

6. Un esempio di applicazione: il cavo coassiale nell'approssimazione quasi-stazionaria

Consideriamo un cavo coassiale (Fig. 6.1), di raggio interno  $a$ , raggio esterno  $b$  e lunghezza  $l \gg b > a$ . Supponiamo che le due armature siano perfettamente conduttrici, e che tra di esse ci sia un materiale caratterizzato da una conducibilità  $\sigma$ , una costante dielettrica  $\epsilon$  ed una permeabilità magnetica  $\mu$  supposte uniformi. Il cavo sia alimentato ad una estremità da un generatore sinusoidale di pulsazione  $\omega$  rappresentato dal fasore  $\bar{V}_g$ . Un carico sia supposto collegato all'altra estremità (Fig. 6.1). Si supponga che il generatore ed il carico non alterino la simmetria di rotazione del sistema. Si assuma un riferimento cilindrico  $(r, z, \mathbf{q})$  di asse  $z$  coassiale all'asse del cavo.

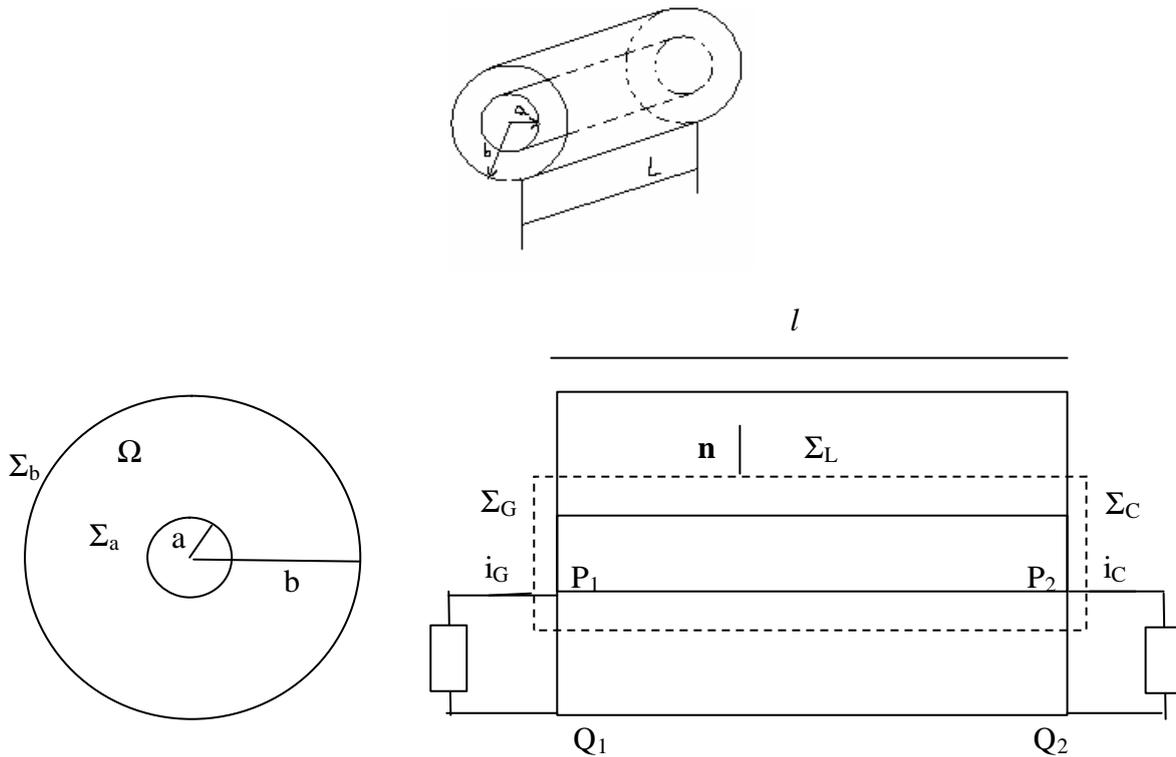


Fig. 6.1 - Il cavo coassiale: geometria di riferimento e convenzioni ai morsetti

6.1 - Il cavo coassiale nell'approssimazione Q.S.C.

Supponiamo che le due armature del cavo siano perfettamente conduttrici, e che tra di esse ci sia un materiale caratterizzato da una conducibilità  $\sigma$ , supposta uniforme.

Ricordiamo le equazioni fondamentali del modello della Conduzione Quasi Stazionaria (Q.S.C.) in assenza di campo elettromotore:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (6.1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (6.1.2)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{sE} \quad (6.1.3)$$

Ad esse vanno aggiunte le condizioni di raccordo sulle superfici  $\Sigma$  di discontinuità per la conducibilità:

$$\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}|_{\Sigma} \text{ continua} \quad (6.1.4)$$

$$\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}|_{\Sigma} \text{ continua} \quad (6.1.5)$$

Sulla superficie di un conduttore perfetto la condizione (6.1.4) si particolarizza come segue:

$$\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}|_{\Sigma} = \mathbf{0} \quad (6.1.6)$$

Sulla superficie che delimita un isolante perfetto, la condizione (6.1.5) diventa

$$\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}|_{\Sigma} = 0 \quad (6.1.7)$$

L'equazione (6.1.1) consente di esprimere il campo elettrico in termini del gradiente della funzione potenziale  $f$ :

$$\mathbf{E} = -\nabla f \quad (6.1.8)$$

Notiamo che il segno meno è stato convenzionalmente assunto di modo che il lavoro fatto contro il campo elettrico per portare una carica unitaria dal punto  $P_{\infty}$  all'infinito al punto  $P$  lungo la traiettoria  $g$  rappresenti l'energia potenziale associata alla carica stessa:

$$f(P) = \int_{P_{\infty}gP} (-\mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l} + f(P_{\infty}) = \int_{P_{\infty}gP} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_P^{P_{\infty}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

In termini della funzione potenziale la formulazione del modello della Conduzione Quasi Stazionaria è quindi la seguente:

$$\nabla \cdot \mathbf{s} \nabla f = 0 \quad \text{nel dominio conduttore}$$

$$f|_{\Sigma} \text{ continua}$$

$$\mathbf{s} \frac{\partial f}{\partial n}|_{\Sigma} \text{ continua}$$

su una superficie  $\Sigma$  di discontinuità per la conducibilità;

$$f|_{\Sigma} = f_0 \text{ sulla superficie di un conduttore perfetto (condizione di Dirichlet)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial n}|_{\Sigma} = 0 \text{ sulla superficie che delimita un isolante perfetto (condizione di Neumann)}$$

Nel caso in esame, essendo il conduttore omogeneo, il modello della conduzione stazionaria si riduce alla equazione di Laplace, valida nella regione tra le due armature, con le ulteriori condizioni al contorno date dalle alimentazioni. Esso risulta quindi espresso dalle

$$\nabla^2 f = 0 \quad (6.1.9)$$

$$f|_{r=a} = V \quad (6.1.10)$$

$$f|_{r=b} = 0 \quad (6.1.11)$$

Per la simmetria risulta  $f = f(r)$  e quindi  $\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right)$

L'equazione (6.1.9) si riduce pertanto alla seguente

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\mathbf{f}}{dr} \right) = 0 \quad (6.1.12)$$

che può facilmente essere integrata:

$$\begin{aligned} r \frac{d\mathbf{f}}{dr} &= k \\ \mathbf{f} &= k \log r + C \end{aligned} \quad (6.1.13)$$

Le costanti si determinano imponendo le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} k \log a + C &= V \\ k \log b + C &= 0 \end{aligned}$$

Risulta quindi:

$$\mathbf{f} = -\frac{V}{\log \frac{b}{a}} \log \frac{r}{b} \quad (6.1.14)$$

Conseguentemente, la densità di corrente nel mezzo di conducibilità  $\mathbf{s}$  ha direzione radiale:

$$\mathbf{E} = -\nabla \mathbf{f} = \frac{V}{r \log \frac{b}{a}} \hat{\mathbf{i}}_r \quad (6.1.15)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{sE} = \mathbf{s} \frac{V}{r \log \frac{b}{a}} \hat{\mathbf{i}}_r \quad (6.1.16)$$

La corrente che fluisce attraverso una superficie cilindrica  $S$  di raggio  $r$  risulta quindi:

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \mathbf{s} \frac{V}{\log \frac{b}{a}} \int_0^l \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} r d\mathbf{q} dz = \frac{2\pi \mathbf{s} l}{\log \frac{b}{a}} V \quad (6.1.17)$$

L'applicazione della (6.1.2) in forma integrale alla superficie chiusa di figura dà luogo alla seguente equazione:

$$-I_1 + I_2 + \frac{2\pi \mathbf{s} l}{\log \frac{b}{a}} V = 0 \quad (6.1.18)$$

Il cavo coassiale può quindi essere rappresentato in tale caso con un circuito equivalente costituito da una conduttanza di pari a

$$G = \frac{I}{V} = \frac{2\pi \mathbf{s} l}{\log \frac{b}{a}} = gl \quad (6.1.19)$$

Considerando il cavo coassiale come un doppio bipolo (Fig. 6.1), utilizzando la definizione (6.1.19) è possibile immediatamente calcolare i parametri  $Z$ , supponendo nota la corrente impressa ai morsetti dal generatore. Abbiamo infatti:

$$\dot{Z}_{11} = \left. \frac{\bar{V}_{11r}}{\bar{I}_1} \right|_{\bar{I}_2=0} = \frac{1}{G} \quad (6.1.20)$$

$$\dot{Z}_{22} = \left. \frac{\bar{V}_{22'}}{\bar{I}_2} \right|_{\bar{I}_1=0} = \frac{1}{G} \quad (6.1.21)$$

$$\dot{Z}_{21} = \left. \frac{\bar{V}_{22'}}{\bar{I}_1} \right|_{\bar{I}_2=0} = \frac{1}{G} = \dot{Z}_{12} \quad (6.1.22)$$

Basta considerare infatti che il bipolo è simmetrico rispetto alle alimentazioni alle due porte. Cioè, la tensione tra i due elettrodi è la stessa se si alimenta con un generatore di corrente unitario la porta 1 o la porta 2. Risulta quindi  $\dot{Z}_{11} = \dot{Z}_{22}$ . Poiché gli elettrodi sono equipotenziali, la differenza di potenziale alla porta 2, quando si alimenta la porta 1, è la stessa di quella alla porta 1. Ovviamente  $\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21}$  per la reciprocità, come d'altra parte è facile verificare.

Il cavo coassiale si comporta quindi come una resistenza di valore  $1/G$ , come illustrato in Fig. 6.2.

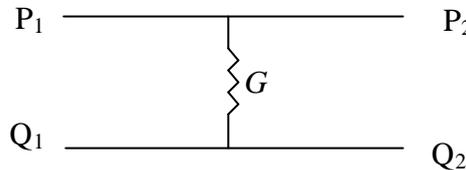


Fig. 6.2 - Schema equivalente del cavo nell'approssimazione Q.S.C.

Notiamo che la matrice  $\dot{Z}$

$$\dot{Z} = \begin{pmatrix} \frac{1}{G} & \frac{1}{G} \\ \frac{1}{G} & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \quad (6.1.23)$$

non è invertibile. Non è possibile cioè ottenere, in questo caso, una rappresentazione in termini di parametri  $\dot{Y}$ .

### 6.2 - Il cavo coassiale nell'approssimazione Q.S.E. ( $\frac{1}{t_e} \ll \frac{1}{t_{em}} \ll \frac{1}{t_m}$ )

Consideriamo ancora il cavo coassiale descritto precedentemente (Fig. 6.1), di raggio interno  $a$ , raggio esterno  $b$  e lunghezza  $l \gg b > a$ . Supponiamo che le due armature siano perfettamente conduttrici, e che tra di esse ci sia un materiale dielettrico non perfetto, caratterizzato da una costante dielettrica  $\epsilon$  ed una conducibilità  $\sigma$ , supposte uniformi per il momento.

Introdotta il parametro:

$$t_e = \frac{e}{s} \quad (6.2.1)$$

supponiamo che il suo valore (rispetto agli altri tempi caratteristici in gioco) sia tale da farci concludere, in base a quanto visto in precedenza, che le equazioni da risolvere nel dominio tra le due armature sia quello dell'elettro-quasi-statica (Q.S.E.).

Ad esempio, supponiamo che il materiale dielettrico interposto tra le armature sia mica ( $\epsilon \approx 5\epsilon_0$ ,  $\mu \approx \mu_0$ ,  $\sigma \approx 1e-11$  S/m), e che la lunghezza sia  $l \approx 1$  m. E' facile vedere che in questo caso risulta  $1/\tau_{em} \approx 1e8$  s<sup>-1</sup>,  $1/\tau_e \approx 0.2$  s<sup>-1</sup>,  $1/\tau_m \approx 8e16$  s<sup>-1</sup>, per cui fino a frequenze di delle decine di MHz il modello da utilizzare è senz'altro quello Q.S.E.:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \mathbf{r} \\ \nabla \cdot \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (6.2.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{J} = \mathbf{s} \mathbf{E} \\ \mathbf{D} = \mathbf{e} \mathbf{E} \end{array} \right. \quad (6.2.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}|_{\Sigma_a} = 0 \\ \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}|_{\Sigma_b} = 0 \end{array} \right. \quad (6.2.4)$$

Siamo immediatamente in grado di dare un significato fisico al parametro  $\tau_e$  introdotto in (6.2.1). Infatti, sfruttando l'uniformità di  $\varepsilon$  e  $\sigma$ , combinando le (6.2.2) e (6.2.3) otteniamo immediatamente:

$$\nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{1}{\tau_e} \mathbf{D} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \frac{1}{\tau_e} \mathbf{r} = 0 \quad (6.2.5)$$

la cui soluzione si scrive:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 e^{-\frac{t}{\tau_e}} \quad (6.2.6)$$

dove  $\rho_0$  è il valore della densità di carica all'istante  $t = 0$ . Dunque, scopriamo che in un materiale omogeneo la carica libera decade esponenzialmente a zero con una costante di tempo  $\tau_e$ , che dunque a buon diritto chiamiamo *tempo di diffusione delle cariche*.

Ci accingiamo ora a risolvere le equazioni scritte, supponendo che la densità di carica libera  $\rho$  sia identicamente nulla. Similmente al caso elettrostatico, possiamo asserire che la prima delle (6.2.2) (o, meglio, la sua controparte integrale) ci permette di concludere che il campo elettrico può essere fatto discendere da un potenziale scalare  $\varphi$ :

$$\mathbf{E} = -\nabla \mathbf{j} \quad (6.2.7)$$

che risulta costante (nello spazio) su  $\Sigma_a$  e  $\Sigma_b$  grazie alle (6.2.4), anche se in generale dipendente dal tempo. Combinando poi le (6.2.2) e le (6.2.3), e sfruttando l'uniformità del mezzo, si ottiene facilmente:

$$\begin{array}{l} \nabla^2 \left( \mathbf{j} + \tau_e \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \right) = 0 \\ \left. \begin{array}{l} \mathbf{j}|_{\Sigma_a} = V(t) \\ \mathbf{j}|_{\Sigma_b} = 0 \end{array} \right\} \end{array} \quad (6.2.7)$$

dove si è arbitrariamente posto a zero il valore del potenziale sull'elettrodo esterno ad ogni istante di tempo. Ponendo:

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j} + \tau_e \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \quad (6.2.8)$$

il problema (6.2.7) si riformula come segue:

$$\begin{array}{l} \nabla^2 \mathbf{j}' = 0 \\ \left. \begin{array}{l} \mathbf{j}'|_{\Sigma_a} = V'(t) = V + \tau_e \frac{\partial V}{\partial t} \\ \mathbf{j}'|_{\Sigma_b} = 0 \end{array} \right\} \end{array} \quad (6.2.9)$$

che risulta quindi formalmente identico al problema studiato in precedenza. Facendo l'ipotesi di simmetria cilindrica (assumendo cioè tutte le grandezze dipendenti solo dalla coordinata radiale  $r$  e non anche da  $z$  e  $\theta$ ), la soluzione è pertanto formalmente esattamente la stessa:

$$\mathbf{j}'(t) = V' \frac{\ln \frac{r}{b}}{\ln \frac{a}{b}} = \left( V + \mathbf{t}_e \frac{\partial V}{\partial t} \right) \frac{\ln \frac{r}{b}}{\ln \frac{a}{b}} \quad (6.2.10)$$

Per interpretare fisicamente il risultato, supponiamo che il cavo coassiale sia utilizzato per collegare due bipoli: un generatore reale ed un carico (Fig. 6.1). Consideriamo la superficie cilindrica  $\Sigma$  concentrica alle armature e di raggio intermedio, di lunghezza immediatamente maggiore di  $l$ .

Dalla legge di conservazione della carica (l'ultima delle (6.2.2)) otteniamo, grazie al teorema della divergenza:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 &\Rightarrow \oiint_{\Sigma} \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \iint_{\Sigma_G} \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \iint_{\Sigma_C} \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \iint_{\Sigma_L} \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \end{aligned} \quad (6.2.11)$$

Supponendo che su  $\Sigma_G$  e  $\Sigma_C$  la componente normale di  $\mathbf{D}$  sia nulla, mentre quella di  $\mathbf{J}$  sia non nulla solo in corrispondenza dei cavi di collegamento tra il cavo coassiale e i bipoli, si ottiene immediatamente:

$$-i_g + i_u + \iint_{\Sigma_L} \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \quad (6.2.12)$$

dove l'integrale sulla superficie laterale  $\Sigma_L$  si scrive:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_L} \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= -\iint_{\Sigma_L} \left( \mathbf{s} \nabla \mathbf{j}' + \mathbf{e} \frac{\partial \nabla \mathbf{j}'}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\iint_{\Sigma_L} \mathbf{s} \nabla \mathbf{j}' \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\iint_{\Sigma_L} \mathbf{s} \frac{\partial \mathbf{j}'}{\partial r} dS = \\ &= -\int_0^{2p} \int_0^l \mathbf{s} \frac{\partial \mathbf{j}'}{\partial r} r d\mathbf{J} dz = -2p \int_0^l \mathbf{s} \left( V + \mathbf{t}_e \frac{\partial V}{\partial t} \right) \frac{1}{\ln \frac{a}{b}} \frac{1}{r} r dz = \frac{2pl}{\ln \frac{b}{a}} \left( \mathbf{s} V + \mathbf{e} \frac{dV}{dt} \right) = GV + C \frac{dV}{dt} \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

dove

$$G = \frac{2pls}{\ln \frac{b}{a}} = gl, \quad C = \frac{2ple}{\ln \frac{b}{a}} = cl \quad (6.2.14)$$

sono la conduttanza e la capacità del cavo coassiale, così come studiate nel caso della conduzione stazionaria e della elettrostatica, rispettivamente.

In definitiva, la (6.2.13) diventa:

$$-i_g + i_u + GV + C \frac{dV}{dt} = 0 \quad (6.2.15)$$

che si interpreta, in termini di circuito equivalente, come mostrato in Fig. 6.3: il cavo coassiale si comporta come il parallelo di una conduttanza e di una capacità.

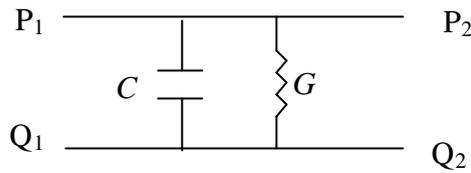


Fig. 6.3 - Circuito equivalente del cavo coassiale nell'approssimazione *Q.S.E.*

Supponiamo ora che l'andamento temporale delle varie grandezze circuitali sia sinusoidale; introducendo i fasori (indicati con un soprasegno) la (16) diventa:

$$-\bar{I}_G + \bar{I}_C + (G + j\omega C)\bar{V} = 0 \Rightarrow -\bar{I}_G + \bar{I}_C + G(1 + j\omega\tau_e)\bar{V} = 0 \quad (6.2.16)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che  $C/G = \tau_e$ . Dalla (6.2.16) ritroviamo, nel caso particolare che stiamo analizzando, il risultato che abbiamo discusso in precedenza in generale: per frequenze "basse" (tali cioè che  $\omega\tau_e \ll 1$ ) allora il circuito equivalente diventa praticamente puramente resistivo, come se le equazioni da risolvere fossero quelle della conduzione stazionaria, mentre per frequenze più "elevate" ( $\omega\tau_e \approx 1$ ) allora gli effetti capacitivi diventano importanti o addirittura preponderanti per  $\omega\tau_e \gg 1$  (sempre supponendo  $\omega\tau_{em} \ll 1$ ). Nel caso numerico discusso precedentemente, gli effetti resistivi sono rilevanti solo a frequenze più basse di 1Hz, mentre a frequenze più elevate (fino alle decine di MHz, quando gli effetti propagativi cominciano ad entrare in gioco) è predominante l'effetto della sola capacità.

Rimaniamo ancora nella situazione di regime sinusoidale, ed analizziamo in questo caso la situazione di Fig. 6.4: un cavo coassiale, al cui interno ci siano due materiali con diverse conducibilità e costanti dielettriche  $\sigma_1, \epsilon_1$  e  $\sigma_2, \epsilon_2$ . I due mezzi sono separati da una superficie  $\Sigma$  cilindrica di raggio  $c$  intermedio tra  $a$  e  $b$ .

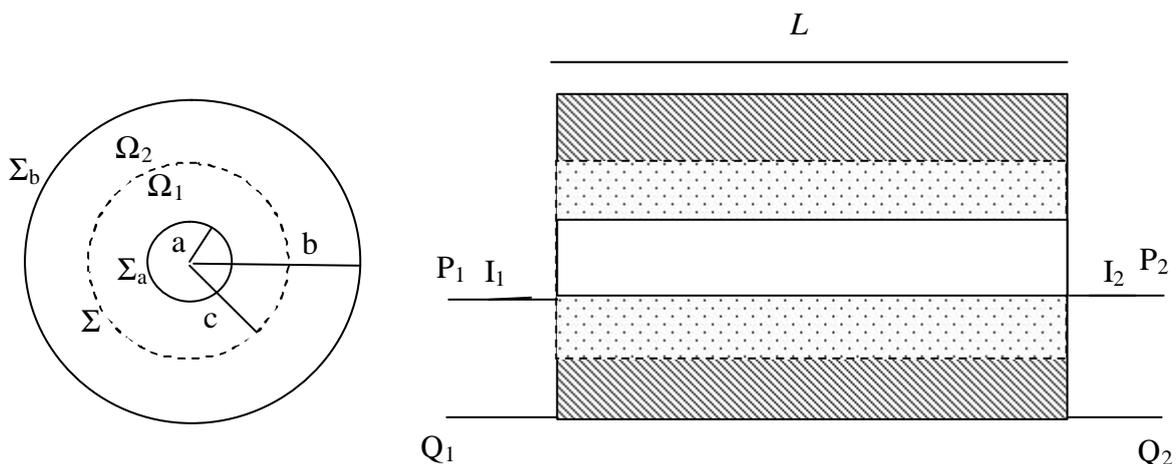


Fig. 6.4 - Il cavo coassiale con due materiali: geometria di riferimento

In analogia con quanto visto in precedenza, il modello matematico si scrive:

$$\begin{cases}
\nabla \cdot ((\mathbf{s}_1 + j\mathbf{w}e_1)\nabla \mathbf{j}_1) = 0 & \text{in } \Omega_1 \\
\nabla \cdot ((\mathbf{s}_2 + j\mathbf{w}e_2)\nabla \mathbf{j}_2) = 0 & \text{in } \Omega_2 \\
\mathbf{j}_1|_{\Sigma_a} = V \\
\mathbf{j}_2|_{\Sigma_b} = 0 \\
\mathbf{j}_1|_{\Sigma} = \mathbf{j}_2|_{\Sigma} \\
(\mathbf{s}_1 + j\mathbf{w}e_1)\frac{\partial \mathbf{j}_1}{\partial r}\Big|_{\Sigma} = (\mathbf{s}_2 + j\mathbf{w}e_2)\frac{\partial \mathbf{j}_2}{\partial r}\Big|_{\Sigma}
\end{cases} \quad (6.2.17)$$

dove le ultime due relazioni si ricavano dalla continuità della componente tangente di  $\mathbf{E}$  e della componente normale di  $\mathbf{J} + j\omega\mathbf{D}$ .

Utilizzando le solite ipotesi di simmetria, si arriva immediatamente a dire che:

$$\begin{cases}
\mathbf{j}_1 = A_1 \ln r + B_1 \\
\mathbf{j}_2 = A_2 \ln r + B_2
\end{cases} \quad (6.2.18)$$

dove le quattro costanti  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$  si calcolano imponendo le condizioni di raccordo e al contorno:

$$\begin{cases}
A_1 \ln a + B_1 = V \\
A_2 \ln a + B_2 = 0 \\
A_1 \ln c + B_1 = A_2 \ln c + B_2 \\
(\mathbf{s}_1 + j\mathbf{w}e_1)\frac{A_1}{c} = (\mathbf{s}_2 + j\mathbf{w}e_2)\frac{A_2}{c}
\end{cases} \quad (6.2.19)$$

Risolvendo il sistema (6.2.19) si ottiene infine:

$$\begin{cases}
\mathbf{j}_1 = V \left[ 1 - \frac{\ln \frac{r}{a}}{\ln \frac{c}{a} + \frac{(\mathbf{s}_1 + j\mathbf{w}e_1)}{(\mathbf{s}_2 + j\mathbf{w}e_2)} \ln \frac{b}{c}} \right] \\
\mathbf{j}_2 = -V \frac{(\mathbf{s}_1 + j\mathbf{w}e_1)}{(\mathbf{s}_2 + j\mathbf{w}e_2)} \frac{\ln \frac{r}{b}}{\ln \frac{c}{a} + \frac{(\mathbf{s}_1 + j\mathbf{w}e_1)}{(\mathbf{s}_2 + j\mathbf{w}e_2)} \ln \frac{b}{c}}
\end{cases} \quad (6.2.20)$$

A questo punto, possiamo schematizzare il cavo coassiale di Fig. 6.3 in termini di un doppio bipolo, rappresentato dalla matrice delle impedenze ai morsetti:

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{11} & \dot{Z}_{12} \\ \dot{Z}_{21} & \dot{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} \quad (6.2.21)$$

dove, grazie alle proprietà di simmetria e al fatto che le armature sono di conduttore perfetto, si ha  $\dot{Z}_{11} = \dot{Z}_{22} = \dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21} = \dot{Z}_s$

Risulta pertanto:

$$\dot{Z}_s = \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} \Big|_{\bar{I}_2=0} \quad (6.2.22)$$

dove:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 \Big|_{r_2=0} &= \iint_{\Sigma} (\mathbf{J} + j\omega\mathbf{D}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\iint_{\Sigma} ((\mathbf{s}_1 + j\omega\mathbf{e}_1)\nabla j_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_{\Sigma} (\mathbf{s}_1 + j\omega\mathbf{e}_1) \frac{\partial j_1}{\partial r} dS = \\ &= (\mathbf{s}_1 + j\omega\mathbf{e}_1) \bar{V}_1 \frac{1/c}{\ln \frac{c}{a} + \frac{(\mathbf{s}_1 + j\omega\mathbf{e}_1)}{(\mathbf{s}_2 + j\omega\mathbf{e}_2)} \ln \frac{b}{c}} 2\pi c l = \frac{\bar{V}_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \end{aligned} \quad (6.2.23)$$

e:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_s &= \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 \\ \frac{1}{\dot{Z}_1} &= \frac{2\pi l (\mathbf{s}_1 + j\omega\mathbf{e}_1)}{\ln \frac{c}{a}} = G_1 + j\omega C_1 \\ \frac{1}{\dot{Z}_2} &= \frac{2\pi l (\mathbf{s}_2 + j\omega\mathbf{e}_2)}{\ln \frac{b}{c}} = G_2 + j\omega C_2 \end{aligned} \quad (6.2.24)$$

dove  $G_1$  e  $C_1$  (rispettivamente  $G_2$  e  $C_2$ ) sono la conduttanza e la capacità di un cavo coassiale di raggi  $a$  e  $c$  (rispettivamente  $c$  e  $b$ ).

Ricordando come viene effettuata la sintesi di un doppio bipolo con lo schema a T, in definitiva il circuito equivalente del cavo coassiale esaminato è quello di Fig. 6.5. Dunque, il risultato non è semplicemente il parallelo della conduttanza complessiva della struttura (la serie di  $G_1$  e  $G_2$ ) con la sua capacità complessiva (la serie di  $C_1$  e  $C_2$ ).

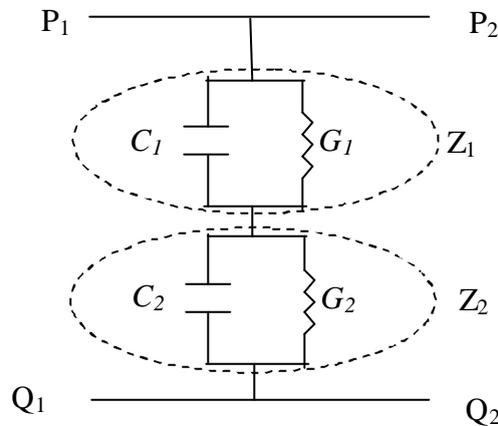


Fig. 6.5 - Circuito equivalente del cavo coassiale a due materiali

In Fig. 6.6 riportiamo gli andamenti della risposta in frequenza del circuito di Fig. 6.3, in termini di corrente, paragonato alla soluzione esatta della linea di trasmissione costituita dal cavo coassiale. I parametri utilizzati sono  $a=1\text{cm}$ ,  $b=10\text{cm}$ ,  $l=1\text{m}$ ,  $\epsilon=\epsilon_0$ ,  $\mu=\mu_0$ . La conducibilità  $\mathbf{s}$  è stata variata in modo da ottenere differenti rapporti  $\tau_{em}/\tau_e$ . Possiamo osservare che quando risulta  $\tau_{em}/\tau_e \ll 1$  allora il circuito di Fig. 6.3 dà la risposta corretta, consistentemente con le approssimazioni assunte per ottenere questo modello.

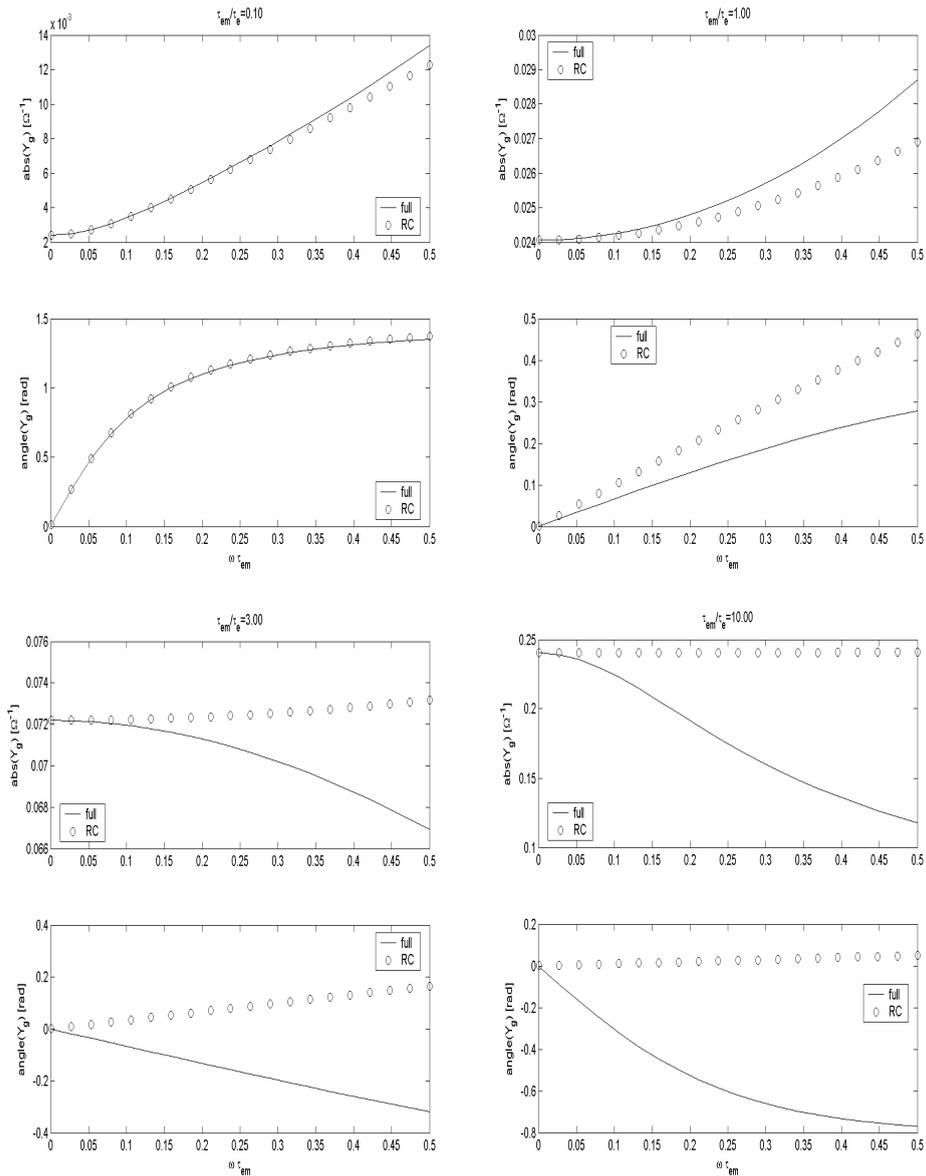


Fig - 6.6: Risposte in frequenza

### 6.3 - Il cavo coassiale nell'approssimazione *Q.S.M.* ( $\frac{1}{t_m} \ll \frac{1}{t_{em}} \ll \frac{1}{t_e}$ )

Ricordiamo che, in questo caso, assumendo una frequenza relativamente alta (caso 3B della sez. 5), abbiamo che le equazioni da risolvere sono quelle dell'approssimazione *Q.S.M.*:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (6.3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (6.3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (6.3.4)$$

con le seguenti relazioni costitutive e condizioni al contorno

$$\begin{cases} \mathbf{J} = \mathbf{s} \mathbf{E} \\ \mathbf{D} = \mathbf{e} \mathbf{E} \end{cases} \quad (6.3.5)$$

$$\begin{cases} \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}|_{\Sigma_a} = 0 \\ \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}|_{\Sigma_b} = 0 \end{cases} \quad (6.3.6)$$

$$[\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}]_{\Sigma_a} = \mathbf{K}_a \quad (6.3.7)$$

$$[\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}]_{\Sigma_b} = \mathbf{K}_b \quad (6.3.8)$$

Nella (6.3.7) le parentesi quadre  $[\cdot]_{\Sigma}$  indicano la differenza dei valori assunti dal vettore dalle parti opposte della superficie  $\Sigma$  e  $\mathbf{K}$  è la densità di corrente superficiale eventualmente presente su  $\Sigma$ . Devono infine essere specificate le ulteriori condizioni al contorno, conseguenti all'ipotesi di alimentazione ai morsetti.

Come nei casi precedenti, supponiamo trascurabili gli effetti di bordo.

Notiamo innanzitutto che la (6.3.2) implica la solenoidalità di  $\mathbf{J}$ . Notiamo inoltre che, per assegnate sorgenti  $\mathbf{J}$ , il campo magnetico ha la stessa configurazione ottenuta nel caso della magnetostatica. Supponiamo di alimentare il sistema come descritto in Fig. 6.1.

Se  $\mathbf{s} = 0$  nel volume tra i due elettrodi, non vi è dubbio che il campo magnetico è lo stesso del caso magnetostatico. Scegliendo il solito riferimento cilindrico, con asse  $z$  lungo l'asse del cavo, si ottiene allora immediatamente che

$$\mathbf{H} = H_J(r, t) \hat{\mathbf{i}}_J \quad (6.3.9)$$

Applicando la legge di Ampère ad una circonferenza di raggio  $r$ , con centro sull'asse  $z$  all'ascissa  $z$ , si ha:

$$H_J(r, t) = \frac{I(t)}{2\pi r} \quad (6.3.10)$$

dove  $I(t)$  è la corrente che fluisce nel cavo. Si noti che in questo caso il campo elettrico può essere ottenuto considerando la (6.3.1). Tenendo conto che, per la simmetria di rotazione il campo elettrico non dipende da  $\mathbf{J}$  si ottiene dalla (6.3.1):

$$\frac{\partial E_J}{\partial z} = 0 \quad (6.3.11)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\mathbf{m} \frac{\partial H_J}{\partial t} \quad (6.3.12)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r E_J}{\partial r} = 0 \quad (6.3.13)$$

Utilizzando la (6.3.11) e la (6.3.13), nonché le condizioni al contorno (6.3.6), particolarizzate per la componente  $\mathbf{J}$  ( $E_J(a, z, t) = E_J(b, z, t) = 0$ ), si ottiene immediatamente che

$$E_J(r, z, t) = 0 \quad (6.3.14)$$

Si ha inoltre che il campo elettrico deve rispettare la (6.3.4) che riscriviamo nel sistema di coordinate cilindrico, in assenza di densità di carica libera come:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r E_r}{\partial r} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (6.3.15)$$

Una possibile soluzione che rispetti le equazioni (6.3.12) e (6.3.15) è la seguente:

$$E_z(r, z, t) = 0 \quad (6.3.16)$$

$$E_r(r, z, t) = -\frac{dI}{dt} \frac{\mathbf{m}}{2\pi r} + \frac{C}{r} \quad (6.3.17)$$

dove  $C$  è una costante legata all'alimentazione. Poiché è unica in questo caso la soluzione (il campo vettoriale  $\mathbf{E}$  è univocamente determinato in un dominio chiuso dalla conoscenza del suo rotore, della sua divergenza e delle sue componenti tangenti sul contorno del dominio), il campo elettrico

nel nostro problema è quindi quella data dalle (6.3.14), (6.3.16) e (6.3.17), mentre il campo magnetico  $\mathbf{H}$  è espresso dalla (6.3.10).

Se  $\mathbf{s} \neq 0$  possiamo ragionevolmente supporre che la presenza di una componente di campo elettrico radiale comporti la nascita di una componente analoga di densità di corrente. Conseguentemente, la corrente nel cavo non è più uniforme in direzione  $z$ . Ipotizziamo pertanto, trascurando sempre gli effetti di bordo, che anche in questo nuovo caso il campo elettromagnetico abbia solo componenti trasverse rispetto alla direzione  $z$ :

$$\mathbf{H} = H_J(r, z, t) \hat{\mathbf{i}}_J \quad (6.3.18)$$

$$\mathbf{E} = E_r(r, z, t) \hat{\mathbf{i}}_r \quad (6.3.19)$$

L'unicità della soluzione, anche in questo caso ci garantirà la correttezza di tale ipotesi di lavoro.

Applicando allora la legge di Ampère ad una circonferenza di raggio  $r$ , con centro sull'asse  $z$  all'ascissa  $z$ , si ha:

$$H_J(r, z, t) = \frac{I(z, t)}{2\pi r} \quad (6.3.20)$$

dove  $I(z, t)$  è la corrente che fluisce nel cavo all'ascissa  $z$ . Essendo il campo magnetico ortogonale all'asse  $z$ , non vi è contributo al flusso di  $\mathbf{B}$  attraverso superfici che giacciono su piani ortogonali a  $z$ . Applicando allora la legge dell'induzione ad una linea chiusa del tipo di quella di Fig. 6.7 si ottiene:

$$\oint_g \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{Ag_1B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{Bg_2A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{S_g} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{i}}_z dS = 0, \quad (6.3.21)$$

e quindi:

$$T_{Ag_1B} = \int_{Ag_1B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = T_{Ag_2B} = - \int_{Bg_2A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V = \int_a^b E_r \cdot dr$$

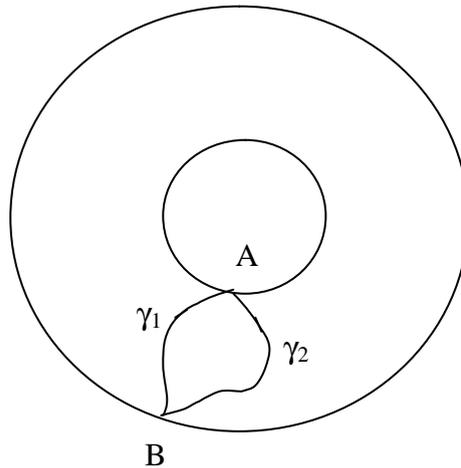


Fig. 6.7 – La curva per il calcolo della circuitazione di  $\mathbf{E}$

Tenendo anche conto delle (6.3.6), risulta quindi ben definite la tensione  $V$  tra i due conduttori. Chiaramente  $V = V(z, t)$  in quanto  $\mathbf{E} = E_r(r, z, t) \hat{\mathbf{i}}_r$ .

Le equazioni da risolvere (6.3.1) e (6.3.2) si riscrivono in questo caso nel modo seguente:

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} = -\mathbf{m} \frac{\partial H_J}{\partial t} \quad (6.3.22)$$

$$-\frac{\partial H_J}{\partial z} = \mathbf{s}E_r \quad (6.3.23)$$

Integrando entrambi i membri di queste equazioni in  $r$  tra  $a$  e  $b$  è possibile ottenere le equazioni che devono soddisfare  $V(z,t)$  e  $I(z,t)$ .

Si ha infatti

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_a^b E_r dr = -\mathbf{m} \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b H_J dr \quad (6.3.24)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} \int_a^b H_J dr = \mathbf{s} \int_a^b E_r dr \quad (6.3.25)$$

e quindi

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\mathbf{m} \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b \frac{I(z,t)}{2pr} dr = -\frac{\mathbf{m}}{2\mathbf{p}} \log \frac{b}{a} \frac{\partial I}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_a^b \frac{I(z,t)}{2pr} dr = \frac{\partial I}{\partial z} \frac{1}{2\mathbf{p}} \log \frac{b}{a} = \mathbf{s}V$$

Introducendo le definizioni di conduttanza per unità di lunghezza  $g = \frac{2\mathbf{p}\mathbf{s}}{\log \frac{b}{a}}$  e di induttanza per

unità di lunghezza  $\ell = \frac{\mathbf{m} \log \frac{b}{a}}{2\mathbf{p}}$  si ha in definitiva:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\ell \frac{\partial I}{\partial t} \quad (6.3.26)$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -gV \quad (6.3.27)$$

Cerchiamo ora la loro soluzione, nell'ipotesi che le grandezze  $V$  ed  $I$  abbiano una dipendenza sinusoidale dal tempo. Passando alla rappresentazione nel dominio dei numeri complessi attraverso fasori le equazioni (6.3.26)-(6.3.27) diventano:

$$\frac{d\bar{V}}{dz} = -j\omega\ell\bar{I} \quad (6.3.28)$$

$$\frac{d\bar{I}}{dz} = -g\bar{V} \quad (6.3.29)$$

e quindi

$$\bar{V} = -\frac{1}{g} \frac{\partial \bar{I}}{\partial z} \quad (6.3.30)$$

$$\frac{d^2 \bar{I}}{dz^2} = j\omega\ell g \bar{I} \quad (6.3.31)$$

Poniamo  $\mathbf{g}^2 = j\omega\ell g = j\omega\mathbf{m}\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{d} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mathbf{m}\mathbf{s}}}$ ,  $g = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mathbf{m}\mathbf{s}}{2}} = \frac{1+j}{\mathbf{d}}$ , essendo  $\mathbf{d}$  il cosiddetto spessore di penetrazione.

La soluzione della (6.3.31) può essere espressa come

$$\bar{I}(z) = \bar{K}_1 e^{gz} + \bar{K}_2 e^{-gz} \quad (6.3.32)$$

e, dalla (6.3.30)

$$\bar{V}(z) = \frac{g}{g} [\bar{K}_1 e^{gz} - \bar{K}_2 e^{-gz}] \quad (6.3.33)$$

Le costanti complesse  $\bar{K}_1$  e  $\bar{K}_2$  vanno determinate utilizzando le condizioni al contorno.

Per ottenere un circuito equivalente, bisogna determinare la matrice d'impedenza  $\dot{Z}$  del doppio bipolo visto alle due estremità del cavo. Definiamo:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{11} &= \left. \frac{\bar{V}(-l)}{\bar{I}(-l)} \right|_{\bar{I}(0)=0} \\ \dot{Z}_{21} &= \left. \frac{\bar{V}(0)}{\bar{I}(-l)} \right|_{\bar{I}(0)=0} \end{aligned} \quad (6.3.34)$$

dove  $\dot{Z}_{22} = \dot{Z}_{11}$  per ragioni di simmetria e  $\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21}$  per la reciprocità.

Per ottenere questi elementi, imponiamo  $\bar{I}(-l) = \bar{I}_g$  e  $\bar{I}(0) = 0$ , e valutiamo la tensione alle due estremità. Abbiamo:

$$\bar{K}_1 = -\bar{K}_2 = \bar{I}_g \frac{1}{e^{gl} - e^{-gl}} \quad (6.3.35)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \bar{I}(z) &= \bar{I}_g \frac{e^{-gz} - e^{gz}}{e^{gl} - e^{-gl}} \\ \bar{V}(z) &= \bar{I}_g \frac{g}{g} \frac{e^{-gz} + e^{gz}}{e^{gl} - e^{-gl}} \end{aligned} \quad (6.3.36)$$

Dalla seconda delle (6.3.36) risulta:

$$\dot{Z}_{11} = \frac{g}{g} \frac{e^{gl} + e^{-gl}}{e^{gl} - e^{-gl}} \quad (6.3.37)$$

$$\dot{Z}_{21} = \frac{g}{g} \frac{2}{e^{-gl} - e^{gl}} \quad (6.3.38)$$

Sviluppiamo ora la (6.3.37) nel limite  $|\gamma l| \ll 1$ , usando la seguente espansione in serie di Taylor:

$$\begin{aligned} e^x + e^{-x} &= 2 + x^2 + O(x^4) \\ e^x - e^{-x} &= 2x + O(x^3) \end{aligned} \quad (6.3.39)$$

Sostituendo, otteniamo:

$$\dot{Z}_{11} \cong \frac{g}{g} \frac{2 + g^2 l^2}{2gl} = \frac{1}{gl} + \frac{lg^2}{g2} = \frac{1}{gl} + jw \frac{l}{2} \quad (6.3.40)$$

e

$$\dot{Z}_{21} \cong \frac{g}{g} \frac{2}{2gl} = \frac{1}{gl} \quad (6.3.41)$$

In conclusione, il circuito equivalente risulta quello mostrato in Fig. 6.8.

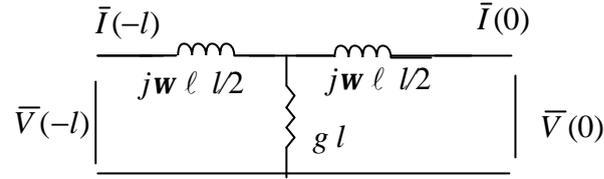


Fig. 6.8 - Circuito equivalente del cavo coassiale nell'approssimazione *Q.S.M.*

Ovviamente, per rendere più valida l'approssimazione utilizzata per ottenere tale circuito equivalente, si potrebbe suddividere il sistema originale in un numero di parti di lunghezza ridotta, su ciascuna delle quali l'approssimazione  $|\gamma l| \ll 1$  è più valida. Risulterebbe un insieme di circuiti equivalenti come quello di Fig. 6.8 collegati in cascata. In Fig. 6.9 illustriamo il risultato ottenuto suddividendo in due parti il sistema originario.

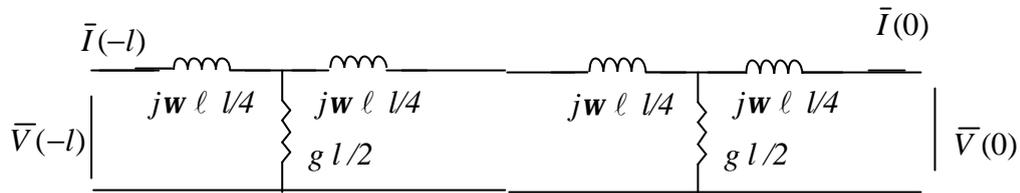


Fig. 6.9 - Circuito equivalente del cavo coassiale nell'approssimazione *Q.S.M.* (due celle in cascata)

Si noti che la corrente  $I(z)$ , nel limite  $|\gamma l| \ll 1$ , considerando, ad esempio, come già fatto le condizioni di estremità  $\bar{I}(-l) = \bar{I}_g$  e  $\bar{I}(0) = 0$ , risulta data dalla

$$\bar{I}(z) = -\bar{I}_g \frac{z}{l} \quad (6.3.42)$$

Utilizzando la (6.3.23), si ottiene infine la densità di corrente che fluisce nel mezzo tra gli elettrodi:

$$J_r = -\frac{\partial H_J}{\partial z} = \frac{\bar{I}_g}{2prl}$$

Questa componente della densità di corrente è costante lungo l'asse del cavo. E' invece proporzionale a  $\bar{I}(z)$  la densità di corrente superficiale su ciascuna delle superfici degli elettrodi.

Il ritardo di gruppo, definito nell'Appendice, ci consente di interpretare il tempo  $t_m$  nell'ambito dell'approssimazione *Q.S.M.*

In tale limite, infatti, il cavo si presenta come il doppio bipolo di Fig. 6.8. La sua funzione di trasferimento, nel caso che la porta 2 sia a vuoto, è la seguente

$$\bar{H}(j\omega) = \frac{1}{gl} = \frac{1}{\frac{1}{gl} + j\omega \frac{\ell}{2}} e^{-j \arctan(\omega^2 \frac{g\ell}{2})}$$

Ricordando che

$$g\ell = ms, \quad t_m = msl^2$$

si ha che

$$b(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega t_m}{2}\right)$$

Il ritardo di gruppo è quindi:

$$t_{RG} = -\frac{db}{dw} = \frac{1}{1 + \left(\frac{wt_m}{2}\right)^2} \frac{t_m}{2}$$

Esso è praticamente dato da  $t_m$  nel limite *Q.S.M.*, cioè per  $wt_m \leq 1$

Sviluppiamo infine la soluzione (6.3.36) nel limite  $|\gamma l| \gg 1$ . Risulta in questo caso:  $e^{g^l} \gg e^{-g^l}$  e, per  $z < 0$ ,  $e^{-g^z} \gg e^{g^z}$ .

Pertanto

$$\bar{I}(z) \cong \bar{I}_g e^{-g(z+l)} = \bar{I}_g e^{-\frac{(1+j)(z+l)}{d}} \quad (6.3.43)$$

Ritornando nel dominio del tempo:

$$I(z, t) = I_g e^{-\frac{z+l}{d}} \sin\left(\omega t - \frac{z+l}{d}\right) \quad (6.3.44)$$

Notiamo che la corrente  $I(z, t)$  si propaga in direzione  $z$  attenuandosi, L'ampiezza di  $I(z, t)$  è significativamente diversa da zero entro una distanza dal generatore proporzionale allo spessore di penetrazione  $d$ : la corrente si addensa quindi in prossimità di  $z = -l$  (effetto pelle).

In Fig. 6.10 riportiamo gli andamenti della risposta in frequenza del circuito di Fig. 6.8 e 6.9, in termini di corrente, paragonata alla soluzione esatta della linea di trasmissione costituita dal cavo coassiale. I parametri utilizzati sono gli stessi del caso precedente. Possiamo osservare che quando risulta  $t_{em}/t_e \gg 1$  allora i circuiti di Fig. 6.8 e 6.9 danno la risposta corretta, consistentemente con le approssimazioni assunte per ottenere questo modello. Osserviamo inoltre che né questo circuito né il circuito di Fig. 6.3 possono riprodurre la risposta del cavo quando  $t_{em}/t_e = 1$ , anche per piccolo valori di  $wt_{em}$ .

Rimuoviamo ora l'ipotesi che il conduttore interno sia un conduttore perfetto. Supponiamo inoltre, per semplicità, che il conduttore esterno sia ancora perfetto e che tra i due conduttori vi sia il vuoto. Supponendo che la densità di corrente nel conduttore interno sia diretta lungo  $z$ , nasce questa volta anche una componente di campo elettrico in direzione  $z$ . Per simmetria, il campo  $\mathbf{H}$  sostenuto da tale corrente risulta ancora diretto lungo  $\mathbf{J}$ :

$$\mathbf{J} = J_z(r, t) \hat{\mathbf{i}}_z = \mathbf{sE} \quad (6.3.45)$$

$$\mathbf{H} = H_J(r, t) \hat{\mathbf{i}}_J \quad (6.3.46)$$

In regime sinusoidale le equazioni da risolvere risultano allora:

$$\frac{d\bar{E}_z}{dr} = j\omega m \bar{H}_J \quad (6.3.47)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \bar{H}_J = \bar{J}_z \quad (6.3.48)$$

$$\bar{J}_z = \mathbf{s} \bar{E}_z \quad (6.3.49)$$

esse possono essere facilmente riscritte come

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \bar{J}_J = j\omega m \mathbf{s} \bar{J}_z \quad (6.3.50)$$

$$\bar{H}_J = \frac{1}{j\omega m \mathbf{s}} \frac{\partial \bar{J}_z}{\partial r} \quad (6.3.51)$$

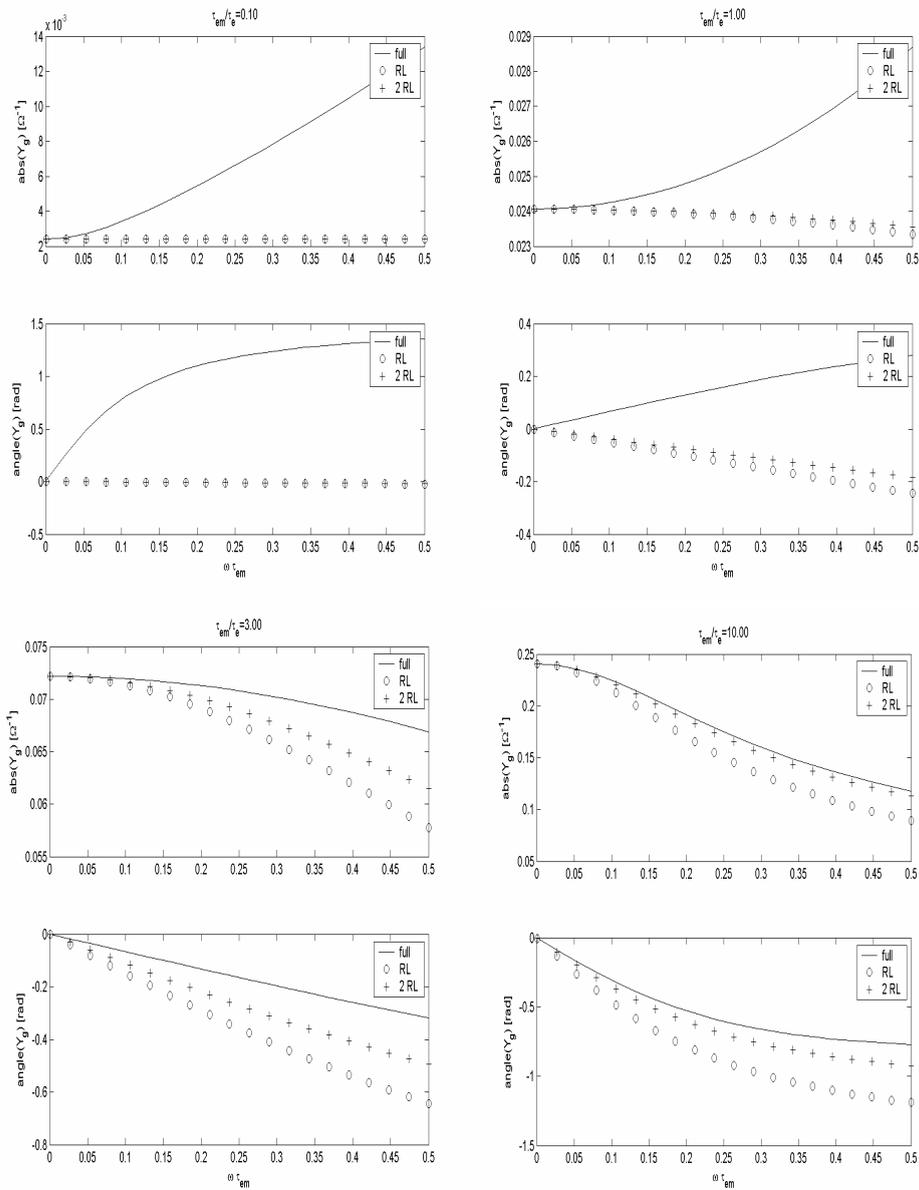


Fig. 6.10 - Risposte in frequenza

Proviamo a risolverle ipotizzando che la densità di corrente sia pressoché uniforme nel conduttore:

$$\bar{J}_z \cong \frac{\bar{I}_g}{\pi a^2} (1 + e\tilde{J}) \quad (6.3.52)$$

con  $e \ll 1$

Introducendo la variabile adimensionale  $x = \frac{r}{a}$ , l'equazione (6.3.50) si riscrive allora nella forma adimensionale:

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} (1 + e\tilde{J}) = j\omega m s a^2 (1 + e\tilde{J}) = j \frac{2a^2}{d^2} (1 + e\tilde{J}) \quad (6.3.53)$$

Ricordando il significato del parametro  $\mathbf{d}$ , è chiaro che questa situazione corrisponde al limite  $\frac{a}{\mathbf{d}} \ll 1$ . Allora, ipotizzando che  $\mathbf{e} \cong \frac{a^2}{\mathbf{d}^2}$ , e trascurando termini di ordine superiore ad  $\mathbf{e}$ , l'equazione (6.3.53) si riscrive come:

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} \tilde{J} = j2 \quad (6.3.54)$$

La soluzione può essere ottenuta per integrazione diretta:

$$\tilde{J} = j \frac{x^2}{2} + \bar{K}_1 \log x + \bar{K}_2 \quad (6.3.55)$$

La condizione che la densità di corrente sia limitata per  $x$  che tende a zero richiede necessariamente che  $\bar{K}_1 = 0$ . La costante  $\bar{K}_2$  può essere invece ottenuta imponendo che la corrente totale sia quella data dal generatore:

$$\bar{I}_g = \int_0^a \int_0^{2p} \bar{J}_z(r) r dr d\mathbf{J} = 2p \int_0^a \frac{\bar{I}_g}{p a^2} \left[ 1 + \frac{a^2}{\mathbf{d}^2} \left( j \frac{r^2}{2a^2} + \bar{K}_2 \right) \right] r dr = \bar{I}_g + \frac{2\bar{I}_g}{\mathbf{d}^2} \left( j \frac{a^2}{8} + \bar{K}_2 \frac{a^2}{2} \right) \quad (6.3.56)$$

Pertanto

$$\bar{K}_2 = -j \frac{1}{4} \quad (6.3.57)$$

e

$$\bar{J}_z(r) = \frac{\bar{I}_g}{p a^2} \left[ 1 + j \frac{a^2}{2\mathbf{d}^2} \left( \frac{r^2}{a^2} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (6.3.58)$$

Il circuito equivalente può essere ottenuto applicando la legge dell'induzione in forma integrale alla linea chiusa di Fig. 6.11. Si ha

$$\oint_{\mathbf{g}_1 \cup \mathbf{g}_2 \cup \mathbf{g}_3 \cup \mathbf{g}_4} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -j\omega \iint_{S_g} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -j\omega \bar{\Phi} \quad (6.3.59)$$

e quindi

$$\int_{B\mathbf{g}_1A_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{A_1\mathbf{g}_2A_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{A_2\mathbf{g}_3B_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{B_2\mathbf{g}_4B_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -j\omega \bar{\Phi} \quad (6.3.60)$$

$$-\bar{V}_1 + \int_{-l}^0 \bar{E}_z(a) dz + \bar{V}_2 = -j\omega \bar{\Phi} \quad (6.3.61)$$

Notiamo che  $\mathbf{g}_4$  si sviluppa in un conduttore perfetto dove il campo elettrico è nullo.

Sostituendo il valore di  $\bar{E}_z(a) = \frac{\bar{J}_z(a)}{\mathbf{s}}$  che si ottiene utilizzando la (6.3.58), la relazione tra tensioni e correnti ai morsetti risulta essere

$$\bar{V}_1 = \bar{I}_g \left( \frac{l}{\mathbf{s} p a^2} + j\omega \frac{\mathbf{m} l}{8p} \right) + \bar{V}_2 + j\omega \bar{\Phi} \quad (6.3.62)$$

Osservando che

$$\bar{\Phi} = L_{ext} \bar{I}_g, \quad L_{ext} = \frac{\mathbf{m} l}{2p} \log \frac{b}{a} \quad (6.3.63)$$

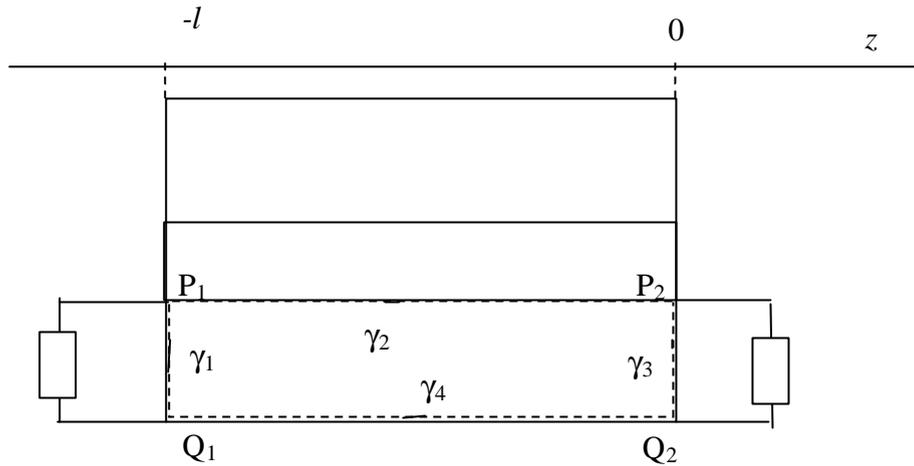


Fig. 6.11 - La curva per il calcolo della circuitazione di  $\mathbf{E}$

e ponendo

$$R = \frac{l}{\pi a^2}; \quad L_{\text{int}} = \frac{\mu l}{8\pi}$$

si ha la seguente equazione ai morsetti

$$\bar{V}_1 = \bar{I}_g R + j\omega L_{\text{int}} \bar{I}_g + j\omega L_{\text{ext}} \bar{I}_g + \bar{V}_2 \quad (6.3.64)$$

Ad essa corrisponde il circuito equivalente di Fig. 6.12.

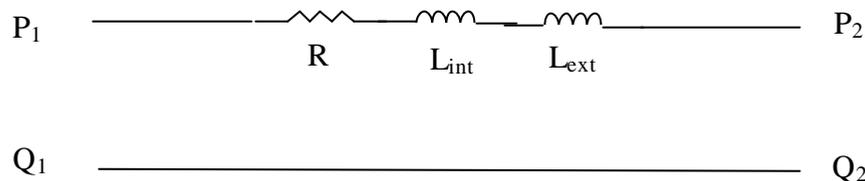


Fig 6.12 – Circuito equivalente nel limite di conduttori di conducibilità finita

Consideriamo ora il caso in cui  $\frac{a}{d} \gg 1$ . In questa situazione è lecito attendersi che la densità di corrente si addensa nei pressi della periferia del conduttore identificata da  $r = a$ . E' conveniente allora esprimere la coordinata spaziale nella seguente forma adimensionale:

$$\frac{r}{a} = \frac{r-a}{d} \frac{d}{a} + 1 = 1 + ex \quad (6.3.65)$$

dove  $x = \frac{r-a}{d}$  ed  $e = \frac{d}{a} \ll 1$

L'equazione (6.3.50) si scrive allora nel modo seguente:

$$\frac{1}{a(1+ex)} \frac{d}{d(aex)} a(1+ex) \frac{d}{d(aex)} \bar{J}_z = j \frac{2}{d^2} \bar{J}_z,$$

e quindi:

$$\frac{1}{(1+ex)} \frac{d}{dx} (1+ex) \frac{d}{dx} \bar{J}_z = j \frac{2a^2}{d^2} e^2 \bar{J}_z = j2\bar{J}_z \quad (6.3.66)$$

Trascurando i contributi di ordine  $e$  :

$$\frac{d^2}{dx^2} \bar{J}_z = j2\bar{J}_z \quad (6.3.67)$$

La soluzione generale di questa equazione differenziale ordinaria omogenea del second'ordine è

$$\bar{J}_z(x) = \bar{K}_1 e^{-(1+j)x} + \bar{K}_2 e^{(1+j)x} \quad (6.3.68)$$

Sostituendo l'espressione di  $x$  in funzione di  $r$

$$\bar{J}_z(r) = \bar{K}_1 e^{-(1+j)\frac{r-a}{d}} + \bar{K}_2 e^{(1+j)\frac{r-a}{d}} \quad (6.3.69)$$

Poichè abbiamo ipotizzato che per  $r \rightarrow 0$ ,  $\bar{J}_z \rightarrow 0$ , avendo ipotizzato  $\frac{a}{d} \gg 1$ , deve risultare  $\bar{K}_1 = 0$ . La costante  $\bar{K}_2$  può essere invece ottenuta ancora una volta imponendo che la corrente totale sia quella fissata dal generatore:

$$\begin{aligned} \bar{I}_g &= \int_0^a \int_0^a \bar{J}_z(r) r dr d\mathbf{J} = 2\mathbf{p} \bar{K}_2 \int_0^a e^{(1+j)\frac{r-a}{d}} r dr = 2\mathbf{p} \bar{K}_2 \frac{d}{1+j} \int_0^a r d \left[ e^{(1+j)\frac{r-a}{d}} \right] = \\ &= 2\mathbf{p} \bar{K}_2 \frac{d}{1+j} \left[ r e^{(1+j)\frac{r-a}{d}} \Big|_0^a - \int_0^a e^{(1+j)\frac{r-a}{d}} dr \right] = 2\mathbf{p} \bar{K}_2 \frac{d}{1+j} \left[ a - \frac{d}{1+j} \left( 1 - e^{-(1+j)\frac{a}{d}} \right) \right] \end{aligned}$$

Nel limite  $\frac{a}{d} \gg 1$ :

$$\bar{I}_g \cong 2\mathbf{p} \bar{K}_2 \frac{da}{1+j} \left[ 1 - \frac{d}{a} \frac{1}{1+j} \right] \cong 2\mathbf{p} \bar{K}_2 \frac{da}{1+j}$$

e quindi:

$$\bar{K}_2 = \bar{I}_g \frac{1+j}{2\mathbf{p}da} \quad (6.3.70)$$

$$\bar{J}_z(r) = \bar{I}_g \frac{1+j}{2\mathbf{p}d} e^{(1+j)\frac{r-a}{d}} \quad (6.3.71)$$

Il circuito equivalente si ottiene con considerazioni analoghe alle precedenti, sostituendo il nuovo valore di  $\bar{E}_z(a) = \frac{\bar{J}_z(a)}{\mathbf{s}} = \bar{I}_g \frac{1+j}{\mathbf{s}2\mathbf{p}da}$  nella (6.3.61). In questo caso la relazione tra tensioni e correnti ai morsetti risulta essere

$$\bar{V}_1 = \bar{I}_g \left( \frac{l}{\mathbf{s}2\mathbf{p}ad} + j \frac{l}{\mathbf{s}2\mathbf{p}ad} \right) + \bar{V}_2 + j\omega L_{ext} \bar{I}_g \quad (6.3.72)$$

Ponendo

$$R = X = \frac{l}{spad}$$

si ha la seguente equazione ai morsetti

$$\bar{V}_1 = \bar{I}_g R + jX \bar{I}_g + j\omega L_{ext} \bar{I}_g + \bar{V}_2 \quad (6.3.73)$$

Ad essa corrisponde un circuito equivalente ancora analogo a quello di Fig. 6.12. In questo caso però nel calcolo della resistenza compare una sezione equivalente pari a  $2pad$ , che evidenzia come la sezione utile al passaggio di corrente è ridotta ad una corona circolare di spessore  $d$ . Notiamo anche che, in questo caso la resistenza e l'induttanza sono funzioni della frequenza a causa della presenza del parametro  $d$ .

6.4 - Il cavo coassiale nell'approssimazione Q.S.E.M. ( $\frac{1}{\tau_m} \approx \frac{1}{\tau_{em}} \approx \frac{1}{\tau_e}$ )

In questo caso, le equazioni da risolvere sono le equazioni di Maxwell nella loro forma completa, che, nel nostro caso, con passaggi analoghi a quelli sviluppati in precedenza, possono essere riscritte nel modo seguente:

$$\frac{d\bar{V}}{dz} = -j\omega \ell \bar{I} \quad (6.4.1)$$

$$\frac{d\bar{I}}{dz} = -(g + j\omega c) \bar{V} \quad (6.4.2)$$

dove

$$g = \frac{2ps}{\log \frac{b}{a}}, \quad \ell = \frac{m}{2p} \log \frac{b}{a}, \quad c = \frac{2pe}{\ln \frac{b}{a}}$$

Queste sono le equazioni standard delle linee di trasmissione, che risolviamo con le seguenti condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned} \bar{V}(-l) &= \bar{V}_g \\ \bar{I}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

Con le manipolazioni usuali otteniamo:

$$\frac{d^2 \bar{V}}{dz^2} - (\omega^2 LC - j\omega LG) \bar{V} = 0 \quad (6.4.4)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \bar{V}_+ e^{-jbz} + \bar{V}_- e^{jbz} \\ \bar{I} &= \frac{1}{Z_0} (\bar{V}_+ e^{-jbz} - \bar{V}_- e^{jbz}) \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

con:

$$\mathbf{b} = \sqrt{\omega^2 LC - j\omega LG} = \sqrt{\omega^2 \mathbf{me} - j\omega \mathbf{sm}} = \omega \sqrt{\mathbf{me}} \sqrt{1 - j \frac{1}{\omega \tau_e}}, \quad \text{Re } \mathbf{b} > 0 \quad (6.4.6)$$

$$Z_0 = \frac{\omega L}{\mathbf{b}}$$

Applicando le condizioni ai limiti, otteniamo:

$$\begin{aligned}\bar{V}(z) &= \bar{V}_g \frac{(e^{-j\beta z} + e^{j\beta z})}{(e^{j\beta l} + e^{-j\beta l})} \\ \bar{I}(z) &= \frac{\bar{V}_g}{Z_0} \frac{(e^{-j\beta z} - e^{j\beta z})}{(e^{j\beta l} + e^{-j\beta l})}\end{aligned}\tag{6.4.7}$$

Poichè siamo sempre nel caso in cui  $\omega t_{em} \ll 1 \Rightarrow |\beta l| \ll 1$ , possiamo applicare sulla soluzione (6.4.7) tutte le approssimazioni del caso precedente (vedi relazioni (6.3.39)), ottenendo il circuito equivalente di Fig. 6.13.

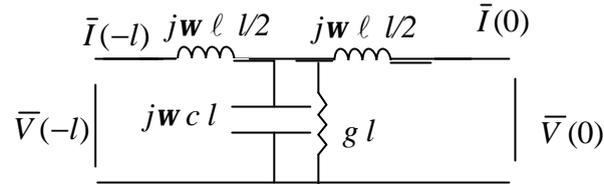


Fig - 6.13. Il circuito equivalente nell'approssimazione *Q.S.E.M.*

Ovviamente, anche in questo caso possiamo dividere il sistema in due parti ed ottenere la cascata di due circuiti come quello di Fig. 6.13.

In Fig. 6.14 riportiamo gli andamenti della risposta in frequenza del circuito ottenuto con due celle a T, paragonato alla soluzione esatta della linea di trasmissione costituita dal cavo coassiale, ed ai risultati ottenuti con i due circuiti equivalenti precedenti. I parametri geometrici sono gli stessi dei casi precedenti. Possiamo osservare che questo circuito è in grado di riprodurre correttamente i risultati anche quando  $\tau_{em}/\tau_e = 1$ , come atteso.

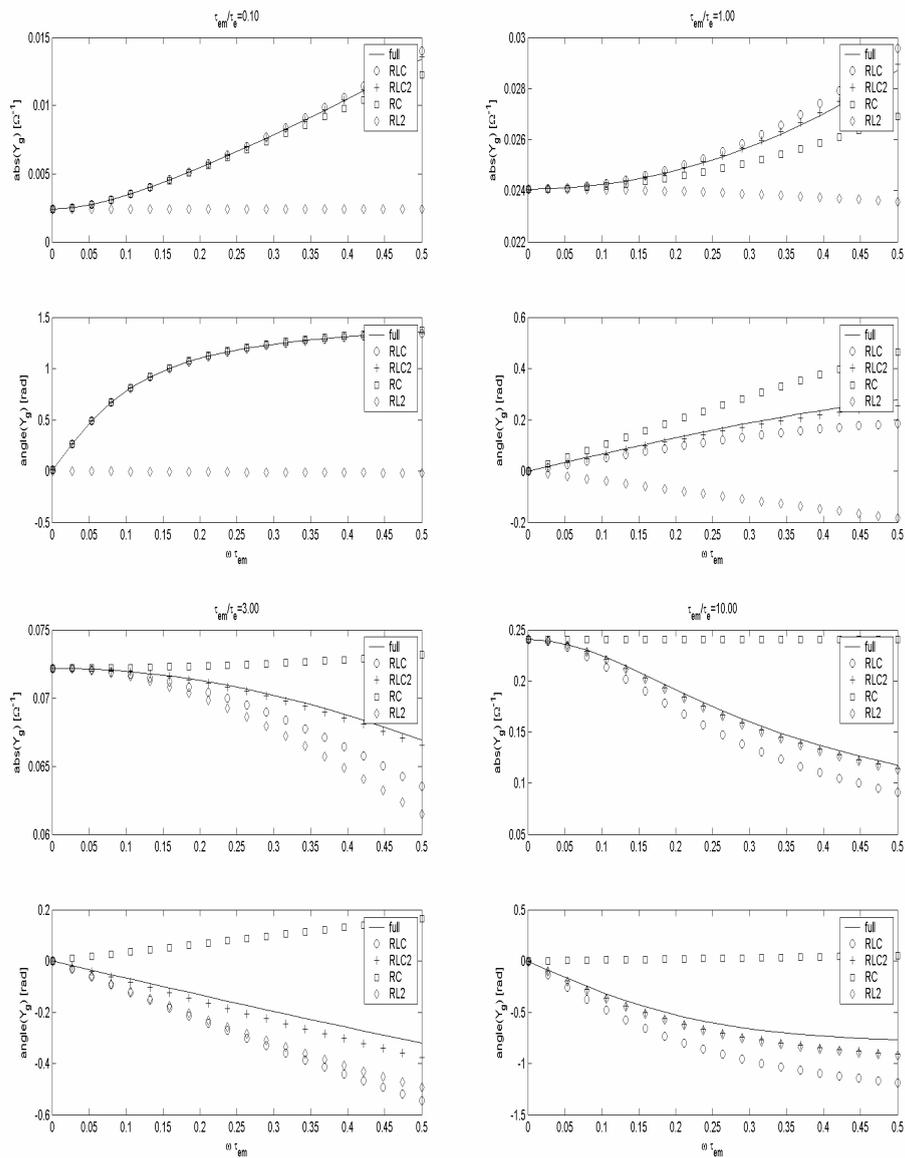


Fig. 6.14 - Risposte in frequenza

- [1] H. A. Haus, J. R. Melcher, Electromagnetic fields and energy, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.  
 [2] L. De Menna, G. Miano, Unpublished

## Appendice

### Ritardo di gruppo

Vogliamo determinare il tempo impiegato perché il segnale attraversi un doppio bipolo, nel caso limite che il segnale sia sinusoidale di pulsazione  $\mathbf{w}$ . Il ritardo nella trasmissione non può che essere associato ad una localizzazione temporale del segnale, cosa non evidenziabile nel caso del segnale sinusoidale. Per poter effettuare tale valutazione risulta allora conveniente supporre il segnale d'ingresso costituito da due sinusoidi di pulsazione quasi uguale, cioè:

$$v_g(t) = \cos(\mathbf{w} - \Delta\mathbf{w})t + \cos(\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w})t \quad (\text{A.1})$$

Vediamo che tale segnale è equivalente a

$$v_g(t) = 2\cos \Delta\mathbf{w}t \cos \mathbf{w}t \quad (\text{A.2})$$

L'ampiezza del segnale risulta in questo caso modulata dalla cosinusoide di pulsazione  $\Delta\mathbf{w}$ , pervenendo così ad una implicita localizzazione del segnale di pulsazione  $\mathbf{w}$ . In particolare, con la modulazione abbiamo acquisito, in un certo senso, un riferimento temporale che vede il massimo del segnale in  $t=0$ . Il segnale sinusoidale iniziale si riottiene nel limite  $\Delta\mathbf{w} \rightarrow 0$ .

Supponiamo che la funzione di trasferimento del doppio bipolo sia  $\bar{H}(j\mathbf{w}) = A(\mathbf{w})e^{j\mathbf{b}(\mathbf{w})}$ . Conseguentemente il segnale sinusoidale in uscita  $v_u(t)$ , può essere ottenuto, passando alla rappresentazione con i fasori:

$$\begin{aligned} \bar{V}_u(j(\mathbf{w} - \Delta\mathbf{w})) &= \bar{H}(j(\mathbf{w} - \Delta\mathbf{w}))\bar{V}_g(j(\mathbf{w} - \Delta\mathbf{w})) = \bar{H}(j(\mathbf{w} - \Delta\mathbf{w})) \\ \bar{V}_u(j(\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w})) &= \bar{H}(j(\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w}))\bar{V}_g(j(\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w})) = \bar{H}(j(\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w})) \end{aligned}$$

e sovrapponendo nel dominio del tempo le uscite ottenute alle frequenze  $\mathbf{w} - \Delta\mathbf{w}$  ed  $\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w}$ :

$$v_u(t) = A(\mathbf{w} - \Delta\mathbf{w})\cos[(\mathbf{w} - \Delta\mathbf{w})t + \mathbf{b}(\mathbf{w} - \Delta\mathbf{w})] + A(\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w})\cos[(\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w})t + \mathbf{b}(\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w})] \quad (\text{A.3})$$

Nel limite  $\Delta\mathbf{w} \rightarrow 0$ , possiamo scrivere:

$$A(\mathbf{w} \pm \Delta\mathbf{w}) = A(\mathbf{w}) \pm \left. \frac{dA}{d\mathbf{w}} \right|_{\mathbf{w}} \Delta\mathbf{w} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{w} \pm \Delta\mathbf{w}) = \mathbf{b}(\mathbf{w}) \pm \left. \frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{w}} \right|_{\mathbf{w}} \Delta\mathbf{w} \quad (\text{A.5})$$

Sostituendo le (A.4)-(A.5) nella (A.1) si ha:

$$\begin{aligned} v_u(t) &= A(\mathbf{w}) \left\{ \cos \left[ \mathbf{w}t + \mathbf{b}(\mathbf{w}) - \Delta\mathbf{w} \left( t + \left. \frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{w}} \right|_{\mathbf{w}} \Delta\mathbf{w} \right) \right] + \cos \left[ \mathbf{w}t + \mathbf{b}(\mathbf{w}) + \Delta\mathbf{w} \left( t + \left. \frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{w}} \right|_{\mathbf{w}} \Delta\mathbf{w} \right) \right] \right\} + \\ &\quad \left. \left. \frac{dA}{d\mathbf{w}} \right|_{\mathbf{w}} \Delta\mathbf{w} \left\{ -\cos \left[ \mathbf{w}t + \mathbf{b}(\mathbf{w}) - \Delta\mathbf{w} \left( t + \left. \frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{w}} \right|_{\mathbf{w}} \Delta\mathbf{w} \right) \right] + \cos \left[ \mathbf{w}t + \mathbf{b}(\mathbf{w}) + \Delta\mathbf{w} \left( t + \left. \frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{w}} \right|_{\mathbf{w}} \Delta\mathbf{w} \right) \right] \right\} = \right. \\ &\quad \left. 2A(\mathbf{w}) \cos \left[ \Delta\mathbf{w} \left( t + \left. \frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{w}} \right|_{\mathbf{w}} \Delta\mathbf{w} \right) \right] \cos[\mathbf{w}t + \mathbf{b}(\mathbf{w})] - 2 \left. \frac{dA}{d\mathbf{w}} \right|_{\mathbf{w}} \Delta\mathbf{w} \sin \left[ \Delta\mathbf{w} \left( t + \left. \frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{w}} \right|_{\mathbf{w}} \Delta\mathbf{w} \right) \right] \sin[\mathbf{w}t + \mathbf{b}(\mathbf{w})] \right. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Trascurando il secondo termine nel limite  $\Delta\mathbf{w} \rightarrow 0$  si ha infine:

$$v_u(t) = 2A(\mathbf{w}) \cos \left[ \Delta\mathbf{w} \left( t + \left. \frac{d\mathbf{b}}{d\mathbf{w}} \right|_{\mathbf{w}} \Delta\mathbf{w} \right) \right] \cos[\mathbf{w}t + \mathbf{b}(\mathbf{w})] \quad (\text{A.7})$$

Vediamo, anche con riferimento alla Fig. A.1, che il segnale in uscita raggiunge il suo valore massimo per  $t_{DG} = -\frac{db}{dw}|_w$ , mentre il massimo del segnale sinusoidale si ottiene per  $t_{DF} = -\frac{b}{w}$ . Il tempo  $t_{DG}$  definisce il cosiddetto ritardo di gruppo, mentre il tempo  $t_{DF}$  corrisponde al ritardo di fase. E' il ritardo di gruppo la grandezza che consente di valutare il tempo di transito del segnale attraverso la rete due porte.

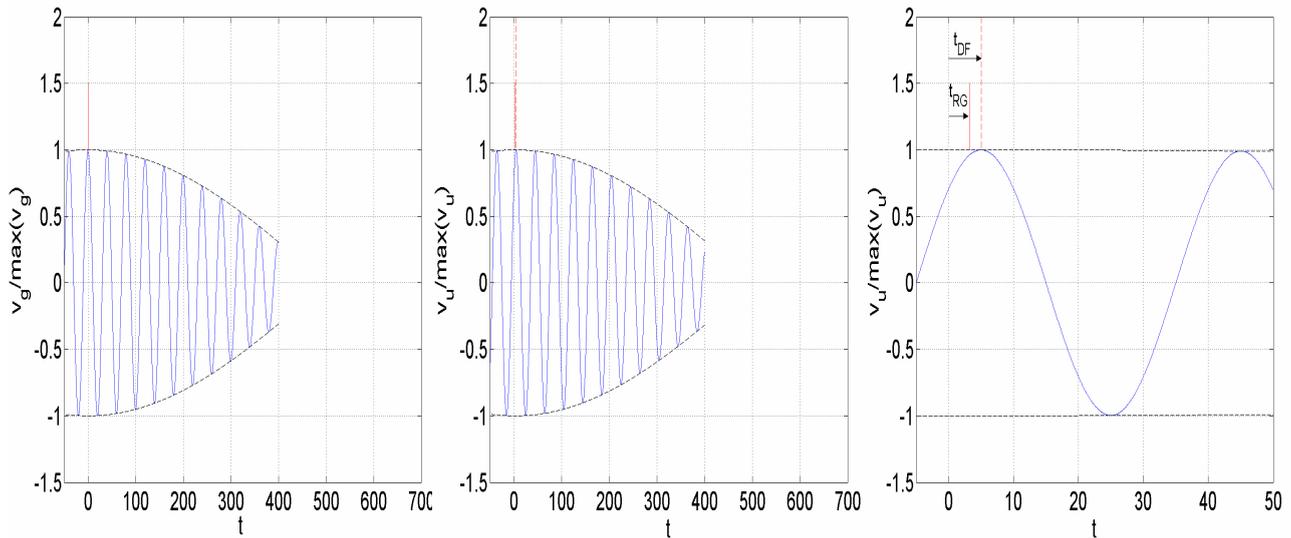


Fig. A.1 – Andamenti delle tensioni in ingresso ed in uscita ad un doppio bipolo e valutazione del ritardo di fase e di gruppo.