MISURE DI POTENZA

1. Misure di potenza in circuiti in continua

La potenza elettrica (P) dissipata su di un carico (L) alimentato da una sorgente in continua (E) è data dal prodotto tra la caduta di tensione sul carico (V_L) e la corrente che fluisce in esso (I_L):

$$P = V_L \times I_L \qquad (1)$$

Conseguentemente, la misura di potenza in un circuito in continua può in genere essere ottenuta utilizzando un voltmetro (V) ed un amperometro (A) seguendo uno degli schemi di Fig. 1 (a o b). Nello schema di Fig. 1a, l'amperometro misura anche la corrente che fluisce nel voltmetro. Al contrario, nella configurazione di Fig. 1b, questo errore è evitato, ma il voltmetro misura anche la caduta di tensione sull'amperometro.

Quindi in entrambe le configurazioni viene misurata una potenza maggiore di quella assorbita dal carico; il relativo errore di misura viene generalmente indicato come errore di *inserzione o di consumo*.

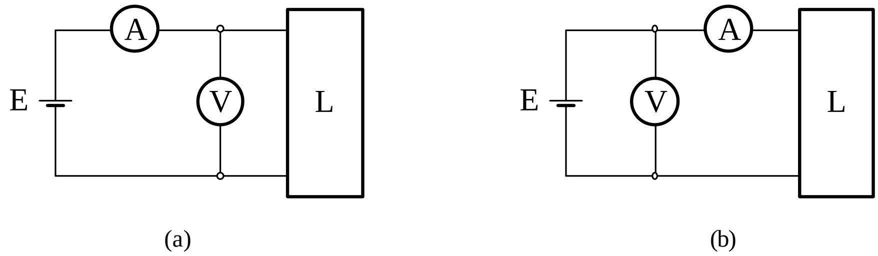

Fig. 1

Avendo indicato con

- I, la corrente misurata dall'amperometro nella configurazione di Fig.1a;
- V, la tensione misurata dal voltmetro nella configurazione di Fig.1b;;
- R_V e R_A, le resistenze interne del voltmetro e dell'amperometro rispettivamente;
- R_L, la resistenza del carico;
- I_V, la corrente che fluisce nel voltmetro (Fig. 1a);
- V_A, la caduta di tensione sull'amperometro (Fig. 1b);

e trascurando:

- I_V, rispetto ad I;
- V_A, rispetto ad V,

si ha per le configurazioni di Fig.1a e 1b rispettivamente:

$$\frac{I_V}{I} \cong \frac{I_V}{I_L} = \frac{R_L}{R_V}; \qquad \frac{V_A}{V} \cong \frac{V_A}{V_L} = \frac{R_A}{R_L}. \qquad (2)$$

Queste relazioni consentono una correzione analitica degli errori di inserzione a partire dalla conoscenza del (i) valore della resistenza sul carico e (ii) del valore della resistenza interna del voltmetro (Fig.1a) o di quella interna dell'amperometro (Fig.1b). Infatti, con le succitate approssimazioni si ha:

(per lo schema di Fig. 1a)

$$P = V_L \times I_L = V \times I \times \left(\frac{R_V - R_L}{R_V}\right) \tag{3}$$

(per lo schema di Fig. 1b)

$$P = V_L \times I_L = V \times I \times \left(\frac{R_L - R_A}{R_L}\right). \tag{4}$$

Lo strumento più comunemente utilizzato per le misure di potenza è il wattmetro elettrodinamico composto da (i) due avvolgimenti fissi, connessi in serie e collegati in posizione coassiale e con uno spazio tra loro e (ii) un avvolgimento mobile, situato tra i due fissi ed equipaggiato con un indice (Fig. 2).

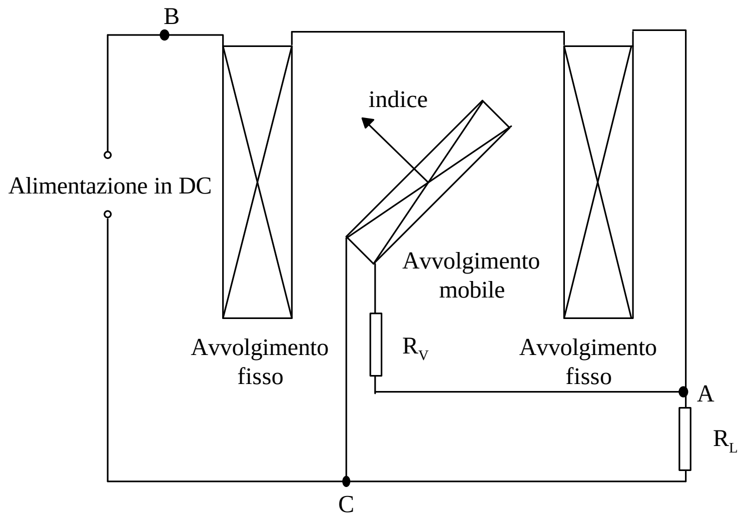

Fig. 2

La coppia motrice risulta proporzionale al prodotto delle correnti che scorrono nei due avvolgimenti: gli avvolgimenti fissi, detti amperometrici, sono interessati dalla corrente sul carico mentre quello mobile, detto voltmetrico, porta una corrente che è proporzionale, tramite la resistenza R_V, alla caduta di tensione sul carico R_L. Di conseguenza la deflessione dell'indice è proporzionale alla potenza dissipata sul carico.

A causa degli errori di inserzione precedentemente descritti i valori di potenza dissipata dal carico possono essere valutati come:

$$P_L = P - I^2 R_f \tag{5}$$

dove R_f è la resistenza dell'avvolgimento amperometrico (configurazione di Fig. 1a), o come.

$$P_L = P - \frac{V^2}{R_v} \tag{6}$$

dove R_v è la resistenza dell'avvolgimento voltmetrico (configurazione di Fig. 1b).

2. Misure di potenza in circuiti in a.c.

2.1 Definizioni

Tutto quanto sin qui detto è relativo a circuiti alimentati in continua. In circuiti alimentati in alternata, la potenza elettrica, definita come prodotto tra la caduta di tensione su di un carico predefinito e la corrente che fluisce in esso in funzione del tempo

$$p(t) = v(t) * i(t) \tag{8}$$

viene definita come potenza istantanea. Nei circuiti in a.c. si è principalmente interessati al valore medio della potenza istantanea in un determinato intervallo di tempo. In circuiti alimentati da tensioni periodiche è rilevante definire la potenza media dissipata in un periodo T (potenza attiva) come:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt \tag{9}$$

Il caso più semplice riguarda un generatore sinusoidale che alimenta un carico puramente resistivo. In questo caso, v(t) e i(t) sono in fase e p(t) è data da:

$$p(t) = V*I*[1-\cos(2\omega t)] \tag{10}$$

in cui:

- V e I sono i valori efficaci di v(t) e i(t), rispettivamente;
- ω è la velocità angolare dell'alimentazione.

La potenza elettrica dissipata sul carico è data da un valore costante V*I più una quantità oscillante a frequenza doppia di quella dell'alimentazione. Conseguentemente, il valor medio della potenza, in un periodo è semplicemente pari al prodotto V*I (potenza attiva). In questo caso, tutte le considerazioni fatte per la misura di potenza nei circuiti in continua sono ancora applicabili con riferimento alla misura di potenza attiva purché si sostituiscano i valori di tensione e corrente con i corrispondenti valori efficaci.

Nel caso di circuiti puramente reattivi si ha: la caduta di tensione ai capi del carico e la corrente che scorre in esso sono sfasate di 90 gradi. La potenza istantanea p(t) è data da:

$$p(t) = V*I*\sin(2\omega t) \tag{11}$$

La potenza media (o attiva) dissipata in un carico reattivo in un periodo dell'alimentazione è zero a causa dello sfasamento introdotto dal carico tra tensione e corrente.

In questi casi semplici di carico puramente resistivo o reattivo, il carico può essere espresso tramite un numero reale o immaginario. Più in generale il carico è espresso tramite un numero complesso. In questo caso, l'impedenza del carico può essere rappresentata tramite il suo circuito equivalente consistente, ad esempio, nella serie di una pura resistenza e di una pura reattanza (induttiva o capacitiva). Con questa rappresentazione in mente, la potenza elettrica dissipata su di un carico Z_L (Fig. 3) può essere espressa dalla somma delle componenti di potenza dissipate separatamente sulla resistenza equivalente R_{EQ} e sulla reattanza X_{EQ} del circuito equivalente di Z_L.

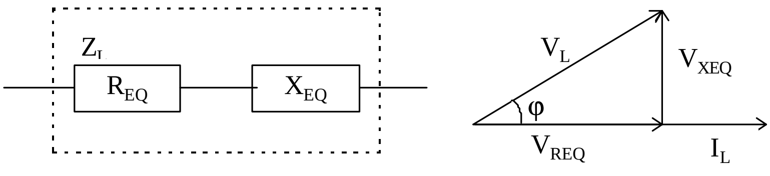

Fig. 3

Considerando che sulla reattanza non vi è dissipazione di potenza attiva si ha:

$$P = V_{REQ}*I_L = V_L*I_L*\cos(\varphi) \tag{12}$$

Il termine cos(φ) che appare nella (12) prende il nome di *fattore di potenza*. Esso tiene conto del fatto che solo una frazione della tensione V_L dà contributo alla potenza, infatti la sua componente V_{XEQ} (caduta sulla reattanza) non produce alcuna potenza attiva essendo ortogonale alla corrente I_L che scorre nel carico.

Gli effetti del fattore di potenza su forme d'onda di potenza istantanea (p), tensione (v) e corrente (i) è illustrata in Fig. 4. Osservando gli andamenti relativi di tensione e corrente negli stessi istanti si può dedurre che il loro prodotto avrà un valore medio (i) non-nullo, solo se esiste una differenza di fase, e (ii) in particolare, proporzionale a tale sfasamento.

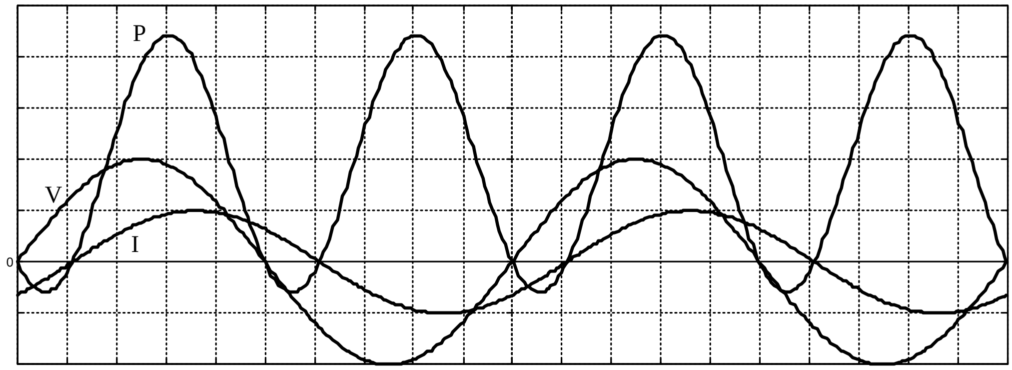

Fig.4

Il termine:

$$P_A = V_L * I_L \tag{13}$$

è detto *potenza apparente*, mentre il termine:

$$Q = V_{XEQ} * I_L = V_L * I_L * \sin(\varphi) \tag{14}$$

è detto *potenza reattiva* poiché rappresenta una quantità, dimensionalmente omogenea con una potenza, ottenuta come conseguenza della caduta di tensione su di una pura reattanza e che, perciò, non da alcun contributo alla potenza attiva. Dalla Fig. 3, è possibile dedurre la relazione esistente tra *potenza apparente*, *potenza attiva* e *potenza reattiva*:

$$P_A = \sqrt{P^2 + Q^2} \tag{15}$$

I wattmetri costruiti per operare in circuiti in a.c. sono progettati per poter integrare la potenza istantanea secondo la (9). Gli errori di inserzione possono essere derivati in maniera analoga al caso in continua. Tuttavia in a.c., nasce un errore di fase dovuto alla caratteristica non puramente resistiva dell'avvolgimento voltmetrico. In regime puramente sinusoidale, se ε_w è la fase della impedenza dell'avvolgimento e $\cos(\varphi)$ il fattore di potenza del carico, l'errore relativo nella misura di potenza attiva risulta pari ad $\varepsilon_w \mathrm{tg}(\varphi)$.

Nel caso più generale di grandezze deformate, la rappresentazione simbolica sin qui utilizzata non può più essere utilizzata. In ogni caso, la potenza attiva è sempre definita come la potenza media dissipata in un intervallo di tempo.

Per quanto riguarda i metodi e gli strumenti per le misure di potenza in a.c., è utile fare una classificazione tra i circuiti. Infatti nascono problemi differenti al crescere della frequenza dell'alimentazione. Perciò è possibile suddividere i circuiti in *a.c.* in (i) circuiti alla frequenza industriale, (ii) circuiti a media e bassa frequenza (fino ad alcuni MHz) e (iii) circuiti in alta frequenza (fino ai GHz). I circuiti a frequenza industriale sono esaminati separatamente da quelli a bassa frequenza principalmente perché esistono alcune peculiarità legate a misure su circuiti trifase. I circuiti di tipo (iii) non verranno qui approfonditi.

2.2. Misure di potenza a media e bassa frequenza.

2.2.1 <u>Metodo dei tre voltmetri</u>

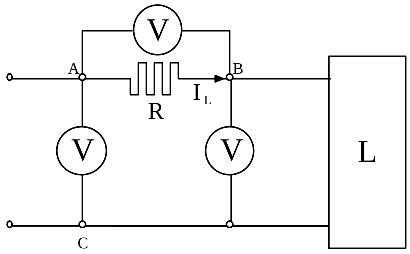

Fig. 5.

La potenza dissipata su un carico L può essere misurata utilizzando un resistore anti-induttivo R e misurando tre tensioni come mostrato in Fig. 5. Sebbene uno di questi tre voltmetri può sembrare in prima battuta ridondante, in realtà servono tre misure indipendenti per valutare la potenza dall'eq. (12). In particolare, dalle cadute di tensione v_{AB} e v_{BC}, possono essere valutate direttamente la corrente e la tensione; v_{AC} è necessario per ottenere informazioni sulla loro fase relativa.

Trascurando le correnti derivate dai voltmetri e detta I_L la corrente sul carico L, si ha:

$$v_{AC} = v_L + Ri_L$$
$$v_{AC}^2 = R^2 i_L^2 + v_L^2 + 2Rv_L i_L \qquad (16)$$

dove le lettere minuscole indicano i valori istantanei. Calcolando i valori efficaci (indicati le lettere maiuscole) si ottiene la potenza P_L:

$$\frac{1}{T}\int_0^T v_{AC}^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T R^2 i_L^2 dt + \frac{1}{T}\int_0^T v_L^2 dt + \frac{1}{T}\int_0^T 2Rv_L i_L dt$$
$$V_{AC}^2 - V_L^2 = 2R\left(P_L + \frac{RI_L^2}{2}\right) \qquad (17)$$
$$P_L = \frac{V_{AC}^2 - R^2 i_L^2 - V_L^2}{2R}$$

La (17) è la stessa anche in continua, sostituendo i valori efficaci con quelli in continua. Poiché il risultato è stato ottenuto come differenza, nascono problemi quando i tre termini hanno una somma quasi nulla, in quanto l'errore relativo tende all'infinito.

2.2.2 <u>Wattmetri termici</u>

Il principio del wattmetro termico è nell'uso di due termocoppie gemelle. La potenza attiva P è ottenuta tramite una misura della tensione continua *e* tra le due termocoppie. Uno strumento basato su questo principio può raggiungere incertezze fino all'1% sino ad 1 MHz.

Adottando soluzioni basate su tecniche di retroazione, non sono necessarie correzioni per compensare la non linearità delle termocoppie, e, utilizzando due termocoppie gemelle si ottiene un notevole miglioramento delle prestazioni.

Si ottengono infatti incertezze minime di 10 ppm e campi di frequenza fino ad 1 kHz.

2.2.3 Wattmetri basati su moltiplicatori

I processi di moltiplicazione e media (Fig. 6) coinvolti nella misura di potenza possono essere svolti da componenti elettronici.

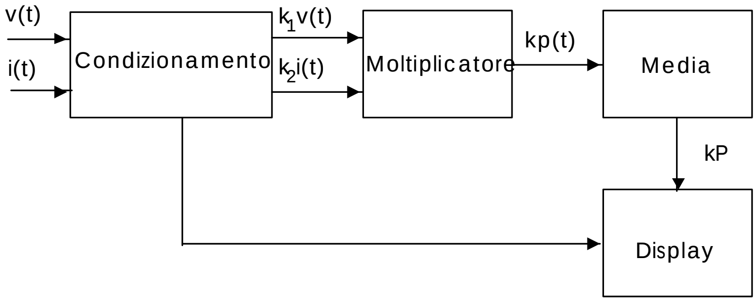

Fig. 6

I wattmetri elettronici possono essere suddivisi in due categorie a seconda se le operazioni di moltiplicazione e di media siano effettuate in maniera discreta o continua.

Nei metodi “continui”, le moltiplicazioni sono effettuate da moltiplicatori analogici. Nei metodi “discreti”, wattmetri a campionamento prelevano contemporaneamente campioni delle forme d’onda di tensione e corrente, li digitalizzano ed effettuano quindi le operazioni necessarie utilizzando tecniche digitali.

2.2.3.1 Wattmetri basati su moltiplicatori analogici

I principali moltiplicatori analogici sono (i) a quattro quadranti, (ii) a divisione di tempo (TDM), e (iii) ad effetto Hall.

Wattmetro basato sul moltiplicatore a quattro quadranti

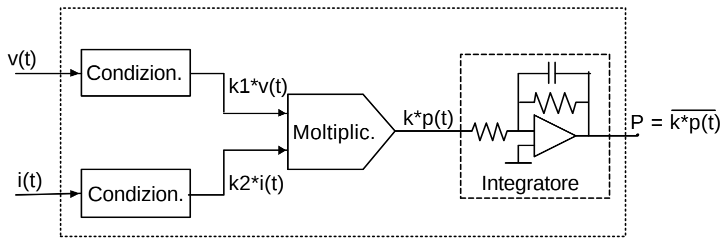

Fig. 7

Il più semplice dei wattmetri a moltiplicatore analogico è mostrato in Fig. 7. Esso consiste in due sezioni di condizionamento, un moltiplicatore a quattro quadranti che processa tensione e corrente e dà la potenza istantanea ed un integratore che fornisce la potenza media

Wattmetro basato su un TDM

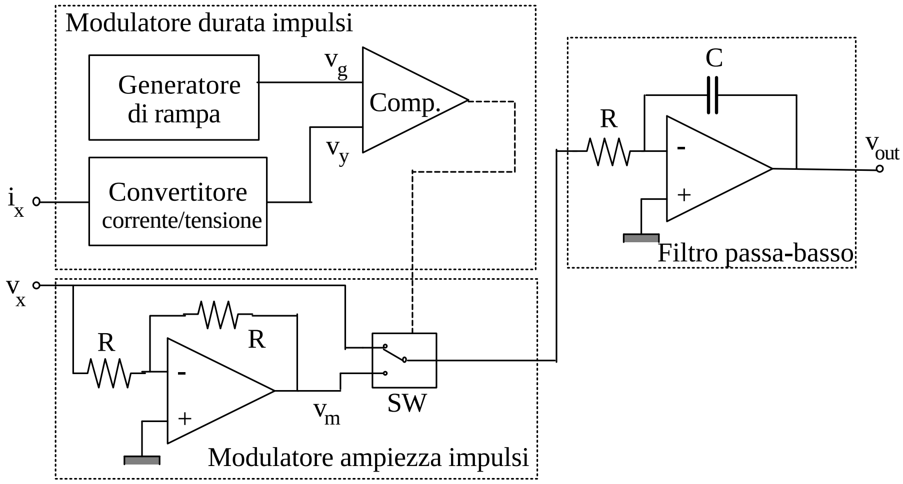

Fig. 8

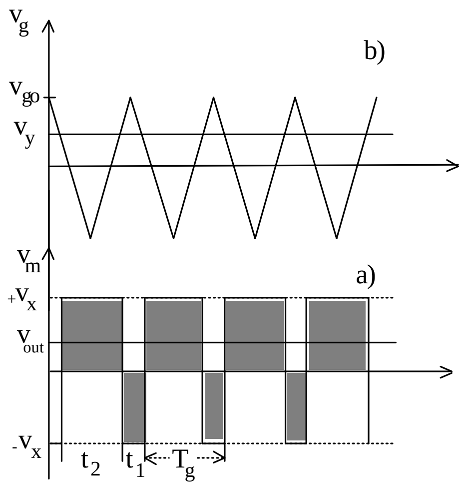

Fig. 9

Lo schema a blocchi di un wattmetro a divisione di tempo è mostrato in Fig. 8. Viene generata un'onda quadra v_m (Fig. 9a) di periodo costante T_g, e duty cycle ed ampiezza determinate da i(t) e v(t), rispettivamente. Se T_g è molto più piccolo del periodo dei misurandi $v_x(t)$ e $v_y(t)$, tali tensioni possono essere considerate costanti durante tale intervallo di tempo.

Il duty cycle di V_m è fissato da un circuito modulatore della durata degli impulsi (Fig. 8). La tensione triangolare $v_g(t)$ (Fig. 9b) viene confrontata con la tensione $v_y(t)$ proporzionale a i(t) ed viene così determinato un intervallo di tempo t_2 la cui durata è proporzionale a $v_y(t)$. Se

$$v_g(t) = \frac{4V_{g0}}{T_g} t \quad \text{dove} \quad 0 \le t \le \frac{T_g}{4} \quad , \tag{18}$$

da semplici considerazioni geometriche, si ottiene

$$t_2 = 2\left(\frac{T_g}{4} - \frac{v_y T_g}{4V_{g0}}\right) \quad \text{e} \quad t_1 - t_2 = \frac{T_g}{V_{g0}} v_y \; . \tag{19}$$

L'ampiezza di $v_m(t)$ è fissata da un circuito modulatore dell'ampiezza dell'impulso. L'onda quadra in uscita del modulatore della durata dell'impulso pilota l'uscita $v_m(t)$ dell'interruttore SW in modo che sia uguale a $+v_x$ durante l'intervallo di tempo t_1, ed a $-v_x$ durante lintervallo di tempo t_2 (Fig. 9a).

Quindi la tensione $v_{out}(t)$ in uscita al filtro passa basso è pari al valor medio di $v_m(t)$:

$$V_{out} = \frac{1}{T_g}\int_0^{T_g} v_m(t)dt = K'\left(\int_0^{t_1} v_x(t)dt - \int_{t_1}^{t_1+t_2} v_x(t)dt\right) = K' v_x(t_1 - t_2) = K v_x v_y \,. \qquad (20)$$

Il limite in alta frequenza di questo wattmetro è determinato dal filtroe deve essere inferiore a metà del frequenza del segnale $v_g(t)$. Il limite in frequenza è generalmente tra 200 Hz e 20 kHz, e può arrivare sino a 100 kHz. L'incertezza tipica e di 0.01-0.02%.

Wattmetri ad effetto Hall

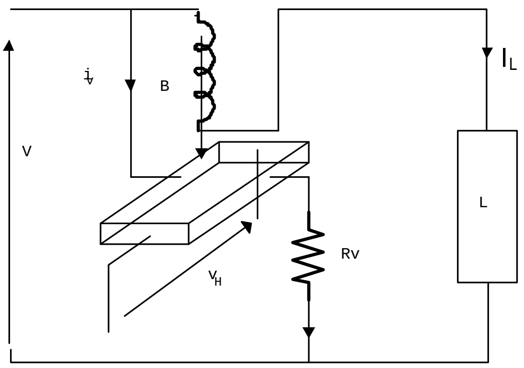

Fig. 10a

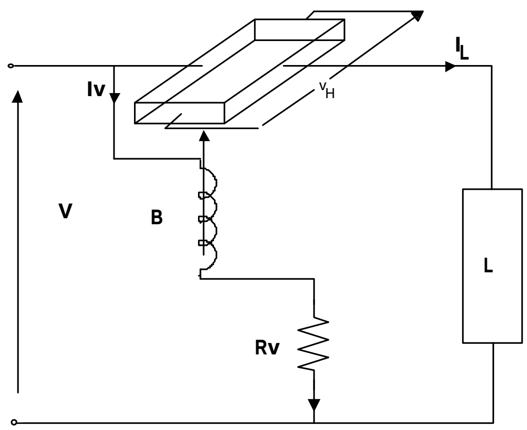

Fig.10b

Come noto, in un trasduttore ad effetto Hall la tensione $v_H(t)$ è proporzionale al prodotto di due grandezze tempo varianti:

$$v_H(t) = R_H \cdot i(t) \cdot B(t)\,, \qquad (21)$$

dove R_H è la costante di Hall, i(t) è la corrente che passa attraverso il traduttore, e B(t) è l'induzione magnetica. La potenza P è determinata misurando $v_H(t)$ attraverso un voltmetro a valor medio con alta impedenza di ingresso e considerando che $v_x(t) = a \cdot i(t)$ e $i_x(t) = b \cdot B(t)$, dove a e b sono fattori di proporzionalità:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T v_x(t) \cdot i_x(t)dt = ab\,\frac{1}{T}\int_0^T i(t) \cdot B(t)dt = R_H \cdot V_H \qquad (22)$$

dove T è il periodo del misurando.

Nella configurazione abituale il moltiplicatore di Hall, mostrato in Fig. 10a, l'induzione magnetica è proporzionale alla corrente sul carico e la corrente di polarizzazione ottimale i_v è fissata da un resistore R_v. Per valori di frequenza superiori al GHz, la piastrina di Hall è posizionata direttamente nella guida d'onda in modo da sentire il campo magnetico. Considerando la variabilità della costante di Hall col tempo e con la temperatura, è spesso necessario un calibrazione del dispositivo.

Fino al GHz, è possibile un arrangiamento alternativo, riportato in Fig. 10b, in cui la corrente del carico I_L scorre direttamente nella piastrina di Hall, fungendo da corrente di polarizzazione, ed il campo magnetico è generato dalla tensione v. In questo modo, per applicazioni a frequenza industriale, con tensione di ampiezza costante e corrente variabile, l'influenza della temperatura è minore. Con tale soluzione si possono raggiungere incertezze fino allo 0.1%.

2.2.3.2 Wattmetri basati su moltiplicatori digitali

<u>Wattmetri a campionamento</u>

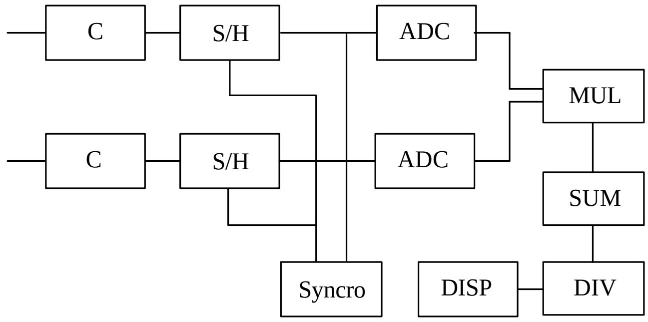

Fig. 11

Il wattmetro più importante di quelli che operano su campioni discreti è quello a campionamento. E' composto essenzialmente da due canali analogico-digitali, costituiti da un condizionamento (C), un sample and hold (S/H) ed un convertitore analogico-digitale (ADC), da un moltiplicatore digitale (MUL), un sommatore (SUM), un divisore (DIV), ed una unità di visualizzazione (DISP). L'intero strumento è gestito da un opportuno processore.

Se i campioni sono equispaziati, la potenza attiva è valutata come media delle sequenze dei campioni di potenza istantanea p(k):

$$P = \frac{1}{N^*}\sum_{k=0}^{N^*-1} p(k) = \frac{1}{N^*}\sum_{k=0}^{N^*-1} v(k)\cdot i(k) \tag{23}$$

dove N* rappresenta il numero di campioni in un periodo del segnale di ingresso. Una stima preventiva del periodo della fondamentale è effettuata per aggiustare l'intervallo della sommatoria dell'eq.(23) e/o il periodo di campionamento al fine di effettuare un campionamento sincrono. Il periodo di campionamento può essere variato utilizzando un oscillatore controllato in tensione pilotato dal segnale di ingresso. In alternativa, il contributo dell'errore di campionamento può essere ridotto effettuando la media su un elevato numero di periodo del segnale di ingresso.

La stima nel dominio del tempo del periodo di segnali fortemente deformati, come segnali PWM, è resa difficoltosa da numerosi attraversamenti di zero presenti nella forma d'onda. Una possibile soluzione è rappresentata dall'integrazione del segnale PWM: il periodo della fondamentale è stimato valutando i cambi di segno della funzione somma cumulata:

$$S(k) = \sum_{i=1}^{k} v_i + c \qquad k = 1,2,\dots,N \tag{24}$$

Una strada alternativa per ottenere la potenza media consiste nel considerare le componenti armoniche di tensione e corrente nel dominio della frequenza utilizzando la FFT.

2.3. Misure di potenza a frequenza industriale

Per applicazioni a frequenza industriale dove la potenza viene direttamente fornita dalla rete di alimentazione, l'assunzione che la sorgente sia a potenza infinita è lecita così come almeno una delle due grandezze, tensione o corrente, può essere considerata come sinusoidale. In tal caso, la definizione di potenza come prodotto tra tensione e corrente implica che può esseere esaminata solo la potenza connessa con la fondamentale.

2.3.1 Misure in circuiti monofase

Le misure di potenza in circuiti monofase a frequenza industriale sono effettuate seguendo i metodi ed utilizzando gli strumenti precedentemente descritti. In applicazioni pratiche, ha notevole interesse il caso di tensioni superiori ai 1000 V; le misure vengono effettuate utilizzando TA e TV come nell'esempio di Fig. 12. L'incertezza relativa vale:

$$\frac{\Delta P}{P} = \left(\eta_w + \eta_a + \eta_v\right) + \left(\varepsilon_w + \varepsilon_a + \varepsilon_v\right) tg\,\Phi_c \qquad (25)$$

dove η_w e ε_w sono le incertezze strumentali e di fase del wattmetro, η_a e η_v sono gli errori di rapporto del TA e del TV, e ε_a ed ε_v sono le incertezze di fase.

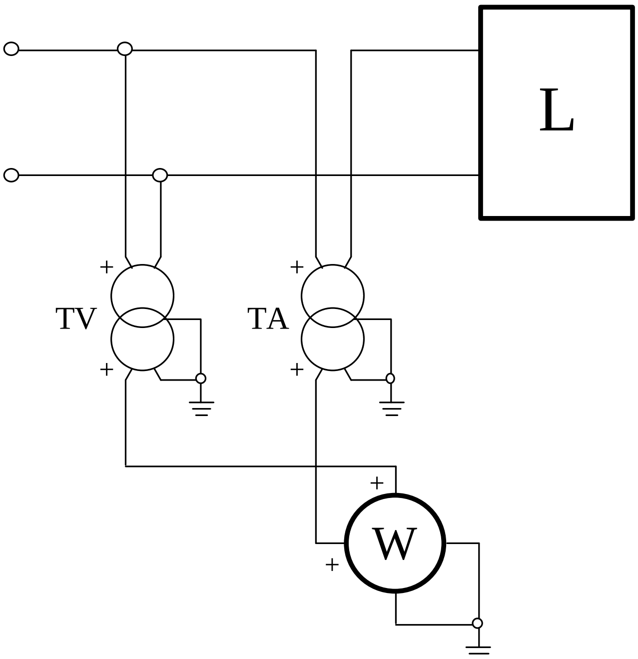

Fig.12

Se la corrente sul carico supera i 5A deve essere usato un TA anche per basse tensioni.