Capitolo 6

Sintesi nel dominio a tempo discreto

Sommario. In questo capitolo vengono presentati i metodi di sintesi diretta di regolatori digitali ingresso-uscita.

6.1 Sintesi diretta nel discreto

Si consideri il sistema di controllo digitale in figura 6.1. I metodi di sintesi diretta a tempo discreto hanno come obiettivo il progetto di un controllore $C(z)$ tale che la funzione di trasferimento $W(z)$ fra i campioni del segnale di riferimento r_k e quelli del segnale di uscita y_k sia pari ad una funzione di trasferimento assegnata $W_0(z)$. Ciò consente di imporre un andamento desiderato alla risposta *campionata* y_k del sistema ad anello chiuso in corrispondenza al riferimento dato, in accordo alle specifiche statiche e di transitorio assegnate. Sia $P_d(z)$ l'equivalente campionato con ZOH dell'impianto $P(s)$, dato da

$$P_d(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{P(s)}{s}\right] \tag{6.1}$$

Si vuole determinare l'espressione del compensatore $C(z)$ in modo tale che la funzione di trasferimento ad anello chiuso

$$W(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} \tag{6.2}$$

sia pari ad una data $W_0(z)$ che soddisfa le specifiche.
Risulta

$$W(z) = \frac{C(z)P_d(z)}{1 + C(z)P_d(z)} \tag{6.3}$$

Da cui, imponendo $W(z) = W_0(z)$ e risolvendo rispetto a $C(z)$ si ottiene

$$C(z) = \frac{1}{P_d(z)}\frac{W_0(z)}{1 - W_0(z)} \tag{6.4}$$

Osservazione 6.1 Mediante questo semplice procedimento, viene impostata la funzione di trasferimento tra il segnale di riferimento r_k e l'uscita campionata y_k del sistema di controllo. Tuttavia, come più volte ricordato, ciò che si ha interesse a controllare è l'uscita fisica $y(t)$ dell'impianto analogico $P(s)$, per cui è necessario valutare quanto sia significativo nei confronti di questo problema l'imporre un andamento desiderato soltanto ai campioni. In particolare, l'uscita analogica non deve presentare comportamenti indesiderati, quali ad esempio le oscillazioni interperiodo, in corrispondenza del progetto effettuato.

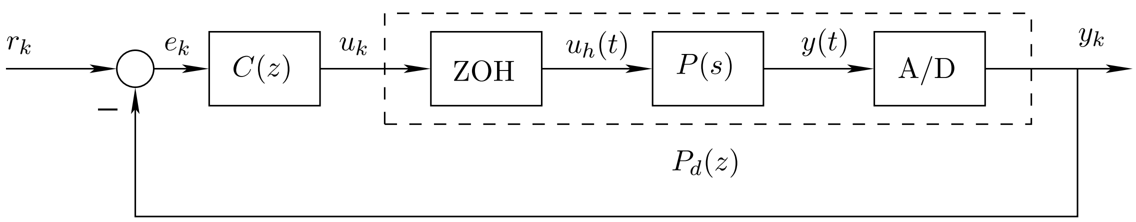


Figura 6.1:

Esempio 6.1 Si consideri l'impianto

$$P(s) = \frac{a}{s+a} \tag{6.5}$$

ed il suo equivalente campionato con ZOH

$$P_d(z) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{P(s)}{s}\right\} = \frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}} \tag{6.6}$$

Si scelga la funzione di trasferimento ad anello chiuso desiderata come

$$W_0(z) = \frac{1-\alpha}{z-\alpha} \tag{6.7}$$

con $|\alpha| < 1$. Tale $W_0(z)$ è stabile ed ha guadagno in continua $W_0(1) = 1$, pertanto assicura l'inseguimento senza errore a regime di un riferimento r_k a gradino. Calcolando il corrispondente $C(z)$ si ottiene

$$C(z) = \frac{z-e^{-aT}}{1-e^{-aT}}\frac{\dfrac{1-\alpha}{z-\alpha}}{1-\dfrac{1-\alpha}{z-\alpha}} \quad = \quad \frac{z-e^{-aT}}{1-e^{-aT}}\frac{1-\alpha}{z-1} \tag{6.8}$$

Il guadagno d'anello del sistema risulta

$$L(z) = \frac{1-\alpha}{z-1} \tag{6.9}$$

Osservazione 6.2 Si osservi la cancellazione polo-zero tra $C(z)$ e $P(z)$ nell'esempio precedente. Poiché l'espressione di $C(z)$ in (6.4) è proporzionale al reciproco di $P_d(z)$, il controllore tende a cancellare del tutto i poli e gli zeri di $P_d(z)$ sostituendoci i propri, in modo che la funzione di trasferimento $W(z)$ risulti quella assegnata.

Esempio 6.2 Considerando l'impianto dell'esempio precedente, ma la seguente funzione di trasferimento ad anello chiuso desiderata

$$W_0(z) = \frac{(1-\alpha)z}{z-\alpha}, \qquad |\alpha| < 1 \tag{6.10}$$

si ottiene il controllore

$$C(z) = \frac{(1-\alpha)z(z-e^{-aT})}{\alpha(1-e^{-aT})(z-1)} \tag{6.11}$$

che risulta avere più zeri che poli, e pertanto non è realizzabile in modo causale. Evidentemente il progetto non è accettabile.

6.1.1 Sintesi diretta: vincoli di progetto

Come risulta evidente dal precedente esempio, assegnata la funzione di trasferimento dell'impianto, la funzione di trasferimento ad anello chiuso desiderata non può essere scelta in modo totalmente arbitrario. È necessario infatti che il sistema di controllo che si ottiene soddisfi alcuni requisiti fondamentali, quali la causalità del controllore risultante e la stabilità interna dell'anello.

Causalità. Il regolatore $C(z)$ deve risultare causale, ovvero deve avere il grado del denominatore n^c maggiore o uguale a quello del numeratore m^c; tale condizione impone il seguente vincolo sulla scelta della funzione di trasferimento $W_0(z)$: *il grado relativo $n^w - m^w$ di $W_0(z) = N_W(z)/D_W(z)$ deve essere maggiore o uguale al grado relativo $n^p - m^p$ di $P_d(z) = N_P(z)/D_P(z)$*. Equivalentemente, la funzione di trasferimento ad anello chiuso desiderata non può presentare un ritardo ingresso-uscita inferiore a quello dell'equivalente campionato dell'impianto. Infatti dalla (6.4) risulta

$$C(z) = \frac{D_P(z)}{N_P(z)}\frac{N_W(z)}{D_W(z)-N_W(z)} \tag{6.12}$$

il cui grado relativo vale

$$n^c - m^c = m^p + n^w - (n^p + m^w) \tag{6.13}$$

che è positvo se e solo se risulta

$$n^w - m^w \geq n^p - m^p \tag{6.14}$$

Stabilità interna. Abbiamo osservato che il controllore $C(z)$ progettato per sintesi diretta tende a cancellare indiscriminatamente i poli e gli zeri di $P_d(z)$. Ciò compromette la stabilità interna dell'anello nel caso in cui tali cancellazioni corrispondano a poli o zeri a modulo maggiore o uguale a 1, anche se la $W_0(z)$ è scelta stabile. In base alla (6.4) il guadagno d'anello risulta

$$L(z) = C(z)P_d(z) = \frac{W_0(z)}{1 - W_0(z)} \tag{6.15}$$

Affinché poli o zeri instabili di $P_d(z)$ non vengano cancellati da $C(z)$, tali poli o zeri devono permanere nel prodotto $L(z) = C(z)P_d(z)$, pertanto

- *ogni zero di $P_d(z)$ con modulo ≥ 1 deve comparire tra gli zeri di $W_0(z)$* in modo che permanga come zero del prodotto $C(z)P_d(z)$;
- *ogni polo di $P_d(z)$ con modulo ≥ 1 deve comparire tra gli zeri di $1 - W_0(z)$* in modo che permanga come polo di $C(z)P_d(z)$.

In generale, la sintesi diretta effettua la cancellazione della dinamica dell'impianto per sostituirvene una nuova corrispondente alle specifiche, salvo le cancellazioni esplicitamente impedite come ora illustrato.

6.1.2 Sintesi diretta: specifiche statiche

Le specifiche statiche, o di precisione a regime, che tipicamente si impongono ad un sistema di controllo sono l'inseguimento senza errore di un segnale di riferimento a gradino ed eventualmente l'inseguimento con errore finito di un segnale di riferimento a rampa. Se il progetto viene fatto per sintesi diretta, è necessario valutare come si riflettono specifiche di questo tipo sulla forma e sui parametri della funzione di trasferimento ad anello chiuso $W_0(z)$, in modo da poterla scegliere opportunamente.

Errore di inseguimento al gradino nullo. La funzione di trasferimento tra riferimento e segnale errore vale

$$E(z)/R(z) = 1 - W_0(z) \tag{6.16}$$

e pertanto, se $W_0(z)$ è stabile, l'errore a regime al gradino unitario vale

$$e^0 = \lim_{z \to 1}(z-1)\frac{z}{z-1}(1 - W_0(z)) \tag{6.17}$$

Questo errore risulta allora nullo se e solo se

$$W_0(1) = 1 \tag{6.18}$$

Errore di inseguimento alla rampa finito. L'errore a regime ad un segnale a rampa unitaria $r_k = kT\ 1_k$ risulta pari a

$$e^1 = \lim_{z \to 1}(z-1)\frac{Tz}{(z-1)^2}(1 - W_0(z)) \tag{6.19}$$

$$\Downarrow \quad [\text{Applicare l'Hopital e ricordare che } \; W_0(1) = 1]$$

$$= -T\frac{dW_0(z)}{dz}\bigg|_{z=1} = -T\frac{1}{W_0(z)}\frac{dW_0(z)}{dz}\bigg|_{z=1} = -T\frac{d}{dz}\log W_0(z)\bigg|_{z=1} \tag{6.20}$$

Si voglia imporre $e^1 = e_0^1$, con e_0^1 assegnato. Se $W_0(z)$ è espressa nella forma poli-zeri

$$W_0(z) = K^w \frac{\prod_{j=1}^{m^w}(z - z_j^w)}{\prod_{i=1}^{n^w}(z - p_i^w)} \tag{6.21}$$

dalla (6.21) deve allora risultare

$$T\left[\sum_{i=1}^{n^w}\frac{1}{1 - p_i^w} - \sum_{j=1}^{m^w}\frac{1}{1 - z_j^w}\right] = e_0^1 \tag{6.22}$$

Si noti che la formula precedente mette in relazione l'errore di inseguimento desiderato alla rampa unitaria con i poli e gli zeri della funzione di trasferimento $W_0(z)$ ad anello chiuso (regola di Truxal).

6.1.3 *Scelta di* $W_0(z)$

In generale $W_0(z)$ è scelta della forma

$$W_0(z) = \frac{K^w(z - z_1^w)\dots(z - z_{m^w}^w)}{(z - p_1^w)\dots(z - p_{n^w}^w)}\frac{1}{z^N} = \frac{w_{m^w}z^{m^w} + \dots w_0}{(z - p_1^w)\dots(z - p_{n^w}^w)}\frac{1}{z^N} \tag{6.23}$$

in cui

- I poli p_i^w si fissano sulla base delle specifiche di transitorio, che verranno trattate nel seguito
- Gli m^w zeri z_j^w ed il guadagno K^w (o in alternativa i coefficienti w_j), in tutto $m^w + 1$ parametri, si calcolano imponendo le condizioni di stabilità interna e di precisione statica. Ovviamente, si sceglie $m^w + 1$ pari al numero di condizioni da imporre.
  Per la stabilità interna, è necessario che risulti
  * $W_0(z_j) = 0$ per ogni zero z_j di $P_d(z)$ con $|z_j| \geq 1$.
    Se la molteplicità dello zero z_j in $P_d(z)$ è $\mu_j > 1$, si deve imporre che anche $W_0(z)$ abbia uno zero in z_j della stessa molteplicità, per cui è necessario imporre
    $$\frac{d^r}{dz^r}W_0(z)|_{z=z_j} = 0, \quad \forall r = 1, \dots, \mu_j - 1$$
    Questo, come già visto, equivale ad introdurre come zeri di $W_0(z)$ gli zeri di $P_d(z)$ che non si vuole vengano cancellati da poli di $C(z)$. In seguito vedremo che, allo scopo di prevenire comportamenti indesiderati del sistema, può essere conveniente impedire la cancellazione di altri zeri di $P_d(z)$ oltre a quelli instabili.
  * $1 - W_0(p_i) = 0$ per ogni polo p_i di $P_d(z)$ con $|p_i| \geq 1$, ovvero per ogni polo di $P_d(z)$ che non si vuole venga cancellato da $C(z)$.
    Se la molteplicità di p_i è $\nu_i > 1$ si deve imporre anche
    $$\frac{d^r}{dz^r}[1 - W_0(z)]|_{z=p_i} = 0, \quad \forall r = 1, \dots, \nu_i - 1$$

  Relativamente alle specifiche di precisione a regime, si impone
  * $1 - W_0(1) = 0$ (condizione di errore a regime nullo al gradino). Si noti che questa condizione è analoga a quella che previene la cancellazione di un eventuale polo in $z = 1$ di $P_d(z)$, d'altra parte la specifica di errore nullo al gradino richiede che $L(z) = C(z)P_d(z)$ sia almeno di tipo 1, ovvero abbia almeno un polo in $z = 1$. Tale polo, se presente in $P_d(z)$, deve quindi essere preservato.
  * Condizione di errore finito alla rampa. Usando la formula di Truxal si ottiene una relazione tra i poli e gli zeri di $W_0(z)$.
- Gli N poli in $z = 0$ si aggiungono per rispettare la condizione di causalità del controllore. Poiché il grado relativo di $W_0(z)$ deve essere uguale o superiore a quello di $P_d(z)$ si sceglie N tale che
  $$N \geq (n^p - m^p) - (n^w - m^w)$$
  Si noti che questi poli aggiuntivi in $z = 0$ corrispondono a modi della risposta al gradino che vanno a zero in tempo finito e quindi, in generale, non alterano significativamente il transitorio .

Osservazione 6.3 Il calcolo degli zeri di $W_0(z)$ sulla base delle specifiche di stabilità interna e precisione statica deve essere effettuato considerando la $W_0(z)$ completa degli eventuali poli aggiuntivi in $z = 0$. Un errore comune è quello di aggiungerli *dopo* aver calcolato gli zeri senza tenerne conto. Si vede facilmente che questo altera alcune condizioni, come ad esempio il risultato dell'applicazione della regola di Truxal.

Osservazione 6.4 Il metodo di sintesi appena descritto porta con sé un risultato non banale. Dal momento che non si fa nessuna ipotesi sulle caratteristiche di $P_d(z)$, questo procedimento si configura come un metodo sistematico per stabilizzare in retroazione qualunque impianto.

6.1.4 Scelta di $W_0(z)$: transitorio deadbeat

Ci occupiamo adesso della scelta dei poli della funzione di trasferimento desiderata $W_0(z)$ sulla base delle specifiche di transitorio.
Abbiamo già osservato che un sistema a tempo discreto presenta un transitorio della risposta al gradino che si esaurisce in un numero finito di passi qualora la sua funzione di trasferimento abbia tutti i poli in $z = 0$. Questa caratteristica può essere sfruttata per il progetto di un controllore digitale tale che il transitorio della corrispondente risposta al gradino ad anello chiuso campionata y_k vada a regime in tempo finito.
Si consideri inizialmente il caso di un impianto $P_d(z)$ con poli e zeri tutti interni al cerchio unitario, o con al più un polo in $z = 1$. Si scelga

$$W_0(z) = \frac{1}{z^N} = z^{-N} \tag{6.24}$$

con N uguale o superiore al grado relativo $n^p - m^p$ di $P_d(z)$. Chiaramente, questa $W_0(z)$ non è altro che un ritardo discreto, pertanto la corrispondente uscita y_k insegue qualunque riferimento con un ritardo di N passi. In particolare quindi la risposta al gradino va a regime in N passi.
Naturalmente, l'errore a regime di inseguimento al gradino è nullo, si noti infatti che risulta $W_0(1) = 1$. Poiché l'impianto è stabile con zeri stabili, non sono richieste condizioni aggiuntive per la stabilità interna e pertanto la $W_0(z)$ può essere utilizzata direttamente per la sintesi. Il controllore corrispondente risulta

$$C(z) = \frac{1}{P_d(z)} \frac{1}{z^N - 1} \tag{6.25}$$

Osservazione 6.5 Si noti che $z = 1$ è uno zero di $1 - W_0(z)$ per qualunque N. Pertanto, anche se $P_d(z)$ ha un polo semplice in $z = 1$, $C(z)$ non lo cancella. A tale proposito, ricordiamo che $P_d(z)$ ha tanti poli in $z = 1$ quanti sono i poli in $s = 0$ dell'impianto analogico $P(s)$.

Esempio 6.3 (file Scilab `deadbeat.sce`) Si consideri l'impianto a tempo continuo

$$P(s) = \frac{e^{-0.2s}}{1 + s} \tag{6.26}$$

ed il suo equivalente a dati campionati con ZOH, $T = 0.2$ s

$$P_d(z) = \frac{0.1823}{z(z - 0.8187)} \tag{6.27}$$

L'impianto non ha poli o zeri instabili ed ha grado relativo 2. Pertanto, è possibile effettuare un progetto di tipo deadbeat scegliendo

$$W_0(z) = z^{-2} \tag{6.28}$$

Il controllore risultante vale

$$C(z) = \frac{z(z - 0.8187)}{0.1813(z^2 - 1)} \tag{6.29}$$

In figura 6.2 è riportata la simulazione della risposta al gradino del sistema ad anello chiuso nell'uscita (analogica) e nel segnale di comando.

Esempio 6.4 (file Scilab `interper.sce`, prima parte) Sia dato l'impianto

$$P(s) = \frac{e^{-s}}{1 + 8s + 15s^2} \tag{6.30}$$

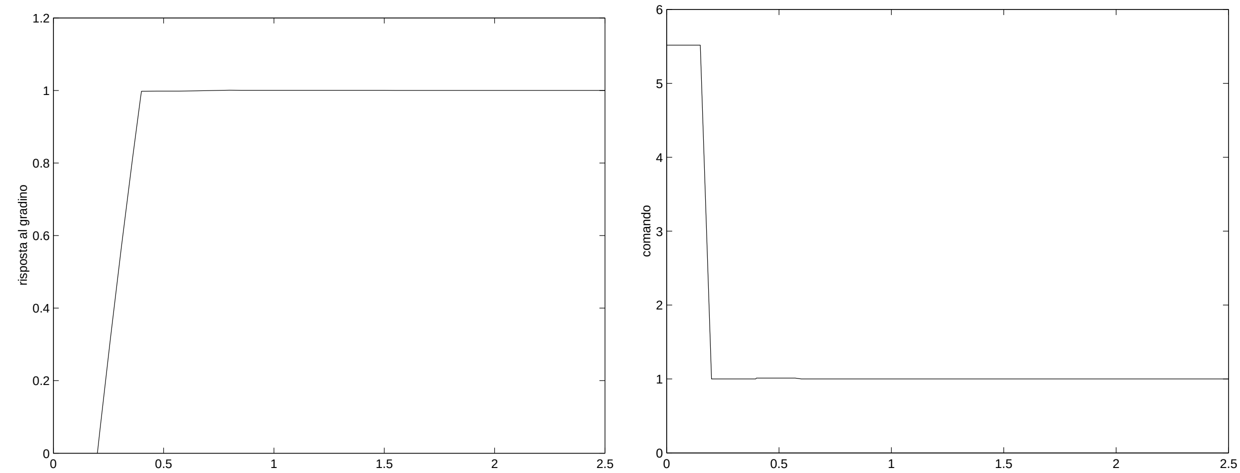


Figura 6.2: Esempio 6.3, risposta al gradino (uscita e comando)

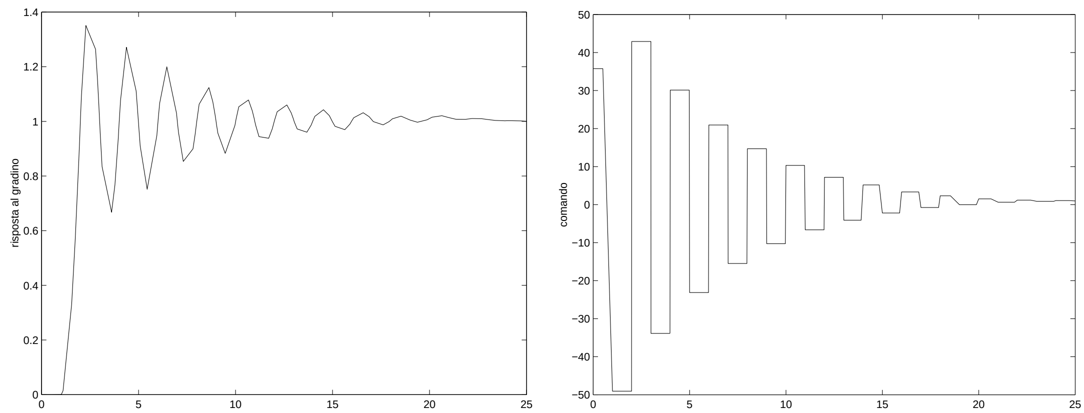


Figura 6.3: Esempio 6.4: Risposta al gradino (uscita e comando)

ed il suo equivalente campionato con ZOH, $T = 1$ s

$$P_d(z) = \frac{0.028(z + 0.8357)}{z^3 - 1.5353z^2 + 0.5866z} \tag{6.31}$$

$P_d(z)$ non ha poli o zeri instabili ed ha grado relativo 2, per cui si sceglie

$$W_0(z) = z^{-2}$$

ed il controllore risultante è

$$C(z) = \frac{z(z^2 - 1.5353z + 0.5866)}{0.028(z + 1)(z - 1)(z + 0.8357)} \tag{6.32}$$

Nella simulazione della risposta al gradino riportata in figura 6.3, si nota un andamento fortemente oscillante del segnale di comando e la presenza di forti oscillazioni interperiodo nell'uscita analogica. Tali oscillazioni sono dovute al fatto che nel controllore compare un polo prossimo al punto $z = -1$

(corrispondente ad un modo oscillante poco smorzato) che cancella uno zero dell'impianto discretizzato ($z_r = -0.8357$). A causa di questa cancellazione, z_r compare come polo nella funzione di trasferimento $U(z)/R(z) = \frac{C(z)}{1+C(z)P_d(z)}$ tra riferimento e comando e produce un andamento oscillatorio del comando stesso. In corrispondenza a questa eccitazione oscillatoria, l'impianto risponde con un andamento dell'uscita a sua volta oscillante.
Se lo zero "risonante" z_r comparisse tra gli zeri di $W_0(z)$, cioè risultasse $W_0(z_r) = 0$, tale cancellazione verrebbe prevenuta, allo stesso modo delle cancellazioni di zeri instabili.

Generalizziamo adesso il procedimento di sintesi deadbeat al caso in cui l'impianto discretizzato $P_d(z)$ presenti poli o zeri instabili, oppure zeri risonanti il cui effetto è quello di generare il fenomeno delle oscillazioni interperiodo. Allo scopo di poter imporre le condizioni di stabilità interna, è necessario considerare una forma più generale di $W_0(z)$.

$$W_0(z) = K^w(z - z_1^w)\dots(z - z_{m^w}^w)\frac{1}{z^N} = (w_{m^w} z^{m^w} + \dots w_0)\frac{1}{z^N} \tag{6.33}$$

Anche in questo caso la risposta al gradino va a regime in N passi, essendo

$$W_0(z) = w_0 z^{-N} + \dots + w_{m^w} z^{-N+m^w} \tag{6.34}$$

si noti però che $W_0(z)$ non è più un ritardo puro, bensì una somma di elementi di ritardo in parallelo.
I coefficienti del numeratore (gli zeri) di $W_0(z)$ si calcolano in modo da soddisfare i vincoli dovuti alla presenza in $P_d(z)$ di poli o zeri instabili o zeri risonanti, più eventuali specifiche statiche. Come già detto, il numero di questi coefficienti dovrà essere scelto pari al numero di vincoli da imporre.

Esempio 6.5 (modello Scicos `magia.cos`) Siano dati l'impianto $P(s)$ ed il suo equivalente discretizzato $P_d(z)$

$$P(s) = \frac{1}{s^2} \qquad \Rightarrow \qquad P_d(z) = \frac{T^2}{2}\frac{z+1}{(z-1)^2} \tag{6.35}$$

$P_d(z)$ ha uno zero in $z = -1$ e due poli in $z = 1$, per cui per conservare la stabilità interna è necessario imporre

$$\begin{aligned} W_0(-1) = 0 \ [1] \quad &; \\ 1 - W_0(1) = 0 \ [2] \quad &; \\ \tfrac{d(1-W_0)}{dz}(1) = 0 \ [3]&; \end{aligned} \tag{6.36}$$

Osservazione 6.6 L'imposizione delle condizioni [2] e [3] preserva i poli in $z = 1$ già presenti in $P_d(z)$ che altrimenti il controllore cancellerebbe, compromettendo l'errore nullo al gradino e la stabilità interna.

Si hanno tre condizioni da imporre, per cui sono necessari tre parametri liberi. Inoltre il grado relativo di $W_0(z)$ deve essere almeno 1, per cui si sceglie $N = 3$, e la corrispondente $W_0(z)$ è della forma

$$W_0(z) = (w_2 z^2 + w_1 z + w_0)\frac{1}{z^3} \tag{6.37}$$

Imponendo le tre condizioni si ricavano i coefficienti incogniti

$$w_2 = \frac{5}{4}, \quad w_1 = \frac{1}{2}, \quad w_0 = -\frac{3}{4}$$

Il controllore corrispondente vale

$$C(z) = \frac{1}{P_d(z)}\frac{W_0(z)}{1 - W_0(z)} = \frac{2}{T^2}\frac{5z-3}{4z+3} \tag{6.38}$$

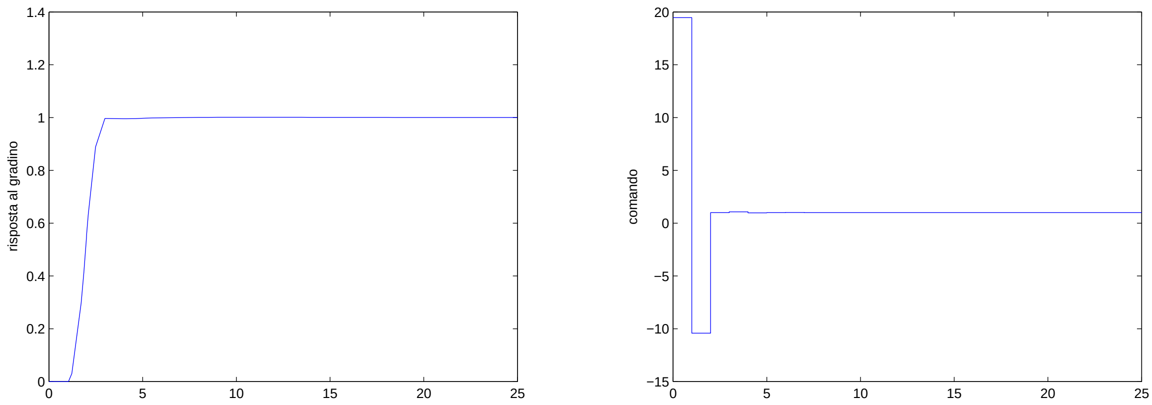


Figura 6.4: Esempio 6.6: risposta al gradino (uscita e comando)

Esempio 6.6 (file Scilab `interper.sce`, seconda parte) Si consideri nuovamente l'impianto

$$P(s) = \frac{e^{-s}}{1 + 8s + 15s^2} \tag{6.39}$$

ed il suo equivalente campionato con ZOH, $T = 1$ s

$$P_d(z) = \frac{0.028(z + 0.8357)}{z^3 - 1.5353z^2 + 0.5866z} \tag{6.40}$$

Utilizzando la forma estesa della $W_0(z)$ è possibile includere lo zero risonante $z_r = -0.8357$ dell'impianto tra gli zeri di $W_0(z)$ per prevenirne la cancellazione, come si fa per gli zeri instabili. Dunque si sceglie

$$W_0(z) = \frac{K^w(z + 0.8357)}{z^3} \tag{6.41}$$

dove K^w si calcola imponendo errore a regime nullo al gradino, i.e., $W_0(1) = 1$. La $W_0(z)$ corrispondente risulta

$$W_0(z) = \frac{0.5443(z + 0.8371)}{z^3} \tag{6.42}$$

In figura 6.4 sono riportate le simulazioni della risposta al gradino. Le oscillazioni interperiodo sono state eliminate, visto che adesso lo zero risonante non compare più nella funzione di trasferimento tra riferimento e comando.

6.1.5 *Scelta di $W_0(z)$: transitorio del primo ordine*

Si desidera adesso imporre che la risposta al gradino del sistema presenti un transitorio assimilabile a quello di un sistema del primo ordine con una costante di tempo assegnata τ. In accordo con la forma generale (6.24) di $W_0(z)$, si sceglie allora

$$W_0(z) = \frac{K^w(z - z_1^w)\ldots(z - z_{m^w}^w)}{z - e^{-T/\tau}} \frac{1}{z^N} \tag{6.43}$$

con $N \geq n^p - m^p - 1 + m^w$. Come in precedenza, K^w e gli zeri z_j^w sono scelti per soddisfare i vincoli di progetto (stabilità interna, precisione statica).

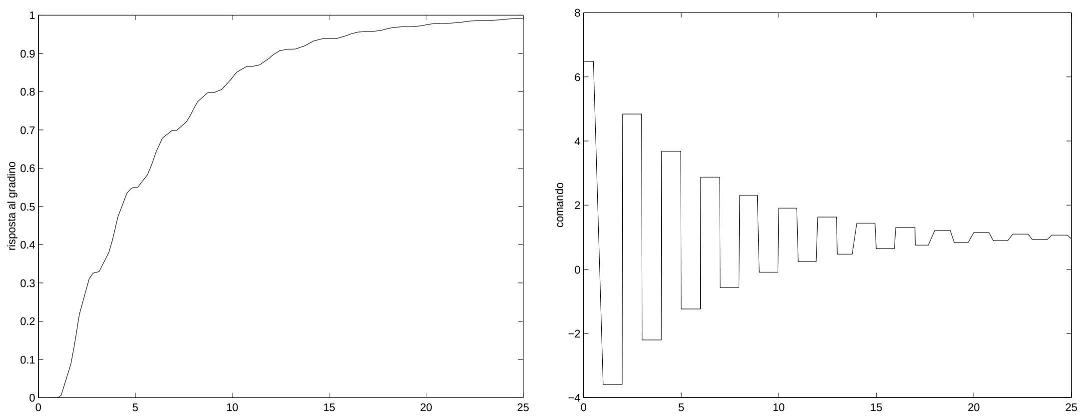


Figura 6.5: Esempio 6.7: risposta al gradino (uscita e comando)

Esempio 6.7 (file Scilab `dahlin.sce`). Si consideri l'impianto

$$P(s) = \frac{e^{-s}}{1 + 8s + 15s^2} \tag{6.44}$$

con $T = 1$ s. Si desidera progettare $W_0(z)$ in modo che la risposta al gradino sia assimilabile a quella di un sistema del primo ordine con costante di tempo $\tau = 5$ s. Si sceglie

$$W_0(z) = \frac{1 - e^{-T/\tau}}{z - e^{-T/\tau}} \, \frac{1}{z} \tag{6.45}$$

La corrispondente risposta è riportata in figura 6.5. Si noti l'andamento oscillatorio del comando dovuto ad uno zero risonante dell'impianto che viene cancellato dal controllore (vedi esempi sulla sintesi deadbeat). È possibile includere tale zero tra gli zeri di $W_0(z)$ prendendo

$$W_0(z) = \frac{K^w (z + 0.8371)}{z^2 (z - e^{-T/\tau})} \tag{6.46}$$

dove K^w va calcolata affinché $W_0(1) = 1$.

6.1.6 Scelta di $W_0(z)$: transitorio del secondo ordine

Vogliamo adesso progettare $W_0(z)$ in modo che il transitorio della risposta al gradino del sistema di controllo presenti un andamento assimilabile a quello di un sistema del secondo ordine, caratterizzato da opportuni valori dei parametri standard di sovraelongazione, tempo di salita e tempo di assestamento.
In linea di principio, è possibile imporre che la risposta al gradino di $W_0(z)$ sia esattamente la versione campionata della risposta di un sistema continuo $W(s)$ del secondo ordine caratterizzato da smorzamento ζ e pulsazione naturale ω_n corrispondenti alle specifiche. Ciò si ottiene imponendo

$$Y(z) = W_0(z) \, \frac{z}{z-1} = \mathcal{Z}\left[W(s) \, \frac{1}{s} \right] \quad \text{dove} \quad W(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta/\omega_n \, s + s^2/\omega_n^2} \tag{6.47}$$

da cui si ricava $W_0(z)$. Dall'espressione precedente si osserva che la $W_0(z)$ risultante non è altro che l'equivalente campionato con ZOH di $W(s)$. In particolare, $W_0(z)$ ha come poli i poli di $W(s)$ trasformati secondo $z = e^{sT}$.
Il semplice procedimento ora descritto non è evidentemente applicabile in generale, poiché non tiene conto di eventuali vincoli di causalità del controllore, presenza di poli o zeri instabili nell'impianto o

specifiche statiche (errore alla rampa). Per tenere conto di questi vincoli, ci si limita ad imporre che i poli di $W_0(z)$ siano quelli caratteristici del transitorio del secondo ordine (ovvero coincidano con i poli di $W(s)$ trasformati secondo $z = e^{sT}$), introducendo poi un opportuno numero di zeri in accordo con l'espressione generale (6.24). Si procede quindi nel modo seguente.

1. Si determinano ζ e ω_n corrispondenti alle specifiche di transitorio richieste, ed i relativi poli "dominanti" $p = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ e $\bar{p} = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

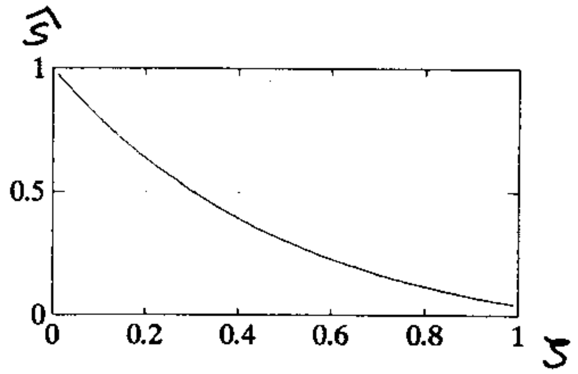
2. Si seleziona una $W_0(z)$ che abbia come poli e^{pT}, $e^{\bar{p}T}$, più ulteriori poli in $z = 0$ e zeri scelti in modo da rispettare i vincoli di causalità e stabilità interna, in accordo con la (6.24)

$$W_0(z) = \frac{K^w(z - z_1^w)\ldots(z - z_{m^w}^w)}{(z - e^{pT})(z - e^{\bar{p}T})}\,\frac{1}{z^N} \tag{6.48}$$

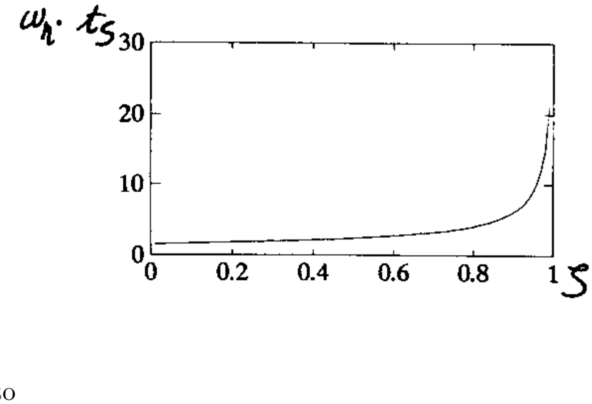
con $N \geq n^p - m^p - 2 + m^w$.

Si riportano per comodità gli andamenti dei parametri caratteristici della risposta al gradino e della risposta in frequenza in funzione dei fattori di smorzamento e pulsazione naturale per un sistema del secondo ordine.

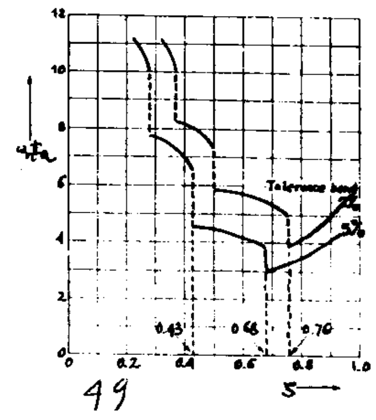
- Massima sovraelongazione $\hat{s} = \exp(-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})$



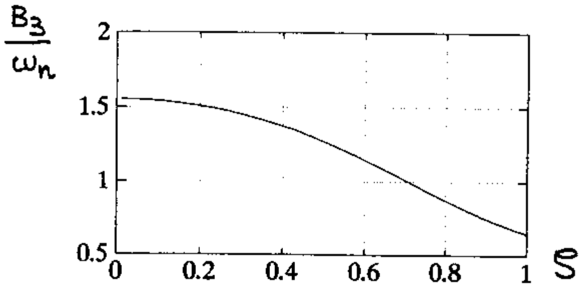
- Tempo di salita $t_s = \omega_n^{-1}[1-\zeta^2]^{-1/2}[\pi - \arctan\zeta^{-1}\sqrt{1-\zeta^2}]$



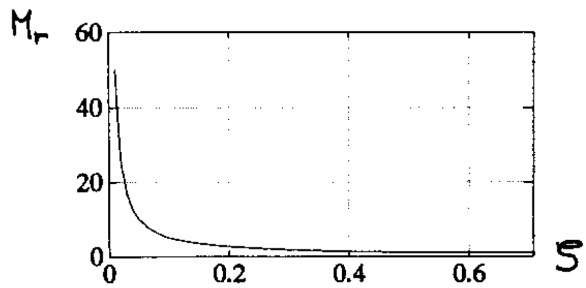
- Tempo di assestamento



- Banda passante



- Picco di risonanza



Esempio 6.8 Si considerino le specifiche di transitorio seguenti.

- Sovraelongazione $\hat{s} < \hat{s}_1$. Tale specifica induce una limitazione sul fattore di smorzamento

$$\zeta > \zeta_1$$

- Limitazione sulla parte immaginaria dei poli dominanti data ad esempio dai requisiti di sensibilità del sistema a disturbi ad alta frequenza

$$\omega < \omega_1$$

- Limitazione sulla parte reale dei poli dominanti data dal tempo di assestamento desiderato ($t_a \approx 5/\sigma$)

$$-\sigma < -\sigma_1$$

Le limitazioni di cui sopra individuano nel piano complesso in s la regione in cui devono cadere i poli di un sistema del secondo ordine in modo da rispettare le specifiche. Allo scopo di ottenere la $W_0(z)$ corrispondente, si dovranno scegliere i suoi poli all'interno della regione nel piano z che rappresenta l'immagine della regione ammessa secondo la trasformazione $z = e^{sT}$ (figura 6.6).

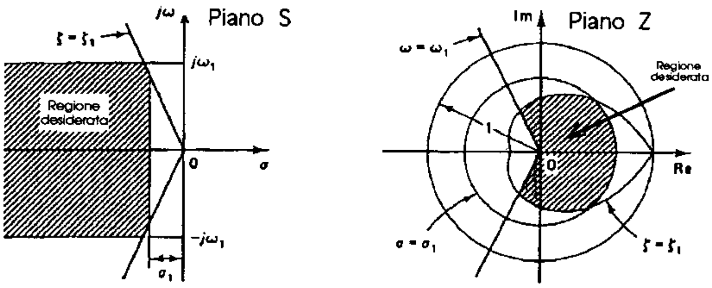


Figura 6.6: Regioni ammesse per i poli ad anello chiuso nel continuo e nel discreto in corrispondenza alle specifiche dell'esempio 6.8

Esempio 6.9 (file Scilab `diretta.sce`). Si consideri l'impianto

$$P(s) = \frac{0.1}{s(s+0.1)} \tag{6.49}$$

e siano date le seguenti specifiche

- Errore di inseguimento al gradino nullo
- Errore di inseguimento alla rampa unitaria $e^1 \leq e^1_0 = 1$
- Tempo di salita $t_s \leq 1.5$ s
- Massima sovraelongazione $\hat{s} \leq 0.4$.

L'equivalente campionato con ZOH e $T = 1$ s risulta

$$P_d(z) = \frac{0.04837(z+0.9672)}{(z-1)(z-0.9048)} \tag{6.50}$$

Si osservi che lo zero di $P_d(z)$ è molto vicino al punto $z = -1$.
Le specifiche dinamiche richieste corrispondono ad un transitorio del secondo ordine con parametri $\zeta = 0.5$ e $\omega_n = 1$, corrispondente nel continuo ad una coppia di poli che sono le radici del polinomio $s^2 + s + 1$. Trasformati secondo $z = e^{sT}$, tali poli sono le radici del polinomio $z^2 - 0.7859z + 0.3679$. Pertanto la $W_0(z)$ sarà scelta della forma

$$W_0(z) = \frac{K^w(z-z_1)}{z^2 - 0.7859z + 0.3679} \tag{6.51}$$

si noti che la condizione sul grado relativo è soddisfatta. Lo zero z_1 si calcola imponendo la specifica sull'errore alla rampa con la regola di Truxal. Tale calcolo è immediato perché i poli sono noti e c'è un unico zero. Risulta $z_1 = 0.0793$. Il guadagno K^w si calcola infine imponendo guadagno in continua unitario ($W_0(1) = 1$) e risulta $K^w = 0.6321$. La funzione di trasferimento ad anello chiuso desiderata è quindi

$$W_0(z) = 0.6321 \frac{z - 0.0793}{z^2 - 0.7859z + 0.3679} \tag{6.52}$$

ed il controllore risultante è dato da

$$C(z) = \frac{1}{P_d(z)} \frac{W_0(z)}{1 - W_0(z)} = 13.068 \frac{(z-0.9048)(z-0.0793)}{(z+0.9672)(z-0.4180)} \tag{6.53}$$

La risposta al gradino del sistema ad anello chiuso riportata in figura 6.7 evidenzia forti oscillazioni dovute al polo risonante di $C(z)$ che cancella lo zero dell'impianto, seppure i campioni della risposta

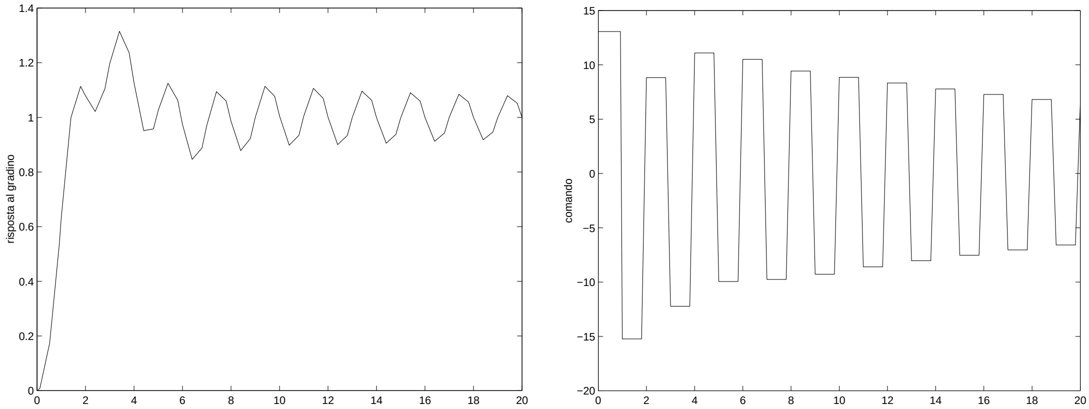


Figura 6.7: Risposta (uscita e comando) del sistema dell'esempio 6.9, prima parte

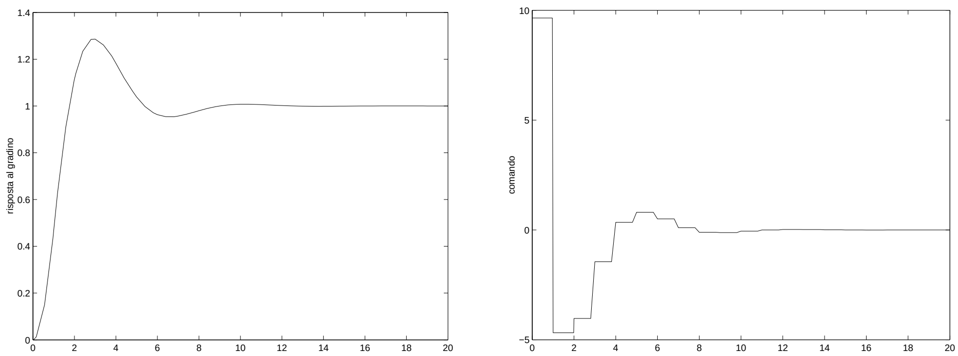


Figura 6.8: Risposta (uscita e comando) del sistema dell'esempio 6.9, seconda parte

nell'uscita seguano fedelmente l'andamento del secondo ordine desiderato. Per eliminare le oscillazioni, si include il polo risonante tra gli zeri di $W_0(z)$, in modo che non compaia più in $C(z)$. Si sceglie quindi $W_0(z)$ della forma

$$W_0(z) = K^w \frac{(z + 0.9672)(z - z_1)}{z(z^2 - 0.7859z + 0.3679)} \tag{6.54}$$

Notare l'inclusione di un polo in $z = 0$ per preservare la causalità. Con questa nuova struttura di $W_0(z)$ è necessario effettuare di nuovo il calcolo di z_1 e K^w sulla base delle specifiche statiche. Si ottiene

$$W_0(z) = 0.4668 \frac{(z + 0.9672)(z - 0.3662)}{z(z^2 - 0.7859z + 0.3679)} \tag{6.55}$$

Il controllore risulta

$$C(z) = 9.6495 \frac{(z - 0.9048)(z - 0.3662)}{(z - 0.5521)(z - 0.2994)} \tag{6.56}$$

ed il corrispondente sistema ad anello chiuso presenta la risposta in figura 6.8

6.1.7 *Scelta del passo di campionamento nella sintesi diretta*

La scelta del passo di campionamento per i metodi diretti è un fattore molto meno critico rispetto al caso dei metodi di approssimazione. Trattandosi di metodi puramente analitici, infatti, non si hanno requisiti di fedeltà di qualsivoglia formula di approssimazione. Inoltre, la stabilità del sistema di controllo equivalente a tempo discreto è sempre garantita, indipendentemente da T, cosa non scontata nel progetto per approssimazione. A rigore, l'unica limitazione da rispettare è quella imposta dal teorema di Shannon allo scopo di evitare fenomeni di aliasing. Tuttavia, si ricordi che i metodi diretti impongono esattamente solo l'andamento della risposta campionata del sistema, da cui la risposta analogica può deviare anche significativamente. Tale deviazione è normalmente (e piuttosto ovviamente) più marcata all'aumentare del passo di campionamento, ma questo tipicamente non porta a requisiti su T paragonabili a quelli relativi ai metodi di approssimazione (è spesso sufficiente prendere 2 o 3 campioni sul tempo di salita). Inoltre, nel caso di sintesi deadbeat, il tempo di campionamento può essere scelto ad-hoc, in modo che il numero di passi in cui la risposta va a regime corrisponda nel continuo ad un intervallo di tempo in cui il transitorio, in base alle specifiche, è supposto esaurirsi. Se l'impianto presenta un ritardo, può essere utile, se possibile, scegliere T in modo che il ritardo sia un suo multiplo. Questo porta innanzitutto ad una semplificazione del calcolo di $P_d(z)$ ma vi è un altro vantaggio legato al fatto che la presenza di ritardi frazionari nell'impianto porta spesso ad avere zeri instabili in $P_d(z)$, rendendo più complesso il progetto.