

METODO DELLA CADUTA DI POTENZIALE

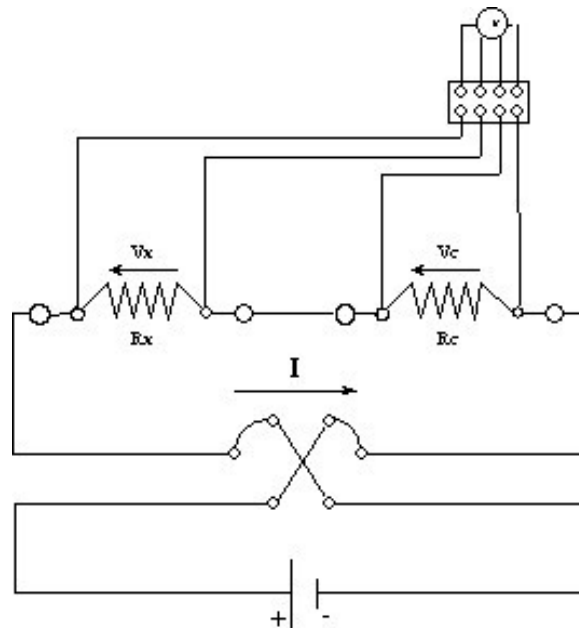


Fig.3.1 - Circuito elettrico

3.1 Generalita'

IL metodo della caduta di potenziale, viene utilizzato per la misura di una resistenza, di piccolo valore, in quanto consente di eliminare gli effetti della forza elettromotrici di contatto e della resistenza di contatto. Il metodo è di tipo volt-amperometrico, ma invece di utilizzare un amperometro si eseguono due misure voltmetriche per migliorare l'incertezza sulla misura. Dalla legge di Ohm si ha (vedi figura):

$$R_x = \frac{V_x}{I} \quad (1)$$

Per risalire alla misura della corrente I, si misura la tensione

$$V_c = R_c * I$$

ai capi della resistenza campione di conseguenza

$$I = \frac{V_c}{R_c} \quad (2)$$

quindi

$$R_x = \frac{V_x}{V_c} * R_c \quad (3)$$

La resistenza campione viene scelta dello stesso ordine di grandezza della resistenza incognita al fine di ridurre l'incertezza sul risultato finale. Quando in un circuito è richiesta una resistenza campione “bassa” si utilizzano particolari resistori a quattro morsetti come da figura

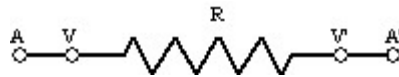


Fig.3. 2 Resistenza a 4 morsetti

- A e A' vengono definiti morsetti amperometrici
- V e V' vengono definiti morsetti voltmetrici

I morsetti voltmetrici devono essere sufficientemente distanti dagli amperometrici in modo da non distorcere la distribuzione della corrente nei rami amperometrici. I morsetti amperometrici sono grandi ed esterni in quanto per diminuire la resistenza di contatto è necessario realizzare dei morsetti di contatto grandi, questo in base alla legge

$$R = \rho * \frac{l}{s}$$

Con tali morsetti risulta difficile definire il valore esatto della resistenza dato che la lunghezza effettiva del resistore è determinata con una elevata incertezza. I morsetti voltmetrici sono interni di sezione piccola così la lunghezza del resistore risulterà ben determinata. A causa della loro dimensione i morsetti voltmetrici V e V' presentano una resistenza di contatto più grande rispetto a quella amperometrici ma ciò non crea problemi in quanto risulteranno in serie all'impedenza dello strumento di misura che sarà elevata quindi non vengono attraversate dalla corrente. Infatti il circuito equivalente della resistenza a quattro morsetti è quello di figura

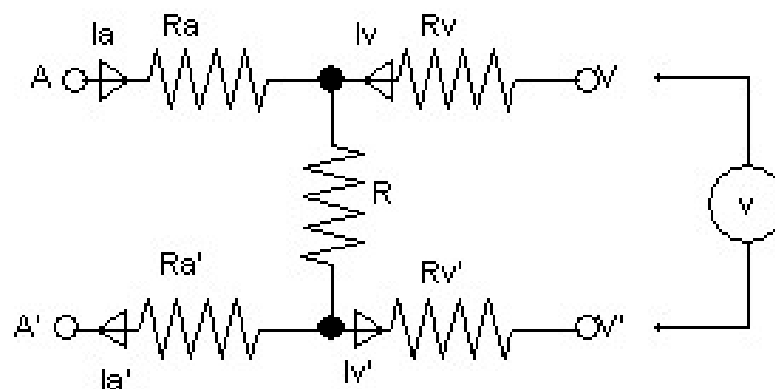


Fig.3.3 - Schema equivalente del resistore come doppio bipolo

La connessione di due materiali diversi fa sorgere forze elettromotrici di contatto il cui valore dipende dai materiali e dalla temperatura alla quale si trova la giunzione. Consideriamo il circuito volumetrico

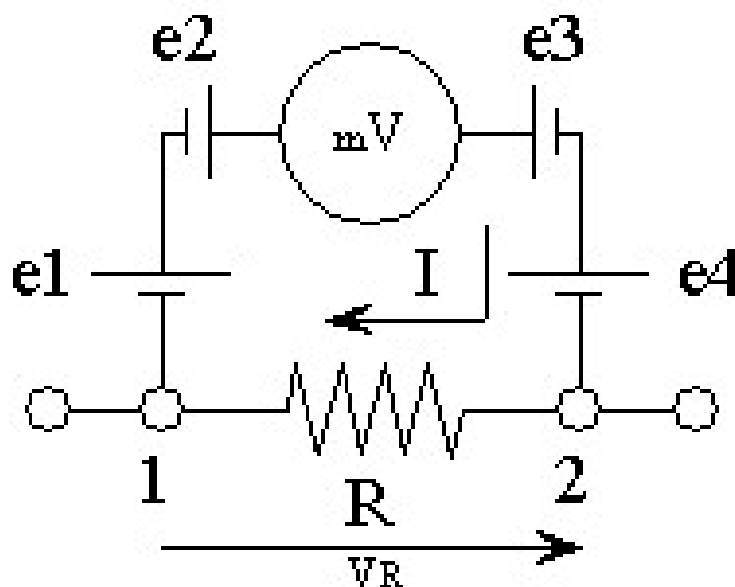


Fig.3.4 – Schematizzazione delle f.e.m di contatto

In corrispondenza di ogni giunzione (cavo, morsetti voltmetrici) si hanno delle forze elettromotrici che sono rappresentate la somma di tali forze elettromotrici. Si presentano diverse f.e.m. nella maglia uno la cui somma potrebbe essere diversa da zero perché le diverse giunzioni possono assumere diverse temperature (ad esempio a causa di un possibile serraggio differente dei contatti amperometrici, e quindi di una differenza di riscaldamento dei contatti). Di conseguenza la relazione sulla maglia è:

$$V_m = V_x + \sum e_i$$

Per eliminare tale effetto sistematico nella misura di tensione si possono effettuare diverse misure con la corrente prima in un verso e poi in un altro. Poiché le forze elettromotrici come prima accennato non dipendono dal verso della corrente si ha:

$$V_m = RI + \sum e_i \quad (4)$$

$$V'_m = -RI + \sum e_i \quad (5)$$

Di conseguenza effettuando la differenza tra le due equazioni si ha:

$$V_m - V'_m = 2RI$$

$$V_R = RI = \frac{V_m - V'_m}{2} \quad (6)$$

3.2 Procedura di misura

La tensioni presenti ai capi delle due resistenze vengono misurate con lo stesso multimetro, per ridurre l'incertezza come sarà dimostrato nel prossimo paragrafo. Inoltre per eliminare gli effetti delle forze elettromotrici come visto si eseguono le misure con la corrente che circola nei due versi. Di conseguenza la procedura di misura risulta piuttosto articolata. Sono necessarie infatti quattro misurazioni successivamente con lo stesso voltmetro. Occorre quindi stabilizzare la corrente nel circuito in modo che non vari altrimenti la relazione (3;6) non sono più valide. A tale fine viene utilizzato un alimentatore stabilizzato in corrente. La corrente imposta è di solito di valore elevato per ridurre l'incertezza nelle misure di tensione essendo la R di valore basso. Quindi la resistenza campione R_c viene scelta in modo da sopportare correnti elevate senza alterare le proprie caratteristiche. Però può succedere che il valore della resistenza incognita R_x vari per effetto termico è quindi è necessario eseguire le misurazioni in un intervallo di tempo breve. Per ridurre i tempi per la misurazione e quindi per minimizzare gli effetti termici le quattro misure vengono eseguite nel seguente ordine:

$$1) V_x$$

$$2) V_c$$

$$3) - V_c$$

$$4) - V_x$$

In questo modo sono ridotte le operazioni da eseguire in ogni misura per passare da 1 a 2 infatti basta spostare i piolini del voltmetro, per passare da 2 a 3 invertire il verso della corrente ecc.. Malgrado tali precauzioni che consentono di eseguire le misure in un tempo limitato occorre verificare che non ci siano stati effetti termici su R_x a tale si esegue una misura di V_x , di conseguenza le misure diventano cinque. Questa ultima misura viene confrontata, con la prima se esse risultano

compatibili l'effetto termico è trascurabile altrimenti la misurazione risulta non valida. Poiché all'aumentare della corrente gli effetti termici aumentano ma l'incertezza diminuisce si effettuano diverse prove per valori di corrente crescenti considerando i valori misurati dalla massima corrente per la quali effetti termici sono trascurabili. Si effettuano tre misure aggiungendo un'ulteriore misura di V_x che permette di valutare la presenza di derive termiche. Quindi

$$V_x = R_x * I$$

$$V_c = R_c * I$$

$$V'_x = R_x * I$$

3.3 Valutazione incertezza

Seguendo la procedura prima descritta si ottengono quattro misure di tensione $V_x', V_x'', V_c',$ e V_c'' da questi otteniamo:

$$V_{xm} = \frac{V_x' - V_x''}{2} \quad (9)$$

$$V_{cm} = \frac{V_c' - V_c''}{2} \quad (10)$$

quindi

$$R_x = R_c * \frac{V_{xm}}{V_{cm}}.$$

Nel seguito si utilizzeranno genericamente V_x e V_c considerandole risultato di una singola misura per non appesantire la trattazione senza ledere la generalità dei risultati ottenuti in quanto l'equazione 9) e 10), rappresentiamo delle semplici operazioni di medie e quindi la trattazione potrebbe essere condotta allo stesso modo considerando le quattro misure. Quindi si ponga

$$R_x = \frac{V_x}{V_c} * R_c$$

Applicando la legge di propagazione per produttorie si ha che l'incertezza relativa su R_x $\dot{u}_{Rx}$ è data da:

$$\dot{u}_{Rx}^2 = \dot{u}_{Rc}^2 + \dot{u}_{\left(\frac{V_x}{V_c}\right)}^2$$

La $\dot{u}_{Rc}$ può essere ottenuta dalle informazioni fornite dal costruttore ad esempio considerando l'accuracy ed ipotizzando una distribuzione rettangolare si ha:

$$\dot{u}_{Rx} = \frac{u_{Rx}}{R_x} = \frac{\text{Accuracy}_{(Rx)}}{R_x}.$$

Viceversa per ottenere $u\left(\frac{V_x}{V_c}\right)$ bisogna tener conto della correlazione in quanto è stato impiegato un solo multimetro. Tale correlazione si può evidenziare considerando che le due R hanno valori molto vicini tra loro di conseguenza le tensioni misurate sono molto prossime. In questo caso si può affermare di utilizzare per due misure (V_x e V_c) il voltmetro nelle stesse condizioni operative quindi al fine di eliminare gli effetti sistematici si prestano con lo stesso valore nelle misure. Gli effetti sistematici possono essere corretti detta Δ la correzione si ha:

$$V_x = \hat{V}_x + \Delta \quad (11)$$

$$V_c = \hat{V}_c + \Delta \quad (12)$$

dove $\hat{V}_x$ e $\hat{V}_c$ rappresentano le misure corrette di V_x e V_c .

Il rapporto $\frac{V_x}{V_c}$ può essere riscritto come:

$$\frac{V_x}{V_c} = \frac{\hat{V}_x + \Delta}{\hat{V}_c + \Delta} \quad (13)$$

ne segue

$$u\left(\frac{V_x}{V_c}\right) = u\left(\frac{\hat{V}_x + \Delta}{\hat{V}_c + \Delta}\right) \quad (14)$$

In questo caso le misure di $\hat{V}_x$, $\hat{V}_c$ e Δ sono scorrelate ed affette solo da componenti di incertezza di tipo aleatorio quindi si può applicare la legge di propagazione dell'incertezza per grandezze scorrelate dalla relazioni 14)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}^2_{\left(\frac{\hat{V}_x + \Delta}{\hat{V}_c + \Delta}\right)} &= \left(\frac{\partial \left(\frac{\hat{V}_x + \Delta}{\hat{V}_c + \Delta} \right)}{\partial \hat{V}_x} \right)^2 * \mathbf{u}_{V_x}^2 + \mathbf{u}_{\Delta}^2 = \\
 &= \frac{1}{(\hat{V}_c + \Delta)^2} * \mathbf{u}_{\hat{V}_x}^2 + \left(\frac{\hat{V}_x + \Delta}{(\hat{V}_c + \Delta)^2} \right)^2 * \mathbf{u}_{\hat{V}_c}^2 + \left(\frac{\hat{V}_x + \Delta - \hat{V}_c - \Delta}{(\hat{V}_c + \Delta)^2} \right)^2 * \mathbf{u}_{\Delta}^2
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Ricordando che :

$$\hat{V}_x + \Delta = V_x \tag{16}$$

e

$$\hat{V}_c + \Delta = V_c \tag{17}$$

si ha

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}^2_{\left(\frac{\hat{V}_x + \Delta}{\hat{V}_c + \Delta}\right)} &= \frac{1}{V_c^2} * \mathbf{u}_{\hat{V}_x}^2 + \frac{V_x^2}{V_c^4} * \mathbf{u}_{\hat{V}_c}^2 + \frac{(V_c - V_x)^2}{V_c^4} * \mathbf{u}_{\Delta}^2 = \\
 \left(\frac{V_x}{V_c} \right)^2 * \left[\frac{\mathbf{u}_{\hat{V}_x}^2}{V_x^2} + \frac{\mathbf{u}_{\hat{V}_c}^2}{V_c^2} + \frac{(V_c - V_x)^2}{V_c^2 * V_x^2} * \mathbf{u}_{\Delta}^2 \right] &\cong \left(\frac{V_x}{V_c} \right)^2 * \left[\frac{\mathbf{u}_{\hat{V}_x}^2}{V_x^2} + \frac{\mathbf{u}_{\hat{V}_c}^2}{V_c^2} \right]
 \end{aligned}$$

Questa approssimazione è lecita in quanto come detto $R_x \cong R_c \Rightarrow V_x \cong V_c$ inoltre $u_{\Delta} \ll u_{V_x}$ in quanto è l'incertezza della correzione.

$$\mathbf{u}^2_{\left(\frac{V_x}{V_c}\right)} = \frac{\mathbf{u}_{\hat{V}_x}^2}{V_x^2} + \frac{\mathbf{u}_{\hat{V}_c}^2}{V_c^2}$$

dove $u_{\hat{v}_c}$ può essere valutata per via sperimentale a partire da misure ripetute effettuate su R_c . Quindi in correlazione si può scrivere:

$$u_{R_x}^2 = R_x^2 * \dot{u}_{R_x}^2 = R_x^2 * \left[\dot{u}_{R_c}^2 + \frac{u_{\hat{v}_x}}{V_x^2} + \frac{u_{\hat{v}_c}^2}{V_c^2} \right].$$

In particolare:

$$u_{\hat{v}_c} = u_{\hat{v}_x} = \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum (v_{ci} - \bar{v}_c)^2}$$