

## PONTE DI WHEATSTONE

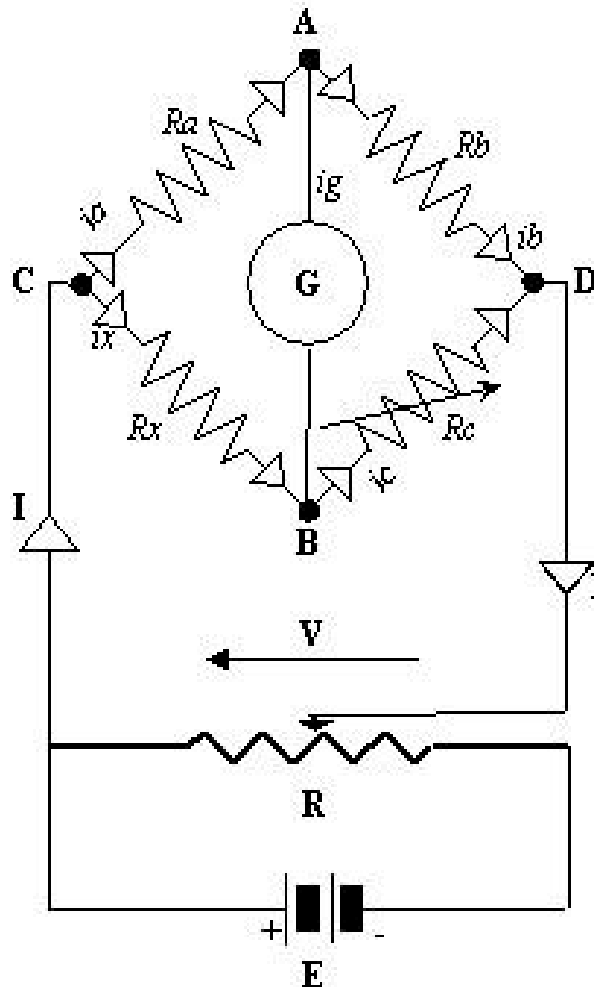


Fig.4.1- Schema elettrico del Ponte di Wheatstone

### 4.1 Generalita'

Un metodo classico per la misura di resistenze di ordine medio, è il ponte di Wheatstone. Una schematizzazione di tale ponte è riportata in figura 4.1. Come si può vedere dallo schema elettrico, il ponte di Wheatstone risulta formato da quattro resistenze connesse in modo da realizzare una maglia di forma quadrata, tra i due lati c'è il galvanometro. In base alla configurazione i lati assumono denominazione particolare;

<lati> del ponte sono detti i quattro rami costituiti da resistori

<diagonali> del ponte sono detti i rami che contengono la sorgente di alimentazione o il galvanometro. Questi due rami si differenziano tra loro e si chiama <diagonale di alimentazione>, quella che si ottiene collegando un

generatore di tensione continua tra i punti medi di due lati e <diagonale di rilevazione> quella in cui un galvanometro a zero centrale, di elevata sensibilità, si collega tra i punti medi degli altri due lati. Uno qualsiasi dei quattro lati è costituito dal resistore di resistenza incognita  $R_x$ , mentre gli altri tre lati sono costituiti da resistori le cui resistenze assumono valori noti. Almeno una delle resistenze note deve essere anche variabile, ed in particolare nell'esempio di sopra riportato avrò un resistore variabile  $R_c$  a decadi. Il rilevatore di zero posto tra i nodi A e B è sensibile al passaggio di corrente nel lato stesso, o alla differenza di potenziale tra i nodi A e B. Il ponte è in equilibrio quando è nulla la corrente che attraversa la diagonale di rivelazione, condizione che può essere individuata dall'indice del galvanometro nella posizione di zero. In condizione di funzionamento, il generatore di tensione continua E fa scorrere, da C verso D, una corrente che si ripartisce tra i due rami comprendenti rispettivamente il nodo A e il nodo B. Applicando i principi di Kirchhoff al ponte, quando è verificata la condizione di equilibrio, si ha :

$$\text{equazione al nodo A} \quad I_a = I_b \quad (1)$$

$$\text{equazione al nodo B} \quad I_x = I_c \quad (2)$$

$$\text{equazione alla maglia ABC} \quad R_x * I_x = R_a * I_a \quad (3)$$

$$\text{equazione alla maglia ABD} \quad R_c * I_c = R_b * I_b \quad (4)$$

Sostituendo (1) e (2) in (4), si ottiene:

$$R_x * I_x = R_a * I_a \quad (5)$$

$$R_c * I_x = R_b * I_a \quad (6)$$

Considerando la (5) e la (6), dividendo membro a membro, si ricava :

$$\frac{R_x}{R_c} = \frac{R_a}{R_b} \quad \text{cioè} \quad R_b * R_x = R_a * R_c \quad (7)$$

E' stata così trovata la relazione che lega le quattro resistenze del ponte, in condizioni di equilibrio. In questa condizione il prodotto delle resistenze dei due lati opposti eguaglia il prodotto delle altre due, è quindi possibile dedurre la resistenza di un lato, cioè :

$$R_x = R_a * \frac{R_b}{R_c} \quad (8)$$

Di conseguenza per ricavare il valore di  $R_x$  resistenza incognita si può agire sul rapporto  $\frac{R_a}{R_b}$  o sulla resistenza  $R_c$ . Nel seguito si farà riferimento alla soluzione

$\frac{R_a}{R_b}$  costante e  $R_c$  variabile, quindi una  $R_c$  resistenza a decadi.

## 4.2 Procedura di misura

Poiché inizialmente il valore di  $R_c$  potrebbe anche essere molto diversa da quello che soddisfa la (8), la corrente nel ramo AB potrebbe essere elevata. Di conseguenza si preferisce alimentare il circuito con valori di tensione via crescenti. Normalmente all'aumentare della tensione di alimentazione e della sensibilità del galvanometro, occorre operare sulle decadi più piccole della resistenza a campione  $R_c$ . Con una sensibilità del ponte molto spinta non si riesce ad azzerare il galvanometro e, quindi, occorre procedere alla interpolazione. Per esempio ponendo  $R_a = R_b = 1000 \Omega$  ed essendo  $R_x = 8715.3 \Omega$  si supponga che non si riesca a portare a zero l'indice del galvanometro né con  $R_c = 8715 \Omega$ , né con  $R_c = 8716 \Omega$  (nei ponti ordinari  $R_c$  varia con salti minori di  $1 \Omega$ ). Si può, allora, effettuare l'interpolazione del valore di  $R_x$  col seguente procedimento. Se con  $R_c = 8715 \Omega$  l'indice devia da un lato (per esempio a sinistra dello zero), di  $\delta_1$  divisioni e con  $R_c = 8716 \Omega$  devia, invece, dall'altro lato di  $\delta_2$  divisioni, si può ricavare il valore di  $x$  da aggiungere a  $8715 \Omega$  onde avere il valore esatto della  $R_x$ . Dalla figura

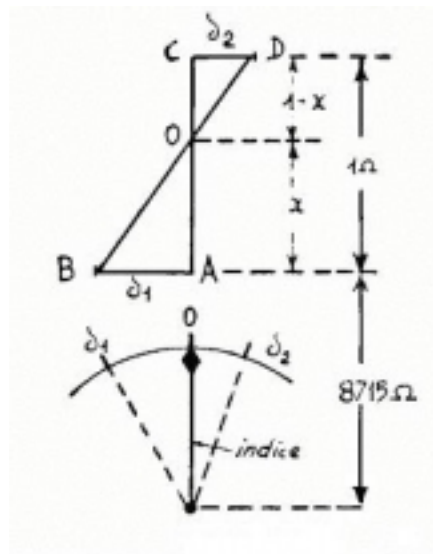


Fig.4.2 – Rappresentazione grafica dell'interpolazione

riportate in senso opposto rispetto al segmento  $AC=1$  (eguale cioè alla differenza tra  $8716$  e  $8715 \Omega$ ) le due deviazioni  $AB = \delta_1$  e  $CD = \delta_2$  (cioè due segmenti ad esse proporzionali) si confrontino i triangoli rettangoli  $ABO$  e  $OCD$ , che sono simili (essendo  $AB$  parallelo a  $CD$  ed entrambi perpendicolari ad  $AC$ ; gli angoli  $BOA$  e

COD eguali, perché opposti al vertice). Si ha, quindi  $\frac{AO}{OC} = \frac{\delta_1}{\delta_2}$  e siccome  $AO = x$   
ed  $OC = 1-x$  sarà ancora :

$$\frac{x}{1-x} = \frac{\delta_1}{\delta_2}$$

da cui,

$$x = \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2}$$

Se ad esempio è  $\delta_1 = 15$  divisioni e  $\delta_2 = 20$  divisioni, sarà

$$x = \frac{15}{20+15} = \frac{15}{35} = 0,42\Omega$$

e quindi

$$R_c = 8715,42\Omega$$

Questo valore esatto di  $R_c$  va introdotto nella formula

$$R_x = \frac{R_b * R_c}{R_a}$$

### 4.3 Valutazione incertezza

L'incertezza sulla misura di  $R_x$  può essere valutata applicando la legge di propagazione dell'incertezza suggerita dalle Norma UNICEI 9 alla formula (8).

In realtà la sensibilità del galvanometro non è infinita, (e che quindi indica una corrente nulla anche quando la corrente è inferiore ad un certo valore  $I_{\min}$ ). Di conseguenza nella relazione (8) bisogna tener conto che non si è sensibili a variazioni di resistenza che determinano il passaggio di una corrente inferiore a  $I_{\min}$ . Di questo se ne può tenere conto riscrivendo la relazione (8) nel seguente modo:

$$R_x = R_a * \frac{R_b}{R_c} + R_s$$

dove  $R_s$  ha un valore medio nulla valore massimo  $R_s$  ed una incertezza  $u_{dR_s}$  diversa da zero e da valutare. Di conseguenza

$$u_{R_x}^2 = u_{\left(\frac{R_a * R_b}{R_c}\right)}^2 + u_{dR_s}^2$$

l'incertezza su  $\left(\frac{R_a * R_b}{R_c}\right)$  si ottiene applicando la legge di propagazione nel caso di una produttoria

$$\dot{u}_{\left(\frac{R_a * R_b}{R_c}\right)} = \dot{u}_{R_a} + \dot{u}_{R_b} + \dot{u}_{R_c}$$

$$u_{\left(\frac{R_a * R_b}{R_c}\right)}^2 = \left(\frac{R_a * R_b}{R_c}\right)^2 * \dot{u}_{\left(\frac{R_a * R_b}{R_c}\right)}^2 = R_x^2 * (\dot{u}_{R_a}^2 + \dot{u}_{R_b}^2 + \dot{u}_{R_c}^2).$$

L'incertezza sulle singole resistenze  $R_a, R_b, R_c$  può essere rilevata con metodi di valutazione di categoria A cioè eseguendo misure ripetute o di tipo B utilizzando i dati forniti dal costruttore. Per valutare  $\dot{u}_{R_s}$  bisogna ragionare come segue.

Come già detto la resistenza  $R_s$  rappresenta quel valore di variazione di resistenza che da luogo ad uno spostamento dell'ago del galvanometro della minima quantità apprezzabile.

**Per la valutazione di  $R_s$  si può procedere in due modi distinti: approccio a posteriori (sperimentale) o approccio a priori (teorico). In entrambi i casi bisogna valutare il minimo scostamento a cui il ponte sarà sensibile  $R_s$ . Ipotizzando una distribuzione rettangolare di ampiezza pari a  $R_s$  si ha**

$$u_{dRs} = \frac{R_s}{\sqrt{12}}.$$

**Nel seguito vengono presentati entrambi gli approcci per la valutazione di  $R_s$  per ricavare  $u_{dRs}$ .**

#### 4.4 Approccio a - posteriori per la valutazione dell'incertezza di sensibilità

Ipotizzando un comportamento lineare intorno allo zero del galvanometro è possibile scrivere:

$$R_s : d\lambda = \Delta R_x : \Delta \lambda \quad (9)$$

Dove si è indicato con:

$R_s$  = il valore della minima variazioni della  $R_x$  a cui il ponte è sensibile.

$d\lambda$  = numero di deviazioni dello strumento apprezzabili

$\Delta R_x$  = una variazione definita di R

$\Delta \lambda$  = il numero di deviazioni corrispondenti alla variazione finale di  $R_x$

Dalla relazione (9) si ha

$$R_s = \frac{\Delta R_x}{\Delta \lambda} * d\lambda \quad (10)$$

di conseguenza

quindi la  $R_s$  si può valutare dando variazione significativa a  $R_x$ . Tale variazione non si può fisicamente dare perché  $R_x$  è la resistenza incognita ed è quindi fissa.

Dalla relazione(8) si ha:

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\Delta R_c}{R_c}$$

di conseguenza la (10) diviene:

$$R_s = \Delta R_c * \frac{d\lambda}{\Delta \lambda} * \frac{R_x}{R_c}$$

Quindi la  $R_s$  si può valutare dando una variazione significativa alla resistenza campione  $R_c$ .

Con riferimento all'esempio numerico precedentemente riportato ( $R_c = 8715.42\Omega$ ;  $R_a = R_b$ ,  $R'_c = 8715.42\Omega$  e  $R''_c = 8715.52\Omega$ ) con le rispettive deviazioni corrispondenti alla variazione di  $R_c$  come da figura:



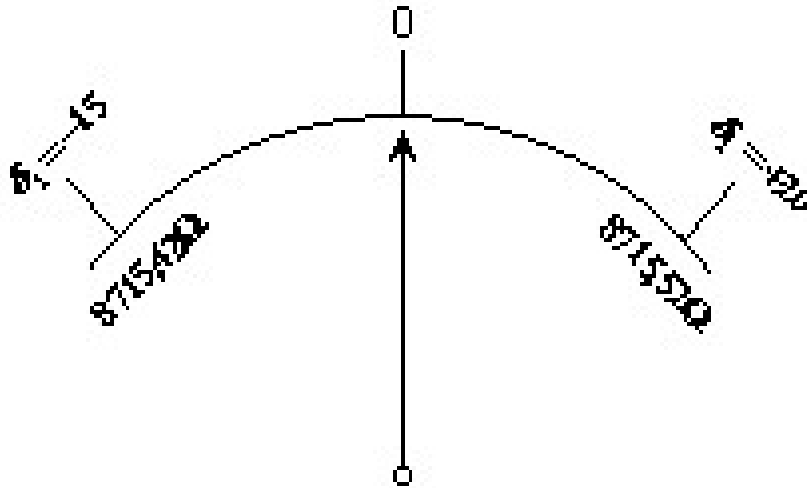


Fig.4.3 – Rappresentazione grafica dell'ago del galvanometro.-

$$\Delta\lambda = 15+20 = 35$$

$$\Delta R_c = 8715.42 - 8715.52 = 0.1\Omega$$

$d\lambda = 0.5$  (l'operatore ritiene di poter apprezzare  $\frac{1}{2}$  divisione)

allora sostituendo tali valori nella formula:

$$R_s = \frac{\Delta R_c * d\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{0.1}{35} * 0.5 = 0.0014\Omega$$

#### 4.5 Approccio priori

Scomponendo il circuito di Figura 4.1 tra A e B nel circuito equivalente di Thevenin. Ipotizzando nulla la resistenza interna dell'alimentatore si ha:

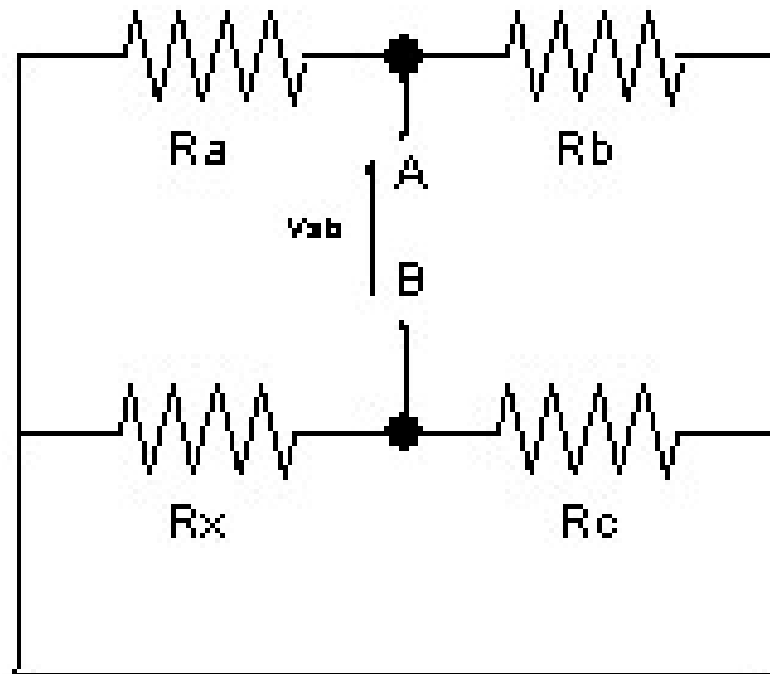


Fig.4.4 – Circuito equivalente

Schematizzando più semplicemente il circuito diventa

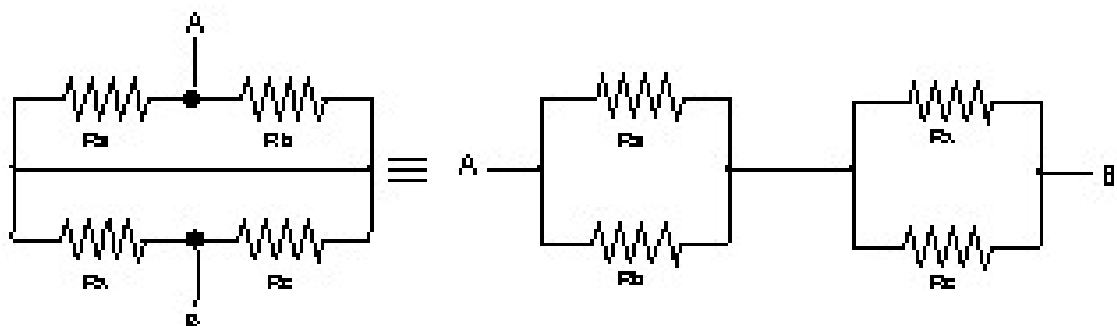


Fig.4.5 – Rappresentazione schematizzata delle resistenze

$$\text{Dunque } R_{eq} = \frac{R_a * R_b}{R_a + R_b} + \frac{R_x * R_c}{R_x + R_c}$$

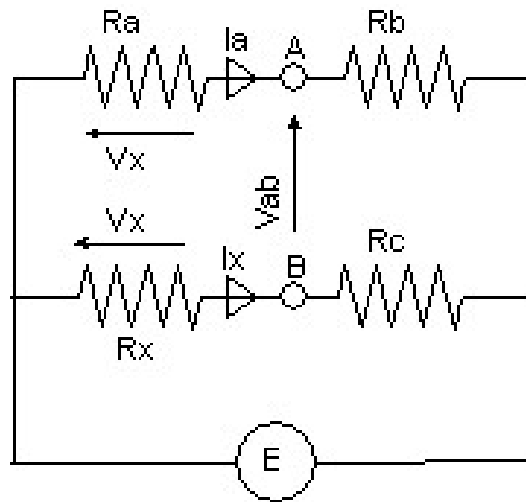


Fig.4.5 – Rappresentazione schematica.-

Dal circuito in esame si ricava  $I_a$  nel seguente modo

$$I_a = \frac{E}{R_a + R_b} \quad I_x = \frac{E}{R_x + R_c}$$

$$V_a = R_a * I_a = E * \frac{R_a}{R_a + R_b} \quad V_x = R_x * I_x = E * \frac{R_x}{R_x + R_c}$$

quindi la tensione a vuoto  $E_0 = V_x - V_a = E * \left( \frac{R_x}{R_x + R_c} - \frac{R_a}{R_a + R_b} \right)$  ossia

il circuito equivalente visto dallo strumento è quello riportato in figura:

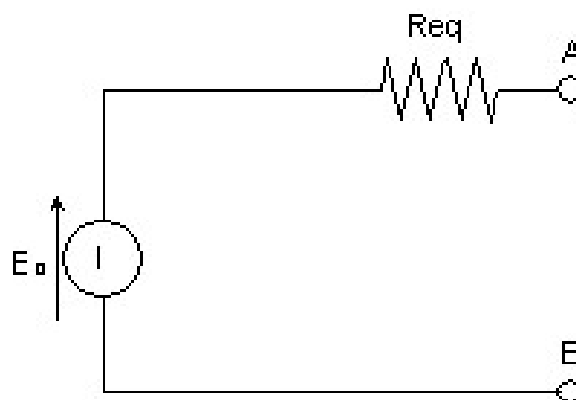


Fig.4.4 –Generatore equivalente di Thevenin.-

Dove

$$R_{eq} = \frac{R_a * R_b}{R_a + R_b} + \frac{R_x * R_c}{R_x + R_c}$$

$$E_o = E * \left( \frac{R_x}{R_x + R_c} - \frac{R_a}{R_a + R_b} \right) \quad (11)$$

In condizione di equilibrio la corrente che scorre nel galvanometro è uguale a zero ( $I_g = 0$ ) quindi  $V_{AB} = 0$  l'espressione diventa :

$$0 = E * \left( \frac{R_x}{R_x + R_c} - \frac{R_a}{R_a + R_b} \right)$$

Il circuito equivalente completo che tiene conto del galvanometro è quello riportato in figura 4.6.

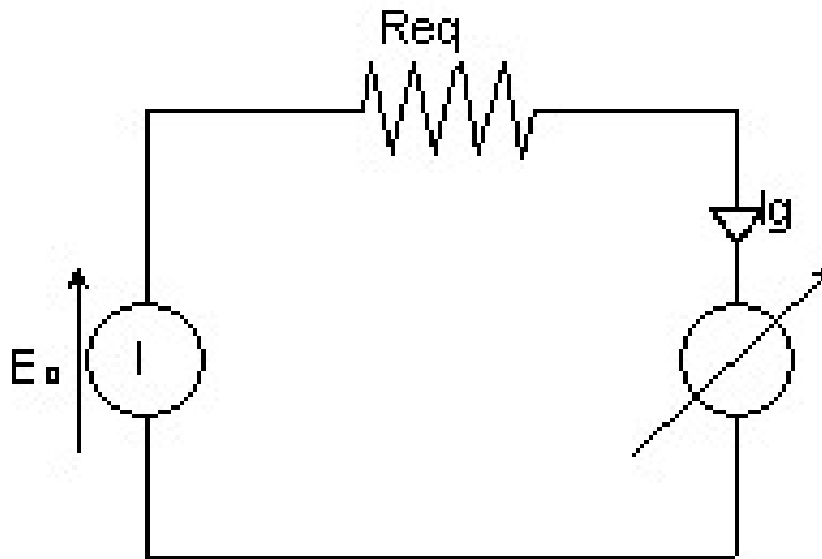


fig.4.6-Schematizzazione completa del circuito.-

In condizione di equilibrio  $I_g = 0$  e quindi  $V_{AB} = E_0 = 0$  come è stato già visto. Per risalire al valore di  $R_s$  si ricordi che essa è definita come la variazione di resistenza dalle condizioni di equilibrio alla quale corrisponde un passaggio di corrente nel galvanometro pari alla minima corrente alla quale il galvanometro è sensibile cioè

$$R_s \Rightarrow I_{min}$$

Analizzando il circuito di figura 4.6 si ha:

$$I_{\min} = \frac{\Delta E_0}{R_{\text{eq}} + R_x} \quad (12)$$

dove  $\Delta E_0$  è la variazione di tensione rispetto alla condizione di equilibrio dovuta alla variazione di  $R_x$  ( $dR_x = R_s$ ). Per ricavare  $\Delta E_0$  si può sviluppare la relazione (11) in serie di Taylor nell'intorno di  $R_x$  a cui corrisponde  $E_0 = 0$  e arrestandosi al primo ordine. Tale approssimazione è valida poiché la variazione di  $R_x$  sono piccole si ha:

$$\Delta E_0 = \frac{\partial E_0}{\partial R_x} * R_s \quad (13)$$

Dalla (12) e (13) si ha:

$$\Delta E_0 = (R_{\text{eq}} + R_x) * I_g = \frac{\partial E_0}{\partial R_x} * R_s$$

cioè

$$R_s = \frac{(R_{\text{eq}} + R_x) * I_g}{\frac{\partial E_0}{\partial R_x}} \quad (3^*)$$

La corrente  $I_g$  si può esprimere come

$$I_g = K_g * \Delta \lambda \quad (14)$$

dove  $k_g$  è la costante strumentale del galvanometro. In genere la costante strumentale di un galvanometro può essere espressa in due modi:

- Ampere/Divisione
- Divisione/Ampere

Per come è stata scritta la relazione (14) si considera la  $K_g$  in  $\left(\frac{\text{Ampere}}{\text{Divisione}}\right)$ , moltiplicando  $K_g$  nella maglia per il numero di deviazioni si ha il valore di corrente che circola. Questa costante è concettualmente l'inverso della sensibilità, intesa come qualità dello strumento, nel senso quanto più piccola  $K_g$  è tanto è migliore è la sensibilità dello strumento.

$$\frac{\partial E_0}{\partial R_x} = E * \frac{R_x + R_c - R_c}{(R_x + R_c)^2} = E \frac{R_c}{(R_x + R_c)^2} = E * \frac{R_c}{R_x^2 * \left(1 + \frac{R_c}{R_x}\right)} = \frac{E}{R_x} * \frac{\frac{R_c}{R_x}}{\left(1 + \frac{R_c}{R_x}\right)} \quad (15)$$

in realtà poiché nella relazione (3\*)  $\frac{\partial E_0}{\partial R_x}$  e al denominatore è interessante andare a valutare quando esso è massimo per poter così dimensionare meglio il circuito.

Ponendo  $\frac{R_c}{R_x} = m$  si ha

$$\frac{\partial E_0}{\partial R_x} = \frac{E}{R_x} * \frac{m}{(1 + m^2)}$$

per ricavare il massimo in funzione di  $m$  si deve porre  $\frac{\partial E_0}{\partial R_x} = 0$  cioè

$$\frac{(1 + m^2) - 2 * (1 + m) * m}{(1 + m)^4} = \frac{2m + 1 + m^2 - 2m^2 - 2m}{1 + m^4} = \frac{-m^2 + 1}{1 + m^4} = 0 \quad \text{cioè } m = \pm 1.$$

Considerando solo la soluzione positiva si ha  $m=1$  cioè  $\frac{R_x}{R_c} = 1$  quindi sostituendo il

valore numerico nella (15) diventa:

$$\frac{\partial E_0}{\partial R_x} = \frac{E}{R_x} * \frac{1}{(2)^2} = \frac{E}{4R_x}$$

Quindi si scopre che la condizione ottimale si ha per  $R_x = R_c$  e quindi  $R_a = R_b$ . E' possibile dimostrare che la situazione ottimale per  $R_x = R_c = R_a = R_b$  quando tutte le resistenze sono uguali. Considerando quindi la variazione  $R_x = R_c$  la  $R_s$  diventa:

$$R_s = (R_{eq} + R_i) * K_g * \frac{\left(1 + \frac{R_x}{R_c}\right)^2}{E} * \frac{R_x}{R_c} * d\lambda$$

**Possiamo, quindi, affermare che:**

**Uno strumento con un  $K_g$  più piccolo riduce l'errore di sensibilità.**

**Quanto più è elevata la tensione E e tanto più basso è l'errore di sensibilità i limiti massimi di E dipendono dalla I massima circolabile nei componenti. Quanto più è minore  $(R_{eq} + R_i)$  e tanto più basso è  $R_s$ . Dunque l'errore di sensibilità non dipende solo dallo strumento utilizzato ma anche dal circuito in cui è inserito il galvanometro inoltre il metodo presenta un limite al crescere di  $R_x$  aumenta la  $R_{eq}$ , di conseguenza aumenta  $R_s$ .**

**Il ponte utilizzato quindi per misure di resistenza di valore medio con una precisione dell'ordine di una parte su diecimila. Sembrerebbe quindi che trattandosi di precisioni non particolarmente elevate esso possa essere sostituita da un buon multimetro numerico. In realtà attraverso due tecniche:**

- doppia pesata**
- sostituzione**

**si ha un miglioramento della prestazioni in termini di precisioni tale da giustificare l'utilizzo del ponte.**

#### 4.6 Tecnica della doppia pesata

Come detto risulta sempre conveniente utilizzare due resistori  $R_a$  ed  $R_b$  caratterizzate dagli stessi valori nominali, a causa della loro incertezza pur avendo  $R_a = R_b$  avrò  $R_{c_1} \neq R_{c_2}$ . Effettuando due misure su  $R_x$  e scambiando di posto  $R_a$  ed  $R_b$  si ha:

$$R_x = \frac{R_a}{R_b} * R_{c_1} \quad (1)$$

$$R_x = \frac{R_b}{R_a} * R_{c_2} \quad (2)$$

Quindi moltiplicando i due membri dell'equazioni (1) e (2) si ha:

$$R_x^2 = \frac{R_a}{R_b} * R_{c_1} * \frac{R_b}{R_a} * R_{c_2} = R_{c_1} * R_{c_2} \quad (3)$$

Quindi

$$R_x = \sqrt{R_{c_1} * R_{c_2}} \quad (4)$$

considerando  $R_{c_1} \cong R_{c_2}$  ipotizzando di utilizzare delle  $R$  a decadi evidenziando la parte comune

$$R_{c_1} = R_0 + r_1 \quad (5)$$

$R_{c_2} = R_0 + r_2$  dove  $R_0 \gg r_1$  e  $R_0 \gg r_2$   
quindi la (4) diviene

$$\begin{aligned} R_x &= \sqrt{(R_0 + r_1) * (R_0 + r_2)} = \sqrt{R_0^2 + R_0 * (r_1 + r_2) + r_1 * r_2} \\ &= R_0 * \sqrt{1 + \frac{r_1 + r_2}{R_0} + \frac{r_1 * r_2}{R_0^2}} \cong R_0 * \sqrt{1 + \frac{r_1 + r_2}{R_0}} \end{aligned} \quad (6)$$

Ricordando che  $(1 + \alpha)^n$  con  $\alpha \ll 1$  può essere approssimato nel seguente

modo:  $(1 + \alpha)^n \cong 1 + n\alpha$  essendo  $r_1$  e  $r_2 \ll R_0$  si può concludere che  $\frac{r_1 * r_2}{R_0^2} \ll 1$

quindi la (6) diviene



$$\mathbf{R}_x = \mathbf{R}_0 * \left( 1 + \frac{r_1 + r_2}{2\mathbf{R}_0} \right) = \left( \frac{2\mathbf{R}_0 + r_1 + r_2}{2} \right) = \frac{\mathbf{R}_{e_1} + \mathbf{R}_{e_2}}{2}.$$

### Valutazione incertezza

Per valutare l'incertezza bisogna tener conto anche dell'incertezza legata alla sensibilità del ponte. A tal fine le equazioni (1) e (2) vanno così riscritte:

$$R_x = \frac{R_a}{R_b} * R_{c_1} + dR_{s_1}$$

$$R_x = \frac{R_b}{R_a} * R_{c_2} + dR_{s_2} \text{ quindi sviluppando la (4) e ponendo come prima}$$

$$R_{c_1} = R_0 + r_1$$

$$R_{c_2} = R_0 + r_2$$

diviene:

$$\begin{aligned} R_x &= \sqrt{R_{c_1} * R_{c_2} + R_{s_1} * \left( \frac{R_a}{R_b} * R_{c_2} \right) + R_{s_2} * \left( \frac{R_b}{R_a} * R_{c_1} \right) + R_{s_1} * R_{s_2}} = \\ &= \sqrt{R_0^2 + R_0 * (r_{c_1} + r_{c_2}) + r_{c_1} * r_{c_2} + \frac{R_{s_1} * R_a}{R_b} * (R_0 + r_2) + \frac{R_{s_2} * R_b}{R_a} * (R_0 + r_1)} = \\ &= R_0 * \sqrt{1 + \frac{r_{c_1} + r_{c_2}}{R_0} + \frac{r_{c_1} * r_{c_2}}{R_0^2} + \frac{R_{s_1} * R_a}{R_b} * \left( \frac{1}{R_0} + \frac{r_2}{R_0^2} \right) + \frac{R_{s_2} * R_b}{R_a} * \left( \frac{1}{R_0} + \frac{r_1}{R_0^2} \right)} \cong \\ &\cong R_0 * \sqrt{1 + \frac{r_{c_1} + r_{c_2}}{R_0} + \frac{1}{R_0} * \left( \frac{R_{s_1} * R_a}{R_b} + R_{s_2} * \frac{R_b}{R_a} \right)} \cong \\ &\cong R_0 * \left( 1 + \frac{r_{c_1} + r_{c_2}}{2} + \frac{1}{2R_0} * \left( \frac{R_{s_1} * R_a}{R_b} + R_{s_2} * \frac{R_b}{R_a} \right) \right) \cong \\ &\cong R_0 + \frac{r_{c_1} + r_{c_2}}{2} + \frac{1}{2} * \left( R_{s_1} * \frac{R_a}{R_b} + R_{s_2} * \frac{R_b}{R_a} \right) \cong \\ &\cong R_0 + \frac{r_{c_1} + r_{c_2}}{2} + \frac{dR_{s_1} + dR_{s_2}}{2} \text{ quindi} \end{aligned}$$

$$u_{R_x}^2 = U_{R_0}^2 + \frac{1}{4} u_{c_1}^2 + \frac{1}{4} u_{c_2}^2 + \frac{1}{4} u_{dR_{s_1}}^2 + \frac{1}{4} u_{dR_{s_2}}^2$$

#### 4.8 Tecnica della sostituzione

Tale metodo consente di ottenere un'incertezza ridotta nelle misure del rapporto di due resistenze che differiscono fra loro di una quantità piccola. Si procede nel seguente modo: si pone una delle due resistenze incognite  $R_{x1}$  nel ponte e si raggiunge l'equilibrio:

$$R_{x1} = \frac{R_1}{R_2} * R_{c1} \quad (1)$$

Quindi si sostituisce la  $R_{x1}$  con l'altra resistenza incognita e si ricava una nuova condizione d'equilibrio:

$$R_{x2} = \frac{R_1}{R_2} * R_{c2} \quad (2)$$

quindi:

$$\alpha = \frac{R_{x1}}{R_{x2}} = \frac{R_{c1}}{R_{c2}} \quad (3)$$

Per valutare l'incertezza sul rapporto bisogna tener conto dell'incertezza sulle due condizioni di equilibrio si ha:

$$\alpha = \frac{R_{c1} + dR_{s1}}{R_{c2} + dR_{s2}} \quad (4)$$

Inoltre  $R_{c1}$  e  $R_{c2}$  sono due valori diversi dello stesso resistore a decadi quindi le possiamo scrivere nel seguente modo:

$$R_{c1} = R_0 + r_1 \quad (5)$$

$$R_{c2} = R_0 + r_2$$

dove  $r_1$  e  $r_2$  sono piccole su  $R_{x1}$  e  $R_{x2}$  sono molte prossime tra loro.

Riprendendo l'espressione (4) diventa:

$$\alpha = \frac{R_0 + r_1 + dR_{s1}}{R_0 + r_2 + dR_{s2}} = \frac{1 + \frac{r_1 + dR_{s1}}{R_0}}{\left(1 + \frac{r_2 + dR_{s2}}{R_0}\right)}$$

se  $R_0 \gg r_2 + dR_{s2}$  l'espressione diventa:

$$\alpha \cong \left(1 + \frac{r_1 + dR_{s1}}{R_0}\right) * \left(1 - \frac{r_2 + dR_{s2}}{R_0}\right) = 1 + \frac{(r_1 - r_2) + dR_{s1} - dR_{s2}}{R_0} - \frac{(r_1 + dR_{s1})^2 (r_2 + dR_{s2})^2}{R_0^2}$$

poiché  $r_1$  e  $r_2$  così come  $dR_{s1}$  e  $dR_{s2}$  sono molto minore di  $R_0$  è possibile trascurare l'ultimo termine:

$$\alpha = 1 + \frac{(r_1 - r_2) + dR_{s1} - dR_{s2}}{R_0}$$

quindi l'incertezza assoluta diventa:

$$u_\alpha^2 = \left( \frac{(r_1 - r_2)}{R_0} \right)^2 * u_{R0}^2 + \frac{1}{R_0^2} * (u_{r1}^2 + u_{r2}^2) + \frac{1}{R_0^2} * (u_{dRs1}^2 + u_{dRs2}^2)$$

A volte il metodo di sostituzione viene utilizzato per misurare una resistenza incognita con un'incertezza più bassa ma richiede l'impiego di due resistori campioni variabili. Si posiziona la resistenza incognita nel ponte e raggiunto la condizione di equilibrio si ha:

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} * R_{c1}$$

Poi si sostituisce la resistenza incognita  $R_x$  con un'altra resistenza campione variabile  $R_{c2}$  e si agisce solo su questo secondo resistore fino a giungere alla condizione d'equilibrio mantenendo fisso  $R_{c1}$ :

$$R_{c2} = \frac{R_1}{R_2} * R_{c1} \tag{6}$$

quindi  $R_x = R_{c2}$ .

Tenendo conto delle due condizioni di equilibrio la relazione (6) si può riassumere come :

$$R_x = R_{c2} + 2dR$$

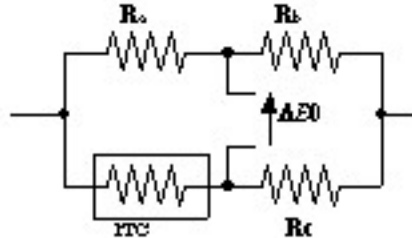
ne segue che l'incertezza assoluta sul resistore è data da:

$$u_{Rx}^2 = u_{Rc}^2 + 4u_{dR}^2$$

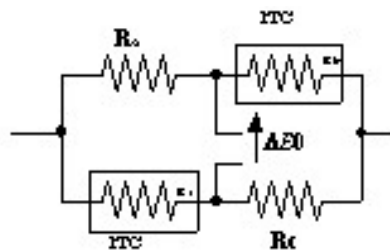
Quindi l'incertezza su  $R_1$  e su  $R_2$  non rientra in questa relazione e quindi la misura è caratterizzata da un'incertezza minore rispetto al ponte tradizionale.

## Altre applicazioni del ponte

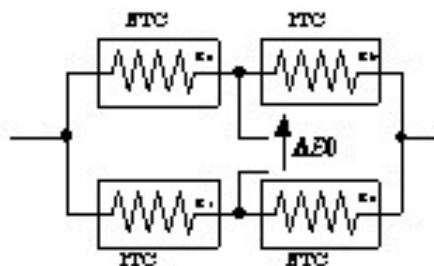
Il ponte di Wheatstone oltre ad essere utilizzato per misure di resistenza può essere impiegato come circuito di condizionamento per sensori resistivi (estensimetri, sensori piezoresistivi, termoresistenze termistori) Se al posto di  $R_x$  si pone un sensore, per esempio una termoresistenza, come in figura



ne segue che azzerando  $\Delta E_0$  per un dato valore  $\theta_0$  della temperatura, al variare della  $\vartheta$  varia la resistenza del sensore, generando quindi uno squilibrio del ponte. Esiste un legame di proporzionalità tra lo squilibrio in tensione, la resistenza incognita e la temperatura cioè:  $\Delta E \propto \Delta R_x \propto \Delta \theta$ . Se si utilizzano due sensori uguali posti su due lati opposti si otterrà un squilibrio doppio. come da figura



Utilizzando quattro sensori, due con variazioni positivi e due negativi, si otterrà un squilibrio quadruplo.



eliminiamo il problema dell'azzeramento utilizzando sensori con le stesse caratteristiche. Nell'ipotesi che lo strumento che misura  $\Delta E_0$  assorba una corrente praticamente trascurabile cioè che il ponte abbia i morsetti di  $\Delta E_0$  a vuoto si

ha:  $E_0 = E * \left[ \frac{R_x}{R_x + R_c} - \frac{R_a}{R_a + R_b} \right]$  In condizione di azzeramento le resistenze sono

uguali  $R_x = R_c = R_a = R_b$  ne segue che  $E_0 = 0$ . Se  $R_x$  subisce una

variazione  $\Delta R \Rightarrow 0$  avrà una  $\Delta E'_0$  come da formula:

$$\begin{aligned} \Delta E'_0 &= E * \left[ \frac{R + \Delta R}{R + \Delta R + R} - \frac{R}{R} \right] \\ &= E * \left[ \frac{2R + 2\Delta R - 2R - \Delta R}{2 * (2R + \Delta R)} \right], \text{ se } \Delta R \ll R \end{aligned}$$

$$\Delta E'_0 \cong \frac{E * \Delta R}{4R},$$

essendo  $\Delta R$  dell'ordine del  $\frac{0}{00} - \frac{0}{0}$  di  $R$ . Se la due resistenze  $R_x$  e  $R_b$  subiscono una variazione  $\Delta R$  avrà una nuova variazione  $\Delta E''_0$  data da:

$$\Delta E''_0 = E * \left[ \frac{R + \Delta R}{2R + \Delta R} - \frac{R}{2R + \Delta R} \right] \cong \frac{E * \Delta R}{2R} = 2\Delta E'_0.$$

Considerando invece una variazione  $\Delta R$  positiva e negativa sulle due resistenze  $R_x$  e  $R_b$  la variazione

$$\text{diventa: } \Delta E'''_0 = E * \left[ \frac{R + \Delta R}{R + \Delta R + R - \Delta R} - \frac{R - \Delta R}{R + \Delta R + R - \Delta R} \right] = \frac{E * \Delta R}{R}.$$

Emerge che la variazione di  $\Delta R \propto \Delta \theta$ .