

# Soluzione di problemi strutturali non lineari

## 1. Introduzione

Nella meccanica delle strutture, spesso si assume che gli spostamenti siano piccoli rispetto alla dimensione caratteristica della struttura e che le deformazioni siano infinitesime, così che la misura di deformazione è ottenuta come la parte simmetrica del gradiente degli spostamenti e che le equazioni di equilibrio sono scritte direttamente sulla configurazione indeformata del corpo. D'altra parte, si assume anche molto frequentemente che la relazione tra le tensioni e le deformazioni sia di tipo elastico lineare. Sotto le ipotesi sopra riportate il problema dell'equilibrio elastico è lineare. Ne consegue che implementando il metodo degli elementi finiti per un problema dell'equilibrio elastico lineare, si giunge ad un sistema algebrico di tipo lineare.

Talvolta però non è possibile con buona approssimazione assumere valide ipotesi alla base della linearità del problema strutturale. Può infatti accadere che la struttura soggetta alle dovute condizioni di carico si deformi in modo tanto significativo che non è appropriato considerare come misura di deformazione quella infinitesima, ovvero la parte simmetrica del gradiente degli spostamenti, e di conseguenza non è lecito scrivere le equazioni di equilibrio sulla configurazione indeformata della struttura. E' necessario allora tenere in conto di misure non lineari della deformazione ed imporre l'equilibrio sulla configurazione deformata, che non è nota a priori e costituisce un'incognita del problema strutturale. In tal caso il problema dell'equilibrio strutturale diventa non lineare e tale non linearità è generalmente denotata come **non linearità geometrica**.

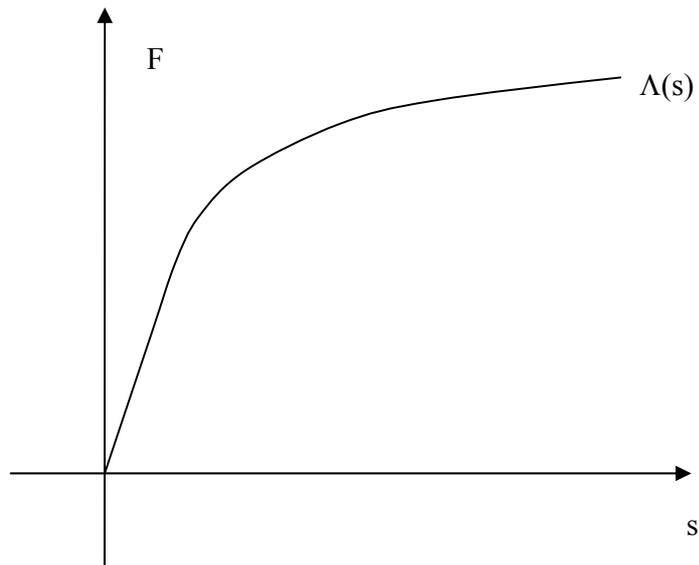
I materiali che costituiscono le costruzioni presentano comportamento di tipo elastico lineare in un intervalli di tensioni o deformazioni limitato. Superato un certo valore della deformazione il materiale si comporta in modo tale che la relazione costitutiva è non lineare. Questo è il caso della plasticità, del danneggiamento e del comportamento unilaterale. Anche in tal caso il problema dell'equilibrio strutturale diventa non lineare tale non linearità è generalmente denotata come **non linearità materiale**.

Nel seguito si descrivono alcune procedure classiche utilizzate per risolvere problemi algebrici non lineari. La discussione è limitata al caso di non linearità materiale.

## 2. Materiale con comportamento elastico non lineare

Un materiale è detto elastico quando assegnata che sia la deformazione, la tensione è univocamente determinata ed, inoltre, l'energia interna non dipende dal particolare percorso deformativo seguito. Per una struttura costitutiva da materiale elastico, lo stato deformativo e tensionale non dipende dalla particolare storia di carico seguita ma solo dal valore attuale delle forze agenti su essa.

In Figura 1 è riportata schematicamente la risposta meccanica in termini di uno spostamento  $s$  di una struttura soggetta ad un sistema di forze ( $F$ ). La relazione  $F$ - $s$  risulta non lineare. Per una struttura costituita da materiale elastico, in fase di carico e di scarico si percorre comunque la stessa curva  $\Lambda(s)$ .



**Figura 1: Risposta strutturale schematica in termini di forza-spostamento.**

Il problema che si intende affrontare è allora di determinare una strategia di calcolo, ovvero una procedura numerica che permetta di determinare lo spostamento che si ha una volta che sia assegnato che sia un valore della forza. In realtà il problema si pone nella seguente forma: *dato un sistema strutturale, determinare il vettore degli spostamenti (nodali)  $\mathbf{s}$  di una struttura che si hanno quando agisce un sistema di carico definito dal vettore  $\mathbf{F}$* . In altra forma, si tratta di risolvere il problema struttura non lineare:

$$\mathbf{\Lambda}(\mathbf{s}) = \mathbf{F} \quad (1)$$

L'equazione (1) si riscrive nella forma residuale:

$$\mathbf{R}(\mathbf{s}) = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{s}) - \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (2)$$

essendo  $\mathbf{R}(\mathbf{s})$  il residuo da annullare.

Le procedure numeriche descritte nel seguito sono algoritmi capaci di trasformare il problema della ricerca della soluzione di un sistema di equazioni algebriche non lineari in una successione di problemi lineari. La procedura converge alla soluzione nel caso in cui la successione di soluzioni converge alla soluzione del problema iniziale non lineare.

### **2.1. Metodo di Newton-Raphson**

Assumendo che la funzione residuo  $\mathbf{R}(\mathbf{s})$  sia sufficientemente regolare, si effettua lo sviluppo in serie di  $\mathbf{R}(\mathbf{s})$  a partire dal vettore spostamento  $\mathbf{s}^0$ :

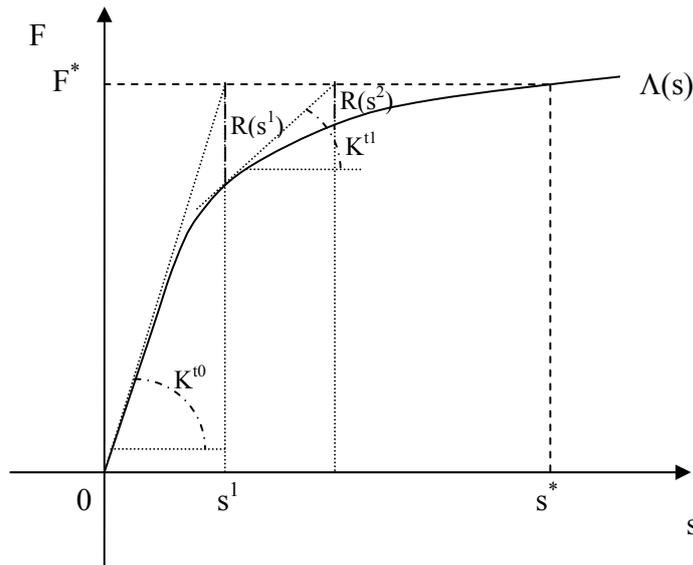
$$\begin{aligned}
\mathbf{R}(\mathbf{s}) &= \mathbf{R}(\mathbf{s}^o) + \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{s}} \right|_{\mathbf{s}=\mathbf{s}^o} (\mathbf{s} - \mathbf{s}^o) \\
&= \mathbf{\Lambda}(\mathbf{s}^o) - \mathbf{F} + \left. \frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial \mathbf{s}} \right|_{\mathbf{s}=\mathbf{s}^o} (\mathbf{s} - \mathbf{s}^o) = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3}$$

Si evidenzia che la derivata del vettore  $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{s})$  rispetto al vettore  $\mathbf{s}$  è una matrice detta matrice tangente e denotata con  $\mathbf{K}^t$ :

$$K_{ij}^{t,s^o} = \left[ \left. \frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial \mathbf{s}} \right|_{\mathbf{s}=\mathbf{s}^o} \right]_{ij} = \left. \frac{\partial \Lambda_i}{\partial s_j} \right|_{\mathbf{s}=\mathbf{s}^o} \tag{4}$$

Assumendo  $\mathbf{s}^o = \mathbf{0}$ , è possibile determinare lo spostamento  $\mathbf{s}^1$  risolvendo l'equazione (3):

$$\mathbf{s}^1 = -(\mathbf{K}^{t,0})^{-1} (\mathbf{\Lambda}(\mathbf{0}) - \mathbf{F}) = -(\mathbf{K}^{t,0})^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{0}) \tag{5}$$



**Figura 2: schema iterativo secondo il metodo di Newton-Raphson**

Nota che sia la soluzione  $\mathbf{s}^1$  è possibile determinare il residuo

$$\mathbf{R}(\mathbf{s}^1) = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{s}^1) - \mathbf{F} \tag{6}$$

che, in generale, risulta diverso da zero, come illustrato in Figura 2. A questo punto risolvendo l'equazione (3), con  $\mathbf{s}^o = \mathbf{s}^1$ , si ottiene:

$$\mathbf{s}^2 = \mathbf{s}^1 - (\mathbf{K}^{t,1})^{-1} (\mathbf{\Lambda}(\mathbf{s}^1) - \mathbf{F}) = \mathbf{s}^1 - (\mathbf{K}^{t,1})^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{s}^1) \tag{7}$$

Noto  $\mathbf{s}^2$ , in modo analogo, si determina  $\mathbf{s}^3$ .

In definitiva il metodo di Newton-Raphson ovvero della tangente, consiste nella determinazione della successione di soluzioni:

$$\mathbf{s}^{k+1} = \mathbf{s}^k - (\mathbf{K}^{t,k})^{-1} (\mathbf{A}(\mathbf{s}^k) - \mathbf{F}) = \mathbf{s}^k - (\mathbf{K}^{t,k})^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{s}^k) \quad (8)$$

La successione converge quando il residuo  $\mathbf{R}(\mathbf{s}^k)$  tende a zero. Naturalmente, numericamente non è possibile giungere al valore nullo per cui si assumerà soddisfacente la soluzione  $\mathbf{s}^k$  per la quale accade che il residuo  $\mathbf{R}(\mathbf{s}^k)$  è sufficientemente piccolo. In particolare si definisce errore k-esimo la quantità:

$$e^k = \frac{\|\mathbf{R}(\mathbf{s}^k)\|}{\|\mathbf{F}\|} \quad (9)$$

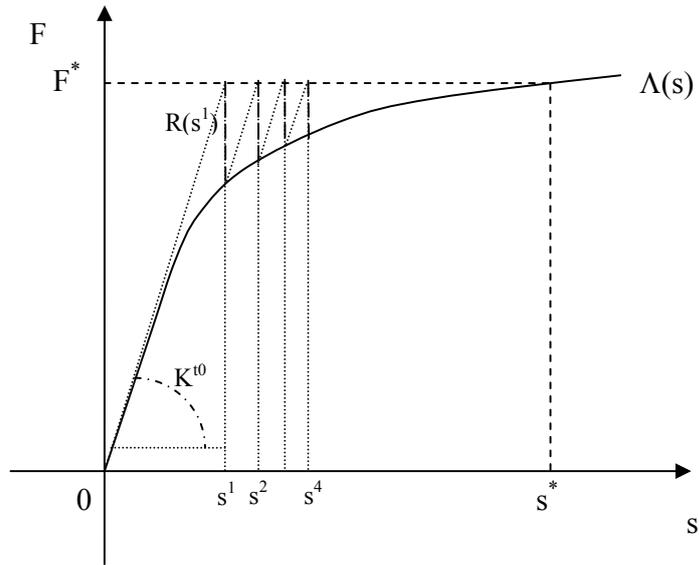
Si dimostra che tale procedura numerica quando converge, converge alla soluzione e converge con velocità quadratica. Di conseguenza l'algoritmo è caratterizzato da una buona velocità di convergenza. Si evidenzia che qualora la curva che rappresenta la risposta strutturale illustrata in Figura 2 tende ad una retta orizzontale, la matrice tangente tende a diventare singolare e, di conseguenza, il sistema di equazioni (8) tende a ad essere mal posto.

## 2.2. Metodo di Newton-Raphson modificato

Il metodo di Newton-Raphson modificato si ottiene a partire dal metodo di Newton-Raphson assumendo la matrice tangente costante nel processo iterativo, e pari a quella corrispondente al punto  $\mathbf{s}=\mathbf{0}$ . In altri termini, l'algoritmo consiste nella costruzione della successione di soluzioni ottenute risolvendo l'equazione:

$$\mathbf{s}^{k+1} = \mathbf{s}^k - (\mathbf{K}^{t,0})^{-1} (\mathbf{A}(\mathbf{s}^k) - \mathbf{F}) = \mathbf{s}^k - (\mathbf{K}^{t,0})^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{s}^k) \quad (10)$$

In Figura 3 è rappresentato lo schema iterativo del metodo di Newton-Raphson modificato. Si nota che anche quando la curva che rappresenta la risposta strutturale tende ad una retta orizzontale, l'algoritmo non entra in crisi, in quanto la matrice da invertire è sempre quella iniziale. In generale, tale procedura risulta molto stabile nelle iterazioni e raramente entra in crisi. Un vantaggio di tale metodo rispetto al metodo di Newton-Raphson è che la matrice che governa l'equazione (10) non varia durante le iterazioni e deve essere calcolata solo all'inizio della procedura. D'altra parte si nota che la convergenza di tale metodo risulta in generale più lenta rispetto a quella che si ha per il metodo della tangente esposto nel paragrafo precedente.



**Figura 3: schema iterativo secondo il metodo di Newton-Raphson modificato**

### 2.3. Metodo della secante

Il metodo della secante, detto anche di Picard, è basato sull'ipotesi, molto spesso soddisfatta, che il vettore delle forze interne  $\Lambda(\mathbf{s})$  sia esprimibile come il prodotto di una matrice  $\mathbf{K}(\mathbf{s})$ , che dipende dal valore degli spostamenti, moltiplicato per il vettore degli spostamenti, in formula:

$$\Lambda(\mathbf{s}) = \mathbf{K}(\mathbf{s})\mathbf{s} \quad (11)$$

così che l'equazione di equilibrio (1) diventa:

$$\mathbf{K}(\mathbf{s})\mathbf{s} = \mathbf{F} \quad (12)$$

La matrice tangente si determina come:

$$\mathbf{K}^{t,s^o} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{s}} \Big|_{\mathbf{s}=\mathbf{s}^o} = \frac{\partial [\mathbf{K}(\mathbf{s})\mathbf{s}]}{\partial \mathbf{s}} \Big|_{\mathbf{s}=\mathbf{s}^o} = \mathbf{K}(\mathbf{s}^o) + \frac{\partial [\mathbf{K}(\mathbf{s})]}{\partial \mathbf{s}} \Big|_{\mathbf{s}=\mathbf{s}^o} \mathbf{s} \quad (13)$$

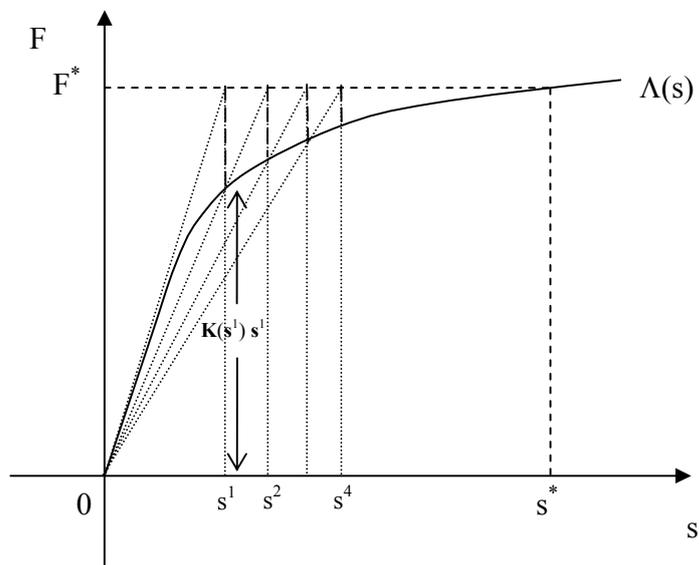
La matrice secante è ottenuta dalla relazione (13) trascurando l'ultimo termine:

$$\mathbf{K}^{s,s^o} = \mathbf{K}(\mathbf{s}^o) \quad (14)$$

L'algoritmo della matrice secante è basato sulla soluzione dell'equazione (12), assumendo noto il vettore degli spostamenti per la valutazione della matrice secante. Sostituendo la matrice secante al posto della tangente nella formula (8) si ha:

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}^{k+1} &= \mathbf{s}^k - (\mathbf{K}^{s,k})^{-1} (\Lambda(\mathbf{s}^k) - \mathbf{F}) \\
&= \mathbf{s}^k - (\mathbf{K}^{s,k})^{-1} (\mathbf{K}^{s,k} \mathbf{s}^k - \mathbf{F}) \\
&= (\mathbf{K}^{s,k})^{-1} \mathbf{F}
\end{aligned}
\tag{15}$$

In Figura 4 è rappresentato lo schema iterativo del metodo della secante. In generale, tale procedura risulta abbastanza stabile nelle iterazioni. La velocità di convergenza è minore di quella ottenibile con il metodo di Newton-Raphason ma è maggiore di quella con il metodo di Newton-Raphason modificato. Come per il metodo di Newton-Raphason la matrice che governa l'equazione (15) varia durante le iterazioni e deve essere calcolata ed invertita ad ogni iterazione.



**Figura 4: schema iterativo secondo il metodo della secante**

### 3. Sezione in cemento armato

A scopo esemplificativo, ma anche per illustrare un problema di notevole interesse applicativo, si sviluppano nel seguito i tre algoritmi introdotti nel paragrafo precedente per risolvere il problema della verifica di una sezione in cemento armato. I metodi sopra esposti, naturalmente, si possono applicare al problema della verifica agli stati limite per una sezione generica. Per semplicità nel seguito viene trattato il caso della verifica alle tensioni ammissibili di una sezione rettangolare in cemento armato.

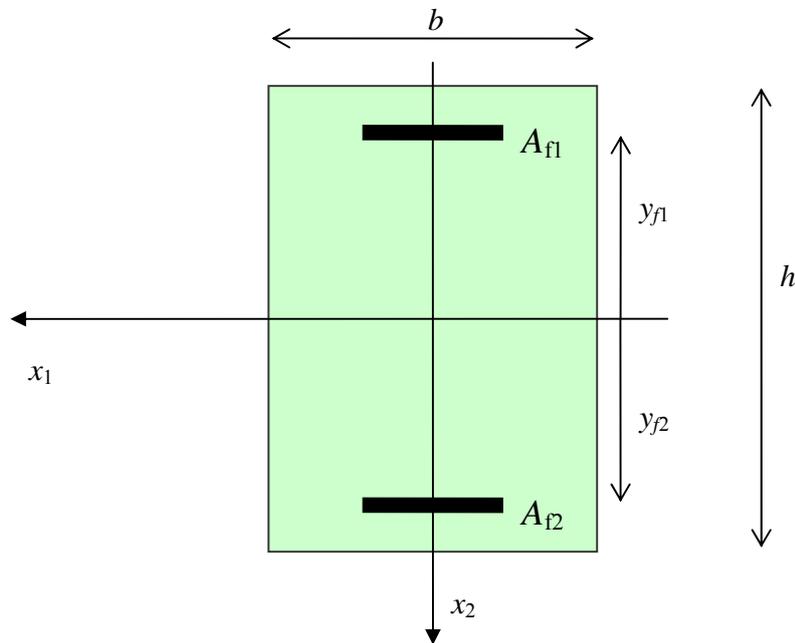
Si considera la sezione riportata in Figura 5, soggetta alle sollecitazioni di sforzo normale e momento flettente. Si assume che il materiale conglomerato cementizio sia non

reagente a trazione, mentre presenti un comportamento elastico lineare a compressione, come illustrato in Figura 6. In particolare, si assume:

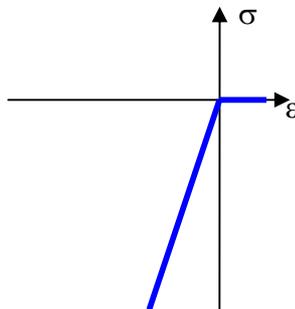
$$\begin{aligned} \sigma &= 0 & \text{se } \varepsilon > 0 \\ \sigma &= E\varepsilon & \text{se } \varepsilon \leq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

La cinematica della sezione è caratterizzata dalla deformazione assiale  $\varepsilon_0$  e dalla curvatura  $\chi$ , così che la deformazione nel generico punto della sezione è definita dalla classica relazione:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + x_2\chi \quad (17)$$



**Figura 5: sezione in c.a.**



**Figura 6: modello di materiale non reagente a trazione per conglomerato cementizio**

Nella sezione si individua l'asse neutro, come:

$$y_n : 0 = \varepsilon_0 + y_n \chi \Rightarrow y_n = -\frac{\varepsilon_0}{\chi} \quad (18)$$

Si distinguono due possibili casi:

$$\begin{aligned} \text{caso (a)} & \chi \geq 0 \\ \text{caso (b)} & \chi < 0 \end{aligned}$$

Si definiscono gli assi individuati da  $y = y_1, y = y_2$ , tali che:

$$\begin{aligned} \text{caso (a)} \quad y_1 &= -h/2 & y_2 &= \min\{h/2, \max\{-h/2, y_n\}\} \\ \text{caso (b)} \quad y_1 &= \min\{h/2, \max\{-h/2, y_n\}\} & y_2 &= h/2 \end{aligned} \quad (19)$$

così che la parte di sezione compresa tra  $y_1$  ed  $y_2$  risulta soggetta ad una tensione di compressione che varia linearmente;

Ne consegue che, in termini di risultanti, si ha:

$$\begin{aligned} N &= \int_{y_1}^{y_2} Eb(\varepsilon_0 + x_2 \chi) dx_2 + E_f A_{f1} (\varepsilon_0 + y_{f1} \chi) + E_f A_{f2} (\varepsilon_0 + y_{f2} \chi) = A \varepsilon_0 + S \chi \\ M &= \int_{y_1}^{y_2} x_2 Eb(\varepsilon_0 + x_2 \chi) dx_2 + y_{f1} E_f A_{f1} (\varepsilon_0 + y_{f1} \chi) + y_{f2} E_f A_{f2} (\varepsilon_0 + y_{f2} \chi) = S \varepsilon_0 + J \chi \end{aligned} \quad (20)$$

dove

$$\begin{aligned} A &= Eb(y_2 - y_1) + E_f (A_{f1} + A_{f2}) \\ S &= \frac{Eb}{2} (y_2^2 - y_1^2) + E_f (y_{f1} A_{f1} + y_{f2} A_{f2}) \\ J &= \frac{Eb}{3} (y_2^3 - y_1^3) + E_f (y_{f1}^2 A_{f1} + y_{f2}^2 A_{f2}) \end{aligned} \quad (21)$$

Si evidenzia che l'area, il momento statico ed il momento di inerzia sono funzioni di  $y_1$  ed  $y_2$ , ovvero di  $y_n$ , e quindi, tenendo conto delle (19) e della (18), sono funzioni della deformazione assiale  $\varepsilon_0$  e della curvatura  $\chi$ .

In definitiva si ottiene un sistema di equazioni, che scritto in forma matriciale diventa:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A(y_n) & S(y_n) \\ S(y_n) & J(y_n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \chi \end{Bmatrix} \quad (22)$$

### 3.1. Algoritmo di Newton-Raphson

L'algoritmo consiste nei seguenti passi:

1. All'inizio della procedura si pone  $y_1=-h/2$  e  $y_2=h/2$  e si determinano le proprietà geometriche tramite le equazioni (21).
2. Si calcola la matrice delle proprietà geometriche:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} A^0 & S^0 \\ S^0 & J^0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

3. Alla  $(k+1)$ -iterazione si risolve il problema (8) ottenendo una nuova coppia di valori per la deformazione assiale e per la curvatura:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0^{k+1} \\ \chi^{k+1} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_0^k \\ \chi^k \end{Bmatrix} - \left( \frac{d}{d\varepsilon_0} \begin{bmatrix} A^k & S^k \\ S^k & J^k \end{bmatrix} \frac{d\varepsilon_0}{dy_n} + \frac{d}{d\chi} \begin{bmatrix} A^k & S^k \\ S^k & J^k \end{bmatrix} \frac{d\chi}{dy_n} \right)^{-1} \left( \begin{Bmatrix} N^k \\ M^k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \right) \\ \\ R &= \begin{bmatrix} A(\varepsilon_0, \chi) & S(\varepsilon_0, \chi) \\ S(\varepsilon_0, \chi) & J(\varepsilon_0, \chi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \chi \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \\ 0 &= R^k + \frac{\partial R^k}{\partial \varepsilon_0} (\varepsilon_0^{k+1} - \varepsilon_0^k) + \frac{\partial R^k}{\partial \chi} (\chi^{k+1} - \chi^k) \\ &= \begin{Bmatrix} N^k \\ M^k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_0} \left( \begin{bmatrix} A(\varepsilon_0, \chi) & S(\varepsilon_0, \chi) \\ S(\varepsilon_0, \chi) & J(\varepsilon_0, \chi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \chi \end{Bmatrix} \right) (\varepsilon_0^{k+1} - \varepsilon_0^k) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \chi} \left( \begin{bmatrix} A(\varepsilon_0, \chi) & S(\varepsilon_0, \chi) \\ S(\varepsilon_0, \chi) & J(\varepsilon_0, \chi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \chi \end{Bmatrix} \right) (\chi^{k+1} - \chi^k) \\ &= \begin{Bmatrix} N^k \\ M^k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} A^k & S^k \\ S^k & J^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) (\varepsilon_0^{k+1} - \varepsilon_0^k) + \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon_0} \begin{bmatrix} A^k & S^k \\ S^k & J^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \chi \end{Bmatrix} \right) (\varepsilon_0^{k+1} - \varepsilon_0^k) \\ &\quad + \left( \begin{bmatrix} A^k & S^k \\ S^k & J^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \right) (\chi^{k+1} - \chi^k) + \left( \frac{\partial}{\partial \chi} \begin{bmatrix} A^k & S^k \\ S^k & J^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \chi \end{Bmatrix} \right) (\chi^{k+1} - \chi^k) \\ &= \begin{Bmatrix} N^k \\ M^k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} A^k & S^k \\ S^k & J^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) (\varepsilon_0^{k+1} - \varepsilon_0^k) + \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon_0} \begin{bmatrix} A^k & S^k \\ S^k & J^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \chi \end{Bmatrix} \right) (\varepsilon_0^{k+1} - \varepsilon_0^k) \\ &\quad + \left( \begin{bmatrix} A^k & S^k \\ S^k & J^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \right) (\chi^{k+1} - \chi^k) + \left( \frac{\partial}{\partial \chi} \begin{bmatrix} A^k & S^k \\ S^k & J^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \chi \end{Bmatrix} \right) (\chi^{k+1} - \chi^k) \end{aligned} \quad (24)$$

4. Si determina la nuova posizione dell'asse neutro dall'equazione (18).
5. Si definisce la nuova sezione reagente tramite le (19).
6. Noti che siano alla  $(k+1)$ -esima iterazione  $y_1^{k+1}$  e  $y_2^{k+1}$ , si determinano le proprietà geometriche tramite le equazioni (21).
7. In base alla soluzione disponibile si valutano le sollecitazioni ad esse associate come:

$$\begin{Bmatrix} N^{k+1} \\ M^{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{k+1} & S^{k+1} \\ S^{k+1} & J^{k+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0^{k+1} \\ \chi^{k+1} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

8. Si determina il residuo:

$$\begin{aligned} R_N^{k+1} &= N - N^{k+1} \\ R_M^{k+1} &= M - M^{k+1} \end{aligned} \quad (26)$$

9. Si valuta l'errore:

$$e^k = \frac{(R_N^{k+1})^2 + (R_M^{k+1})^2}{N^2 + M^2} \quad (27)$$

10. Se  $e^k <$  tolleranza esci dalla procedura, altrimenti si torna al punto 2.

### 3.2. Algoritmo di Newton-Raphson modificato

L'algoritmo consiste nei seguenti passi:

1. All'inizio della procedura si pone  $y_1 = -h/2$  e  $y_2 = h/2$  e si determinano le proprietà geometriche tramite le equazioni (21).
2. Si calcola la matrice delle proprietà geometriche:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} A^0 & S^0 \\ S^0 & J^0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

3. Alla  $(k+1)$ -iterazione si risolve il problema (10) ottenendo una nuova coppia di valori per la deformazione assiale e per la curvatura:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_0^{k+1} \\ \chi^{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0^k \\ \chi^k \end{Bmatrix} - \mathbf{G}^{-1} \left( \begin{Bmatrix} N^k \\ M^k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \right) \quad (29)$$

4. Si determina la nuova posizione dell'asse neutro dall'equazione (18).
5. Si definisce la nuova sezione reagente tramite le (19).
6. Noti che siano alla  $(k+1)$ -esima iterazione  $y_1^{k+1}$  e  $y_2^{k+1}$ , si determinano le proprietà geometriche tramite le equazioni (21).
7. In base alla soluzione disponibile si valutano le sollecitazioni ad esse associate come:

$$\begin{Bmatrix} N^{k+1} \\ M^{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{k+1} & S^{k+1} \\ S^{k+1} & J^{k+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0^{k+1} \\ \chi^{k+1} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

8. Si determina il residuo;

$$\begin{aligned} R_N^{k+1} &= N - N^{k+1} \\ R_M^{k+1} &= M - M^{k+1} \end{aligned} \quad (31)$$

9. si valuta l'errore:

$$e^k = \frac{(R_N^{k+1})^2 + (R_M^{k+1})^2}{N^2 + M^2} \quad (32)$$

10. Se  $e^k <$  tolleranza esci dalla procedura, altrimenti si torna al punto 2.

### 3.3. Algoritmo della secante

L'algoritmo consiste nei seguenti passi:

1. All'inizio della procedura si pone  $y_1=-h/2$  e  $y_2=h/2$  e si determinano le proprietà geometriche tramite le equazioni (21).
2. Alla  $(k+1)$ -iterazione si risolve il problema (22) ottenendo una nuova coppia di valori per la deformazione assiale e per la curvatura:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_0^{k+1} \\ \chi^{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^k & S^k \\ S^k & J^k \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \quad (33)$$

3. Si determina la nuova posizione dell'asse neutro dall'equazione (18).
4. Si definisce la nuova sezione reagente tramite le (19).
5. Noti che siano alla  $(k+1)$ -esima iterazione  $y_1^{k+1}$  e  $y_2^{k+1}$ , si determinano le proprietà geometriche tramite le equazioni (21).
6. In base alla soluzione disponibile si valutano le sollecitazioni ad esse associate come:

$$\begin{Bmatrix} N^{k+1} \\ M^{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{k+1} & S^{k+1} \\ S^{k+1} & J^{k+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0^{k+1} \\ \chi^{k+1} \end{Bmatrix} \quad (34)$$

7. Si determina il residuo;

$$\begin{aligned} R_N^{k+1} &= N - N^{k+1} \\ R_M^{k+1} &= M - M^{k+1} \end{aligned} \quad (35)$$

8. si valuta l'errore:

$$e^k = \frac{(R_N^{k+1})^2 + (R_M^{k+1})^2}{N^2 + M^2} \quad (36)$$

9. Se  $e^k <$  tolleranza esci dalla procedura, altrimenti si torna al punto 2.