1. Introduzione

In regime stazionario il modello circuitale si ottiene senza approssimazioni dalle equazioni di Maxwell e dalle relazioni costitutive.
La prima legge di Kirchhoff è una immediata conseguenza della solenoidalità della densità di corrente **J** (Fig. 1.1) e la seconda della irrotazionalità del campo elettrico **E** (Fig. 1.2)

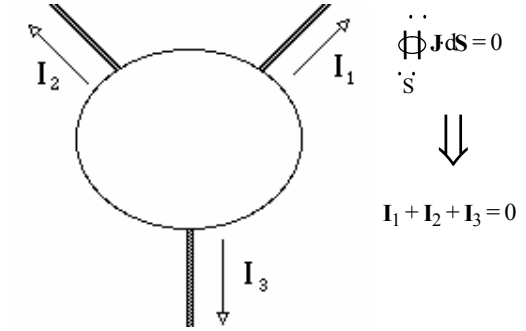

Fig. 1.1. La solenoidalità di **J** e la prima legge di Kirchhoff.

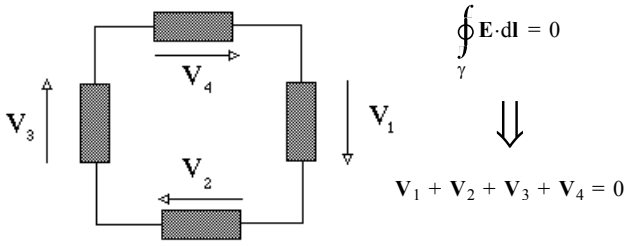

Fig. 1.2. L'irrotazionalità di **E** e la seconda legge di Kirchhoff.

Su questa base è possibile introdurre rigorosamente l'*n*-polo, componente ad *n* morsetti, il quale gode, come si ricorderà, delle seguenti proprietà associate alla sua definizione:

1) La somma delle correnti che attraversano i suoi terminali, con verso di riferimento, ad esempio, uscente dalla superficie limite, è istante per istante uguale a zero.
2) La tensione tra qualunque coppia di morsetti, intesa come integrale del campo elettrico lungo una linea che li congiunge, è indipendente dal particolare cammino, purché esso non fori nessuna superficie limite. Essa è pertanto esprimibile come differenza di potenziale.
3) la relazione tensione corrente ai morsetti dipende unicamente dalla costituzione fisica del componente.
Vogliamo ora comprendere i limiti di questa approssimazione, nell'abbandonare il regime stazionario e andando quindi a considerare condizioni di funzionamento dinamiche per il sistema.
In questo caso la densità di corrente non è più solenoidale. Con riferimento alla legge di continuità, si ha infatti

$$\oiint_S \mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = -\frac{dQ_{\text{int}}}{dt} \tag{1.1}$$

dove Q_{int} è la carica contenuta all'interno della superficie chiusa S
Analogamente, il campo elettrico non è più conservativo:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint_{S_\gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \tag{1.2}$$

2. Il teorema di Poynting

Per affrontare questo problema in modo sistematico cominciamo a comprendere come può essere impostato in ambito circuitale e campistico il fondamentale problema dello scambio energetico tra le differenti parti del sistema elettrico.
Cominciamo perciò col richiamare alcune considerazioni energetiche nell'ambito della teoria dei circuiti. E' ben noto che, in questo contesto, i componenti scambiano energia solo attraverso i morsetti. In particolare, la potenza assorbita da un bipolo è data dal prodotto *vi*, essendo *v* ed *i* la tensione e la corrente ai morsetti del bipolo, definite con riferimento alla convenzione dell'utilizzatore.
Per fissare le idee, si consideri il circuito di fig. 2.1. Il modello del circuito è descritto dalle equazioni di Kirchhoff

$$v=v_L,\ v=v_C,\ v=v_G \tag{2.1}$$
$$i= i_L+ i_C+ i_G \tag{2.2}$$

e dalle relazioni caratteristiche

$$v_L = L\frac{di_L}{dt},\ i_C = C\frac{dv_C}{dt},\ i_G = Gv_G \tag{2.3}$$

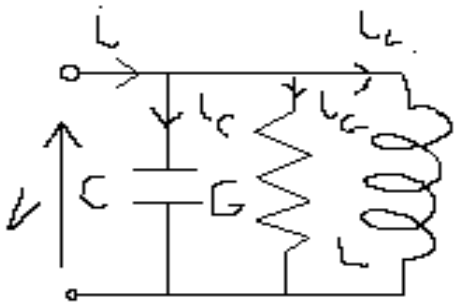

Fig. 2.1 Il circuito GLC

Con l'obiettivo di ottenere una relazione che coinvolga il prodotto *vi*, moltiplichiamo la relazione (2.2) per *v*, e sostituiamo in essa le relazioni caratteristiche, ottenendo:

$$vi = Li_L\frac{di_L}{dt} + Cv\frac{dv}{dt} + Gv^2 \tag{2.4}$$

utilizzando la relazione $udu = d(\frac{1}{2}u^2)$, possiamo riscrivere la (2.4) nella forma:

$$vi = \frac{dW}{dt} + Gv^2 \tag{2.5}$$

dove $W = \frac{1}{2}Li_L^2 + \frac{1}{2}Cv^2$.
Essendo stata ottenuta dalle sole leggi dei circuiti, l'eq. (2.5) non contiene più informazioni del modello iniziale. Essa ci consente però di interpretare in modo efficace la dinamica del circuito nei suoi aspetti fondamentali, considerando, in particolare, solo alcuni casi estremi:

- Se i terminali sono aperti (*i*=0) e il resistore è assente (*G*=0), $\frac{dW}{dt} = 0$, e quindi *W* è costante nel tempo.
- Se *G*=0, ma con corrente *i* assorbita ai morsetti, si ha:

$$vi = \frac{dW}{dt}$$

e quindi:

$$\int_0^t vidt = W(t) - W(0)$$

Se $W(0)=0$ e la potenza assorbita è positiva, ad un tempo finale t si ha a disposizione una energia totale $W(t)$, indipendentemente da come sono variate nell'intervallo di tempo v ed i. Per rimuovere tale energia dal sistema è sufficiente invertire il segno di vi fino a che l'integrazione ha ridotto W a zero. Poiché il processo è reversibile, diciamo che l'energia W è immagazzinata nell'induttore e nel condensatore.

- Se i terminali sono di nuovo aperti ($i=0$), ma il resistore è presente, si ha che l'energia immagazzinata deve decrescere nel tempo:

$$\frac{dW}{dt} = -Gv^2$$

Poiché il processo è irreversibile, diciamo che in questo caso l'energia è dissipata nel resistore.

L'equazione (2.5) rappresenta un esempio di teorema di conservazione dell'energia. In particolare notiamo, in accordo con questo teorema, che l'energia elettrica in generale non è conservata. In particolare, l'energia fornita al sistema in parte è immagazzinata nel condensatore e nell'induttore ed in parte è dissipata nel resistore, dove, come già sappiamo, non è conservata in forma elettrica, ma dissipata in calore. Notiamo altresì che, il bilancio è limitato, nell'eq. (2.5) alla sola parte elettrica, non essendoci nessun riferimento diretto alla dissipazione ora richiamata. Per affrontare meglio il discorso è necessario come vedremo tra poco, aggiungere ulteriori considerazioni direttamente collegate al modello termodinamico.

Vediamo ora di impostare un bilancio simile, utilizzando le leggi del campo.

La potenza per unità di volume erogata alle cariche in moto, segue direttamente dalla espressione della forza di Lorentz (almeno nello spazio libero):

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Il lavoro per unità di tempo su una carica in moto è quindi

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$$

Se la densità delle cariche per unità di volume è N ed è presente una sola tipologia di portatori, il lavoro per unità di tempo nel volume elementare $d\tau$ è il seguente:

$$Nd\tau\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = Nq\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}d\tau = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}d\tau$$

Consideriamo ora la relazione costitutiva in un mezzo conduttore:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i),$$

dove σ è la conducibilità del mezzo ed $\mathbf{E}_i$ l'eventuale campo elettromotore presente.

Moltiplicando scalarmente entrambi i membri di questa relazione per **J** ed integrando nel volume τ, si ha:

$$\iiint_\tau \frac{J^2}{\sigma} d\tau = \iiint_\tau \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}d\tau + \iiint_\tau \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_i d\tau$$

si sostituisca ora nel primo addendo a secondo membro **J** con l'espressione derivata dalla seconda legge di Maxwell:

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Si ha:

$$\iiint_{\tau} \frac{J^2}{\sigma} d\tau = \iiint_{\tau} \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{E} d\tau - \iiint_{\tau} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} d\tau + \iiint_{\tau} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_i d\tau \tag{2.6}$$

Si consideri l'identità vettoriale:

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

e l'espressione del rotore di **E** che scaturisce dalla prima equazione di Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Sostituendo nella (2.6), si ottiene:

$$-\iiint_{\tau} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\tau = \iiint_{\tau} \frac{J^2}{\sigma} d\tau + \iiint_{\tau} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} d\tau + \iiint_{\tau} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} d\tau - \iiint_{\tau} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_i d\tau$$

Per i mezzi lineari si ha che

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2\mu}\right)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}}{2}\right)$$

Applicando poi il teorema della divergenza all'integrale a primo membro, si ottiene

$$\iiint_{\tau} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_i d\tau = \iiint_{\tau} \frac{J^2}{\sigma} d\tau + \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \left(\frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2\mu} + \varepsilon \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}}{2}\right) d\tau + \oiint_{S} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS\,, \tag{2.7}$$

dove *S* è la superficie chiusa che delimita τ .

E' questa l'espressione del teorema di Poynting, secondo cui il lavoro compiuto per unità di tempo sulle cariche elettriche dal campo elettromotore presente in una generica regione τ (integrale a primo membro) è uguale alla somma di tre termini: 1) la potenza dissipata per effetto Joule nel conduttore contenuto in τ ; 2) la variazione nel tempo di un termine che corrisponde alla somma delle energie associate al campo elettrico e magnetico; 3) il flusso uscente dalla superficie *S* del campo vettoriale:

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

detto vettore di Poynting.

Il significato di tale bilancio può essere meglio chiarito con riferimento al primo principio della termodinamica. A tale scopo, tenendo conto che $\frac{\mathbf{J}}{\sigma} - \mathbf{E}_i = \mathbf{E}$, scriviamo la (2.7) nella forma equivalente:

$$\oiint_{S} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \iiint_{\tau} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d\tau + \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \left(\frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2\mu} + \varepsilon \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}}{2}\right) d\tau = 0 \tag{2.8}$$

Il termine $\iiint_{\tau} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d\tau$ può essere interpretato come lavoro compiuto, per unità di tempo, dal campo elettrico sulle cariche contenute in τ . Moltiplicando tutti i termini per *dt*, la (2.8) può essere scritta nella forma seguente:

$$\Phi_S dt + \delta L + dW_{em} = 0 \tag{2.9}$$

dove Φ_S è il flusso di **P** uscente da S, δL [1] è il lavoro effettuato dal campo elettrico nell'intervallo elementare *dt* sulle cariche contenute in τ , e dW_{em} la concomitante variazione dell'energia associata ai campi elettrici e magnetici presenti in τ . Dal primo principio della termodinamica, applicato alla materia contenuta in τ , si ottiene:

[1] Il simbolo δL indica che δL è una quantità molto piccola, ma non è un differenziale esatto nel senso matematico. *L* infatti non è funzione dello stato del sistema, come lo è invece W_{em}.

$$\delta L + \delta L_g = \delta Q + dW_0 \tag{2.10}$$

dove δL_g è il lavoro compiuto nell'intervallo *dt* sui portatori di carica dal campo elettromotore, e δQ e dW_0 sono rispettivamente la quantità di calore uscente da τ nell'intervallo *dt* e la variazione di energia interna associata alle particelle contenute in τ. Ricavando δL dalla (2.10) e sostituendolo nella (2.9), si ottiene:

$$\delta L_g = \delta Q + dW_{tot} + \Phi_S dt \tag{2.11}$$

dove $dW_{tot} = dW_{em} + dW_0$ è la variazione dell'energia interna totale, somma dell'energia interna della materia e dell'energia interna del campo nel volume τ.

Tale relazione mostra che il flusso del vettore di Poynting corrisponde ad un vero e proprio termine di energia che nell'unità di tempo fuoriesce (in senso algebrico) dalla regione τ attraverso la superficie *S*. Infatti, dalla (2.11) si vede che il lavoro compiuto nel tempo *dt* dal campo elettromotore agente sui portatori di carica presenti in τ è pari alla somma di una quantità di calore uscente da τ nell'intervallo *dt*, una variazione dell'energia interna totale in τ ed un termine proporzionale, come detto, al flusso del vettore di Poynting uscente dalla superficie chiusa *S* che delimita τ.

3. Il vettore di Poynting e la potenza assorbita da un *n*-polo

Supponiamo, per fissare le idee di riferirci ad un generico doppio-bipolo, identificato dalla superficie chiusa *S* , accessibile solo attraverso le coppie di morsetti (vedi fig. 3.1).

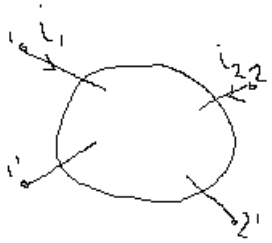

Fig. 3.1. Il generico doppio bipolo

Supponiamo che:

1. su *S* sia trascurabile il contributo ad **E** dell'induzione magnetica ($\nabla \times \mathbf{E} \cong 0$). Allora $\mathbf{E} = -\nabla V$ e quindi:

$$-\oiint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oiint_S \nabla V \times \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oiint_S (\nabla \times V\mathbf{H} - V\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\oiint_S V\nabla \times \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \tag{3.1}$$

poiché per il teorema di Gauss, tenendo conto che $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$, risulta

$$\oiint_S \nabla \times V\mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_\tau \nabla \cdot (\nabla \times V\mathbf{H}) d\tau = 0$$

Utilizzando la legge di Ampère per esprimere il rotore di **H,** la (3.1) può essere riscritta nel modo seguente:

$$-\oiint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\oiint_S V\left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \tag{3.2}$$

2. su *S* sia trascurabile il contributo della corrente di spostamento. In questo caso la potenza entrante nel sistema si riduce a:

$$-\oiint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\oiint_S V\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \tag{3.3}$$

L'integrale a secondo membro è limitalo alle sole regioni dove sono presenti i morsetti. Essendo i morsetti conduttori perfetti, essi possono essere considerati equipotenziali (ricordiamo comunque

che siamo in una regione in cui il campo elettrico è irrotazionale). Tenendo conto che la normale $\hat{\mathbf{n}}$ è uscente si ottiene infine:

$$-\oiint_S \mathbf{E}\times\mathbf{H}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = -\left[v_1(-i_1)+v_1'(i_1')+v_2(-i_2)+v_2'(i_2')\right] = (v_1-v_1')i_1+(v_2-v_2')i_2$$

Si noti che le posizioni $i_1 = i_1'$ e $i_2 = i_2'$, legate all'alimentazione, sono ammissibili perché compatibili con la solenoidalità di **J,** assunta per ipotesi nella regione occupata dagli elettrodi ($0 = \nabla\cdot\nabla\times\mathbf{H} = \nabla\cdot\mathbf{J}$).

4. Esempio

Consideriamo la semplice struttura illustrata in fig. 4.1 e costituita da due dischi conduttori di raggio *b*, distanti *d* l'uno dall'altro, immersi nel vuoto. Un insieme di generatori collegato ai due dischi è uniformemente distribuito lungo la loro periferia, in modo tale da assicurare al sistema condizioni di simmetria cilindrica. Poiché i dischi sono conduttori perfetti il campo elettrico è perpendicolare alla loro superficie.

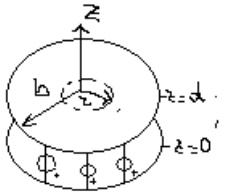

Fig. 4.1 Due dischi perfettamente conduttori alimentati da sorgenti distribuite uniformemente lungo la periferia

Supponiamo di essere nelle ipotesi (da verificare successivamente) di poter trascurare il contributo ad **E** dell'induzione magnetica. In questo caso (quasi stazionario elettrico), le equazioni di Maxwell si riducono come segue:

$$\nabla\times\mathbf{E} = 0 \tag{4.1}$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \tag{4.2}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \tag{4.3}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \tag{4.4}$$

Le equazioni in questo caso si disaccoppiano. E' possibile quindi calcolare prima il campo elettrico e poi il campo magnetico.
Dalla (4.1) discende immediatamente che $\mathbf{E} = -\nabla V$. Nel sistema piano che stiamo considerando, risulta allora immediatamente che il campo è costante tra le armature (non essendoci cariche) e proporzionale alla differenza di potenziale E:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathcal{E}}{d}\hat{\mathbf{i}}_z = E_0\hat{\mathbf{i}}_z \tag{4.5}$$

La carica infatti è localizzata sui piatti dove è distribuita con densità superficiale uniforme data dalla legge di Coulomb ($(\mathbf{D}_1-\mathbf{D}_2)\cdot\hat{\mathbf{n}} = \sigma$), tenendo conto che il campo è nullo all'esterno e costante tra i piatti:

$$\sigma = \begin{cases} -\varepsilon_0 E_0; & z = d \\ \varepsilon_0 E_0; & z = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

Utilizziamo ora la legge di continuità in forma integrale per legare la carica superficiale alla corrente erogata dai generatori. Integriamo pertanto l'equazione di continuità (1.1) su una superficie che abbracci completamente uno dei piatti. Poiché il sistema gode di simmetria di rotazione la corrente superficiale che si distribuisce su ciascun piatto è diretta radialmente ed

indipendente dalla coordinata angolare ϑ. Il termine integrando $\mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS$ è pertanto dato da $J_r \Delta b d\vartheta = K_r b d\vartheta$, avendo assunto pari a K_r la componente radiale della corrente superficiale definita facendo tendere a zero lo spessore Δ dei piatti. Poiché la carica è distribuita uniformemente su una superficie di area πb^2 , la carica totale sul piatto è $Q = \sigma \pi b^2$. La equazione di continuità si scrive allora

$$K_r\big|_{r=b} 2\pi b = -\frac{d}{dt}(\varepsilon_0 E_0 \pi b^2) \tag{4.7}$$

Si noti che il termine a sinistra dell'equazione (4.7) è la corrente *i* uscente dal piatto situato a *z*=0. Ricordiamo che la capacità *C* del sistema è data dalla espressione seguente:

$$C = \varepsilon_0 \frac{\pi b^2}{d} \tag{4.8}$$

L'equazione (4.7) può allora essere riscritta come:

$$i = -C\frac{d\mathcal{E}}{dt} \tag{4.9}$$

Essa rappresenta la equazione caratteristica del condensatore, avendo adottato, come è immediato verificare, la convenzione del generatore.

Cerchiamo di stimare ora l'errore commesso nel trascurare il contributo ad **E** dell'induzione magnetica. Nell'approssimazione che stiamo considerando, il campo magnetico può essere calcolato utilizzando la legge di Ampère (4.2) in forma integrale ed il campo elettrico dato dalla (4.5). Si calcoli la circuitazione di **H** lungo una circonferenza γ di raggio *r* e centro sull'asse di simmetria del sistema. Poiché la corrente di spostamento è parallela al campo elettrico ed è quindi diretta lungo *z* si assuma come superficie orlata da γ un cerchio di giacitura parallela ai dischi di normale *z*. Allora,

$$H_\vartheta 2\pi r = \varepsilon_0 \frac{dE_0}{dt}\pi r^2 \tag{4.10}$$

e quindi

$$H_\vartheta = \frac{r}{2}\varepsilon_0 \frac{dE_0}{dt} \tag{4.11}$$

A sua volta, il campo magnetico **H** induce un ulteriore campo elettrico **E**, legato ad **H** dalla legge dell'induzione (equazione (1.2)). In considerazione della simmetria del sistema scegliamo un linea chiusa che abbia due lati verticali ortogonali ai piatti alle ascisse radiali *b* ed *r* congiunti da due tratti radiali che si sviluppano tangenti ai due dischi (vedi fig. 4.2), dove la componente di campo relativa è nulla per l'ipotesi di elevata conducibilità dei dischi stessi. Assumiamo ancora che il campo elettrico indotto dall'induzione **B** sia indipendente da *z*. Utilizzando l'espressione del campo **H** appena ottenuta, si ha:

$$\oint_\gamma \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = [E_z(b) - E_z(r)]d = -\iint_{S_\gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = \frac{\mu_0\varepsilon_0 d}{2}\int_r^b r'\,dr'\,\frac{d^2E_0}{dt^2} = \frac{\mu_0\varepsilon_0 d}{4}(b^2 - r^2)\frac{d^2E_0}{dt^2}$$

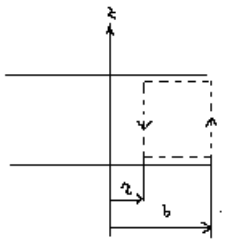

Fig. 4.2. Sezione del sistema con evidenziata la curva per il calcolo della circuitazione di **E**

Il campo $E_z(b)$ al bordo è fissato dai generatori e vale pertanto E_0. Risulta quindi che il capo elettrico alla generica ascissa *r* è dato dalla seguente espressione:

$$E_z(r) = E_0 + \frac{\mu_0\varepsilon_0}{4}(r^2 - b^2)\frac{d^2E_0}{dt^2} \tag{4.12}$$

Per stimare questa variazione del campo elettrico lungo *r,* assumiamo che il campo elettrico varii sinusoidalmente nel tempo:

$$E_0(t) = A\cos\omega t \tag{4.13}$$

Il tempo caratteristico associato a tale dinamica è ovviamente il periodo proporzionale ad $\frac{1}{\omega}$.

Sostituendo nella (4.11), il campo errore $E_{errore} = E_0 - E_z(r)$, rapportato al campo imposto alla periferia dei dischi è

$$\frac{|E_{errore}|}{E_0} = \frac{1}{4}\omega^2\mu_0\varepsilon_0(b^2 - r^2) \tag{4.14}$$

Il campo errore è trascurabile rispetto al campo elettrostatico se

$$\frac{1}{4}\omega^2\mu_0\varepsilon_0 b^2 << 1 \tag{4.15}$$

per tutti i valori di *r*<*b*.

Tenendo conto dell'espressione della espressione della velocità della luce $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ e della conseguente espressione della lunghezza d'onda λ percorsa da un'onda elettromagnetica in un periodo $\frac{2\pi}{\omega}$ ($\lambda = c\frac{2\pi}{\omega}$), deve essere necessariamente

$$b^2 << (\lambda/\pi)^2 \tag{4.16}$$

La caratteristica del condensatore piano in esame, espressa dalla eq. (4.9) è quindi valida, ad esempio alla frequenza di 1 MHz, a patto che il raggio dei piatti sia molto minore della lunghezza d'onda che a questa frequenza è di 300 m.

Riesaminiamo ora lo stesso caso alla luce del teorema di Poynting. Trascurando sempre il contributo ad **E** dell'induzione magnetica, i campi **E** ed **H** da utilizzare nell'espressione del vettore di Poynting sono rispettivamente dati dalle (4.5) e (4.11). Consideriamo allora la eq. (2.7), valutata sul volume presente tra i due dischi. Il vettore di Poynting è in questo caso dato dalla seguente espressione:

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} = -\frac{r}{2}\frac{\varepsilon_0}{d^2}v\frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{i}}_r \tag{4.17}$$

L'unico contributo al flusso è quello attraverso la superficie laterale *r*=*b*, perché il vettore di Poynting è ortogonale alla normale alla superficie superiore e inferiore. Poiché **P** è costante per *r*=*b*, e su tale superficie $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{i}}_r$, l'integrazione si riduce ad una moltiplicazione per l'area della superficie laterale:

$$-\oiint_S \mathbf{E}\times\mathbf{H}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = (2\pi bd)\left(\frac{b}{2}\frac{\varepsilon_0}{d^2}v\frac{dv}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cv^2\right),$$

dove la capacità *C* è data dalla (4.8).

Si noti che il secondo termine è proprio la variazione dell'energia immagazzinata nel condensatore. Essa coincide con l'energia immagazzinata nel campo elettrico, come è facile verificare, utilizzando l'espressione (4.5) per il campo elettrico stesso:

$$\frac{d}{dt}\left(\iiint_{\tau}\frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}d\tau\right)=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{v}{d}\right)^2(d\pi b^2)\right]=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cv^2\right) \tag{4.18}$$

Dal punto di vista dei campi l'energia fluisce attraverso la superficie laterale ed è immagazzinata sottoforma di energia elettrostatica nel volume tra i piatti. Nell'approssimazione quasi-stazionaria utilizzata per calcolare il campo elettrico, l'energia magnetica è stata trascurata, perché è una quantità piccola rispetto all'energia elettrostatica. Verfichiamo quest'ultima affermazione, calcolando l'energia magnetica associata al campo dato dalla (4.11). Otteniamo:

$$\iiint_{\tau}\frac{1}{2}\mu_0\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}d\tau=\frac{1}{2}\mu_0\left[\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0}{d}\left(\frac{dv}{dt}\right)\right]^2 d\int_0^b r^2\,2\pi r dr=\frac{\mu_0\varepsilon_0 b^2}{16}C\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \tag{4.19}$$

Paragonando questa espressione con quella nella eq. (4.18), otteniamo che l'approssimazione introdotta è valida se:

$$\frac{\mu_0\varepsilon_0 b^2}{16}C\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 << \frac{1}{2}Cv^2$$

Nel caso di eccitazione sinusoidale la disuguaglianza precedente diventa

$$\frac{\mu_0\varepsilon_0 b^2}{8}\omega^2 << 1 \tag{4.20}$$

in accordo con la stima precedentemente data dalla (4.15).

In conclusione quindi possiamo affermare che il vincolo che il tempo di propagazione *b/c* di un'onda elettromagnetica sia piccolo rispetto al periodo $2\pi/\omega$ dell'eccitazione è equivalente al vincolo che l'energia immagazzinata sotto forma magnetica sia trascurabile rispetto a quella immagazzinata nel campo elettrico.