Lucidi del corso di

Controllo digitale

Corso di Laurea triennale in Ingegneria dell'Automazione

Università di Siena, Facoltà di Ingegneria

Parte III

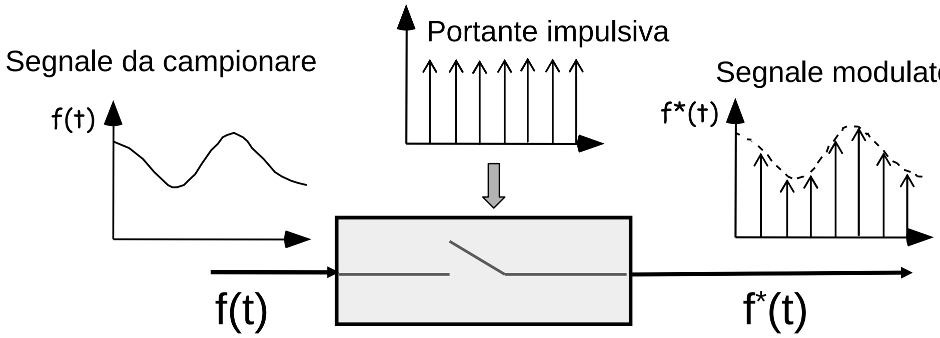
Sistemi a dati campionati

Gianni Bianchini

MODELLISTICA DEL CAMPIONAMENTO

Obiettivo. Determinare un formalismo unico, nel dominio della trasformata di Laplace, per analizzare le proprietà dei segnali campionati e dei sistemi dinamici che integrano componenti a tempo continuo (es. impianto), componenti a tempo discreto (es. controllore) e dispositivi di interfacciamento (campionatore, ZOH)

Conversione A/D. Modello del campionamento a modulazione impulsiva



- Modulando un segnale $f(t)$ con un treno di impulsi di Dirac attivi agli istanti $t = kT$, si ottiene un segnale impulsivo $f^*(t)$

$$f^*(t) = f(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT)$$

  $f^*(t)$ non va considerato un segnale fisico ma solo una rappresentazione alternativa della sequenza $f(kT)$, infatti dipende biunivocamente da questa.

- Trasformata di Laplace di $f^*(t)$

$$F^*(s) = \int_0^{+\infty} f^*(t)e^{-st}dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} f(kT)\delta(t-kT)e^{-st} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}$$

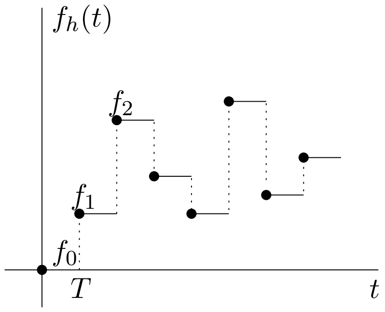
- Relazione con la trasformata zeta del segnale campionato $f_k = f(kT)$

$$F^*(s) = F(z)|_{z=e^{sT}} = \mathcal{Z}[f_k]|_{z=e^{sT}}$$

  La trasformata di Laplace $F^*(s)$ di $f^*(t)$ e la trasformata zeta $F(z)$ del segnale campionato f_k si ottengono l'una dall'altra ponendo $z = e^{sT}$

MODELLISTICA DEL CAMPIONAMENTO

Conversione D/A. Modello del ricostruttore di ordine zero (ZOH)



$$f_h(t) = f_k, \quad t \in [kT, (k+1)T)$$

- Considerando i segnali campionati con i loro equivalenti impulsivi, lo ZOH può essere visto come un sistema lineare che ad un impulso $\delta(t)$, che modella l'impulso fisico discreto δ_k, risponde con un segnale di valore unitario attivo nell'intervallo $[0, T)$, i.e. con il segnale

$$g_{ZOH}(t) = 1(t) - 1(t - T)$$

  e dunque la funzione di trasferimento (trasformata della risposta impulsiva) vale

$$G_{ZOH}(s) = \mathcal{L}[g_{ZOH}(t)] = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

- La trasformata di Laplace del segnale ricostruito da una sequenza $\{f_k\}$ vale allora

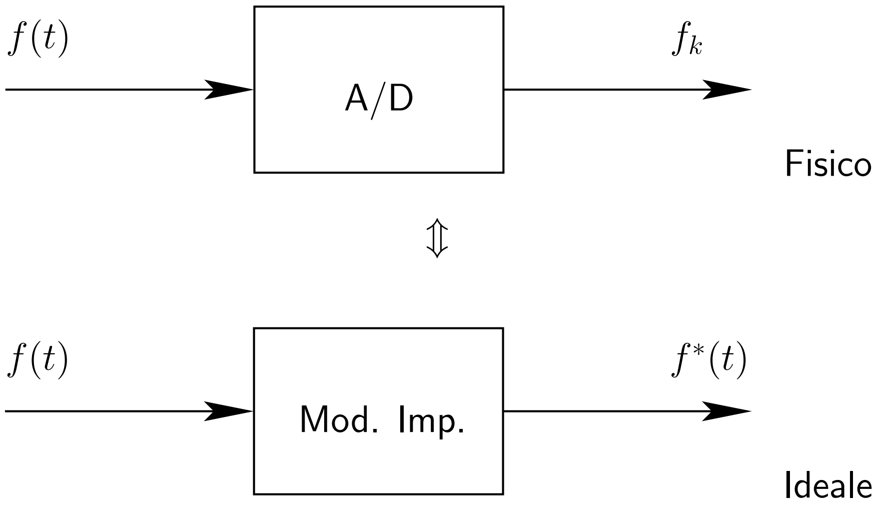
$$F_h(s) = G_{ZOH}(s) F^*(s)$$

  dove $F^*(s)$ è la trasformata di Laplace dell'equivalente impulsivo di f_k

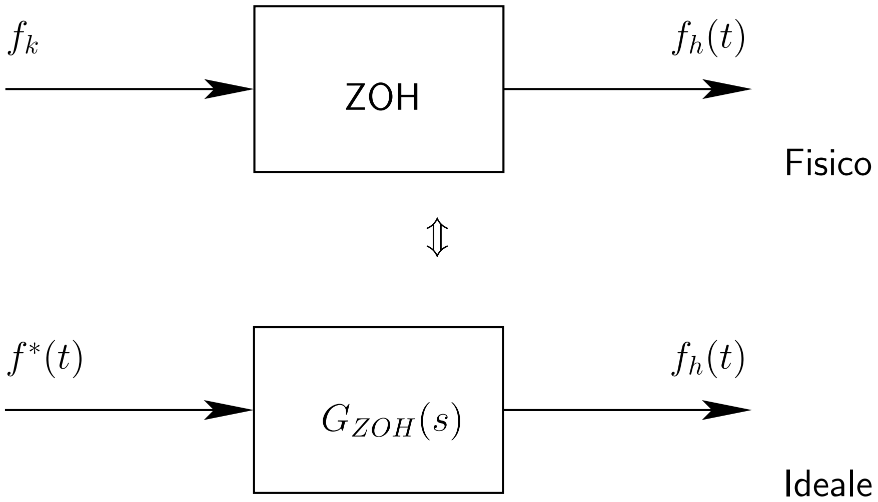
$$F^*(s) = F(z)|_{z=e^{sT}} = \mathcal{Z}[f_k]|_{z=e^{sT}}$$

MODELLISTICA DEL CAMPIONAMENTO

Conversione A/D (campionamento)



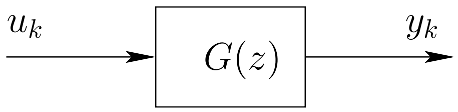
Conversione D/A (ZOH)



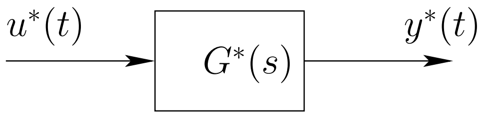
Importante. Ricordiamo che il segnale $f^*(t)$ non è un segnale fisico ma un segnale fittizio, introdotto allo scopo di ottenere un modello puramente a tempo continuo sia dell'operazione di campionamento (come modulazione impulsiva) sia dello ZOH (come funzione di trasferimento), che sono entrambe operazioni "ibride", ovvero che coinvolgono quantità sia continue sia discrete

MODELLISTICA DEL CAMPIONAMENTO

Funzioni di trasferimento TD. Modello di una f.d.t. a tempo discreto $G(z)$: determinare una f.d.t. a tempo continuo $G^*(s)$ in modo che la relazione $Y^*(s) = G^*(s)U^*(s)$ esprima $Y(z) = G(z)U(z)$



Fisico



Ideale

Sia $\{g_k\} = \mathcal{Z}^{-1}[G(z)]$ la risposta impulsiva di $G(z)$. Allora

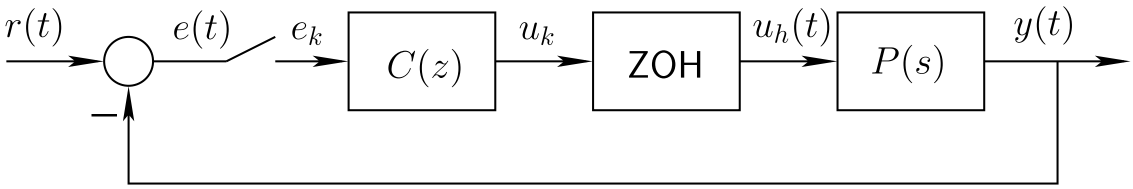
$$Y(z) = G(z)U(z) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{+\infty} y_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k z^{-k} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k z^{-k}$$

Ponendo $z = e^{Ts}$, si ottiene $Y^*(s) = G^*(s)U^*(s)$ dove

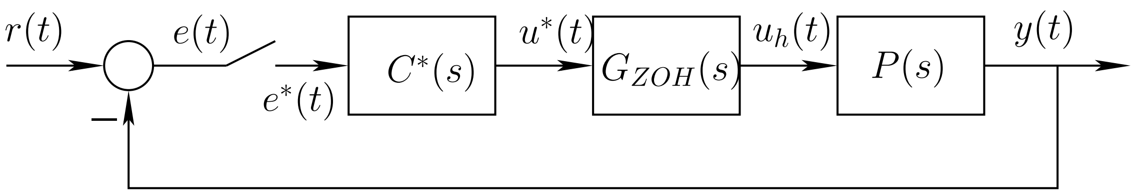
$$G^*(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k e^{-kTs}$$

pertanto $G^*(s)$ rappresenta $G(z)$ nel modello a modulazione impulsiva.

- Adesso è possibile rappresentare con il formalismo della trasformata di Laplace sistemi che integrano f.d.t. TC e TD, campionatori e ricostruttori



Fisico



Ideale

MODELLISTICA DEL CAMPIONAMENTO

Proprietà. La versione campionata y_k $(y^*(t))$ della convoluzione $y(t)$ tra un segnale continuo $g(t)$ ed un segnale impulsivo $u^*(t)$ dipende solo dai campioni $g_k = g(kT)$ di $g(t)$, e in particolare risulta

$$Y^*(s) = [G(s)U^*(s)]^* = G^*(s)U^*(s)$$

Infatti, essendo $u^*(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i \delta(t - iT)$, risulta

$$y(t) = g(t) * u^*(t) = \int_0^{\infty} g(t-\tau) \sum_{i=0}^{+\infty} u_i \delta(\tau - iT) d\tau = \sum_{i=0}^{+\infty} g(t - iT) u_i$$

e quindi

$$y_k = y(kT) = \sum_{i=0}^{\infty} g_{k-i} u_i$$

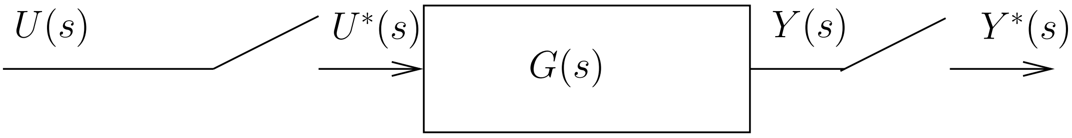
che dipende solo dai campioni di $g(t)$. Inoltre, introducendo le trasformate zeta dei rispettivi segnali, si ha $Y(z) = G(z)U(z)$ ovvero, ponendo $z = e^{sT}$,

$$Y^*(s) = G^*(s)U^*(s)$$

Osservazione. Il risultato precedente si traduce nel fatto che in un'espressione del tipo $[A(s)B^*(s)]^*$, che nel dominio di Laplace rappresenta il campionamento della convoluzione di $a(t)$ e $b^*(t)$, la quantità $B^*(s)$ può essere portata fuori dall'operazione di campionamento $[\cdot]^*$, i.e., $[A(s)B^*(s)]^* = A^*(s)B^*(s)$. Si noti bene che se $A(s)$ e $B(s)$ sono entrambi segnali continui, allora $[A(s)B(s)]^* \neq A^*(s)B^*(s)$!

SISTEMI A DATI CAMPIONATI

Esempio 1. Si consideri lo schema in figura

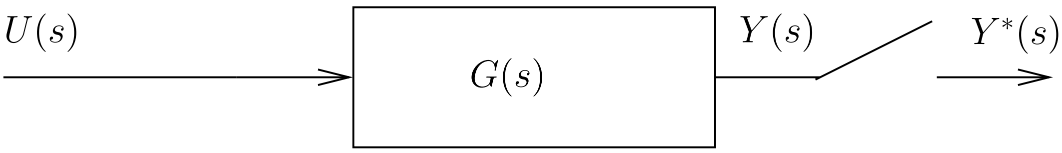


Poiché la risposta $y(t)$ è la convoluzione di $g(t)$ con $u^*(t)$, in base al risultato precedente si ha

$$Y^*(s) = [G(s)U^*(s)]^* = G^*(s)U^*(s)$$

o equivalentemente $Y(z) = G(z)U(z)$. In questo caso esiste quindi una funzione di trasferimento in z tra i campioni u_k di $u(t)$ e quelli y_k di $y(t)$.

Esempio 2. Si consideri adesso lo schema



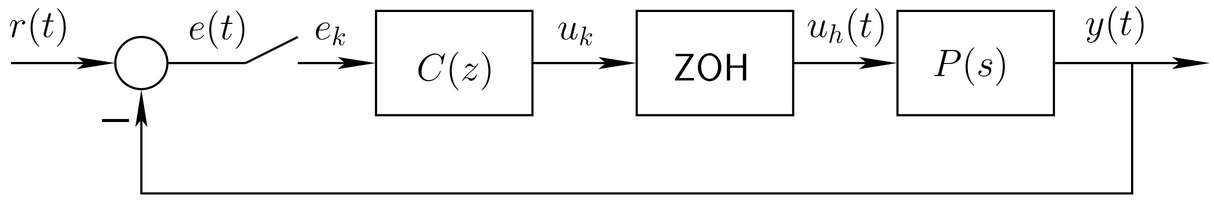
Per questo schema risulta

$$Y^*(s) = [G(s)U(s)]^* \quad \text{ovvero} \quad Y(z) = \mathcal{Z}[G(s)U(s)]$$

e non è possibile "smontare" l'espressione di $Y(z)$ in qualcosa che contenga $G(z)$ e $U(z)$. In altre parole i campioni dell'uscita dipendono *dall'intero andamento continuo* di $g(t)$ e $u(t)$ e non solo dai loro campioni come nel caso precedente.

In generale, in un sistema a dati campionati con ingressi continui è possibile definire una funzione di trasferimento tra l'ingresso e l'uscita campionati solo nel caso in cui siano solo i campioni dell'ingresso a determinare la risposta, ovvero solo quando l'ingresso attraversa un campionatore prima di essere elaborato da un qualunque blocco.

SISTEMI A DATI CAMPIONATI



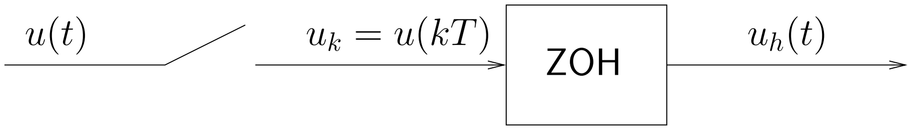
Problema. Dato un sistema di controllo digitale in retroazione o comunque un sistema interconnesso in cui sono presenti elementi a tempo discreto, elementi a tempo continuo e convertitori/mantenitori, si desidera

- Calcolare l'espressione della risposta in tutti i segnali del sistema, noti gli ingressi

- Calcolare, se possibile, le funzioni di trasferimento in z tra i segnali d'ingresso, campionati, ed i segnali di uscita, anch'essi campionati

N.B. In un sistema in cui siano presenti segnali a tempo continuo e segnali campionati, non è possibile in generale determinare la funzione di trasferimento tra eventuali segnali di ingresso a tempo continuo ed eventuali segnali di uscita a tempo continuo. Le relazioni che legano questi segnali sono infatti in genere tempo varianti e quindi non esprimibili come funzioni di trasferimento.

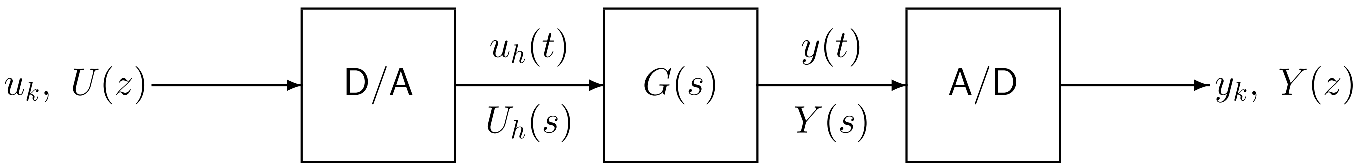
- Esempio

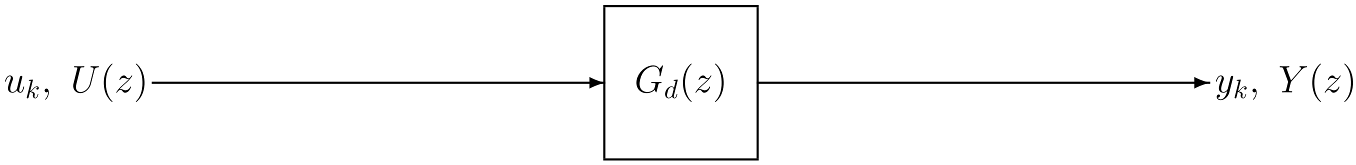


Dato un qualunque segnale $u(t)$ a cui il sistema fornisce la risposta $u_h(t)$, la risposta a $u(t-\delta)$ (con $\delta \neq mT$) non vale $u_h(t-\delta)$!

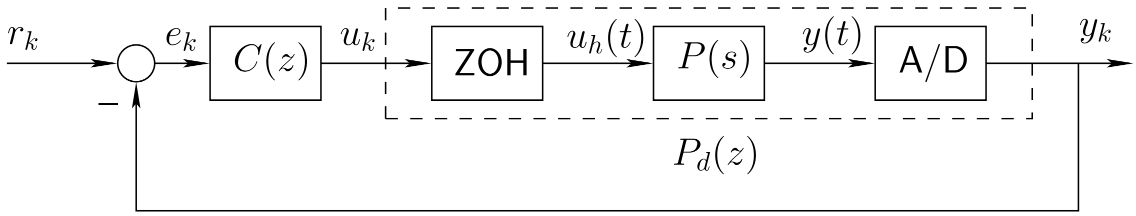
EQUIVALENTE CAMPIONATO CON ZOH

Obiettivo. Determinare il modello equivalente a tempo discreto di un sistema dinamico a tempo continuo $G(s)$ interfacciato con un certo dispositivo digitale D, i.e., un modello del sistema come viene "visto" dal dispositivo D. L'ingresso del sistema a tempo continuo è rappresentato dalla ricostruzione $u_h(t)$ (ad es. con ZOH) di un segnale di ingresso u_k fornito da D, mentre la corrispondente uscita $y(t)$ viene campionata nella successione y_k che viene elaborata da D.



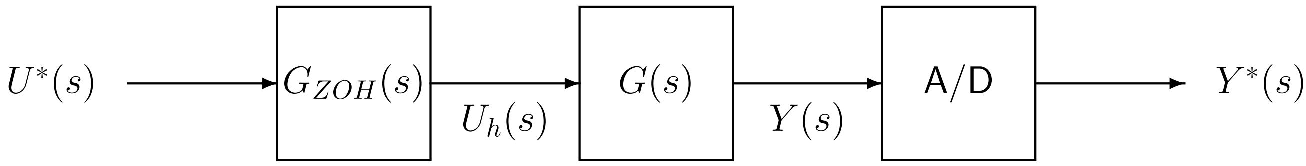


- Motivazione: determinare il modello equivalente a tempo discreto $P_d(z)$ di un impianto continuo $P(s)$ inserito in un sistema di controllo digitale, in modo da poter studiare il problema del controllo in un dominio puramente discreto



EQUIVALENTE CAMPIONATO CON ZOH

Rappresentazione equivalente



Si ha

$$Y(s) = G_{ZOH}(s)G(s)U^*(s)$$

$$\begin{aligned} Y^*(s) &= [G_{ZOH}(s)G(s)U^*(s)]^* = [G_{ZOH}(s)G(s)]^* \, U^*(s) \\ &= \left[(1-e^{-sT})\frac{G(s)}{s}\right]^* U^*(s) \end{aligned}$$

Poiché $\mathcal{L}^{-1}[1-e^{-sT}] = \delta(t) - \delta(t-T)$ (funzione impulsiva), il termine $1-e^{-sT}$ "esce" dall'operazione $[\cdot]^*$, dunque

$$Y^*(s) = (1-e^{-sT})\left[\frac{G(s)}{s}\right]^* U^*(s)$$

Passando alla trasformata zeta

$$Y(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] \, U(z)$$

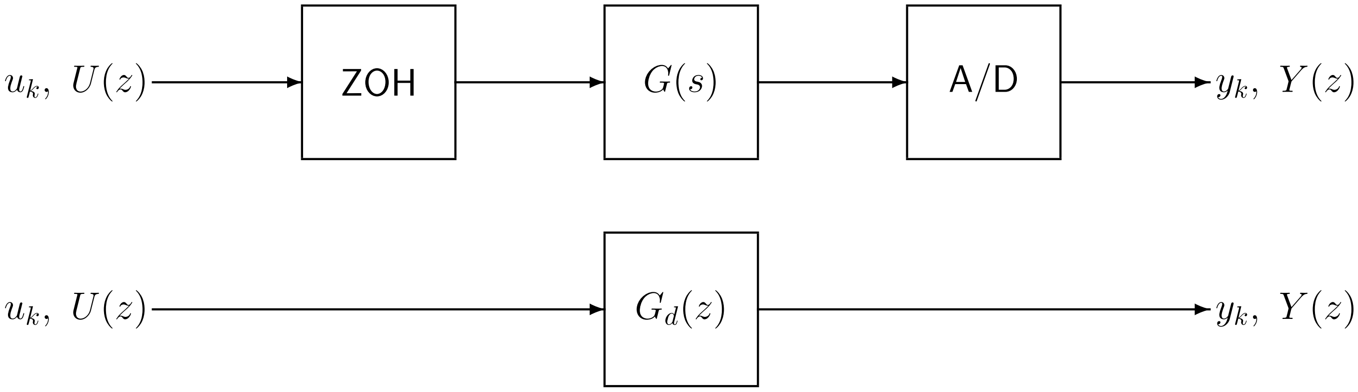
Dunque risulta definita la funzione di trasferimento

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G_d(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

- Il sistema descritto da $G_d(z)$ è detto *equivalente a dati campionati* (con ZOH) del sistema descritto da $G(s)$

- N.B. L'equivalente campionato, in generale, dipende dal tipo di mantenitore usato (si può ad esempio calcolare l'equivalente campionato con FOH, diverso da quello con ZOH)

EQUIVALENTE CAMPIONATO CON ZOH



Procedimento per il calcolo del modello equivalente a dati campionati con ZOH

1. Determinare l'antitrasformata di Laplace $\tilde{g}(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)/s]$

2. Determinare la trasformata zeta $\tilde{G}(z) = \mathcal{Z}[\tilde{g}_k] = \mathcal{Z}[\tilde{g}(kT)]$

3. Calcolare

$$G_d(z) = (1 - z^{-1})\tilde{G}(z)$$

- Esempi

$$G(s) = \frac{1}{s} \to \tilde{g}(t) = t\,1(t) \to \tilde{g}_k = kT\,1_k \to \tilde{G}(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} \to G_d(z) = \frac{T}{z-1}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2} \to \tilde{g}(t) = \frac{t^2}{2}\,1(t) \to \tilde{g}_k = \frac{(kT)^2}{2}\,1_k \to$$
$$\to \tilde{G}(z) = \frac{T^2}{2}\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \to G_d(z) = \frac{T^2}{2}\frac{(z+1)}{(z-1)^2}$$

EQUIVALENTE CAMPIONATO CON ZOH

- Caso di sistemi con ritardo

$$G(s) = e^{-\tau s}\, G'(s)$$

Il ritardo si può scomporre in

$$\tau = mT + \delta \quad ; \quad m \geq 0 \text{ intero, } 0 \leq \delta < T$$

- Calcolo del modello a dati campionati equivalente

$$\begin{aligned} G_d(z) &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] \\ &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G'(s)}{s}e^{-\tau s}\right] \\ &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\tilde{g}'(t-\tau)|_{t=kT}\right] \\ &= z^{-m-1}(1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\tilde{g}'(kT + (T-\delta))\ 1_k\right] \end{aligned}$$

dove $\tilde{g}'(t) = \mathcal{L}^{-1}[G'(s)/s]$

- Esempio

$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s^2} = \frac{e^{-mTs}e^{-\delta s}}{s^2} \qquad \left[\frac{G'(s)}{s} = \frac{1}{s^3}\right]$$

$$G_d(z) = z^{-m-1}(1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{(kT + (T-\delta))^2}{2}\ 1_k\right]$$

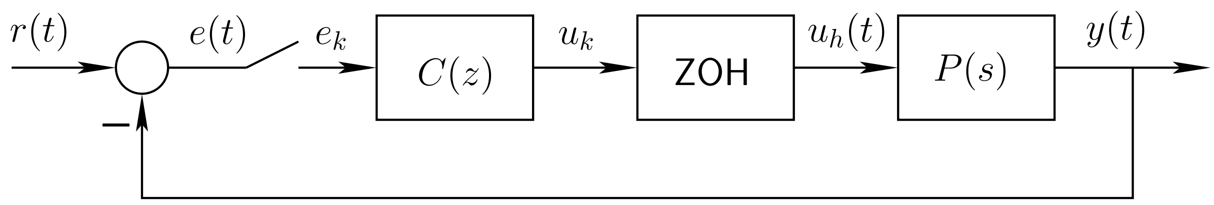
$$= z^{-m-1}(1 - z^{-1})\left\{\mathcal{Z}\left[\frac{(kT)^2}{2}\ 1_k\right] + (T-\delta)\mathcal{Z}[kT\ 1_k] + \frac{(T-\delta)^2}{2}\mathcal{Z}[1_k]\right\}$$

$$= z^{-m-1}(1 - z^{-1})\left\{\frac{T^2}{2}\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} + (T-\delta)\frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{(T-\delta)^2}{2}\frac{z}{z-1}\right\}$$

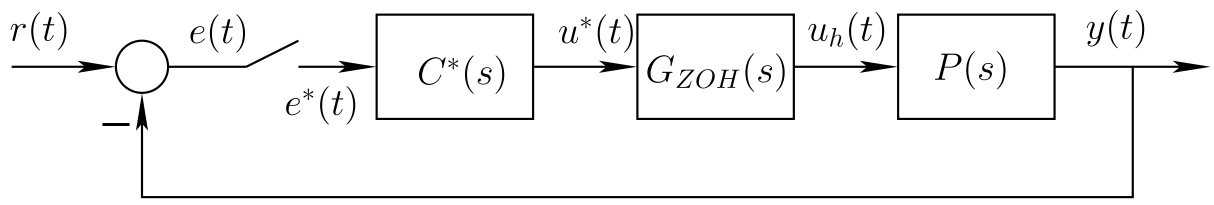
SCHEMI A BLOCCHI A DATI CAMPIONATI

Problema. Dato uno schema a blocchi a dati campionati, determinare la funzione di trasferimento tra ingresso ed uscita campionati (se esiste) o almeno l'espressione dell'uscita noto l'ingresso

- Esempio. Sistema di controllo digitale in retroazione



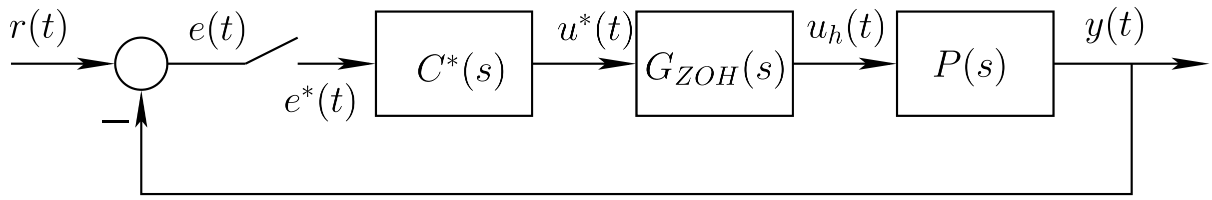
- Passaggio alla rappresentazione equivalente



- Calcolo della funzione di trasferimento tra i campioni del riferimento e dell'uscita: $W^*(s) = Y^*(s)/R^*(s)$

$$
\begin{array}{lcl}
E = R - Y & & E^* = R^* - Y^* \\
U^* = C^* E^* & \Rightarrow & U^* = C^* E^* \\
U_h = G_{ZOH} U^* & & U_h^* = U^* \\
Y = P U_h & & Y^* = [P U_h]^*
\end{array}
$$

SCHEMI A BLOCCHI A DATI CAMPIONATI



- Calcolo della funzione di trasferimento (segue)

$$Y^*(s) = [P(s)G_{ZOH}(s)U^*(s)]^* = \left[(1 - e^{-sT})U^*(s)\frac{P(s)}{s}\right]^*$$

$$\Downarrow$$

$$Y^*(s) = (1 - e^{-sT})\left[\frac{P(s)}{s}\right]^* U^*(s)$$

$$\Downarrow$$

$$Y^*(s) = (1 - e^{-sT})\left[\frac{P(s)}{s}\right]^* C^*(s)[R^*(s) - Y^*(s)]$$

$$\Downarrow$$

$$Y^*(s) = \frac{L^*(s)}{1 + L^*(s)}R^*(s)$$

dove

$$L^*(s) = (1 - e^{-sT})C^*(s)\left[\frac{P(s)}{s}\right]^*$$

- Nel dominio z

$$Y(z) = \frac{L(z)}{1 + L(z)}R(z)$$

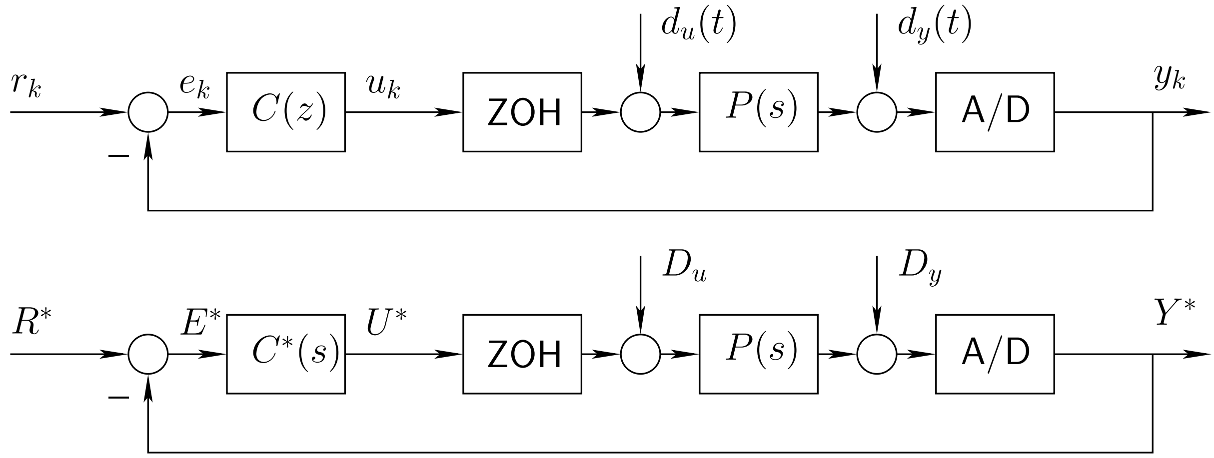
dove

$$L(z) = (1 - z^{-1})C(z)\mathcal{Z}\left[\frac{P(s)}{s}\right]$$

- $W(z) = Y(z)/R(z)$ si ottiene anche calcolando il modello discreto $P_d(z)$ dell'impianto (con ZOH) e chiudendo l'anello

SCHEMI A BLOCCHI A DATI CAMPIONATI

Esempio



Si consideri l'effetto di $d_u(t)$ e $d_y(t)$

- La risposta a $d_u(t)$ dipende dal segnale che si ottiene filtrando $d_u(t)$ attraverso $P(s)$ e poi campionando, ovvero da $[P(s)D_u(s)]^*$
- La risposta a $d_y(t)$ dipende dal solo campionamento di $d_y(t)$, ovvero da $D_y^*(s)$

Ci si attende che esista la funzione di trasferimento $Y^*(s)/D_y^*(s)$ $[Y(z)/D_y(z)]$ ma non quella $Y^*(s)/D_u^*(s)$.

Calcolo della risposta

$$Y^*(s) = \frac{[P(s)D_u(s)]^*}{1 + C^*(s)[G_{ZOH}(s)P(s)]^*} + \frac{1}{1 + C^*(s)[G_{ZOH}(s)P(s)]^*} D_y^*(s)$$

$$\Downarrow$$

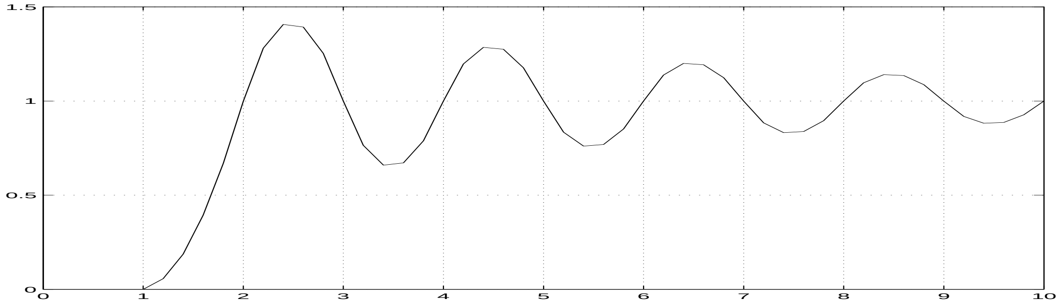
$$Y(z) = \frac{\mathcal{Z}[P(s)D_u(s)]}{1 + C(z)(1 - z^{-1})\mathcal{Z}[P(s)/s]} + \underbrace{\frac{1}{1 + C(z)(1 - z^{-1})\mathcal{Z}[P(s)/s]}}_{Y(z)/D_y(z)} D_y(z)$$

OSCILLAZIONI INTERPERIODO

- La f.d.t. $W(z)$ di un sistema di controllo digitale esprime la relazione tra i campioni del segnale di riferimento ed *i campioni* dell'uscita. Tuttavia il segnale che si ha interesse a controllare è l'uscita analogica $y(t)$, non quella campionata y_k. E l'uscita $y(t)$ in generale varia tra due istanti di campionamento successivi.
  - Le oscillazioni possono persistere anche quando la risposta negli istanti di campionamento va a regime
- Esempio ($T = 1\ s$)

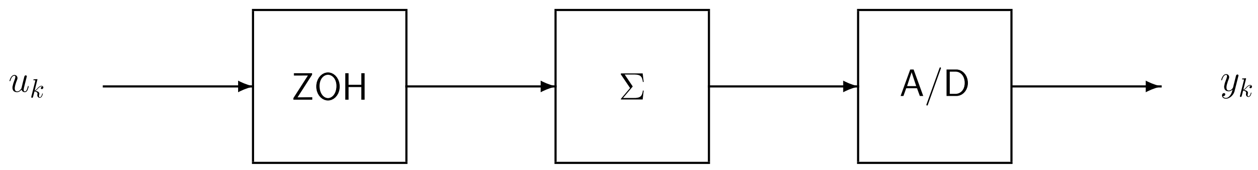
$$P(s) = \frac{e^{-s}}{1 + 8s + 15s^2}, \qquad C(z) = \frac{z^3 - 1.5353z^2 + 0.5866z}{0.028z^3 + 0.0234z^2 - 0.028z - 0.0234}$$

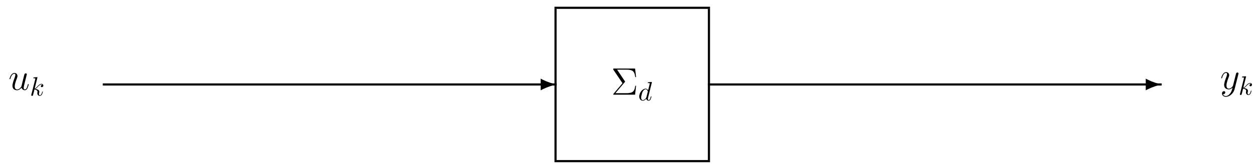
  - Il controllore è progettato in modo che la risposta campionata del sistema vada a regime dopo soli 2 istanti di campionamento (vedremo come si fa)
  - Andamento della risposta analogica



- Calcolo delle oscillazioni interperiodo
  - Simulazione mista tempo continuo/tempo discreto (Simulink)
  - Trasformata zeta modificata (Elaborato 2)
- È necessario tenere conto di questo fenomeno in fase di progetto, perché può alterare notevolmente le specifiche (ad es. la sovraelongazione)

EQUIVALENTE CAMPIONATO IN EQUAZIONI DI STATO





- Sistema lineare stazionario a tempo continuo in equazioni di stato

$$\Sigma \; : \; \begin{cases} \dot{x}(t) \;=\; Ax(t) \;+\; Bu(t) \\ y(t) \;=\; Cx(t) \;+\; Du(t) \end{cases}$$

- Risposta nell'intervallo $[kT, (k+1)T)$

$$\begin{cases} x((k+1)T) \;=\; e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)} \; B \; d\tau \; u_k \\ y(kT) \;=\; Cx(kT) \;+\; Du_k \end{cases}$$

N.B. Lo ZOH mantiene l'ingresso a $u(t) = u_h(t) = u_k$ in tutto l'intervallo

- Modello equivalente a tempo discreto con ZOH

$$\begin{cases} x_{k+1} \;=\; A_d x_k + B_d u_k \\ y_k \;=\; C_d x_k \;+\; D_d u_k \end{cases}$$

dove

$$A_d = e^{AT}; \qquad B_d = \int_0^T e^{A\sigma} d\sigma B; \qquad C_d = C; \qquad D_d = D$$

ALCUNE FUNZIONI SCILAB

- Equivalente campionato con ZOH e tempo di campionamento T I/S/O

```
sys=syslin('c',A,B,C,D);
sysd=dscr(sys,T);
```

- Equivalente campionato con ZOH e tempo di campionamento T I/O

```
sys=syslin('c',numc,denc);
sysd=ss2tf(dscr(sys,T));
```

N.B. `dscr()` restituisce sempre una rappresentazione I/S/O

- Equivalente campionato con ZOH di un sistema con ritardo `tau`

```
sys=dscrdel(sysc,tau,T)  // dscrdel si trova in cd.sci
```