideale. Risulta

$$G_{ZOH}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{-j\omega T/2} \quad (4.20)$$

quindi

$$|G_{ZOH}(j\omega)| = \left| \frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega T}{2}} \right| \quad \arg G_{ZOH}(j\omega) = -\frac{\omega T}{2} \quad (4.21)$$

Si osserva che lo ZOH, contrariamente al passa-basso ideale, introduce guadagno non costante nella banda tra $\omega = 0$ e $\omega = \omega_N$ e non nullo al di fuori, oltre ad uno sfasamento pari a quello di un elemento di ritardo $\tau = T/2$ nella banda tra $\omega = 0$ e $\omega = \omega_s$ (figure 4.6, 4.7).

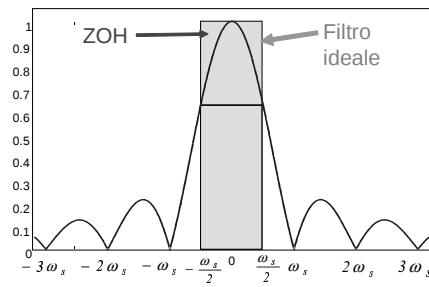


Figura 4.7: Risposta in frequenza dello ZOH e del ricostruttore ideale