



Università degli Studi di Cassino

## Esercitazioni di Elettromagnetismo

Corso di Elettromagnetismo Ambientale

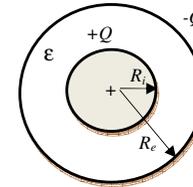
prof. Antonio Maffucci

[maffucci@unicas.it](mailto:maffucci@unicas.it)

ver. 1.2 – maggio 2011

### 1. Elettrostatica e conduzione stazionaria

**ES.1.1** Si consideri un condensatore cilindrico (la cui sezione è indicata in figura), sufficientemente lungo da poter essere considerato infinito. Con riferimento ai due dielettrici utilizzabili, le cui costanti sono riportate in tabella, scegliere quali coppie di raggi ( $R_i, R_e$ ) forniscono una capacità per unità di lunghezza:  $0.1 \text{ nF/m} \leq C' \leq 0.5 \text{ nF/m}$ .



$$\epsilon_r = [2.2 \quad 4.5], \quad \epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m},$$

$$(R_i, R_e) = [(10, 15); (10, 30); (10, 50)] \quad [\text{in mm}]$$

La capacità per unità di lunghezza di un condensatore cilindrico è data da:

$$C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(R_e/R_i)},$$

per cui il rapporto tra i raggi (chiamiamolo  $\alpha$ ) si ottiene dalla relazione seguente:

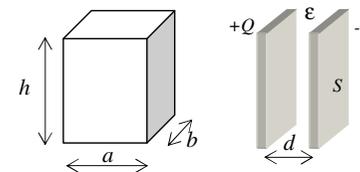
$$\ln(\alpha) = \ln(R_e/R_i) = \frac{2\pi\epsilon}{C'} \Rightarrow \alpha = \frac{R_e}{R_i} = \exp\left(\frac{2\pi\epsilon}{C'}\right).$$

Per il dielettrico con  $\epsilon_r = 2.2$  si ottiene:  $1.28 \leq \alpha \leq 3.40$ , quindi per tale caso le coppie ammissibili sono:  $(R_i, R_e) = [(10, 15); (10, 30)]$ .

Per il dielettrico con  $\epsilon_r = 4.5$  si ottiene:  $1.65 \leq \alpha \leq 12.21$ , quindi per tale caso le coppie ammissibili sono invece:  $(R_i, R_e) = [(10, 30); (10, 50)]$ .

**ES.1.2** Si consideri il condensatore piano descritto in figura, supponendo di poter trascurare gli effetti di bordo. Il massimo volume occupabile dal condensatore è indicato in figura e lo spessore del dielettrico non può essere inferiore ad 1 mm.

- Dimensionare il condensatore in modo da ottenere la massima capacità e valutare tale capacità.
- Nella condizione di cui al punto a), assumendo una tensione  $V=10 \text{ V}$ , determinare la densità di carica elettrica sulle armature del condensatore e l'intensità del campo  $\mathbf{E}$ .



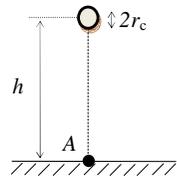
$$\epsilon_r = 4.5, \quad \epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m},$$

$$a = 10 \text{ mm}, b = 5 \text{ mm}, h = 100 \text{ mm}$$

Risultato: a)  $d = 1 \text{ mm}; S = 10^{-3} \text{ m}^2; C = 39.82 \text{ pF}$ . b)  $\sigma = 3.98 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}^2; E = 10 \text{ kV/m}$ .

**ES.1.3** La figura in basso si riferisce ad una linea elettrica aerea di media tensione per la quale la tensione di esercizio è pari a 20 kV. Si consideri un cavo in rame di sezione  $S$  e si assuma che il terreno si comporti come un conduttore elettrico perfetto.

- Valutare quali sezioni del cavo sono compatibili con la richiesta che la capacità per unità di lunghezza risulti  $C' \geq 6.20$  pF/m.
- con riferimento alle sezioni ammissibili valutate al punto a), calcolare il campo elettrico nel punto A indicato in figura e confrontarlo col limite di 5 kV/m previsto dalla legislazione italiana per i sistemi a 50 Hz;
- assumendo che la massima potenza per unità di lunghezza ammissibile è  $P = 30$  W/m, valutare quali delle sezioni, tra quelle che rispettano le richieste dei punti precedenti, siano compatibili con una corrente di esercizio  $I = 0.30$  kA.



$$h = 12 \text{ m}, V = 20 \text{ kV}$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m},$$

$$\eta_{Cu} = 1.7 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m},$$

$$S = (20, 35, 70) \text{ mm}^2.$$

Punto a). Assumendo che il terreno sia un conduttore elettrico perfetto, la capacità per unità di lunghezza di questa struttura è data da:

$$C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(2h/r_c)}.$$

Le sezioni considerate corrispondono ai raggi  $r_c = \sqrt{S/\pi} = [2.5, 3.3, 4.7]$  mm, da cui

$$C' = [6.07, 6.26, 6.52] \text{ pF/m},$$

quindi le sezioni utilizzabili sono  $S = [35, 70] \text{ mm}^2$ .

Punto b). Nel punto A indicato in figura il campo elettrico ha un valore pari al doppio del campo prodotto dal cavo cilindrico isolato, quindi:

$$E(A) = \frac{Q'}{\pi h \epsilon} = \frac{C' V}{\pi h \epsilon}.$$

Considerando solo i valori ammissibili al punto a), si hanno i valori di campo  $E(A) = [0.38 \text{ } 0.39] \text{ kV/m}$ , entrambi ammissibili.

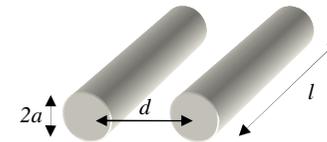
Punto c). La potenza elettrica dissipata per unità di lunghezza del conduttore è data da:

$$P' = \frac{P}{l} = \frac{R}{l} I^2 = \frac{\eta}{S} I^2 \Rightarrow I_{\max} = \sqrt{\frac{P'S}{\eta}}.$$

Per le due sezioni ammissibili secondo il punto a) si avranno  $I_{\max} = [0.25, 0.35] \text{ kA}$ , quindi l'unica sezione compatibile con la richiesta è  $S = 70 \text{ mm}^2$ .

**ES.1.4** Si consideri la seguente coppia di conduttori cilindrici di raggio uguale. In ogni condizione di funzionamento occorre far sì che la capacità  $C$  di tale struttura sia tale per cui la corrispondente impedenza risulti  $|Z_c| \geq 10 \text{ k}\Omega$ .

- Valutare la distanza minima  $d$  necessaria per ottenere tale condizione, con riferimento alle frequenze di utilizzo riportate in tabella.
- Con riferimento al risultato ottenuto al punto a) per  $f = 1$  MHz, valutare la carica elettrica che si deposita su ciascuno dei conduttori assumendo che la tensione tra i due conduttori sia pari a 380 V.



$$f = [50 \text{ } 10^3 \text{ } 10^6] \text{ Hz}$$

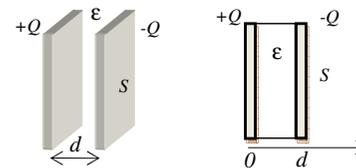
$$\epsilon = \epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$l = 2 \text{ m}, a = 1 \text{ mm}.$$

Risultato: a)  $d_{\min} = [2 \text{ } 33.9] \text{ mm}$ . b)  $Q = 6.05 \text{ nC}$ .

**ES.1.5** Si consideri il condensatore piano descritto in figura, supponendo di poter trascurare gli effetti di bordo. Considerando che questa struttura deve fornire una capacità  $C \geq 1$  pF, valutare:

- La massima distanza  $d$  che consente di rispettare tale specifica per ogni possibile scelta del dielettrico in tabella.
- Con riferimento al valore di  $d$  calcolato al punto a), valutare la massima carica depositabile su una qualsiasi delle armature per i valori di tensione indicati in tabella.



$$\epsilon_r = [3 \text{ } 4.5 \text{ } 6], \epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m},$$

$$V = [0.5 \text{ } 0.8 \text{ } 1] \text{ kV}$$

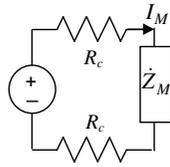
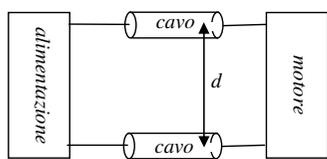
$$S = 1 \text{ cm}^2.$$

Risultato: a)  $d_{\max} = 2.66 \text{ mm}$ ; b)  $Q_{\max} = 1 \text{ nC}$ .

## 2. Conduzione stazionaria e impianti di terra

**ES.2.1** La coppia di cavi cilindrici di rame in figura, di sezione  $S$  e lunghezza  $l$ , viene utilizzata per collegare l'alimentazione ad un motore elettrico, descritto da un'impedenza  $\dot{Z}_M$ .

- Verificare che i parametri consentono di ottenere un valore di capacità della linea bifilare, la cui corrispondente un'impedenza  $\dot{Z}_c$  sia tale da avere:  $|Z_c| \geq 100 |Z_M|$ .
- Trascurando l'induttanza dei cavi e quindi modellando gli stessi come puri resistori (come in figura), valutare quali sezioni sono compatibili con la richiesta che la caduta di tensione valga  $\Delta V \leq 10$  V.



$$\begin{aligned}
 S &= [25 \quad 50 \quad 70] \text{ mm}^2 \\
 \eta_{Cu} &= 1.7 \cdot 10^{-8} \text{ } \Omega\text{m} \\
 \epsilon &= \epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \\
 l &= 300 \text{ m}, \quad d = 0.2 \text{ m} \\
 \dot{Z}_M &= 50 + j25 \text{ } \Omega, \\
 f &= 50 \text{ Hz}, \quad I_M = 30 \text{ A}.
 \end{aligned}$$

Punto a). Detto  $a = \sqrt{S/\pi}$  il raggio dei conduttori, per i vari valori di  $S$  la capacità è data da:

$$C = \frac{\pi \epsilon l}{\ln(d/a)} = [1.96 \quad 2.13 \quad 2.22] \text{ nF},$$

che, considerando la frequenza di lavoro, corrispondono ai valori di impedenza:

$$|Z_c| = [1.63 \quad 1.49 \quad 1.43] \text{ M}\Omega,$$

quindi tutti i valori di  $S$  proposti sono compatibili con la condizione  $|Z_c| \geq 100 |Z_M|$ .

Punto b). Trascurando l'induttanza delle linee, la caduta di tensione industriale è data da:

$$\Delta V = 2I_M R_c$$

Essendo  $R_c = \eta_{Cu} l / S$ , si avrà:

$$2I_M \frac{\eta_{Cu} l}{S} \leq \Delta V_{\max} = 10 \Rightarrow S \geq 2I_M \frac{\eta_{Cu} l}{\Delta V_{\max}} = 30.60 \text{ mm}^2,$$

quindi le sezioni ammissibili sono:  $S = [50 \quad 70] \text{ mm}^2$ .

**ES.2.2** Si consideri un impianto di terra costituito da 3 dispersori a picchetto disposti in parallelo, ciascuno di lunghezza  $L=50$  cm, in serie ad un conduttore di protezione lungo 50 m. Per quest'ultimo la norma prevede l'utilizzo di conduttori di sezione  $S_C = [25, 50] \text{ mm}^2$  realizzati con due possibili materiali:

| conduttore | Resistività $\eta$ [ $\mu\Omega/\text{m}$ ] |
|------------|---|
| rame       | 0.017                                       |
| ferro      | 0.1   |

- Tenuto conto che la resistenza del dispersore a picchetto è approssimabile come  $R = \eta/L$ , valutare la resistenza di terra  $R_T$  dell'intero impianto, considerando le seguenti tipologie di terreno:

| terreno                                   | Sabbia umida | Sabbia secca |
|---|--------------|--------------|
| Resistività $\eta$ [ $k\Omega/\text{m}$ ] | 0.2          | 3            |

Verificare, in particolare, se la resistenza introdotta dal conduttore di protezione è trascurabile o meno rispetto a quella introdotta dai 3 picchetti

- Per ciascuno dei due possibili terreni del punto precedente, scegliere tra i seguenti valori di sensibilità dell'interruttore differenziale quelli che garantiscono una tensione di contatto massima di 50 V, come richiesto dalle norme di sicurezza in condizioni normali.

$$I_{\Delta n} = [10 \quad 5 \quad 1 \quad 0.5 \quad 0.3 \quad 0.1 \quad 0.03 \quad 0.01] \text{ A}$$

Punto a). La resistenza del conduttore di protezione è data da  $R_c = \eta_c l_C / S_C$ , e vale, per i due materiali considerati:

$$R_c(Cu) = 0.034 \text{ } \Omega; \quad R_c(Fe) = 0.100 \text{ } \Omega.$$

La resistenza complessiva del parallelo dei picchetti è data, per i due terreni, da:

$$R_p = \frac{\eta}{3L} = [0.13 \quad 3.00] \text{ k}\Omega,$$

per cui la resistenza del conduttore di protezione risulta trascurabile rispetto a quella dei picchetti in ogni condizione di funzionamento, e quindi  $R_T \approx R_p$

Punto b). La condizione da imporre per il coordinamento delle protezioni è:

$$R_T I_{\Delta n} \leq V_{\max},$$

con  $V_{\max} = 50$  V. Tale condizione fornisce, per i due terreni, i valori di sensibilità seguenti:

$$I_{\Delta n} \leq [0.375 \quad 0.025] \text{ A}$$

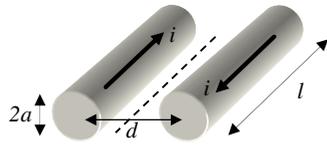
per cui occorrerà scegliere nei due casi i seguenti interruttori:

- sabbia secca -  $I_{\Delta n} = 0.01$  A;
- sabbia umida -  $I_{\Delta n} = 0.03$  A.

### 3. Magnetismo

**ES. 3.1** Si consideri la seguente coppia di conduttori cilindrici di raggio uguale, percorsa da corrente  $i$  uguale ed opposta.

- Valutare la distanza minima  $d$  necessaria per ottenere in un qualsiasi punto sulla retta tratteggiata in figura (equidistante dagli assi dei cilindri) un campo magnetico  $B \leq B_{\max} = 100 \mu\text{T}$ .
- Con riferimento al risultato ottenuto al punto a), valutare quali valori della lunghezza del cavo  $l$  sono compatibili con un valore di induttanza  $L_{\max} = 1 \mu\text{H}$ .



$$\begin{aligned} a &= 1 \text{ cm}, \quad i = 5 \text{ A}, \\ l &= [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4] \text{ m}, \\ \mu &= \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \end{aligned}$$

Punto a). In un qualsiasi punto sulla linea tratteggiata equidistante dagli assi il campo magnetico è pari al doppio del campo creato da uno qualsiasi dei conduttori in assenza dell'altro, cioè:

$$B = \frac{\mu i}{\pi(d/2)},$$

quindi per ottenere  $B \leq B_{\max} = 100 \mu\text{T}$  occorre:

$$d \geq d_{\min} = \frac{2\mu i}{\pi B_{\max}} = 4 \text{ cm}.$$

Punto b). L'induttanza di questa struttura bifilare è data da:

$$L = \frac{\mu}{\pi} \ln\left(\frac{d-a}{a}\right) l,$$

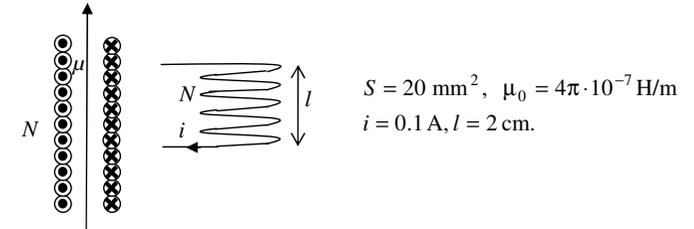
per cui la condizione  $L_{\max} = 1 \mu\text{H}$  è rispettata per lunghezze del cavo:

$$l \leq l_{\max} = \frac{L_{\max} \pi}{\mu \ln\left(\frac{d-a}{a}\right)} = 2.28 \text{ m},$$

quindi i valori ammissibili sono:  $l = [1 \quad 2] \text{ m}$ .

**ES. 3.2** – Si consideri il seguente solenoide rettilineo, assumendo che la sua lunghezza  $l$  sia tale da poter trascurare gli effetti di bordo. Si voglia realizzare all'interno del solenoide un campo di induzione magnetica  $|B| \geq 10 \text{ mT}$ .

- Valutare il numero minimo di avvolgimenti  $N$  richiesto dal rispetto della specifica, considerando il solenoide in aria, cioè assumendo  $\mu_r = 1$ .
- Ripetere il calcolo del punto a) assumendo che il solenoide sia avvolto su un nucleo di materiale ferromagnetico con  $\mu_r = 10^2$ .
- Con riferimento ai risultati dei due punti precedenti, valutare l'induttanza del solenoide.

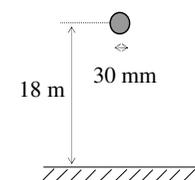


$$\begin{aligned} S &= 20 \text{ mm}^2, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \\ i &= 0.1 \text{ A}, \quad l = 2 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Risultato: a)  $N = 1592$ ; b)  $N = 16$ ; c)  $L = [3.18 \quad 0.03] \text{ mH}$ .

**ES. 3.3** – Si consideri un cavo elettrico posto (assumendo l'approssimazione di filo rettilineo indefinito) ad una certa altezza dal terreno, come in figura.

- trascurando l'effetto della conducibilità del terreno, stimare il campo di induzione magnetica  $B$  che si misurerebbe sul terreno, per ciascuna delle possibili correnti di esercizio e confrontare tali valori con il limite di  $10 \mu\text{T}$ , previsto come valore di attenzione a 50 Hz dalla legislazione italiana.
- Ripetere il punto precedente considerando il terreno come conduttore perfetto.
- Calcolare l'induttanza per unità di lunghezza nelle ipotesi del punto b).

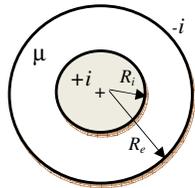


$$\begin{aligned} \text{correnti di esercizio : } I &= [350, 600, 920, 1500] \text{ A} \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \end{aligned}$$

Risultato. a)  $B = (3.89 \quad 6.67 \quad 10.22 \quad 16.67) \mu\text{T}$  (solo i primi 2 valori rispettano la norma);  
b)  $B = (7.78 \quad 13.33 \quad 20.44 \quad 33.33) \mu\text{T}$  (il primo valore rispetta la norma); c)  $L = 1.56 \mu\text{H/m}$ .

**ES.3.4** Si consideri il cavo coassiale di cui si riporta la sezione in figura, sufficientemente lungo da poter essere considerato infinito. Si trascuri il campo magnetico all'interno del conduttore centrale.

- Determinare l'induttanza per unità di lunghezza del cavo.
- Verificare quali tra i valori della corrente riportati in tabella forniscono un campo magnetico tra i conduttori con un valore minimo di 10 mT.

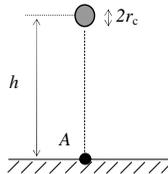


$$\begin{aligned} \mu_r &= 500, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}, \\ R_i &= 25 \text{ mm}, \quad R_e = 40 \text{ mm}, \\ i &= [1 \ 5 \ 10] \text{ A}. \end{aligned}$$

Risultato: a)  $L = 47 \mu\text{H/m}$ ; b)  $i = [5 \ 10] \text{ A}$ .

**ES.3.5** Si consideri un cavo elettrico di una linea aerea di alta tensione posto ad un'altezza  $h$  dal terreno, come in figura. Si assuma che il terreno si comporti come un conduttore elettrico ideale e che il conduttore possa essere modellato con l'approssimazione di filo rettilineo indefinito.

- Calcolare l'induttanza per unità di lunghezza della linea.
- Considerando i possibili valori della corrente di esercizio dati in basso stimare il campo di induzione magnetica che si misurerebbe sul terreno nel punto A in figura e confrontare tali valori con il limite di  $10\mu\text{T}$ , previsto come valore di attenzione dalla normativa italiana per i sistemi elettrici a 50 Hz.



$$\begin{aligned} I &= [600 \ 900] \text{ A} \\ h &= 18 \text{ m}, \quad r_c = 20 \text{ mm} \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}. \end{aligned}$$

Risultato: a)  $L = 1.49 \mu\text{H/m}$ ; b)  $B = [13 \ 20] \mu\text{T}$  (nessun valore rispetta la norma).