Università degli Studi di Cassino

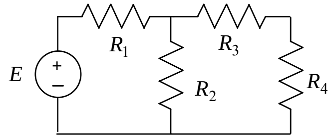
Esercitazioni di Elettrotecnica: circuiti in regime stazionario

prof. Antonio Maffucci

Ver. 3.1 – ottobre 2007

1. Serie, parallelo e partitori.

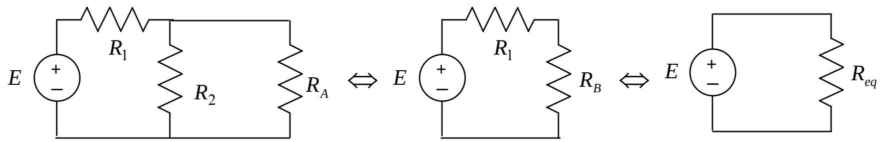
ES. 1.1 Calcolare la resistenza equivalente vista ai capi del generatore E.



$R_1 = 1\,\Omega \quad R_2 = 4\,\Omega$

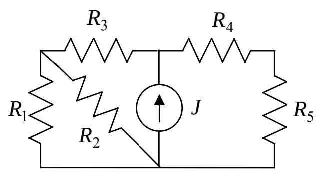
$R_3 = 3\,\Omega \quad R_4 = 2\,\Omega$

Utilizzando l'equivalenza serie e parallelo, il circuito di resistenze visto da E si può ridurre ad un unico resistore attraverso i seguenti passi:



$R_A = R_3 + R_4 = 5\,\Omega$ $\quad R_B = R_A // R_2 = \dfrac{R_A R_2}{R_A + R_2} = 2.22\,\Omega$ $\quad R_{eq} = R_B + R_1 = 3.22\,\Omega$

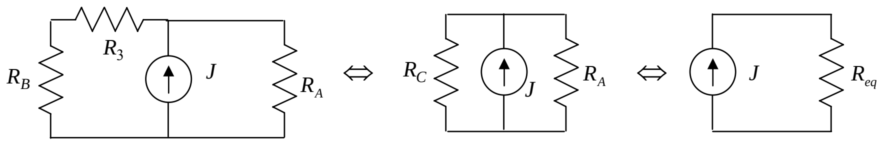
ES. 1.2 Calcolare la resistenza equivalente vista dal generatore J.



$R_1 = R_4 = 5\,\Omega \quad R_2 = 3\,\Omega$

$R_3 = R_5 = 2\,\Omega$

Utilizzando l'equivalenza serie e parallelo, il circuito di resistenze visto da E si può ridurre ad un unico resistore attraverso i seguenti passi:



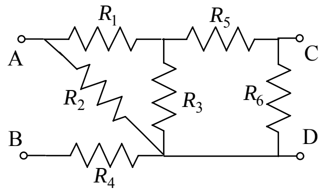
$R_A = R_4 + R_5 = 7\,\Omega$

$R_B = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 1.87\,\Omega$

$R_C = R_B + R_3 = 3.87\,\Omega$

$R_{eq} = \dfrac{R_A R_C}{R_A + R_C} = 2.49\,\Omega$

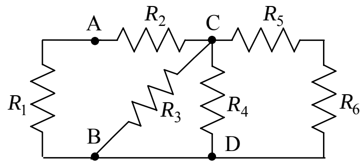
ES. 1.3 - Calcolare la R_{eq} vista ai morsetti A-B e quella vista ai morsetti C-D.



$R_1 = R_2 = 5\,\Omega \quad R_3 = 10\,\Omega$
$R_4 = 4\,\Omega \quad R_5 = 3\,\Omega$
$R_6 = 2\,\Omega$

Risultato: $R_{eqAB} = 7.125\,\Omega,\ R_{eqCD} = 1.600\,\Omega.$

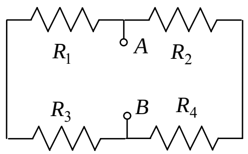
ES. 1.4 - Calcolare la R_{eq} vista ai morsetti A-B e quella vista ai morsetti C-D.



$R_1 = R_3 = 0.2\,\Omega \quad R_2 = 0.4\,\Omega$
$R_4 = R_5 = 1\,\Omega \quad R_6 = 3\,\Omega$

Risultato: $R_{eqAB} = 0.147\,\Omega,\ R_{eqCD} = 0.126\,\Omega.$

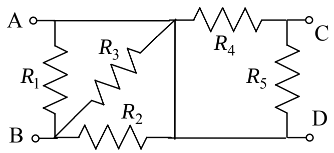
ES. 1.5 - Calcolare il valore di R_4 tale che ai morsetti A-B si abbia $R_{eq} = R$.



$R_1 = R_2 = R \quad R_3 = R/2$

Risultato: $R_4 = 2R.$

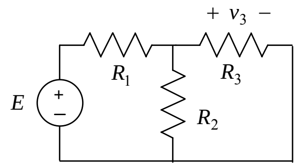
ES. 1.6 - Calcolare la R_{eq} vista ai morsetti A-B e quella vista ai morsetti C-D.



$R_1 = 2.3\ \mathrm{m\Omega} \quad R_2 = 1.4\ \mathrm{m\Omega}$
$R_3 = 1\ \mathrm{m\Omega},\ R_4 = 3\ \mathrm{m\Omega},\ R_5 = 0.8\ \mathrm{m\Omega}$

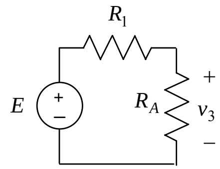
Risultato: $R_{eqAB} = 0.47\ \mathrm{m\Omega},\ R_{eqCD} = 0.63\ \mathrm{m\Omega}.$

ES. 1.7 - Calcolare la tensione v_3 usando il partitore di tensione.



$E = 220\,V$
$R_1 = 50\,\Omega$
$R_2 = R_3 = 100\,\Omega$

Il partitore di tensione si applica a due resistori in serie, quindi occorre preliminarmente ricondursi alla rete equivalente seguente:

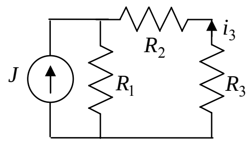


$$R_A = R_2 \,//\, R_3 = \frac{R_3 R_2}{R_3 + R_2} = 50\,\Omega$$

Applicando ora il partitore di tensione si ha:

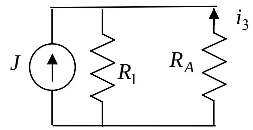
$$v_3 = E\frac{R_A}{R_A + R_1} = 110\,V.$$

ES. 1.8 - Calcolare la corrente i_3 usando il partitore di corrente.



$J = 10\ mA$
$R_1 = R_3 = 5\ \mu\Omega$
$R_2 = 3\ \mu\Omega$

Il partitore di corrente si applica a due resistori in parallelo, quindi occorre riferirsi alla rete equivalente seguente:

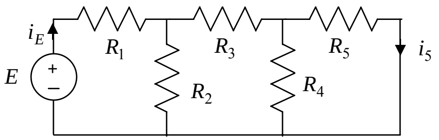


$$R_A = R_2 + R_3 = 8\ \mu\Omega$$

Applicando ora il partitore di corrente si ha (tenuto conto dei versi):

$$i_3 = -J\frac{R_1}{R_A + R_1} = -3.84\ \mathrm{mA}.$$

<u>ES. 1.9</u> - Calcolare la potenza erogata dal generatore E e quella assorbita dal resistore R_5



$E = 10\,V$

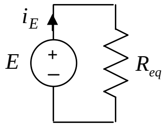
$R_1 = 10\,\Omega \quad R_2 = 2\,\Omega$

$R_3 = 3\,\Omega \quad R_4 = 5\,\Omega \quad R_5 = 2\,\Omega$

Scegliendo le correnti come in figura, le potenze richieste sono date da:

$$P_E^{erog} = Ei_E\,,\quad P_{R_5} = R_5 i_5^2\,.$$

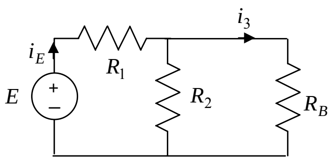
La i_E si valuta a partire dal calcolo della resistenza equivalente vista ai capi del generatore:



$$R_A = R_4 \,//\, R_5 \qquad R_B = R_3 + R_A \qquad R_C = R_B \,//\, R_2 \quad \Rightarrow \quad R_{eq} = R_1 + R_C = 11.36\,\Omega \quad \Rightarrow \quad i_E = \frac{E}{R_{eq}} = 0.88\,\mathrm{A}$$

da cui si ricava: $P_E^{erog} = 8.80\ \mathrm{W}$.

Nota la corrente i_E, si può ricavare la i_5 applicando due volte il partitore di corrente. Dapprima ricaviamo i_3 dalla rete equivalente seguente

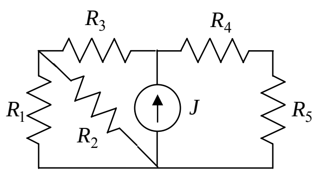


$$i_3 = i_E \frac{R_2}{R_2 + R_B}$$

quindi ricaviamo i_5 ripartendo i_3 tra i resistori R_4 ed R_5:

$$i_5 = i_3 \frac{R_4}{R_4 + R_5} = 0.19\mathrm{A} \quad \Rightarrow \quad P_{R_5} = 72.20\,mW.$$

<u>ES. 1.10</u> - Calcolare la **potenza erogata dal generatore J e quella assorbita dal resistore** R_1 **.**



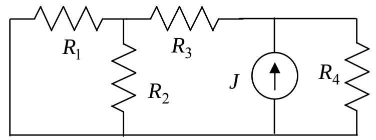
$J = 5\,A$

$R_1 = R_4 = 5\,\Omega \quad R_2 = 3\,\Omega$

$R_3 = R_5 = 2\,\Omega$

Risultato: $P_J^{erog} = 62.25\,W,\ P_{R_1} = 7.25\,W.$

<u>ES. 1.11</u> - Calcolare la potenza erogata dal generatore e quella assorbita da ogni resistore. Verificare la conservazione delle potenze.



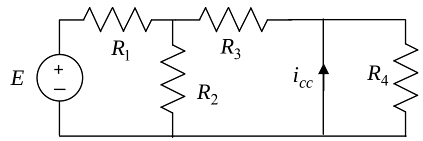
$J = 10\,A$

$R_1 = 2\,\Omega \quad R_2 = 10\,\Omega$

$R_3 = 20\,\Omega \quad R_4 = 15\,\Omega$

Risultato: $P_J^{erog} = 0.886\ \mathrm{kW}, P_{R_1} = 0.023\ \mathrm{kW}, P_{R_2} = 0.004\ \mathrm{kW}, P_{R_3} = 0.335\ \mathrm{kW}, P_{R_4} = 0.524\ \mathrm{kW}.$

<u>ES. 1.12</u> - Calcolare la corrente i_{cc} che circola nel corto-circuito.



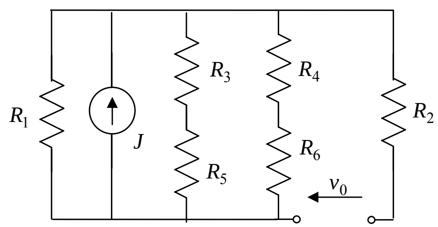
$E = 220\,V$

$R_1 = 10\,\Omega \quad R_2 = 0.1\,\mathrm{k}\Omega$

$R_3 = 25\,\Omega \quad R_4 = 2\,\mathrm{k}\Omega$

Risultato: $i_{cc} = -5.87\ \mathrm{A}.$

<u>ES. 1.13</u> - Calcolare la tensione v_0 sul circuito aperto in figura.



$J_1 = 1\,A$

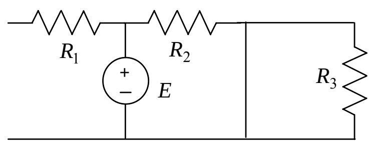
$R_1 = 10\,\Omega \quad R_2 = 10\,\Omega$

$R_3 = 15\,\Omega \quad R_4 = 5\,\Omega$

$R_5 = 30\,\Omega \quad R_6 = 25\,\Omega$

Risultato: $v_0 = -6.43\ \mathrm{V}$.

<u>ES. 1.14</u> - Valutare la potenza assorbita dai resistori della rete in figura.



$E = 10\,V$

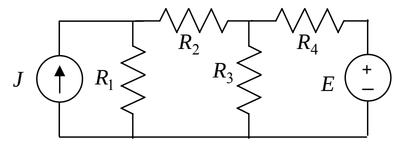
$R_1 = 10\,\Omega \quad R_2 = 1\,\Omega$

$R_3 = 100\,\Omega$

Risultato: $P_{R_1} = P_{R_3} = 0, P_{R_2} = 100\ \mathrm{W}.$

2. Sovrapposizione degli effetti.

ES. 2.1 - Calcolare la potenza totale erogata dai generatori.



$E = 10\,V \quad J = 20\,A$

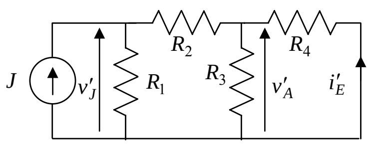
$R_1 = R_2 = 3\,\Omega$

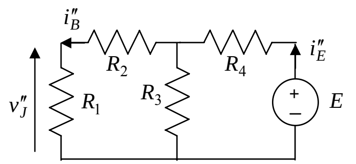
$R_3 = 2\,\Omega \quad R_4 = 5\,\Omega$

Adottando la convenzione del generatore sui due generatori della rete, la potenza erogata da ciascuno di essi sarà data da:

$$P_E^{erog} = E i_E, \quad P_J^{erog} = J v_J .$$

La tensione v_J e la corrente i_E si possono valutare applicando la sovrapposizione degli effetti, risolvendo i due circuiti ausiliari ottenuti considerando un solo generatore acceso:





Con riferimento al primo circuito ausiliario, il contributo v'_J è ottenuto valutando la resistenza equivalente vista dal generatore:

$$R_{eq_J} = (R_3 // R_4 + R_2) // R_1 = 1.79\,\Omega \quad \Rightarrow \quad v'_J = R_{eq_J} J = 35.80 V.$$

Per valutare i'_E si può utilizzare la tensione v'_A sul parallelo $R_A = R_3 // R_4$:

$$v'_A = v'_J \frac{R_A}{R_2 + R_A} \quad \Rightarrow \quad i'_E = -\frac{v'_A}{R_4} = -2.31\,A$$

(nell'ultimo passaggio si è tenuto conto della convenzione adottata su R_4). Nel secondo circuito ausiliario, il contributo i''_E è ottenuto valutando la resistenza equivalente vista dal generatore:

$$R_{eq_E} = (R_1 + R_2) // R_3 + R_4 = 6.50\,\Omega \quad \Rightarrow \quad i''_E = E / R_{eq_E} = 1.54\,A.$$

Per valutare v''_J è utile passare attraverso il calcolo della corrente i''_B della serie $R_B = R_1 + R_2$:

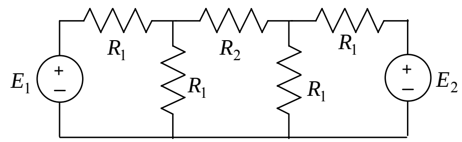
$$i''_B = i''_E \frac{R_3}{R_B + R_3} \quad \Rightarrow \quad v''_J = R_1 i''_B = 1.14\,V .$$

Se ne conclude che:

$$P_E^{erog} = E i_E = E(i'_E + i''_E) = -7.70\,\mathrm{W}, \quad P_J^{erog} = J v_J = J(v'_J + v''_J) = 0.74\,\mathrm{kW}.$$

(Si osservi che in questa rete il generatore di tensione sta assorbendo potenza elettrica positiva).

ES. 2.2 - Calcolare la potenza totale erogata dai generatori.

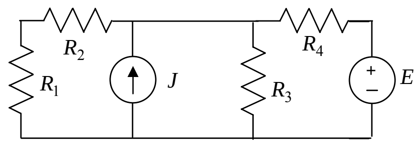


$E_1 = 10$ V, $E_2 = 20$ V

$R_1 = 2\,\Omega$, $R_2 = 1\,\Omega$

Risultato: $P_{E_1}^{erog} = 16.67$ W, $P_{E_2}^{erog} = 0.12$ kW.

ES. 2.3 - Calcolare la potenza totale erogata dai generatori.



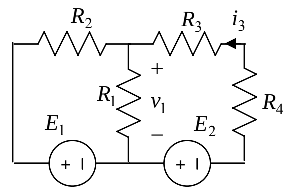
$E = 50\,V \quad J = 20\,A$

$R_1 = 1\,\Omega \quad R_2 = 5\,\Omega$

$R_3 = R_4 = 10\,\Omega$

Risultato: $P_E^{erog} = -0.09$ kW, $P_J^{erog} = 1.36$ kW.

ES. 2.4 - Calcolare la tensione v_1 e la corrente i_3.

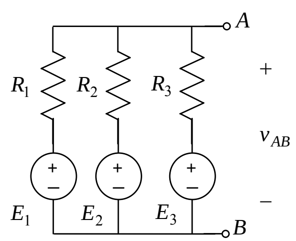


$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2\,\Omega$

$E_1 = 5$ V, $E_2 = 2$ V

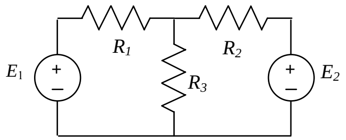
Risultato: $v_1 = 1.60$ V, $i_3 = -0.90$ A.

ES. 2.5 - Utilizzando la sovrapposizione degli effetti, dimostrare la Formula di Millmann.



$$v_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

ES. 2.6 - Determinare la potenza erogata dal generatore E_1.

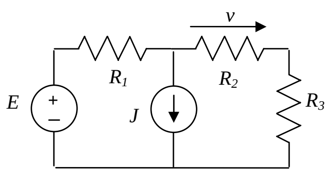


$E_1 = 5\,V,\; E_2 = 12,$

$R_1 = 3.5\,\Omega,\; R_2 = 2.3\,\Omega,\; R_3 = 3.2\,\Omega.$

Risultato: $P_{E_1}^{erog} = -2.05$ W.

ES. 2.7 - Utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, determinare la tensione v.

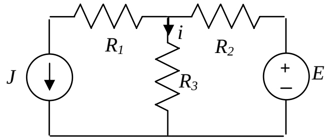


$E = 5\,V,\; J = 2\,mA$

$R_1 = 3\,\text{k}\Omega,\; R_2 = 2.4\,\text{k}\Omega,\; R_3 = 3.2\,\text{k}\Omega$

Risultato: $v = 0.28$ V.

ES. 2.8 - Utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, determinare la corrente i e la potenza assorbita da R_3

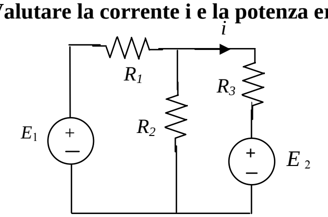


$E = 10\,V,\; J = 1\,mA$

$R_1 = 3.2\,\text{k}\Omega,\; R_2 = 2.2\,\text{k}\Omega,\; R_3 = 3.5\,\text{k}\Omega$

Risultato: $i = 1.37$ mA, $P = 6.57$ mW.

ES. 2.9 - Valutare la corrente i e la potenza erogata dal generatore E_1.



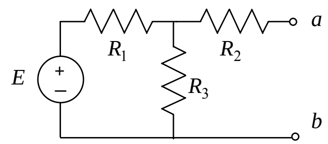
$E_1 = 10\,V,\quad E_2 = 20\,V$

$R_1 = 5\,\Omega,\quad R_2 = 20\,\Omega,\quad R_3 = 10\,\Omega$

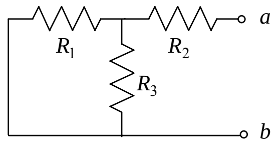
Risultato: $i = -0.86$ A, $P_{E_1}^{erog} = -2.86$ W.

3. Generatori equivalenti di Thévenin e di Norton.

ES. 3.1 - Calcolare l'equivalente di Thévenin visto ai capi dei morsetti a-b.



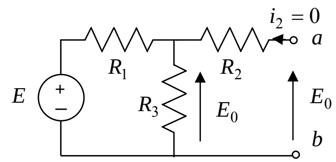
La resistenza equivalente si ottiene spegnendo l'unico generatore, quindi studiando la rete seguente



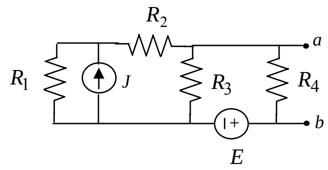
$$R_{eq} = R_2 + R_1 // R_3 = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}.$$

La tensione a vuoto E_0 si ottiene valutando la tensione tra i morsetti aperti. Tenuto conto che in queste condizioni non circola corrente sul resistore R_2 è evidente che la E_0 è anche la tensione su R_3. Poiché R_1 ed R_3 sono in serie, la tensione E_0 si può ricavare da un semplice partitore di tensione:

$$E_0 = E\frac{R_3}{R_1 + R_3}.$$



ES. 3.2 - Calcolare l'equivalente di Norton visto ai capi dei morsetti a-b.



$J = 20\,A \qquad E = 10\,V$

$R_1 = R_2 = 2\,\Omega$

$R_3 = R_4 = 4\,\Omega$

La resistenza equivalente si ottiene spegnendo i generatori:

$$R_{eq} = R_4 //[R_3 //(R_1 + R_2)] = 1.33\,\Omega$$

La corrente I_{cc} è la corrente che circola da a a b quando i due morsetti sono in corto-circuito. Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, il contributo I'_{cc} dovuto al solo generatore di corrente si valuta sostituendo il generatore di tensione con un corto-circuito e applicando la formula del partitore di corrente:

$$I'_{cc} = J\frac{R_1}{R_1+R_2} = 10\ A$$

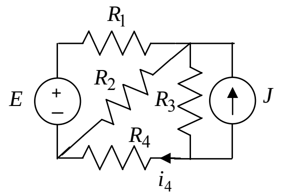
(si noti che R_3 ed R_4 sono cortocircuitate). Il contributo I''_{cc} dovuto al generatore di tensione si valuta sostituendo il generatore di corrente con un circuito aperto. In questo circuito I''_{cc} è proprio la corrente che circola nel generatore di tensione (si noti che su tale generatore è fatta la convenzione dell'utilizzatore):

$$I''_{cc} = -\frac{E}{R_E} = -5\ A,$$

dove $R_E = (R_1 + R_2)\,//\,R_3 = 2\,\Omega$. Pertanto la I_{cc} sarà

$$I_{cc} = I'_{cc} + I''_{cc} = 5\ A.$$

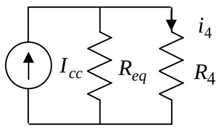
ES. 3.3 - Utilizzando l'equivalente di Norton calcolare la corrente che circola in R_4.



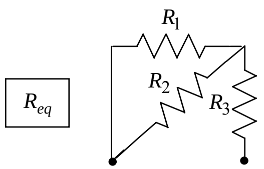
$E = 54\ V$
$J = 10\ A$
$R_1 = 6\,\Omega \quad R_2 = R_3 = 4\,\Omega$
$R_4 = 12\,\Omega$

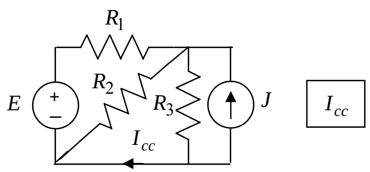
Riducendo la rete vista ai capi di R_4 con il teorema di Norton, si ottiene la rete seguente, dalla quale si evince che

$$i_4 = I_{cc}\frac{R_{eq}}{R_{eq}+R_4}.$$



I circuiti per valutare i parametri di Norton sono riportati di seguito:





Si avrà allora

$$R_{eq} = R_1\,//\,R_2 + R_3 = 6.40\,\Omega.$$

La corrente I_{cc} si può valutare applicando il principio di sovrapposizione degli effetti. Il contributo I'_{cc} dovuto al solo generatore di corrente si valuta sostituendo il generatore di tensione con un corto-circuito e applicando la formula del partitore di corrente:

$$I'_{cc} = -J\frac{R_3}{R_3 + (R_1\,//\,R_2)} = -6.250\ \text{A}$$

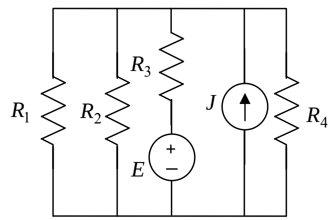
Il contributo I''_{cc} dovuto al generatore di tensione si valuta sostituendo il generatore di corrente con un circuito aperto. Applicando il partitore di tensione si può ricavare la tensione sul parallelo $R_p = R_2\,//\,R_3$ e quindi ricavare la corrente richiesta (che circola in R_3).

$$v''_p = E\frac{R_p}{R_1+R_p} \quad \Rightarrow \quad I''_{cc} = \frac{v''_p}{R_3} = 3.375\ \text{A}.$$

Si ottiene in definitiva

$$I_{cc} = I'_{cc} + I''_{cc} = -2.875\ \text{A} \qquad \Rightarrow \qquad i_4 = -1.000\ \text{A}.$$

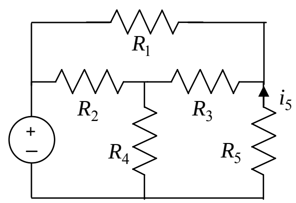
ES. 3.4 - Utilizzando il teorema di Thévenin calcolare la potenza assorbita dal resistore R_2.



$E = 1\,V \quad J = 2\ mA$
$R_1 = R_2 = 1\ k\Omega \quad R_3 = 2\ k\Omega$
$R_4 = 5\ k\Omega$

Risultato: $P_{R_2} = 0.85\ mW$.

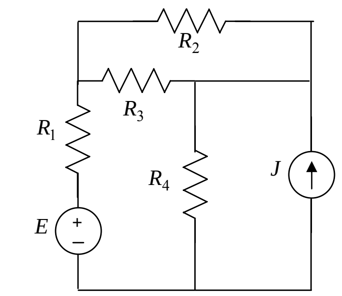
ES. 3.5 - Utilizzando il teorema di Thévenin calcolare la corrente i_5.



$E = 12\,V$
$R_1 = R_3 = 0.2\ k\Omega$
$R_2 = 0.6\ k\Omega$
$R_4 = R_5 = 0.4\ k\Omega$

Risultato: $i_5 = -18\ mA$.

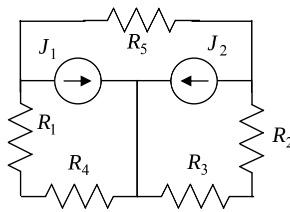
ES. 3.6 - Utilizzando il teorema di Norton calcolare la potenza assorbita dal resistore R_3.



$E = 5\,V$
$J = 1\,\mu A$
$R_1 = R_3 = 2\,M\Omega$
$R_2 = 800\,k\Omega$
$R_4 = 300\,k\Omega$

Risultato: $P_{R_3} = 0.43\,\mu W$.

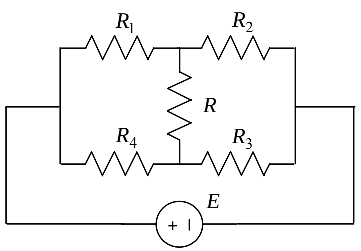
ES. 3.7 - Utilizzando il teorema di Thévenin calcolare la potenza assorbita da R_5.



$J_1 = 2$ mA
$J_2 = 1$ mA
$R_1 = R_2 = 2$ kΩ
$R_3 = R_5 = 10$ kΩ
$R_4 = 3$ kΩ

Risultato: $P_{R_5} = 54.87\,\mu W$.

ES. 3.8 - Verificare che il resistore R non è percorso da corrente se tra le resistenze vi è la seguente relazione (ponte di Wheatstone):

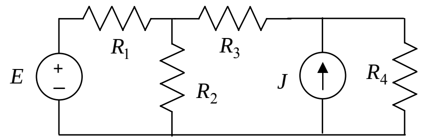


$$\frac{R_1}{R_4} = \frac{R_2}{R_3}$$

(Suggerimento: applicare Norton ai capi di R ed imporre che sia nulla la corrente I_{cc})

4. Esercizi di riepilogo

ES. 4.1 - Calcolare la potenza erogata dai due generatori e la potenza assorbita dai resistori (verificare la conservazione delle potenze).

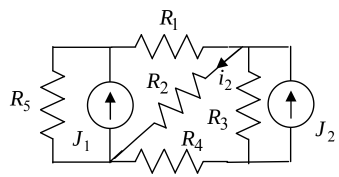


$E = 50\,V \quad J = 60\,A$
$R_1 = 5\,\Omega \quad R_2 = 40\,\Omega$
$R_3 = 80\,\Omega \quad R_4 = 120\,\Omega$

Risultato: Adottando la convenzione del generatore sui due generatori e quella normale sui resistori si ha:

$P_E^{erog} = -1.50\,kW$, $P_J^{erog} = 180.00\,kW$
$P_{R_1} = 4.50\,kW$ $P_{R_2} = 1.00\,kW$, $P_{R_3} = 98.00\,kW$, $P_{R_4} = 75.00\,kW$

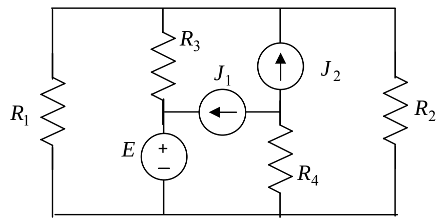
ES. 4.2 - Calcolare la corrente in R_2.



$J_1 = 10\,A$
$J_2 = 5\,A$
$R_1 = 2\,\Omega \quad R_2 = R_3 = 3\,\Omega$
$R_4 = R_5 = 5\,\Omega$

Risultato: $i_2 = 5\,A$.

ES. 4.3 - Calcolare la potenza erogata da ciascun generatore della rete.



$J_1 = J_2 = 1$ mA, $E = 2$ mV
$R_1 = 0.3\,\Omega \quad R_2 = 0.2\,\Omega$
$R_3 = 0.4\,\Omega \quad R_4 = 0.5\,\Omega$

Risultato: $P_E^{erog} = 5.2\,\mu$W, $P_{J_1}^{erog} = 3.0\,\mu$W, $P_{J_2}^{erog} = 1.6\,\mu$W.