Università degli Studi di Cassino

Esercitazioni di Elettromagnetismo

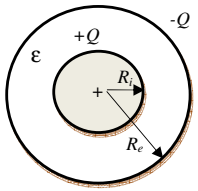
prof. Antonio Maffucci

maffucci@unicas.it

ver. 2.1 – dicembre 2011

1. Elettrostatica e conduzione stazionaria

ES.1.1 Si consideri un condensatore cilindrico (la cui sezione è indicata in figura), sufficientemente lungo da poter essere considerato infinito. Con riferimento ai due dielettrici utilizzabili, le cui costanti sono riportate in tabella, scegliere quali coppie di raggi (R_i, R_e) forniscono una capacità per unità di lunghezza: $0.1\,\text{nF/m} \le C' \le 0.5\,\text{nF/m}$.



$\varepsilon_r = [2.2 \quad 4.5]$, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m,
$(R_i, R_e) = [(10, 15); (10, 30); (10, 50)]$ [in mm]

La capacità per unità di lunghezza di un condensatore cilindrico è data da:

$$C' = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(R_e / R_i)},$$

per cui il rapporto tra i raggi (chiamiamolo α) si ottiene dalla relazione seguente:

$$\ln(\alpha) = \ln(R_e / R_i) = \frac{2\pi\varepsilon}{C'} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{R_e}{R_i} = \exp\left(\frac{2\pi\varepsilon}{C'}\right).$$

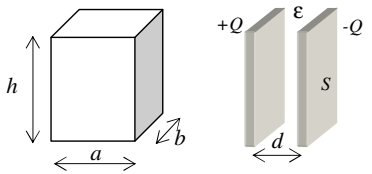
Per il dielettrico con $\varepsilon_r = 2.2$ si ottiene: $1.28 \le \alpha \le 3.40$, quindi per tale caso le coppie ammissibili sono: $(R_i, R_e) = [(10, 15); (10, 30)]$.

Per il dielettrico con $\varepsilon_r = 4.5$ si ottiene: $1.65 \le \alpha \le 12.21$, quindi per tale caso le coppie ammissibili sono invece: $(R_i, R_e) = [(10, 30); (10, 50)]$.

ES.1.2 Si consideri il condensatore piano descritto in figura, supponendo di poter trascurare gli effetti di bordo. Il massimo volume occupabile dal condensatore è indicato in figura e lo spessore del dielettrico non può essere inferiore ad 1 mm.

a) Dimensionare il condensatore in modo da ottenere la massima capacità e valutare tale capacità.

b) Nella condizione di cui al punto a), assumendo una tensione V=10 V, determinare la densità di carica elettrica sulle armature del condensatore e l'intensità del campo **E**.



$\varepsilon_r = 4.5$, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m,
$a = 10$ mm, $b = 5$ mm, $h = 100$ mm

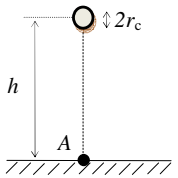
Risultato: a) $d = 1\,\text{mm}; S = 10^{-3}\ \text{m}^2; C = 39.82\ \text{pF}$. b) $\sigma = 3.98 \cdot 10^{-7}\ \text{C/m}^2$; $E = 10$ kV/m.

ES.1.3 La figura in basso si riferisce ad una linea elettrica aerea di media tensione per la quale la tensione di esercizio è pari a 20 kV. Si consideri un cavo in rame di sezione S e si assuma che il terreno si comporti come un conduttore elettrico perfetto.

a) Valutare quali sezioni del cavo sono compatibili con la richiesta che la capacità per unità di lunghezza risulti $C' \ge 6.20$ pF/m.

b) con riferimento alle sezioni ammissibili valutate al punto a), calcolare il campo elettrico nel punto A indicato in figura e confrontarlo col limite di 5 kV/m previsto dalla legislazione italiana per i sistemi a 50 Hz;

c) assumendo che la massima potenza per unità di lunghezza ammissibile è $P = 30\ W/m$, valutare quali delle sezioni, tra quelle che rispettano le richieste dei punti precedenti, siano compatibili con una corrente di esercizio $I = 0.30$ kA.



$h = 12\ m, V = 20\,kV$
$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m,
$\eta_{Cu} = 1.7 \cdot 10^{-8}\ \Omega$m,
$S = (20, 35, 70)\ \text{mm}^2$.

Punto a). Assumendo che il terreno sia un conduttore elettrico perfetto, la capacità per unità di lunghezza di questa struttura è data da:

$$C' = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(2h / r_c)}.$$

Le sezioni considerate corrispondono ai raggi $r_c = \sqrt{S/\pi} = [2.5, 3.3, 4.7]$ mm, da cui

$$C' = [6.07, 6.26, 6.52]\ \text{pF/m},$$

quindi le sezioni utilizzabili sono $S = [35, 70]\ \text{mm}^2$.

Punto b). Nel punto A indicato in figura il campo elettrico ha un valore pari al doppio del campo prodotto dal cavo cilindrico isolato, quindi:

$$E(A) = \frac{Q'}{\pi h \varepsilon} = \frac{C' v}{\pi h \varepsilon}.$$

Considerando solo i valori ammissibili al punto a), si hanno i valori di campo $E(A) = [0.38 \quad 0.39]$ kV/m, entrambi ammissibili.

Punto c). La potenza elettrica dissipata per unità di lunghezza del conduttore è data da:

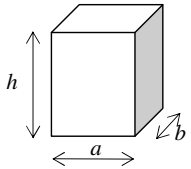
$$P' = \frac{P}{l} = \frac{R}{l} I^2 = \frac{\eta}{S} I^2 \quad \Rightarrow \quad I_{\max} = \sqrt{\frac{P' S}{\eta}}.$$

Per le due sezioni ammissibili secondo il punto a) si avranno $I_{\max} = [0.25, 0.35]$ kA, quindi l'unica sezione compatibile con la richiesta è $S = 70\ \text{mm}^2$.

ES.1.4 Si deve progettare un condensatore da inserire nel volume indicato in figura, tenendo conto che lo spessore del dielettrico non può essere inferiore a 0.1 mm.

a) dimensionare un condensatore piano in modo da avere il massimo valore di capacità e calcolare il valore di tale capacità;

b) ripetere il punto a) per un condensatore cilindrico.



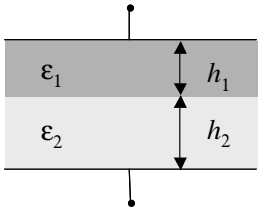
$\varepsilon_r = 12,\ \varepsilon_0 = 8.85\cdot 10^{-12}$ F/m,
$a = 2$ mm, $b = 2$ mm, $h = 50$ mm

Risultato: a) $d = 0.1\,\text{mm}; S = 1\,\text{cm}^2; C = 0.11.$ nF. *b)* $R_e = 1\,\text{mm}; R_i = 1.9\,\text{mm}; C = 0.32.$ nF.

ES.1.5 Si consideri il seguente condensatore piano realizzato con due diversi strati dielettrici.

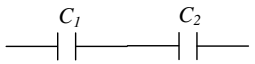
a) Scegliere il valore della costante dielettrica ε_2 che consenta di ottenere una capacità complessiva $C_{tot} \geq 2$ pF.

b) Valutare lo spessore h necessario per ottenere i valori di capacità corrispondenti alle costanti ε_2 ammissibili per il punto a), nell'ipotesi di usare un unico dielettrico ε_2.



$\varepsilon_{r1} = 2.5,\ \varepsilon_{r2} = [3,\quad 4.5,\quad 6]$
$\varepsilon_0 = 8.85\cdot 10^{-12}$ F/m,
$h_1 = 30\,\mu\text{m},\ h_2 = 50\,\mu\text{m},\ S = 6.4\,\text{mm}^2$

Punto a). La struttura in esame è equivalente alla serie di due condensatori piani:



$$C_k = \frac{\varepsilon_k S}{h_k},\quad k = 1,2.$$

per cui la capacità complessiva è data da:

$$C_{tot} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 S^2}{h_1 h_2}\frac{1}{\varepsilon_1 S/h_1 + \varepsilon_2 S/h_2} = \frac{\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} h_2 + \varepsilon_{r2} h_1}\varepsilon_0 S.$$

La condizione $C_{tot} \geq C_{\min} = 2$ pF impone:

$$\varepsilon_{r2} \geq \frac{C_{\min}\varepsilon_{r1} h_2}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 S - C_{\min} h_1} = 3.06,$$

quindi i valori ammissibili sono $\varepsilon_{r2} = [4.5,\quad 6]$.

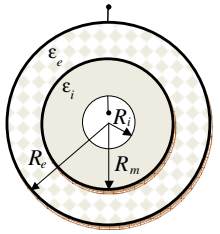
Punto b). Usando i valori del punto precedente si hanno le capacità:

$$C_{tot} = \frac{\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} h_2 + \varepsilon_{r2} h_1}\varepsilon_0 S = [2.45\quad 2.79]\,\text{pF}.$$

Per ottenere queste capacità con un condensatore col solo dielettrico ε_2 occorrono gli spessori:

$$h_2 = \frac{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0 S}{C_{tot}} = [0.10\quad 0.12]\,\text{mm}.$$

ES.1.6 Si consideri il seguente condensatore sferico realizzato con due diversi dielettrici. Valutare i valori del raggio R_m necessari per ottenere: $1.4\,\text{pF} \leq C_{tot} \leq 1.5\,\text{pF}$.



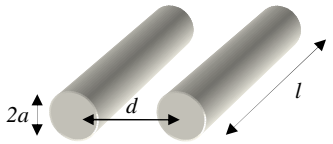
$R_i = 4\text{mm},\ R_e = 6\text{mm}$
$\varepsilon_i = 3\varepsilon_0, \varepsilon_e = \varepsilon_0$
$\varepsilon_0 = 8.85\cdot 10^{-12}\,\text{F/m}$

Risultato: $4.9\,\text{mm} \leq R_m \leq 5.1\,\text{mm}$.

ES.1.7 Si consideri la seguente coppia di conduttori cilindrici di raggio uguale. Si voglia limitare l'accoppiamento capacitivo tra i due conduttori, in modo che l'impedenza equivalente risulti $|Z_c| \geq 10\,\text{k}\Omega$..

a) Valutare la distanza minima d necessaria per ottenere tale condizione, con riferimento alle frequenze di utilizzo riportate in tabella.

b) Con riferimento al risultato ottenuto al punto a) per $f = 1\,\text{MHz}$, valutare la carica elettrica che si deposita su ciascuno dei conduttori assumendo che la tensione tra i due conduttori sia pari a 380 V.



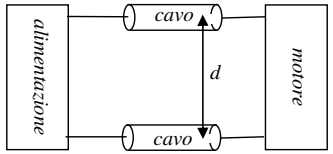
$f = [50\quad 10^3\quad 10^6]\,\text{Hz}$
$\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.85\cdot 10^{-12}\,\text{F/m}$
$l = 2\,\text{m},\quad a = 1\,\text{mm}.$

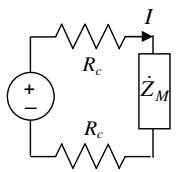
Risultato: a) $d_{\min} = [2\quad 2\quad 33.9]\,\text{mm}$. b) $Q = 6.05\,n\text{C}$.

ES.1.8 La coppia di cavi cilindrici di rame in figura, di sezione S e lunghezza l, viene utilizzata per collegare l'alimentazione ad un motore elettrico, descritto da un'impedenza $\dot{Z}_M$.

a) Verificare che i parametri consentono di ottenere un accoppiamento capacitivo descritto da un'impedenza $\dot{Z}_c$ trascurabile rispetto a $\dot{Z}_M$, assumendo che ciò avvenga per $|Z_c| \geq 100\,|Z_M|$.

b) Trascurando l'induttanza dei cavi e quindi modellando gli stessi come puri resistori (come in figura), valutare quali sezioni sono compatibili con la richiesta che la caduta di tensione industriale valga $\Delta V =\leq 10$ V.





$S = [25 \quad 50 \quad 70]\,\text{mm}^2$
$\eta_{Cu} = 1.7\cdot 10^{-8}\ \Omega\text{m}$
$\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.85\cdot 10^{-12}$ F/m
$l = 300$ m, $d = 0.2$ m
$\dot{Z}_M = 50 + j25\,\Omega$,
$f = 50$ Hz, $I_M = 30$ A.

Punto a). Detto $a = \sqrt{S/\pi}$ il raggio dei conduttori, per i vari valori di S la capacità è data da:

$$C = \frac{\pi\varepsilon l}{\ln(d/a)} = [1.96 \quad 2.13 \quad 2.22]\,\text{nF},$$

che, considerando la frequenza di lavoro, corrispondono ai valori di impedenza:

$$|Z_c| = [1.63 \quad 1.49 \quad 1.43]\,\text{M}\Omega,$$

quindi tutti i valori di S proposti sono compatibili con la condizione $|Z_c| \geq 100\,|Z_M|$.

Punto b). Trascurando l'induttanza delle linea, la caduta di tensione industriale è data da:

$$\Delta V = 2IR_c\cos\varphi,$$

dove $\varphi = 0.46$ rad è la fase dell'impedenza $\dot{Z}_M$. Essendo $R_c = \eta_{\text{Cu}} l/S$, si avrà:

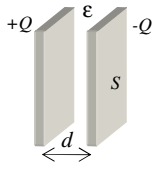
$$2I\cos\varphi\frac{\eta_{\text{Cu}} l}{S} \leq \Delta V_{\max} = 10 \quad \Rightarrow \quad S \geq 2I\cos\varphi\frac{\eta_{\text{Cu}} l}{\Delta V_{\max}} = 27.37\ \text{mm}^2,$$

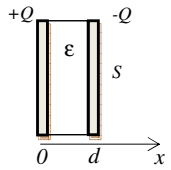
quindi le sezioni ammissibili sono: $S = [50 \quad 70]\,\text{mm}^2$.

ES.1.9 Si consideri il condensatore piano descritto in figura, supponendo di poter trascurare gli effetti di bordo. Considerando che questa struttura può tollerare una forza di attrazione tra le armature $|F| \leq |F|_{\max} = 1$ mN, valutare

a) Le tensioni applicabili con riferimento alle possibili scelte del dielettrico in tabella.

b) Il massimo valore di energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore nelle varie condizioni di cui al punto a).





$\varepsilon_r = [3 \quad 4.5 \quad 6]$, $\varepsilon_0 = 8.85\cdot 10^{-12}$ F/m,
$V = [0.5 \quad 0.8 \quad 1]$ kV
$d = 1$ mm, $S = 1\,\text{cm}^2$.

Punto a). La forza con cui si attraggono le armature di un condensatore piano è data da:

$$F_x = -\left.\frac{dW_e}{dx}\right|_{x=d} = -\left.\frac{Q^2}{2\varepsilon S}\right|_{x=d} = -\left.\frac{C^2(x)V^2}{2\varepsilon S}\right|_{x=d} = -\frac{C^2(d)V^2}{2\varepsilon S},$$

quindi, essendo $C = \varepsilon S/d$, la condizione imposta sulla forza fornisce:

$$|F|_{\max} \geq |F_x| = \frac{C^2(d)V^2}{2\varepsilon S} \quad \Rightarrow \quad |V| \leq d\sqrt{\frac{2|F|_{\max}}{\varepsilon S}}.$$

Considerando i tre possibili dielettrici si ha $|V| \leq [0.87 \quad 0.71 \quad 0.61]$ kV, quindi le seguenti tensioni ammissibili:

$\varepsilon_r = 3 \quad \Rightarrow \quad V = [0.5 \quad 0.8]$ kV,
$\varepsilon_r = 4.5$ e $\varepsilon_r = 6 \quad \Rightarrow \quad V = [0.5]$ kV.

Punto d). Detto E il modulo del campo elettrico nel dielettrico, e ricordando che in un condensatore piano $E = V/d =$ costante, la densità di energia elettrostatica w_e e l'energia elettrostatica W_e sono date rispettivamente da:

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \ \Rightarrow\ W_e = \iiint_\Omega w_e d\Omega = w_e Sd = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 Sd = \frac{\varepsilon V^2 S}{2d},$$

quindi per ciascuno dei casi individuati al punto a), l'energia massima corrisponde al massimo valore ammissibile di tensione. Si avrà, pertanto:

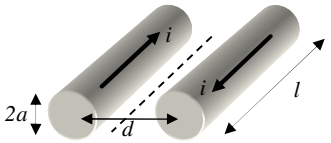
$$W_{e,\max} = [0.85 \quad 0.50 \quad 0.66]\ \mu\text{J}.$$

2. Magnetismo

ES.2.1 Si consideri la seguente coppia di conduttori cilindrici di raggio uguale, percorsa da corrente *i* uguale ed opposta.

a) Valutare la distanza minima *d* necessaria per ottenere in un qualsiasi punto sulla retta tratteggiata in figura (equidistante dagli assi dei cilindri) un campo magnetico $B \le B_{\max} = 100\,\mu\mathrm{T}$.

b) Con riferimento al risultato ottenuto al punto a), valutare quali valori della lunghezza del cavo *l* sono compatibili con un valore di induttanza $L_{\max} = 1\,\mu\mathrm{H}$..



$a = 1\,\mathrm{cm}, \quad i = 5\,\mathrm{A},$
$l = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]\,\mathrm{m},$
$\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$

Punto a). In un qualsiasi punto sulla linea tratteggiata equidistante dagli assi il campo magnetico è pari al doppio del campo creato da uno qualsiasi dei conduttori in assenza dell'altro, cioè:

$$B = \frac{\mu i}{\pi (d/2)},$$

quindi per ottenere $B \le B_{\max} = 100\,\mu\mathrm{T}$ occorre:

$$d \ge d_{\min} = \frac{2\mu i}{\pi B_{\max}} = 4\,\mathrm{cm}.$$

Punto b). L'induttanza di questa struttura bifilare è data da:

$$L = \frac{\mu}{\pi} \ln\left(\frac{d-a}{a}\right) l,$$

per cui la condizione $L_{\max} = 1\,\mu\mathrm{H}$ è rispettata per lunghezze del cavo:

$$l \le l_{\max} = \frac{L_{\max}\pi}{\mu \ln\left(\frac{d-a}{a}\right)} = 2.28\ \mathrm{m},$$

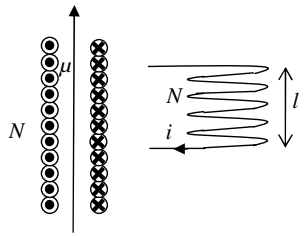
quindi i valori ammissibili sono: $l = [1 \quad 2]\,\mathrm{m}$.

ES. 2.2 – Si consideri il seguente solenoide rettilineo, assumendo che la sua lunghezza *l* sia tale da poter trascurare gli effetti di bordo. Si voglia realizzare all'interno del solenoide un campo di induzione magnetica $|B| \ge 10\,\mathrm{mT}$.

a) Valutare il numero minimo di avvolgimenti *N* richiesto dal rispetto della specifica, considerando il solenoide in aria, cioè assumendo $\mu_r = 1$.

b) Ripetere il calcolo del punto a) assumendo che il solenoide sia avvolto su un nucleo di materiale ferromagnetico con $\mu_r = 10^2$.

c) Con riferimento ai risultati dei due punti precedenti, valutare l'induttanza del solenoide.



$S = 20\ \mathrm{mm}^2, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$
$i = 0.1\,\mathrm{A}, l = 2\,\mathrm{cm}.$

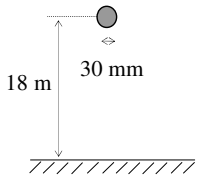
Risultato: a) $N = 1592$; b) $N = 16$; c) $L = [3.18 \quad 0.03]\,\mathrm{mH}$.

ES. 2.3 – Si consideri un cavo elettrico posto (assumendo l'approssimazione di filo rettilineo indefinito) ad una certa altezza dal terreno, come in figura.

a) trascurando l'effetto della conducibilità del terreno, stimare il campo di induzione magnetica *B* che si misurerebbe sul terreno, per ciascuna delle possibili correnti di esercizio e confrontare tali valori con il limite di 10μT, previsto come valore di attenzione a 50 Hz dalla la legislazione italiana.

b) Ripetere il punto precedente considerando il terreno come conduttore perfetto.

c) Calcolare l'induttanza per unità di lunghezza nelle ipotesi del punto b) .



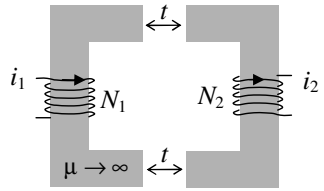
correnti di esercizio : $I = [350, 600, 920, 1500]\ A$
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ H/m$

Risultato. a) $B = (3.89 \ \ 6.67 \ \ 10.22 \ \ 16.67)\,\mu T$ (solo i primi 2 valori rispettano la norma);
b) $B = (7.78 \ \ 13.33 \ \ 20.44 \ \ 33.33)\,\mu T$ (il primo valore rispetta la norma); c) $L = 1.56\,\mu\mathrm{H/m}$.

ES. 2.4 – Nel seguente circuito magnetico di sezione costante S si assume permeabilità magnetica infinita per il materiale ferromagnetico.

a) Scegliere tra le possibili coppie di valori dei numeri di avvolgimenti (N_1,N_2) quelle che corrispondono ad un valore di mutua induttanza $|M| \geq 200\,\text{mH}$.

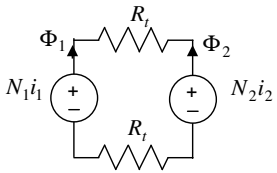
b) Con riferimento ai valori ammissibili al punto a), valutare l'induttanza propria L_1



$(N_1, N_2) = [(100,200); (200,400); (400,800)]$

$t = 1\,\text{mm},\ S = 80\,\text{cm}^2,\ \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\text{H/m}$

Punto a). Nelle ipotesi indicate il circuito resistivo equivalente è il seguente:



$$R_t = \frac{t}{\mu_0 S} = 9.95 \cdot 10^4\ \text{H}^{-1}$$

Essendo per definizione il coefficiente di mutua induttanza definito come

$$M = \left.\frac{\Phi_{N_1}}{i_2}\right|_{i_1=0} = \left.\frac{\Phi_{N_2}}{i_1}\right|_{i_2=0},$$

possiamo calcolarlo, ad esempio, dalla risoluzione delle rete elettrica precedente, nella quale sia stato spento il generatore di tensione $N_1 i_1$:

$$M = \left.\frac{\Phi_{N_1}}{i_2}\right|_{i_1=0} = \left.\frac{N_1\Phi_1}{i_2}\right|_{i_1=0} = -\frac{N_1}{i_2}\frac{N_2 i_2}{2R_t} = -N_1 N_2 \frac{\mu_0 S}{2t},$$

da cui:

$$|M| = N_1 N_2 \frac{\mu_0 S}{2t} \geq 0.2 \ \Rightarrow N_1 N_2 \geq 38789,$$

per cui solo le soluzioni compatibili con la specifica sono $(N_1, N_2) = [(200,400); (400,800)]$.

Punto b). L'induttanza propria L_1 è data da:

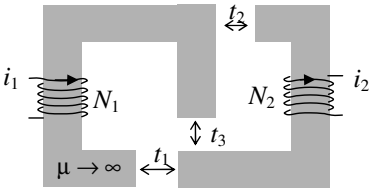
$$L_1 = \left.\frac{\Phi_{N_1}}{i_1}\right|_{i_2=0} = \left.\frac{N_1\Phi_1}{i_1}\right|_{i_2=0} = \frac{N_1}{i_1}\frac{N_1 i_1}{2R_t} = N_1^2 \frac{\mu_0 S}{2t},$$

che per i valori ammessi al punto a) corrisponde alle soluzioni: $L_1 = [0.20 \quad 0.80]\,\text{H}$.

ES. 2.5 – Nel seguente circuito magnetico di sezione costante S si assuma che il materiale ferromagnetico abbia permeabilità magnetica infinita.

a) Valutare i coefficienti di auto e mutua induzione del doppio-bipolo.

b) Con riferimento alle coppie di valori di corrente indicate, verificare in quali condizioni l'intensità del campo magnetico B nel traferro t_1 vale $|B| \geq 0.5\,\text{mT}$.



$N_1 = 200,\ N_2 = 300,$
$t_1 = 2.0\,\text{mm},\ t_2 = 1.0\,\text{mm},$
$t_3 = 0.8\,\text{mm},\ S = 10\,\text{cm}^2,$
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\text{H/m}$
$i_1 = [1 \quad 5 \quad 10]\,\text{mA},$
$i_2 = [0.5 \quad 1 \quad 5]\,\text{mA}.$

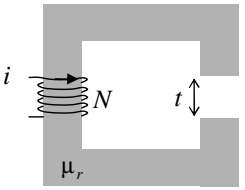
Risultato: a) $L_1 = 20.6\,\text{mH},\ L_2 = 72.0\,\text{mH},\ M = -13.7\,\text{mH}$; b) $i_1 = 10\,\text{mA},\ i_2 = 5\,\text{mA}$.

ES. 2.6 – Si consideri il seguente circuito magnetico di sezione costante S, per il quale il tratto in ferro ha una lunghezza media pari ad l.

a) Valutare i valori di N che consentono di ottenere nel traferro un'intensità del campo magnetico $|B| \geq 100\,\text{mT}$.

b) Calcolare l'induttanza propria del sistema con riferimento ai valori del punto a)

c) Valutare l'energia magnetica immagazzinata nella regione di spazio occupata dal traferro nelle condizioni di cui al punto a)



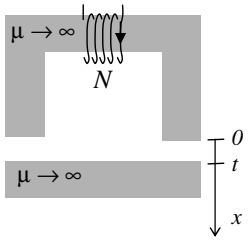
$\mu_r = 10^3,\ \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\text{H/m},$
$N = [500 \quad 800 \quad 1000],\ i = 0.2\,\text{A},$
$t = 2\,\text{mm},\ S = 2\,\text{cm}^2,\ l = 10\,\text{cm}$

Risultato: a) $N = [800 \quad 1000]$; b) $L = [80 \quad 125]\,\text{mH}$; c) $W_m = [1.59 \quad 2.48]\,\text{mJ}$.

ES. 2.7 – Il seguente circuito magnetico rappresenta lo schema di principio di un interruttore differenziale. Quando il modulo della corrente *i* supera un determinato valore detto *sensibilità*, la forza di attrazione tra i due pezzi del circuito magnetico è in grado di attrarre la barretta in basso, interrompere un contatto elettrico (non disegnato nello schema). Con riferimento a questo esercizio, si assuma che il valore minimo della forza di attrazione necessaria è pari a $|F|_{\min} = 0.2$ N.

a) Con riferimento ai valori di sensibilità riportati in tabella, valutare lo spessore ammissibile dei traferri.

b) Assumendo i risultati del punto a), valutare per ogni valore di sensibilità l'energia magnetica immagazzinata nei traferri.

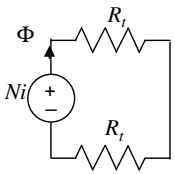


$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m,
$i = [0.2 \;\; 0.02 \;\; 0.01]$ A
$S = 2$ cm^2, $N = 1000$

Punto a). Indichiamo con *x* la dimensione dei traferri. La forza di attrazione tra le due parti del circuito è in generale data da:

$$F_x = \left.\frac{dW_m}{dx}\right|_{\substack{x=d \\ i=\cos t}}$$

dove $W_m = Li^2/2$ è l'energia magnetica associata al sistema. Per valutare L possiamo risolvere il circuito resistivo equivalente:



$$R_t = \frac{t}{\mu_0 S}$$

Si avrà, quindi:

$$\Phi = \frac{Ni}{2R_t} = Ni\frac{\mu_0 S}{2x} \;\Rightarrow\; L = \frac{N\Phi}{i} = \frac{\mu_0 N^2 S}{2x} \;\Rightarrow\; W_m = \frac{Li^2}{2} = \frac{\mu_0 N^2 S i^2}{4x}.$$

La forza di attrazione è allora data da:

$$F_x = \left.\frac{dW_m}{dx}\right|_{\substack{x=d \\ i=\cos t}} = -\frac{\mu_0 N^2 S i^2}{4d^2},$$

quindi la condizione $|F| > |F|_{\min}$ è rispettata per spessori del traferro pari a:

$$d \le \frac{Ni}{2}\sqrt{\frac{\mu_0 S}{|F|_{\min}}}.$$

Per i valori di sensibilità *i* considerati, si avrà: $d_{\max} = [3.54 \;\; 0.35 \;\; 0.18]$ mm.

Punto b). Il campo magnetico *B* nelle regioni del traferro è dato da:

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{\mu_0 N}{2d} i,$$

quindi la densità di energia magnetica è data da:

$$w_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{\mu_0 N^2 i^2}{8d^2},$$

da cui, essendo tale funzione costante nel volume occupato dai traferri, si ricava l'energia magnetica

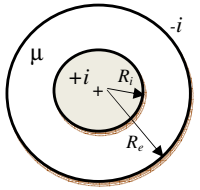
$$W_m = \iiint_\Omega w_m d\Omega = w_m 2Sd = \frac{\mu_0 N^2 i^2 S}{4d}.$$

Assumendo nei vari casi $d = d_{\max}$, si ha: $W_m = [0.71 \;\; 0.07 \;\; 0.35]$ mJ.

ES.2.8 Si consideri il cavo coassiale di cui si riporta la sezione in figura, sufficientemente lungo da poter essere considerato infinito. Si trascuri il campo magnetico all'interno del conduttore centrale.

a) Determinare l'induttanza per unità di lunghezza del cavo.

b) Determinare per quali valori di corrente l'energia magnetica per unità di lunghezza risulta $W_m' \ge 0.2$ J/m.



$\mu_r = 500$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m,
$R_i = 25$ mm, $R_e = 40$ mm,
$i = [10 \;\; 50 \;\; 100]$ A.

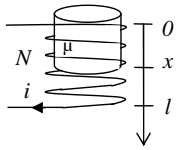
Risultato: a) $L = 47$ μH; b) $i = [100]$ A.

ES. 2.9 – Si consideri il seguente solenoide rettilineo, assumendo che la sua lunghezza l sia tale da poter trascurare gli effetti di bordo. Nel solenoide viene inserito fino ad una certa lunghezza un nucleo di materiale ferromagnetico di permeabilità relativa μ_r.

a) Facendo circolare corrente nel solenoide, il nucleo ferromagnetico subisce una forza: verificare se tale forza tende a richiamarlo all'interno o ad espellerlo.

b) Valutare per quali valori di μ_r la forza ha una intensità $|F| \geq 0.2$ N

c) Valutare in che condizioni si ottiene la massima energia magnetica e calcolarla.



$\mu_r = [500\ \ 1000\ \ 2000]$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m

$i = 0.8$ A, $l = 10$ cm, $S = 1$ cm^2, $N = 300$.

Punto a). Indichiamo con x il tratto per cui il nucleo risulta inserito nel solenoide. Ricordando la definizione di forza lungo tale ascissa e di energia magnetica si ha:

$$F_x = \left.\frac{dW_m}{dx}\right|_{i=\cos t} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1Li^2}{2}\right),$$

essendo L l'induttanza totale del solenoide. Il solenoide può essere visto come composto da due solenoidi, uno avvolto intorno al nucleo, l'altro in aria. Per i due solenoidi si ha, rispettivamente:

$$l_1 = x,\ \mu_1 = \mu_r\mu_0,\ N_1 = \frac{N}{l}x \quad \Rightarrow \quad L_1 = \mu_r\mu_0\frac{N^2S}{l^2}x$$

$$l_2 = l - x,\ \mu_2 = \mu_0,\ N_2 = \frac{N}{l}(l-x) \quad \Rightarrow \quad L_2 = \mu_0\frac{N^2S}{l^2}(l-x)$$

I due solenoidi sono percorsi dalla stessa corrente i, cioè sono in serie, quindi $L = L_1 + L_2$, per cui:

$$F_x = \frac{d}{dx}\left(\frac{Li^2}{2}\right) = \frac{\mu_0 N^2 i^2 S}{2l^2}\frac{d(\mu_r x + l - x)}{dx} = \frac{\mu_0 N^2 i^2 S}{2l^2}(\mu_r - 1),$$

ed essendo nel nucleo ferromagnetico $\mu_r > 1$ si ha $F_x > 0$: il nucleo sarà risucchiato all'interno.

Punto b). Utilizzando l'espressione di F_x del punto precedente, si ha:

$$F_x = \frac{\mu_0 N^2 i^2 S}{2l^2}(\mu_r - 1) \geq F_{\min} = 0.2\text{ N} \ \Rightarrow \quad \mu_r \geq 1 + \frac{2l^2 F_{\min}}{\mu_0 N^2 i^2 S} = 553.6 \quad \Rightarrow \quad \mu_r = [1000\ \ 2000].$$

Punto c). Essendo i costante, l'energia sarà massima quando L sarà massima, cioè quando tutto il nucleo è penetrato all'interno e assumiamo per μ_r il suo valore massimo:

$$W_m = W_{m,\max} = \left.\frac{Li^2}{2}\right|_{\substack{L=L_1 \\ \mu_r=2000}} = \frac{\mu_0\mu_r N^2 S}{2l}i^2 = 72.38\text{ mJ}.$$