



Università degli Studi di Cassino

Note sull'elettrostatica

prof. Antonio Maffucci

www.docente.unicas.it/antonio_maffucci

Ver.1.0 - novembre 2010

1. Concetti introduttivi

1.1 Equazioni dell'elettrostatica nei mezzi lineari.

Le equazioni dell'elettrostatica nei mezzi sono:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = 0 \quad \forall \gamma \quad (1)$$

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = Q_{\Sigma} \quad \forall S \quad (2)$$

dove \mathbf{E} è il campo elettrico (misurato in V/m) e \mathbf{D} è il campo induzione elettrica (misurato in C/m²), γ è una qualsiasi linea chiusa (di cui $\hat{\mathbf{t}}$ è il versore tangente), S una qualsiasi superficie chiusa (di cui $\hat{\mathbf{n}}$ il versore normale uscente) Q_{Σ} è la carica elettrica contenuta in S .

L'equazione (1) è la *legge di Faraday-Neumann* in condizioni stazionarie: da tale equazione discende la proprietà di *conservatività* del campo elettrico e quindi¹:

- l'indipendenza della tensione elettrica tra due punti A e B dal cammino scelto per valutarla:

$$v_{AB} \equiv \int_A^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl; \quad (3)$$

- la possibilità di introdurre un campo scalare *potenziale elettrico* $V(P)$, definito come

$$V(P) \equiv \int_P^{\infty} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl \Rightarrow v_{AB} = V(A) - V(B). \quad (4)$$

L'equazione (2) è la *legge di Gauss* per il campo elettrico ed è valida in tale forma sia in condizioni stazionarie che generali. Nella (2) la grandezza Q_{Σ} è la carica netta *contenuta* nel volume delimitato dalla superficie chiusa Σ . Se è nota la distribuzione di carica in una regione di spazio, allora l'equazione integrale (2) consente il calcolo del campo elettrico generato da tale carica.

Il legame tra campo di induzione \mathbf{D} e campo elettrico \mathbf{E} dipende dal dielettrico considerato e può essere anche molto complesso. Nel seguito faremo riferimento a materiali dielettrici lineari, omogenei ed isotropi, per i quali il legame si riduce a:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (5)$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m è il valore assunto nel SI dalla *costante dielettrica nel vuoto*, mentre ϵ_r è la costante dielettrica relativa. I materiali considerati nel seguito sono caratterizzati da $\epsilon_r \geq 1$. Ovviamente nel vuoto si ha $\epsilon_r = 1$.

Tabella 1 – Costante dielettrica relativa di alcuni materiali

Materiali	ϵ_r
Carta	2÷2.5
Porcellana	5÷7
Aria	1.00059
Vetro ordinario	5÷7.6
Mica	5.7÷6.5
Olio per trasformatori	2.2
Acqua distillata	80.1

¹ Si veda la dispensa on-line: "Note su alcuni concetti di base dell'elettromagnetismo", Maffucci e Villone.

La Legge di Gauss in un dielettrico lineare, omogeneo e isotropo quindi, si può esprimere come:

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{Q_{\Sigma}}{\epsilon} \quad \forall S, \quad (6)$$

dove $\epsilon = \epsilon_0$ nel caso del vuoto.

1.1 Conduttori in equilibrio elettrostatico

Si consideri un conduttore isolato: diremo che tale conduttore è in *equilibrio elettrostatico* quando in esso non si riscontra alcun moto macroscopico di cariche. Questa condizione di equilibrio è ottenuta quando la somma di tutte le forze che agiscono sulle cariche è nulla, e siccome in un conduttore le cariche sono libere di muoversi, questo può accadere solo se il campo elettrico macroscopico è nullo in ogni punto interno del conduttore, Fig.1.

Applicando la legge di Gauss (2) è immediato mostrare che in queste condizioni la carica si distribuisce solo sulla superficie del conduttore. Supponiamo per assurdo che all'interno del conduttore vi sia carica volumica Q (Fig.1b). E' allora possibile scegliere una superficie chiusa Σ che contenga Q e sia contenuta nel volume del conduttore. Poiché il campo \mathbf{E} è nullo nel conduttore, l'equazione (2) avrebbe un primo membro uguale a zero ed un secondo membro diverso da zero, da cui l'assurdo. Un'ulteriore conseguenza è che il campo elettrico nella regione esterna al conduttore è normale alla superficie dello stesso.

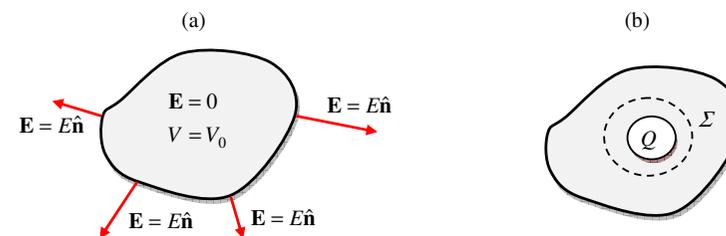


Fig. 1. Conduttore in equilibrio elettrostatico.

In un conduttore in equilibrio elettrostatico, quindi:

- il campo elettrico nei punti interni è nullo;
- il campo elettrico sulla superficie è normale alla superficie stessa;
- tutta la carica si distribuisce sulla superficie;
- tutti i punti del conduttore sono equipotenziali, inclusi i punti giacenti sulla superficie

2. Campo elettrico per distribuzioni canoniche di carica

2.1 Carica puntiforme e carica distribuita su una sfera.

Si consideri una carica elettrica Q (positiva) posta in un punto O , e si assuma che la carica sia isolata in un dielettrico lineare, omogeneo e isotropo (ad esempio nel vuoto). Sperimentalmente si rileva che le linee di forza del campo \mathbf{E} si sviluppano radialmente, come descritto in fig.2a.

Per valutare il valore del campo in un generico punto P , riferiamoci ad un sistema di coordinate sferiche (r, θ, φ) con centro nella posizione O occupata dalla carica Q . Per quanto detto in precedenza, il campo elettrico ha solo componente radiale. Per la simmetria della configurazione, inoltre, il campo non dipende dalle coordinate angolari (θ, φ) , per cui si ha $\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}}$. Scegliamo ora la superficie sferica S di centro O e raggio r , quindi la superficie sferica su cui giace P , ed applichiamo ad essa la Legge di Gauss (6), tenendo conto che con tale scelta la normale alla superficie S coincide con $\hat{\mathbf{r}}$

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oiint_S E(r)\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} dS = \oiint_S E(r) dS = E(r) \oiint_S dS = E(r) 4\pi r^2. \quad (7)$$

Nei passaggi precedenti si è tenuto conto che l'integrando è costante sulla superficie S . Usando (6) e (7) si ottiene facilmente l'espressione del campo nel punto P :

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}. \quad (8)$$

Valutiamo anche il potenziale elettrico in P , applicando la definizione (4): potendo scegliere arbitrariamente il cammino da P all'infinito, scegliamo la direzione radiale, in modo che $\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{r}}$:

$$V(r) \equiv \int_r^{+\infty} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_r^{+\infty} E(r)\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} dr = \int_r^{+\infty} E(r) dr = \int_r^{+\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[-\frac{1}{r} \right]_r^{+\infty} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}. \quad (9)$$

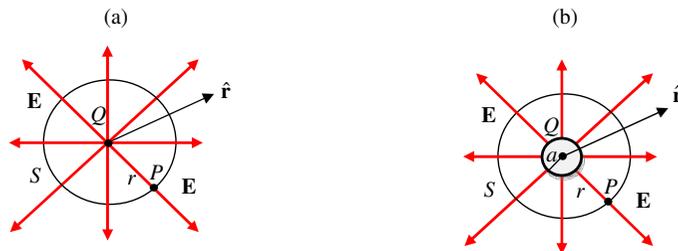


Fig. 2. Campo elettrico prodotto da una carica puntiforme (a) e da una sfera conduttrice uniformemente carica (b).

Consideriamo ora la situazione descritta in Fig.2b, assumendo che la carica Q sia distribuita uniformemente sulla superficie di un conduttore sferico di raggio a , all'equilibrio. Per quanto detto in precedenza, all'interno del conduttore il campo è nullo. Vista la simmetria sferica e l'uniformità della distribuzione di carica, all'esterno del conduttore sferico le linee di forza del campo elettrico saranno le stesse viste nel caso di carica puntiforme. Pertanto, il campo elettrico in un generico

punto P a distanza r dall'origine, con $r \geq a$, sarà calcolabile con lo stesso approccio usato in precedenza, scegliendo cioè la superficie sferica S passante per P ed applicando la Legge di Gauss. In questa situazione, quindi, il modulo del campo ed il potenziale elettrico saranno espressi da:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} & r \geq a \end{cases} \quad V(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon a} & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon r} & r \geq a \end{cases} \quad (10)$$

L'andamento del modulo del campo elettrico e del potenziale è riportato in fig.3. All'esterno della sfera il campo ed il potenziale sono gli stessi che si otterrebbero considerando l'intera carica Q concentrata nel centro della sfera. All'interno della sfera conduttrice, invece, il campo elettrico è nullo ed il potenziale assume valore costante.

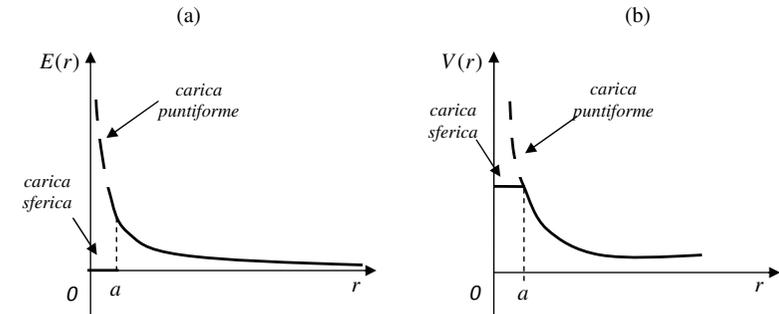


Fig. 3. Modulo del campo elettrico (a) e potenziale elettrico (b) prodotti da una carica puntiforme e da una sfera conduttrice uniformemente carica.

2.2 Carica distribuita su un cilindro infinito.

Si consideri una carica elettrica positiva distribuita uniformemente sulla superficie di un cilindro conduttore all'equilibrio, di lunghezza infinita e raggio a (fig.4). Si assuma che il cilindro sia immerso in un dielettrico lineare, omogeneo e isotropo (ad esempio nel vuoto). Sperimentalmente si rileva che le linee di forza del campo elettrico si sviluppano in direzione ortogonale all'asse del cilindro (fig.4a), che corrisponde alla direzione radiale in un piano $z = \text{cost}$ (fig.4b), assumendo un sistema di riferimento cilindrico (r, θ, z) .

Per quanto detto in precedenza, il campo elettrico è nullo in tutti i punti interni al cilindro, quindi per $r < a$. Valutiamo il valore del modulo del campo \mathbf{E} in un generico punto P posto a distanza $r \geq a$ rispetto all'asse del cilindro. Siccome supponiamo che il cilindro sia infinito, possiamo escludere la dipendenza dalla coordinata z . Inoltre, per la simmetria della configurazione e per l'uniformità della distribuzione di carica, il campo non può dipendere dalla coordinata angolare θ , per cui si ha $\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}}$. Scegliamo ora la superficie cilindrica S , coassiale con il cilindro carico, avente raggio r e lunghezza finita l . Con tale scelta il punto P giace su S . La superficie S è l'unione della superficie laterale S_L e delle superfici di base S_A e S_B . Tenendo conto che su queste due ultimi il campo elettrico è ortogonale alla normale, il flusso del campo elettrico attraverso S sarà:

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_{S_L} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \iint_{S_A} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \iint_{S_B} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_{S_L} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (11)$$

e poiché sulla superficie S_L la normale coincide con $\hat{\mathbf{r}}$, quindi:

$$\iint_{S_L} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_{S_L} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{r}} dS = \iint_{S_L} E(r) \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} dS = \iint_{S_L} E(r) dS = E(r) \iint_{S_L} dS = E(r) 2\pi r l, \quad (12)$$

per cui la Legge di Gauss fornisce:

$$E(r) 2\pi r l = \frac{Q}{\epsilon}, \quad (13)$$

essendo Q la carica contenuta nel tratto di lunghezza l del cilindro carico. Introducendo la carica per unità di lunghezza $Q' = Q/l$, il modulo del campo elettrico nel generico punto P varrà:

$$E(r) = \frac{Q'}{2\pi\epsilon r}, \quad r \geq a. \quad (14)$$

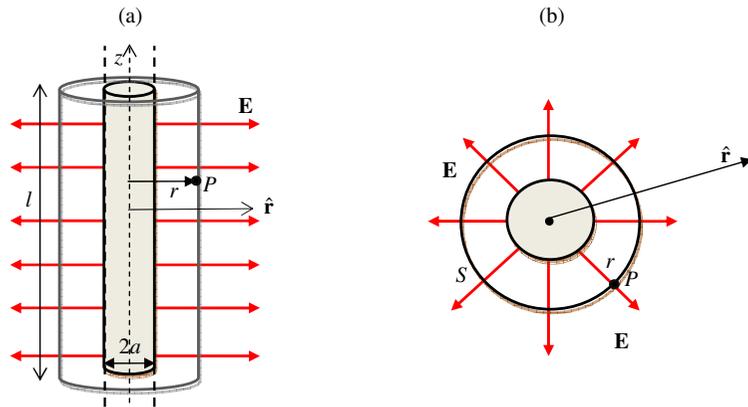


Fig. 4. Campo prodotto da una distribuzione cilindrica di carica.

2.3 Carica distribuita su una lamina piana infinita.

Si consideri ora una carica elettrica positiva distribuita uniformemente sulla superficie di una lamina piana conduttrice e immersa in un dielettrico lineare, omogeneo e isotropo (ad esempio nel vuoto) e si assuma un sistema di coordinate cartesiane (fig.5). La lamina è infinita nelle direzioni y e z , ed ha spessore finito pari a d nella direzione x . Sperimentalmente si rileva che le linee di forza del campo elettrico sono ortogonali alla lamina, come illustrato in fig.5.

Il campo elettrico è nullo in tutti i punti interni al cilindro, quindi per $x < d/2$. Valutiamo il valore del modulo del campo \mathbf{E} in un generico punto P avente $x \geq d/2$. Per le ipotesi assunte, il campo non può dipendere dalle coordinate y e z , per cui si ha $\mathbf{E} = E(x)\hat{\mathbf{x}}$. Scegliamo ora come superficie chiusa S un parallelepipedo che includa parte della lamina al suo interno ed abbia spessore $2x$ nella direzione x , in modo cioè che il punto P giaccia sulla superficie di tale parallelepipedo, fig.5. La

superficie S è l'unione di 3 coppie di superfici, ottenute rispettivamente nei piani $x-y$, $x-z$ e $y-z$. Le normali alle superfici giacenti nei piani $x-y$ e $x-z$ sono ortogonali al campo elettrico, mentre le normali alle 2 superfici nel piano $y-z$ hanno la stessa direzione del versore $\hat{\mathbf{x}}$, quindi del campo. Pertanto, il flusso del campo elettrico attraverso S si può scrivere come:

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_{S_{yz}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_{S_{yz}} E(x) \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} dS + \iint_{S_{yz}} E(-x) \hat{\mathbf{x}} \cdot (-\hat{\mathbf{x}}) dS. \quad (15)$$

Per motivi di simmetria deve essere $E(-x) = -E(x)$, quindi la (15) diviene:

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 2 \iint_{S_{yz}} E(x) \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} dS = 2 \iint_{S_{yz}} E(x) dS = 2E(x)A, \quad (16)$$

dove A è l'area della superficie piana nel piano $y-z$ della porzione di lamina carica contenuta nel parallelepipedo S . Applicando la legge di Gauss (6) si ottiene il modulo del campo nel punto P:

$$E = \frac{Q}{A \epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon}, \quad (17)$$

essendo Q la carica distribuita su A . Nella (16) è stata anche introdotta la densità superficiale di carica $\sigma = Q/A$ [C/m^2]. Si osservi che il campo elettrico è costante ed uniforme in tutto lo spazio esterno alla lamina.

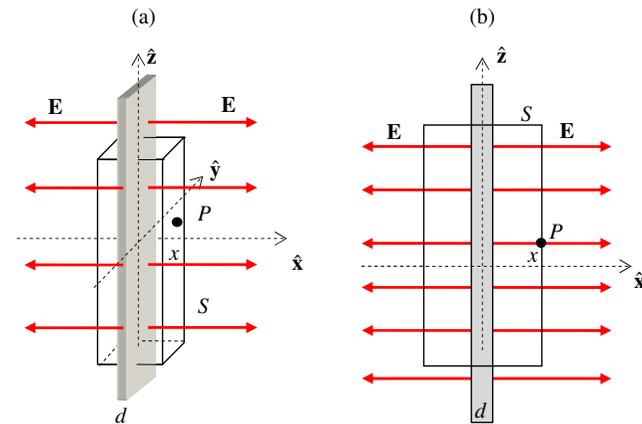


Fig. 5. Campo prodotto da una distribuzione piana di carica.

3. Capacità elettrica e condensatori.

3.1 Capacità di un conduttore isolato.

Per quanto detto al paragrafo 1.1, all'equilibrio elettrostatico ogni punto di un conduttore è equipotenziale, ivi compresi i punti sulla sua superficie. Si consideri il potenziale del conduttore riferito all'infinito (chiamiamolo V_0). Definiamo *capacità elettrica* del conduttore isolato rispetto all'infinito il rapporto tra la carica depositata sul conduttore ed il potenziale del conduttore riferito all'infinito:

$$C = \frac{Q}{V_0}, \quad (18)$$

L'unità di misura della capacità è il coulomb/volt che assume il nome di *farad* (F).

Esempio: capacità di una sfera conduttrice isolata.

Si consideri come esempio una sfera conduttrice di raggio a , sulla cui superficie è distribuita uniformemente una carica Q . Il potenziale a cui si porta il conduttore sferico è dato dalla (10), per cui applicando la definizione (18) si ottiene la capacità di una sfera isolata di raggio a

$$C = \frac{Q}{V_0} = 4\pi\epsilon a. \quad (19)$$

Si noti che tale parametro dipende dalla sola geometria del conduttore e dal materiale dielettrico che lo circonda e non, ad esempio, dal particolare materiale conduttore della sfera stessa. Nelle ipotesi sui materiali dielettrici richiamate precedentemente, tale risultato è del tutto generale.

3.2 Il condensatore

Si consideri un sistema elettrostatico costituito da due conduttori immersi in un dielettrico con costante ϵ (Fig.6). Si assuma che le cariche elettriche sui due conduttori abbiano uguale valore assoluto e segno opposto. Le linee di forza del campo elettrico prodotto da tale sistema sono visualizzate qualitativamente in figura: alcune di esse hanno origine sulla superficie del conduttore caricato positivamente e terminano sulla superficie del conduttore negativo, altre invece si chiudono all'infinito.

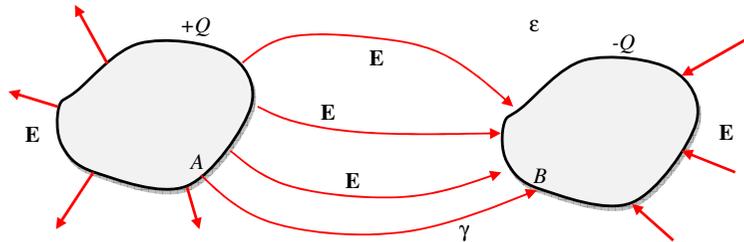


Fig. 6. Sistema elettrostatico a due conduttori.

Un sistema del tipo descritto in figura, nel quale sia possibile trascurare il contributo delle linee di forza che si chiudono all'infinito è detto *condensatore* ed i suoi conduttori sono dette *armature*. La

capacità elettrica del condensatore è definita come il rapporto tra il valore assoluto della carica su una delle due armature e la tensione tra le armature:

$$C = \frac{Q}{v_{AB}} = \frac{Q}{V(A) - V(B)}. \quad (20)$$

Per quanto detto in precedenza, la tensione può essere valutata a partire da qualsiasi punto A dell'armatura positiva, fino a qualsiasi punto B di quella negativa, indipendentemente dal cammino γ scelto per valutare l'integrale (4) che la definisce.

3.3 Il condensatore sferico

Un condensatore sferico è costituito da due armature sferiche concentriche, Fig.7, con un dielettrico di costante ϵ nell'intercapedine. Supponiamo di distribuire uniformemente una carica $+Q$ sulla sfera interna (di raggio R_i) e una carica $-Q$ sulla superficie interna dell'armatura sferica esterna (di raggio R_e). In questa ipotesi, il campo prodotto nell'intercapedine sarà il campo prodotto dalla sola carica positiva $+Q$, supposta concentrata nel centro della sfera. Ricordando quanto detto nel par. 2.1, si ha:

$$\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\hat{\mathbf{r}}. \quad (21)$$

Si noti che, avendo supposto le due distribuzioni uniformi, in qualsiasi punto posto a distanza $r > R_e$ risulterà $\mathbf{E} = 0$. Scegliendo come cammino di integrazione il segmento che collega due punti qualsiasi delle due armature secondo la direzione radiale (Fig.7b) si ha:

$$v_{AB} \equiv \int_A^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_{R_i}^{R_e} E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_i}^{R_e} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_i} \right), \quad (22)$$

per cui la capacità del condensatore sferico sarà data da:

$$C = \frac{4\pi\epsilon}{\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e} \right)}. \quad (23)$$

Si noti che per $R_e \rightarrow \infty$ (cioè spostando all'infinito l'armatura negativa) si ottiene il valore della capacità di una sfera conduttrice isolata (9).

Benché realizzi una condizione ideale (tutte le linee di forza del campo elettrico sono contenute nell'intercapedine tra le armature), un condensatore sferico è di scarsa utilità pratica per la difficoltà di rendere accessibile l'armatura interna.



Fig. 7. Condensatore sferico

3.3 Il condensatore cilindrico

Un condensatore cilindrico è costituito da due armature cilindriche coassiali di lunghezza l , con un dielettrico di costante ϵ nell'intercapedine, come mostrato in Fig.8. Supponiamo di distribuire uniformemente una carica $+Q$ sul cilindro interno (di raggio R_i) e una carica $-Q$ sulla superficie interna dell'armatura cilindrica esterna (di raggio R_e). Supponiamo inoltre di poter assumere che il campo elettrico prodotto nell'intercapedine sia approssimabile col campo prodotto da distribuzioni di carica cilindrica di lunghezza infinita. Questa ipotesi è tanto più accettabile quanto più elevato è il rapporto di aspetto, cioè $l/R_e \gg 1$. In tal caso, il campo prodotto nell'intercapedine sarà il campo prodotto da una distribuzione cilindrica infinita carica (vedi par.2.2):

$$\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}} = \frac{Q}{l} \frac{1}{2\pi\epsilon r} \hat{\mathbf{r}}, \quad (24)$$

dove $\hat{\mathbf{r}}$ indica il versore della coordinata radiale in un sistema di riferimento cilindrico (quindi ortogonale all'asse z che coincide con l'asse dei cilindri).

Nella sezione trasversale (z costante) si ha la situazione descritta in Fig.8b: scegliendo come cammino di integrazione il segmento che collega due punti qualsiasi delle due armature secondo la direzione radiale (Fig.8b) si ha:

$$v_{AB} \equiv \int_A^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_{R_i}^{R_e} E(r) dr = \frac{Q}{l2\pi\epsilon} [\ln(r)]_{R_i}^{R_e} = \frac{Q}{l2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right), \quad (25)$$

per cui la capacità del condensatore cilindrico di lunghezza l è data da:

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}. \quad (26)$$

Per questa configurazione si fa comunemente riferimento alla capacità per unità di lunghezza del condensatore, espressa, perciò, in F/m:

$$C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}. \quad (27)$$

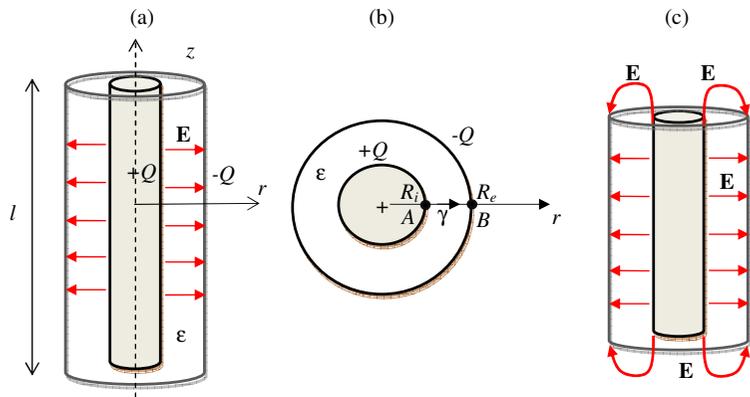


Fig. 8. Condensatore cilindrico

Si noti che, a differenza dei condensatori sferici, per questi condensatori l'ipotesi di considerare il campo completamente confinato nell'intercapedine delle armature è rigorosamente vera solo per strutture infinite. Nel caso reale le linee di forza del campo in prossimità dei bordi si curvano come indicato qualitativamente in Fig.8c. Tali effetti (*effetti di bordo*) possono essere più o meno trascurabili a seconda delle applicazioni pratiche (ad esempio potrebbero comportare fenomeni di accoppiamento capacitivo indesiderato con altri dispositivi presenti in quella regione di spazio).

Un'importante applicazione di tale struttura sono i cosiddetti *cavi coassiali*, comunemente usati per il collegamento con antenne sia riceventi che trasmettenti: si pensi ai cavi coassiali che collegano il televisore di casa nostra (o il decoder) alla rispettiva antenna.



Fig.9. Condensatore cilindrico per applicazioni elettroniche

3.4 Il condensatore piano

Un condensatore piano è costituito da due armature piane parallele di sezione S , poste a distanza d , con un dielettrico di costante ϵ nell'intercapedine, come mostrato schematicamente in Fig.10. Supponiamo di distribuire uniformemente una carica Q di segno opposto sulle due armature e supponiamo che la struttura sia tale da poter ritenere trascurabili gli effetti di bordo e da poter approssimare il campo generato da una singola lamina con quello generato da una lamina carica uniformemente che si estenda all'infinito. In tali condizioni, il campo è rigorosamente nullo all'esterno della struttura, mentre nell'intercapedine ha la distribuzione indicata in Fig.10b e vale, ricordando i risultati del paragrafo 2.3:

$$\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{x}} = \frac{Q}{S} \frac{1}{\epsilon} \hat{\mathbf{x}}. \quad (28)$$

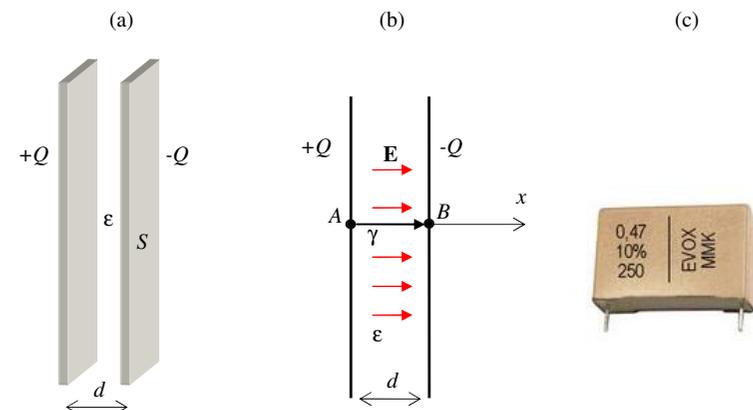


Fig. 10. Condensatore piano

Scegliendo come cammino di integrazione il segmento di direzione \hat{x} che collega due punti qualsiasi delle due armature (Fig.10b) si ha:

$$v_{AB} \equiv \int_A^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl \quad (29)$$

che si sviluppa come:

$$v_{AB} \int_A^B E dx = \frac{Qd}{\epsilon S}, \quad (30)$$

per cui la capacità del condensatore piano di sezione S e spessore d è data da:

$$C = \frac{\epsilon S}{d}. \quad (31)$$

4. Linea bifilare e cavo su piano conduttore perfetto

Accanto alle strutture considerate in precedenza, assume un rilievo particolare per le sue applicazioni per il trasporto di energia la cosiddetta *linea bifilare*, schematizzabile come un sistema realizzato da due cilindri conduttori di raggio a , posti a distanza h l'uno dall'altro, ed immersi in un dielettrico omogeneo di costante ϵ (Fig.11). Si assuma che sui due cilindri vi sia, al solito, una distribuzione uniforme di carica elettrica di segno opposto. Le linee di forza del campo elettrico prodotto da tale sistema sono visualizzate qualitativamente in figura.

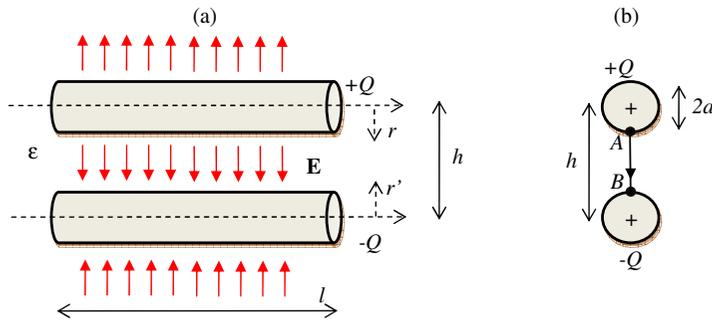


Fig. 11. Linea bifilare

In questa struttura, il campo prodotto nell'intercapedine sarà esprimibile come la sovrapposizione dei campi prodotti dalla carica positiva e negativa $\mathbf{E} = \mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^-$, ciascuno dei quali ha un modulo pari a:

$$E(r) = \frac{Q}{l} \frac{1}{2\pi\epsilon r}, \quad (32)$$

essendo r la distanza dall'asse del relativo cilindro. Nella sezione trasversale scegliamo come cammino di integrazione il segmento che collega due punti qualsiasi dei due cilindri, secondo la direzione ortogonale ai due assi (Fig.11b), ottenendo:

$$v_{AB} \equiv \int_A^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_A^B \mathbf{E}^+ \cdot \hat{\mathbf{r}} dr + \int_A^B \mathbf{E}^- \cdot \hat{\mathbf{r}}' dr' = \int_a^{h-a} E(r) dr + \int_{h-a}^a E(r') dr' = \int_a^{h-a} \frac{Q}{l2\pi\epsilon r} dr + \int_{h-a}^a \frac{-Q}{l2\pi\epsilon r'} dr',$$

da cui, essendo $r = -r'$:

$$v_{AB} = 2 \int_a^{h-a} \frac{Q}{l2\pi\epsilon r} dr = \frac{Q}{l\pi\epsilon} [\ln(r)]_a^{h-a} = \frac{Q}{l\pi\epsilon} \ln\left(\frac{h-a}{a}\right) \approx \frac{Q}{l\pi\epsilon} \ln\left(\frac{h}{a}\right). \quad (33)$$

Nell'ultimo passaggio si è tenuto conto del fatto che tipicamente risulta $h \gg a$. La capacità per unità di lunghezza della linea bifilare è quindi data da:

$$C' = \frac{\pi\epsilon}{\ln[(h-a)/a]} \approx \frac{\pi\epsilon}{\ln(h/a)} \quad (\text{se } h \gg a). \quad (34)$$

Infine analizziamo un'ulteriore configurazione di interesse applicativo: un conduttore cilindrico posto a distanza $h/2$ da un piano conduttore, supposto ideale (Fig.12a). Tale situazione può ad esempio descrivere, in prima approssimazione, il caso di un cavo elettrico sospeso su un terreno. Supponiamo che il conduttore cilindrico sia fornito di una carica $+Q$ distribuita uniformemente. Per studiare tale configurazione è utile osservare che, considerando il piano conduttore infinito, è possibile ricorrere al cosiddetto *teorema delle immagini*, che afferma che nel semispazio superiore al piano conduttore, il campo elettrico è uguale a quello generato dal cilindro con carica $+Q$ e da un cilindro "immagine" con carica $-Q$, posto a distanza $h/2$ da parte opposta rispetto al piano conduttore (Fig.12b).

Procedendo come nel caso precedente, la tensione tra il conduttore cilindrico ed il piano si può valutare dallo schema equivalente in Fig.8b, con i seguenti passaggi:

$$v_{AB} \equiv \int_A^B \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_A^B \mathbf{E}^+ \cdot \hat{\mathbf{r}} dr + \int_A^B \mathbf{E}^- \cdot \hat{\mathbf{r}}' dr' = \int_a^{h/2} E(r) dr + \int_{h/2}^a E(r') dr' = \int_a^{h/2} E(r) dr + \int_{h/2}^a E(r) dr = \int_a^{h-a} E(r) dr = \int_a^{h-a} \frac{Q}{l2\pi\epsilon r} dr = \frac{Q}{l2\pi\epsilon} [\ln(r)]_a^{h-a} = \frac{Q}{l2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{h-a}{a}\right) \approx \frac{Q}{l2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{h}{a}\right)$$

Nell'ultimo passaggio si è tenuto conto del fatto che tipicamente risulta $h \gg a$. La capacità per unità di lunghezza di questa struttura è quindi data da:

$$C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln[(h-a)/a]} \approx \frac{2\pi\epsilon}{\ln(h/a)} \quad (\text{se } h \gg a). \quad (35)$$

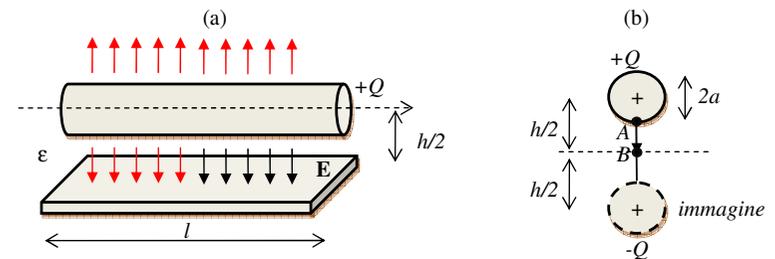


Fig. 12. Conduttore cilindrico su piano conduttore perfetto.