$$h(t) = \frac{1}{T}\varepsilon^{-\frac{t}{T}},$$

applicando la (7-351) si ottiene:

$$v(t) = \int_0^t \frac{1}{T}\varepsilon^{-\frac{t-\tau}{T}} \cdot E\varepsilon^{-\frac{\tau}{T_0}} \mathrm{d}\tau = \frac{E}{T}\varepsilon^{-\frac{t}{T}} \int_0^t \varepsilon^{\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right)\tau} \mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{E}{1-\dfrac{T}{T_0}}\left(\varepsilon^{-\frac{t}{T_0}} - \varepsilon^{-\frac{t}{T}}\right).$$

L'andamento della $v(t)$ è riportato in forma qualitativa nella fig. 7-353. Quando sia $T = T_0$ la soluzione trovata assume

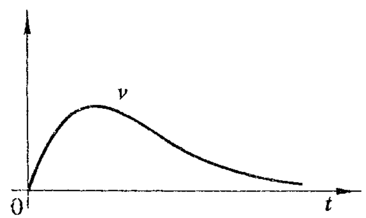


Fig. 7-353

una forma indeterminata: introducendo peraltro la $T = T_0$ sotto il segno di integrale, si ricava in tal caso immediatamente:

$$v(t) = E \cdot \frac{t}{T}\varepsilon^{-\frac{t}{T}}.$$

7-36. Punti di discontinuità.

Quando una sollecitazione a gradino o impulsiva viene applicata ad una rete, nella risposta di questa possono presentarsi, nell'istante di applicazione, delle discontinuità, come è mostrato chiaramente dagli esempi del paragrafi 7-34.



È utile quindi introdurre delle notazioni per distinguere i valori esistenti immediatamente prima e dopo tale discontinuità; chiameremo quindi $f(a-)$ *il limite della generica funzione $f(t)$ quando $t$ tende ad $a$ da sinistra*, cioè per valori di $t$ minori di $a$; chiameremo $f(a+)$ *il limite della funzione $f(t)$ quando $t$ tende ad $a$ da destra*, cioè per valori di $t$ maggiori di $a$; per le funzioni aventi dei punti di discontinuità, questi limiti saranno fra loro diversi proprio in tali punti.

La fig. 7-361 mostra un semplice esempio di questo modo di scrittura.

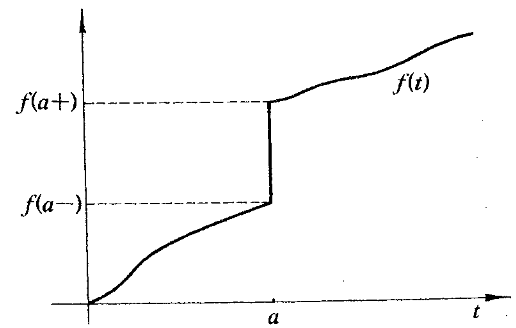


Fig. 7-361

## 7-4. IMPIEGO DEL CALCOLO OPERATORIO

7-41. Generalità.

La determinazione dei transitori mediante la soluzione di sistemi di equazioni differenziali presenta, come si è visto in 7-2, non tanto delle difficoltà concettuali, quanto una notevole laboriosità del calcolo che consiste, anzitutto, nella determinazione degli integrali generali e, successivamente, nella valutazione delle costanti d'integrazione, mediante i criteri a suo tempo riferiti.

Il calcolo si semplifica in maniera notevole ricorrendo anziché alla rappresentazione nel tempo delle grandezze note ed incognite del problema, ad una loro diversa rappresentazione, biunivocamente legata alla precedente, per la quale le operazioni integro-differenziali si tramutano in operazioni algebriche e le condizioni ai limiti del problema vengono messe in particolare evidenza.

È questo, in sostanza, un caso particolare delle più generali questioni inerenti alle trasformazioni biunivoche delle funzioni o alle loro rappresentazioni simboliche; rientrano ad esempio in questa categoria la rappresentazione simbolica delle grandezze sinusoidali (che rende algebrico ogni problema delle reti elettriche in regime periodico) e le trasformazioni largamente in uso per semplificare i calcoli numerici, come quelle logaritmiche.

Utilizzeremo nel seguito *la trasformazione di Laplace delle funzioni della variabile reale t*. Si riportano qui di seguito le principali definizioni e proprietà di tale trasformazione, rimandando ai corsi di matematica per le corrispondenti dimostrazioni e per ulteriori dettagli.

## 7-42. Definizione di Laplace-trasformata.

*Sia $f(t)$ una funzione della variabile t nulla per $t < 0$; la sua trasformata di Laplace è una funzione $\mathbf{f}(p)$, della variabile complessa p, legata alla $f(t)$ dalla relazione*:

(7-421) $$\mathbf{f}(p) = \int_{0-}^{\infty} \varepsilon^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

che è definita per tutti i valori di $p$ per cui l'integrale converge.



La trasformazione inversa (o anti-$L$-trasformazione), mediante la quale si passa da un'assegnata funzione $\mathbf{f}(p)$ della variabile complessa $p$, alla funzione $f(t)$ che l'ammette come trasformata, è espressa dalla relazione (*integrale d'inversione*) seguente:

(7-422) $$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{a-j\infty}^{a+j\infty} \mathbf{f}(p)\varepsilon^{pt}\,\mathrm{d}p,$$

in cui l'integrazione va condotta sul piano complesso, lungo una retta generica $a =$ costante, purché contenuta nel dominio di convergenza della $\mathbf{f}(p)$.

Il calcolo dell'integrale d'inversione (7-422) può presentare in pratica alcune difficoltà; tra l'altro, esso ovviamente richiede la conoscenza delle fondamentali questioni concernenti l'integrazione nel campo complesso. Si può peraltro ricorrere, nella pratica, a *tavole di trasformazione*, in cui sono messe in evidenza le corrispondenze biunivoche fra le $f(t)$ e le $\mathbf{f}(p)$.

In 7-44 sono raccolte le trasformate di alcune funzioni di comune impiego; vanno in particolare ricordate *le trasformate delle funzioni* $1(t)$ *e* $U(t)$ *definite in* 7-31, che sono rispettivamente $\frac{1}{p}$ e 1. Altre corrispondenze possono ricavarsi applicando alle funzioni illustrate nelle tavole le proprietà delle $L$-trasformate.

## 7-43. Proprietà delle L-trasformate.

a) *Principio di sovrapposizione*: per $f(t) = \sum_r f_r(t)$ si ha:

(7-431) $$\mathbf{f}(p) = \sum_r \mathbf{f}_r(p).$$

b) *Teorema del cambiamento di scala*: per $\phi(t) = f\left(\frac{t}{a}\right)$, con $a$ costante arbitraria, si ha:

(7-432) $$\phi(p) = a\mathbf{f}(ap).$$

c) *Traslazione nel dominio complesso*: per $\phi(t) = \varepsilon^{at} f(t)$, con $a$ costante arbitraria, si ha:

(7-433) $$\phi(p) = \mathbf{f}(p - a).$$

d) *Traslazione nel dominio reale*: per $\phi(t) = f(t - a)$, con $a$ costante positiva, si ha:

(7-434) $$\phi(p) = \varepsilon^{-pa}\mathbf{f}(p).$$

e) *Teorema del valore iniziale*: si dimostra che, se esiste il limite di $f(t)$, per $t$ tendente a zero da destra, si ha:

(7-435) $$\lim_{p \to \infty} p\mathbf{f}(p) = \lim_{t \to 0+} f(t).$$

f) *Teorema del valore finale*: si dimostra che, se esiste il limite di $f(t)$, per $t$ tendente ad infinito, si ha:

(7-436) $$\lim_{p \to 0} p\mathbf{f}(p) = \lim_{t \to \infty} f(t).$$

Vi sono inoltre due teoremi che sono fondamentali per il calcolo operatorio, in quanto mettono in evidenza la possibilità di rendere di natura algebrica l'integrazione dei sistemi di equazioni differenziali lineari.

g) *Teorema della derivazione*: se $\phi(t) = f'(t)$ ammette $L$-trasformata, si ha:

(7-437) $$\phi(p) = p\mathbf{f}(p),$$

cioè, *per ottenere la L-trasformata della derivata, basta moltiplicare per p la trasformata della funzione.*

h) *Teorema dell'integrazione*: per $\phi(t) = \int_{0-}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t$, si ha:



(7-438) $$\phi(p) = \frac{\mathbf{f}(p)}{p},$$

cioè *per ottenere la trasformata dell'integrale, basta dividere per p la trasformata della funzione.*

Queste proprietà si estendono facilmente alle derivate ed agli integrali di ordine superiore.

## 7-44. Tavole di trasformazione.

a) *Operazioni sulle trasformate*:

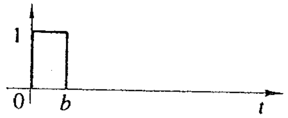
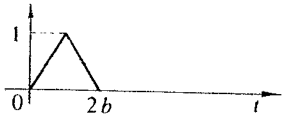
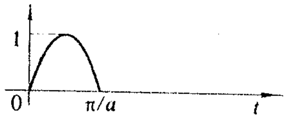
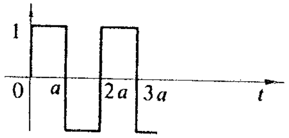
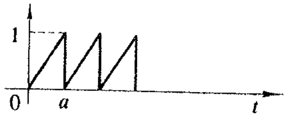
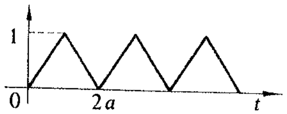
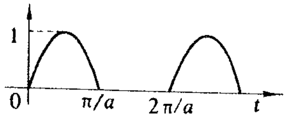
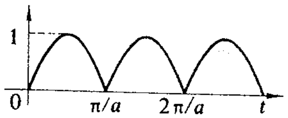
| $f(t)$ | $\mathbf{f}(p)$ |
|---|---|
| 1) $-t f(t)$ | $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathbf{f}(p)$ |
| 2) $(-t)^n f(t)$ | $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}\mathbf{f}(p)$ |
| 3) $\frac{f(t)}{t}$ | $\int_p^\infty \mathbf{f}(p)\,\mathrm{d}p$ |
| 4) $\int_0^t \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ | $\frac{1}{p}\int_p^\infty \mathbf{f}(p)\,\mathrm{d}p$ |
| 5) $\int_t^\infty \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ | $\frac{1}{p}\int_0^p \mathbf{f}(p)\,\mathrm{d}p$ |
| 6) $\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ | $\mathbf{f}_1(p)\cdot\mathbf{f}_2(p)$ |
| 7) $f(t)$ periodica di periodo $a$ | $\frac{1}{1-\varepsilon^{-ap}}\int_0^a \varepsilon^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$ |

b) *Tavola delle corrispondenze*:

| | $f(t)$ | $\mathbf{f}(p)$ | |
|---|---|---|---|
| 1) | $1(t-a)$ | $\frac{1}{p}\varepsilon^{-ap}$ | |
| 2) | $U(t-a)$ | $\varepsilon^{-ap}$ | |
| 3) | $\varepsilon^{-at}$ | $\frac{1}{p+a}$ | |
| 4) | $at$ (funzione a rampa) | $\frac{a}{p^2}$ | |
| 5) | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ | $\frac{1}{p^n}$ | |
| 6) | $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ | $\frac{1}{\sqrt{p}}$ | |
| 7) | $\operatorname{sen} at$ | $\frac{a}{p^2+a^2}$ | |
| 8) | $\cos at$ | $\frac{p}{p^2+a^2}$ | |
| 9) | $\operatorname{sen}(\omega t+\alpha)$ | $\frac{\omega\cos\alpha + p\operatorname{sen}\alpha}{p^2+\omega^2}$ | |
| 10) | $\cos(\omega t+\alpha)$ | $\frac{-\omega\operatorname{sen}\alpha + p\cos\alpha}{p^2+\omega^2}$ | |
| 11) | $\operatorname{senh} at$ | $\frac{a}{p^2-a^2}$ | |
| 12) | $\cosh at$ | $\frac{p}{p^2-a^2}$ | |
| 13) | $1-\varepsilon^{-at}$ | $\frac{a}{p(p+a)}$ | |
| 14) | $\frac{\varepsilon^{-at}-\varepsilon^{-bt}}{b-a}$ | $\frac{1}{(p+a)(p+b)}$ | $(a \neq b)$ |
| 15) | $\frac{b\varepsilon^{-bt}-a\varepsilon^{-at}}{b-a}$ | $\frac{p}{(p+a)(p+b)}$ | $(a \neq b)$ |
| 16) | $1+\frac{a\varepsilon^{-bt}-b\varepsilon^{-at}}{b-a}$ | $\frac{ab}{p(p+a)(p+b)}$ | $(a \neq b)$ |

| | $f(t)$ | $\mathbf{f}(p)$ | |
|---|---|---|---|
| 17-a) | $\frac{T}{\sqrt{\mu^2T^2-1}}\varepsilon^{-\frac{t}{T}}\operatorname{sen}\left(\mu\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2T^2}}\,t\right)$ | $\frac{1}{p^2+\frac{2}{T}p+\mu^2}$ | con $\mu^2T^2>1$ |
| 17-b) | $t\varepsilon^{-\mu t}$ | | con $\mu^2T^2=1$ |
| 17-c) | $\frac{T}{2\sqrt{1-\mu^2T^2}}\left(\varepsilon^{-\frac{1-\sqrt{1-\mu^2T^2}}{T}t} - \varepsilon^{-\frac{1+\sqrt{1-\mu^2T^2}}{T}t}\right)$ | | con $\mu^2T^2<1$ |
| 18-a) | $1-\frac{\mu T}{\sqrt{\mu^2T^2-1}}\varepsilon^{-\frac{t}{T}}\operatorname{sen}\left[\mu t\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2T^2}} + \operatorname{arcsen}\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2T^2}}\right]$ | $\frac{1}{p}\,\frac{\mu^2}{p^2+\frac{2}{T}p+\mu^2}$ | con $\mu^2T^2>1$ |
| 18-b) | $1-(1+\mu t)\varepsilon^{-\mu t}$ | | con $\mu^2T^2=1$ |
| 18-c) | $1-\frac{1+\sqrt{1-\mu^2T^2}}{2\sqrt{1-\mu^2T^2}}\varepsilon^{-\frac{1-\sqrt{1-\mu^2T^2}}{T}t} + \frac{1-\sqrt{1-\mu^2T^2}}{2\sqrt{1-\mu^2T^2}}\varepsilon^{-\frac{1+\sqrt{1-\mu^2T^2}}{T}t}$ | | con $\mu^2T^2<1$ |
| 19) | $t\varepsilon^{-at}$ | $\frac{1}{(p+a)^2}$ | |
| 20) | $\varepsilon^{-at}(1-at)$ | $\frac{p}{(p+a)^2}$ | |
| 21) | $1-\cos at$ | $\frac{a^2}{p(p^2+a^2)}$ | |
| 22) | $at-\operatorname{sen} at$ | $\frac{a^3}{p^2(p^2+a^2)}$ | |
| 23) | $\operatorname{sen} at - at\cos at$ | $\frac{2a^3}{(p^2+a^2)^2}$ | |
| 24) | $\operatorname{sen} at + at\cos at$ | $\frac{2ap^2}{(p^2+a^2)^2}$ | |
| 25) | $\varepsilon^{-at}+at-1$ | $\frac{a^2}{p^2(p+a)}$ | |
| 26) | $\varepsilon^{-at}\operatorname{sen} bt$ | $\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$ | |
| 27) | $\varepsilon^{-at}\cos bt$ | $\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$ | |

c) *L-Trasformate di alcune funzioni particolari*:

| $f(t)$ | | $\mathbf{f}(p)$ |
|---|---|---|
| 1) Impulso rettangolare |   | $\frac{1}{p}(1-\varepsilon^{-bp})$ |
| 2) Impulso triangolare |   | $\frac{1}{b}\left(\frac{1-\varepsilon^{-bp}}{p}\right)^2$ |
| 3) Impulso sinusoidale |   | $\frac{a}{p^2+a^2}(1+\varepsilon^{-\frac{\pi p}{a}})$ |
| 4) Onda rettangolare periodica |   | $\frac{1}{p}\tanh\frac{ap}{2}$ |
| 5) Dente di sega |   | $\frac{1}{ap^2}-\frac{\varepsilon^{-ap}}{p(1-\varepsilon^{-ap})}$ |
| 6) Onda triangolare |   | $\frac{1}{p^2}\tanh\frac{ap}{2}$ |
| 7) Sinusoide rettificata a semionda |   | $\frac{a}{(p^2+a^2)(1-\varepsilon^{-\frac{\pi p}{a}})}$ |
| 8) Sinusoide rettificata |   | $\frac{a}{p^2+a^2}\coth\frac{\pi p}{2a}$ |



## 7-45. ANTITRASFORMAZIONE DEI RAPPORTI DI POLINOMI.

In molti casi pratici la funzione $\mathbf{f}(p)$ da antitrasformare si presenta come rapporto fra due polinomi in $p$:

(7-451) $$\mathbf{f}(p)=\frac{N(p)}{D(p)}$$

in cui il grado del numeratore $N(p)$ è inferiore a quello del denominatore $D(p)$.

La teoria delle funzioni analitiche mostra che se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n$ (supposte tutte distinte fra loro) sono le radici dell'equazione algebrica:

(7-452) $$D(p)=0,$$

la (7-451) può scomporsi in una somma (*sviluppo in frazioni parziali*) di $n$ termini del tipo:

$$\frac{A_i}{p-\alpha_i}$$

con:

(7-453) $$A_i=\frac{N(\alpha_i)}{D'(\alpha_i)}.$$

La antitrasformata della (7-451) risulta quindi, in base alla tavola 7-44 b-3:

(7-454) $$f(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{N(\alpha_i)}{D'(\alpha_i)}\varepsilon^{\alpha_i t}.$$

Se nell'equazione (7-452) esiste una radice $\alpha_k$ multipla di ordine $m$, questa dà luogo, nello sviluppo in frazioni parziali, agli $m$ termini seguenti:

$$(7\text{-}455)\qquad \frac{B_1}{(p-\alpha_k)^m}+\frac{B_2}{(p-\alpha_k)^{m-1}}+\ldots+\frac{B_r}{(p-\alpha_k)^{m-r+1}}+\ldots+\frac{B_m}{(p-\alpha_k)},$$

nei quali si ha:

$$(7\text{-}456)\qquad B_r=\frac{1}{(r-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{r-1}}{\mathrm{d}p^{r-1}}(p-\alpha_k)^m\,\mathbf{f}(p)\right]_{p=\alpha_R}$$

Il contributo $f_1(t)$, dato dai termini (7-455) alla $f(t)$, si ottiene antitrasformando l'espressione (7-455) e si ottiene, utilizzando la tavola 7-44 b-5 e la proprietà 7-43-c:

$$(7\text{-}457)\qquad f_1(t)=\varepsilon^{\alpha_k t}\sum_{r=1}^{r=m}B_r\frac{t^{m-r}}{(m-r)!}.$$

### 7-46. La trasformazione delle equazioni delle reti lineari inizialmente a riposo.

In (7-12) si sono scritte le equazioni ai nodi ed alle maglie per una rete generica: in esse comparivano, con i parametri costanti della rete, grandezze elettriche (tensioni e correnti) funzioni del tempo. Supponendo di applicare alla rete in esame, supposta priva di energia immagazzinata, i generatori all'istante zero, tutte le funzioni in gioco possono essere $L$-trasformate. Ne deriva, per le equazioni ai nodi:

$$(7\text{-}461)\qquad \Sigma\mathbf{j}(p)=\Sigma\mathbf{i}(p),$$

in cui le $\mathbf{j}$ e le $\mathbf{i}$ sono le trasformate, rispettivamente, delle correnti impresse e delle correnti che si dipartono dal nodo in esame. Per le maglie si ha analogamente:



$$(7\text{-}462)\qquad \Sigma\mathbf{e}(p)=\Sigma\mathbf{v}(p),$$

in cui le $\mathbf{e}$ e le $\mathbf{v}$ sono le trasformate rispettivamente delle f.e.m. impresse e delle tensioni che insistono sui singoli componenti la maglia. Le $v$, in base a quanto esposto in (7-12) e alle proprietà delle $L$-trasformate, sono in relazione algebrica diretta con le $\mathbf{i}$ mediante le:

| | | |
|---|---|---|
| (7-463) | $\mathbf{v}=R\mathbf{i}$ | per i resistori |
| (7-464) | $\mathbf{v}=pL\mathbf{i}$ | per gli induttori |
| (7-465) | $\mathbf{v}=pM\mathbf{i}'$ | per le mutue induttanze |
| (7-466) | $\mathbf{v}=\dfrac{\mathbf{i}}{Cp}$ | per i condensatori. |

Si noti, per inciso, che le relazioni che legano le trasformate sono identiche a quelle che legano le grandezze complesse relative al regime sinusoidale di pulsazione $\omega$ ove al posto di $p$ si ponga $j\omega$.

Il procedimento da seguire per risolvere il problema mediante le $L$-trasformate risulta quindi evidente in quanto tutte le equazioni della rete si sono ridotte ad equazioni lineari a coefficienti costanti e sarà quindi facile ricavare le trasformate delle funzioni incognite in funzione delle trasformate delle funzioni note. L'operazione di anti-trasformazione, eseguita o per via diretta o con l'ausilio di tavole del tipo (7-44), conclude il procedimento.

### 7-47. Impedenze e ammettenze operatoriali.

Le equazioni di una rete lineare, scritte alle $L$-trasformate, sono delle equazioni algebriche lineari nelle quali i coefficienti sono funzioni razionali di $p$ e dei parametri costanti della rete. Si possono quindi estendere, per via formale, tutti i teoremi dimostrati per le reti in regime stazionario, con la sola avvertenza che, anziché di tensioni e correnti, si dovrà parlare delle loro trasformate e che, al posto delle resistenze, si dovranno considerare espressioni del tipo $R$, $pL$, $\frac{1}{Cp}$, $pM$, a seconda che si tratti di resistori, induttori, condensatori, mutue induttanze.

In particolare quindi per l'$n$-bipolo si individueranno sistemi del tipo:

$$
(7\text{-}471)\qquad
\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= Z_{11}(p)\mathbf{i}_1 + \dots + Z_{1n}(p)\mathbf{i}_n \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathbf{e}_n &= Z_{n1}(p)\mathbf{i}_1 + \dots + Z_{nn}(i)\mathbf{i}_n
\end{aligned}
$$

o del tipo:

$$
(7\text{-}472)\qquad
\begin{aligned}
\mathbf{i}_1 &= Y_{11}(p)\mathbf{e}_1 + \dots + Y_{1n}(p)\mathbf{e}_n \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathbf{i}_n &= Y_{n1}(p)\mathbf{e}_1 + \dots + Y_{nn}(p)\mathbf{e}_n
\end{aligned}
$$

che sono formalmente analoghi ai sistemi (1-691) e (1-692) scritti per le reti in regime stazionario. Le $Z_{rr}(p)$ sono funzioni razionali di $p$ che vengono denominate *autoimpedenze operatoriali* ed esprimono il rapporto tra la trasformata $\mathbf{e}_r$ della f.e.m. applicata alla coppia $r$-esima di morsetti e la trasformata $\mathbf{i}_r$ della corrente assorbita agli stessi morsetti quando tutte le altre coppie sono aperte. Le $Z_{rs}(p)$ sono anch'esse funzioni razionali di $p$ che assumono il nome di *mutue impedenze operatoriali* che esprimono il rapporto tra la trasformata della tensione che si presenta alla coppia $r$-esima e la trasformata $\mathbf{i}_s$ della corrente inviata nella coppia $s$-esima quando tutte le coppie, tranne la $s$-esima, sono aperte. Per le reti elettriche lineari vale la *reciprocità* per cui $Z_{rs}(p) = Z_{sr}(p)$. Definizioni duali si



danno per le $Y(p)$ del sistema (7-472) che vengono denominate *auto-ammettenze* o *mutue ammettenze operatoriali*. Si estendono inoltre, senza restrizione alcuna, i teoremi di *compensazione*, di *Cohn*, dei *generatori equivalenti*.

## 7-48. La funzione di trasferimento.

Da quanto esposto sinora risulta evidente che, per una rete lineare sollecitata da una $f(t)$, la relazione che lega la $\mathbf{f}(p)$ alla trasformata $\phi$ di un'altra qualsiasi grandezza della rete è del tipo:

$$(7\text{-}481)\qquad \phi(p) = H(p)\cdot \mathbf{f}(p).$$

Alla funzione $H(p)$ si attribuisce il nome di *funzione di trasferimento* tra la $\mathbf{f}$ e la $\phi$. Detta funzione ha un significato fisico che precisiamo subito: se la $f(t)$ è la funzione impulsiva unitaria $U(t)$, la $\mathbf{f}$ vale uno (tabella 7-44) e la $\phi$, trasformata della risposta $h(t)$ alla $U(t)$, coincide con la $H(p)$. Si può quindi concludere che la *funzione di trasferimento è la trasformata della risposta alla funzione impulsiva unitaria*. Del concetto di funzione di trasferimento farà largo uso, tra l'altro, la teoria della regolazione automatica dei sistemi lineari.

Notiamo che la sostituzione formale $p = j\omega$ porta a considerare la funzione complessa $H(j\omega)$ come il rapporto tra la rappresentazione simbolica della risposta e quella della sollecitazione, in regime sinusoidale di pulsazione $\omega$.

## 7-49. Condizioni iniziali.

Nel caso in cui all'istante zero la rete contenga dell'energia immagazzinata sotto forma elettrostatica (condensatori carichi con tensioni $V_C(0)$) ed elettromagnetica (induttori percorsi da correnti $I_L(0)$) non si possono applicare direttamente i procedimenti indicati che valgono per reti inizialmente a riposo, in quanto le $L$-trasformate sono state definite solo per funzioni nulle per $t < 0$.

La difficoltà si può superare osservando anzitutto che interessa conoscere l'andamento delle grandezze in gioco per $t > 0$ mentre, per quel che riguarda i dati iniziali, interessa solo saperne il valore ed è indifferente il modo con cui fisicamente essi sono stati realizzati: conviene quindi scegliere un modo di generazione dei dati iniziali sul quale si possa ancora agire con la $L$-trasformazione.

Nel caso degli induttori basterà disporre in serie ad ogni induttore un generatore di f.e.m. impulsiva di valore $\Phi_L = LI_L(0)$; detto generatore produce infatti istantaneamente, all'istante zero, nel relativo induttore, il flusso $\Phi_L$ che gli compete, e poi, per definizione, si estingue.

Basterà quindi tenere conto, nelle equazioni alle maglie, delle $L$-trasformate di dette f.e.m. impulsive che, come è noto, sono delle costanti pari ai valori degli impulsi. Per effetto quindi dei dati iniziali relativi agli induttori la (7-462) si tramuta nella:

$$\Sigma \mathbf{e} + \Sigma L I_L(0) = \Sigma \mathbf{v} = \Sigma Z(p)\mathbf{i}. \tag{7-491}$$

Nel caso invece di condensatori carichi con tensioni $V_C(0)$, si osserva che dette tensioni possono sorgere istantaneamente se si applicano in parallelo ai condensatori dei generatori di corrente impulsiva $\mathbf{j}$ di valore $Q_c = CV_C(0)$: detti generatori mettono in gioco infatti istantaneamente la carica $Q_c$, che compete al rispettivo condensatore, e poi si estinguono, per definizione.

Basta quindi esprimere la tensione sui condensatori come somma della caduta di tensione dovuta alla corrente che circola nel lato in cui il condensatore è inserito e della tensione provocata dalla sorgente impulsiva (fig. 7-491).

Si ha quindi, alle $L$-trasformate, tenuto conto che è:



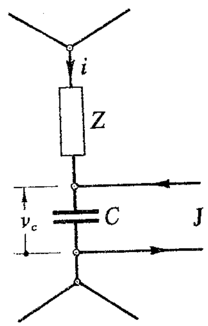



Fig. 7-491

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= Q_c = CV_C(0), \\ \mathbf{v}_c &= \frac{1}{Cp}(\mathbf{i}+\mathbf{j}) = \frac{\mathbf{i}}{Cp} + \frac{V_C(0)}{p} \end{aligned} \tag{7-492}$$

Le equazioni alle maglie per una rete inizialmente non a riposo si scrivono quindi nella forma:

$$\Sigma \mathbf{e} + \Sigma L I_L(0) - \Sigma \frac{V_C(0)}{p} = \Sigma Z(p)\mathbf{i}. \tag{7-493}$$

Nel caso in cui siano presenti mutue induttanze sarà necessario inserire, a primo membro di (7-493) i corrispondenti termini del tipo $\Sigma MI'(0)$.

La struttura delle equazioni considerate, sempre algebrica, mostra chiaramente come venga semplificata, con il calcolo operatorio, l'introduzione delle condizioni ai limiti che risultano, già in partenza, in particolare evidenza.

*Esempio.* - Nel circuito di fig. 7-341 sia presente la corrente $I(0)$ all'istante ($t = 0$) di applicazione della f.e.m.:

$$e = E_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha).$$

Per calcolare la corrente $i(t)$ si applica la (7-491) e si ottiene:

$$\mathbf{e} + LI(0) = (R + pL)\mathbf{i}.$$

La **e**, nel nostro caso vale (tab. 7-44 b9):

$$\mathbf{e} = E_M \frac{\omega \cos\alpha + p \operatorname{sen}\alpha}{p^2 + \omega^2},$$

per cui si ottiene:

$$\mathbf{i} = E_M \frac{\omega \cos\alpha + p \operatorname{sen}\alpha}{(p^2 + \omega^2)(R + pL)} + \frac{I(0)}{p + \frac{R}{L}}$$

La **i** si pone nella forma seguente, in base a quanto illustrato in (7-45):

$$\text{(7-494)} \qquad \mathbf{i} = \frac{A_1}{p - \alpha_1} + \frac{A_2}{p - \alpha_2} + \frac{A_3}{p - \alpha_3} + \frac{I(0)}{p + \frac{R}{L}},$$

ove $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, sono le radici della equazione:

$$(p^2 + \omega^2)(R + pL) = 0,$$

ovvero:

$$\alpha_1 = j\omega, \quad \alpha_2 = -j\omega, \quad \alpha_3 = -\frac{R}{L}.$$

Le costanti $A_1$, $A_2$, $A_3$ si valutano mediante la (7-453). Ponendo inoltre al solito:

$$Z^2 = R^2 + \omega^2 L^2; \quad \operatorname{sen}\phi = \frac{\omega L}{Z}; \quad \cos\phi = \frac{R}{Z},$$



si ottengono i valori complessi:

$$A_1 = \frac{1}{2j} \cdot \frac{E_M}{Z} e^{j(\alpha - \phi)};$$

$$A_2 = \check{A}_1;$$

$$A_3 = -\frac{E_M}{Z} \operatorname{sen}(\alpha - \phi).$$

Si perviene ora alla $i(t)$ antitrasformando la (7-494), e, in base alla (7-454), si ottiene $\left(T = \frac{L}{R}\right)$:

$$i(t) = A_1 e^{j\omega t} + \check{A}_1 e^{-j\omega t} + (A_3 + I_0) e^{-\frac{t}{T}}.$$

Sostituendo le espressioni trovate per le $A$, si ha infine:

$$i(t) = \frac{E_M}{Z} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha + \phi) + \left[I(0) - \frac{E_M}{Z} \operatorname{sen}(\alpha - \phi)\right] e^{-\frac{t}{T}}.$$

Questa espressione è analoga a quella trovata in (7-21 b); vi compare in più il termine dovuto alla corrente iniziale.