

Appunti di Trasmissione Numerica I

Parte III - Prestazioni delle Modulazioni senza Memoria su Canale AWGN

Stefano Buzzi, Maurizio di Bisceglie¹

Giugno 2004

¹Stefano Buzzi è docente di ruolo presso l'Università degli Studi di Cassino, Dipartimento di Automazione, Elettromagnetismo, Matematica Industriale e Ingegneria dell'Informazione (DAEIMI), Via G. Di Biasio, 43, I-03043 Cassino (FR), Italia. E-mail: buzzi@unicas.it. Maurizio di Bisceglie è docente di ruolo presso l'Università degli Studi del Sannio, Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione, Benevento, Italia. E-mail: dibisceglie@unisannio.it

Dopo aver analizzato, nei precedenti capitoli, la struttura del modulatore e del demodulatore, e aver introdotto alcuni esempi di schemi di modulazione numerica, questo capitolo è dedicato all'analisi delle prestazioni di alcune modulazioni notevoli. In verità, già nei precedenti capitoli le varie modulazioni numeriche sono state classificate sulla base della loro efficienza spettrale. In questo capitolo, invece, l'attenzione è principalmente incentrata sulla valutazione della probabilità di errore, ovvero della probabilità che il ricevitore decida erroneamente sul simbolo inviato dal modulatore sul canale. In particolare, vedremo che la probabilità di errore dipende da diversi fattori, tra cui quello più rilevante è il contrasto di energia per bit $\mathcal{E}_b/\mathcal{N}_0$. L'analisi che condurremo ci porterà a scoprire che le modulazioni cosiddette efficienti in banda sono caratterizzate da un'inefficienza in potenza, nel senso che esse richiedono, per un prefissato livello di prestazioni, valori di contrasti di energia in ricezione sempre maggiori all'aumentare della cardinalità della modulazione M . Prima di passare all'analisi delle prestazioni per le modulazioni numeriche, introduciamo la funzione di errore complementare, che riveste un ruolo chiave nell'analisi dei sistemi di comunicazione operanti in presenza di rumore additivo Gaussiano.

1 Funzione di errore complementare e variabili aleatorie Gaussiane

Si definisce funzione di errore complementare la seguente funzione

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt . \quad (1)$$

Tale funzione, diagrammata in figura 1, è rapidamente decrescente e definita su tutto l'asse reale. Essa è inoltre utile per esprimere l'area sottesa dalla coda di una densità di probabilità Gaussiana, come illustrato nel seguito.

Sia infatti $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ una variabile aleatoria Gaussiana standard, ovvero una Gaussiana a media nulla e varianza unitaria. Siamo interessati ad esprimere la funzione di distribuzione complementare della variabile aleatoria x , ovvero, per un dato $\alpha \in \mathcal{R}$, vogliamo poter esprimere la probabilità che $X > \alpha$. Bene, indicando con $f_X(x)$ la pdf della variabile aleatoria X , si ha

$$P(X > \alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} f_X(x) dx = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx . \quad (2)$$

Introducendo il cambio di variabile $x^2/2 = t^2$, si ha

$$P(X > \alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha/\sqrt{2}}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right) . \quad (3)$$

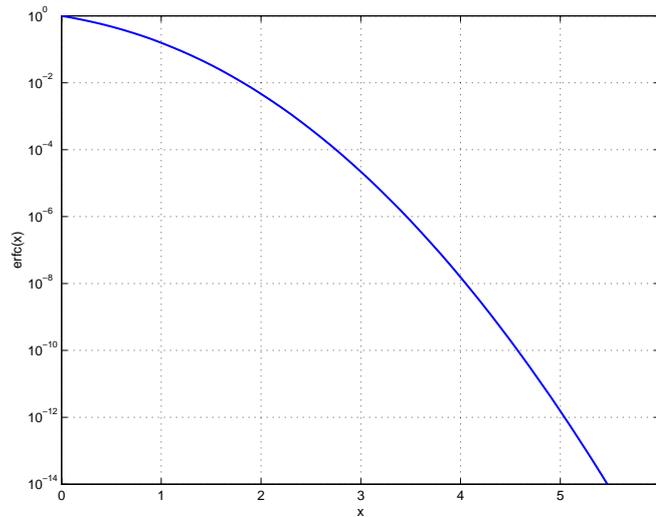


Figure 1: Diagramma della funzione di errore complementare.

In altri termini, la probabilità che una variabile aleatoria Gaussiana standard ecceda un certo valore α è esprimibile come la metà della funzione di errore complementare valutata in $\alpha/\sqrt{2}$.

Consideriamo ora il caso che $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, ovvero X è una variabile aleatoria Gaussiana a media μ e varianza σ^2 . La probabilità che X ecceda un dato valore α è ancora esprimibile tramite la funzione di errore complementare. Infatti, è

$$P(X > \alpha) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{\alpha - \mu}{\sigma}\right). \quad (4)$$

Dal momento che la variabile aleatoria $\frac{X - \mu}{\sigma}$ è una Gaussiana standard, si ha

$$P(X > \alpha) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right). \quad (5)$$

2 Prestazioni della segnalazione binaria

Nella modulazione binaria il modulatore ha a disposizione due sole forme d'onda, che assumiamo essere di durata non maggiore di T , e che indichiamo con $s_1(t)$ e $s_2(t)$. Con riferimento a tali forme d'onda, è possibile definire il coefficiente di crosscorrelazione normalizzato

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}} \int s_1(t) s_2(t) dt \quad (6)$$

In virtù della disuguaglianza di Schwartz, si dimostra che il parametro $\rho \in [-1, 1]$. In particolare, per $\rho = -1$ i due segnali $s_1(t)$ ed $s_2(t)$ sono proporzionali secondo una costante di proporzionalità negativa, e si parla di *segnalazione binaria antipodale*; in tal caso può essere $s_1(t) = -s_2(t)$, ovvero le due forme d'onda del modulatore sono uguali ed opposte (nel caso che $s_1(t)$ sia una sinusoide finestrata all'intervallo $[0, T]$, la segnalazione antipodale coincide con la segnalazione PSK binaria o BPSK). Se, invece, $\rho = 0$, allora abbiamo a che fare con una segnalazione ortogonale, in quanto il prodotto scalare tra le forme d'onda $s_1(t)$ ed $s_2(t)$ è nullo. E' utile anche definire la distanza tra le due forme d'onda utilizzate, che indichiamo con d e il cui quadrato si esprime come

$$d^2 = \int_0^T (s_1(t) - s_2(t))^2 dt = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - 2 \langle s_1(t), s_2(t) \rangle = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - 2\rho\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2} . \quad (7)$$

Si noti che per segnali equienergetici, ovvero nel caso che $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_b$, allora la distanza si esprime come

$$d^2 = 2\mathcal{E}_b(1 - \rho) . \quad (8)$$

Dopo aver definito i parametri ρ e d^2 , passiamo ora al calcolo della probabilità di errore. Anzitutto, si ricordi che per segnalazione binaria la regola di decisione ottima è

$$\text{decidi per } s_1(t) \text{ se } \int_0^T r(t)s_1(t)dt - \mathcal{E}_1/2 > \int_0^T r(t)s_2(t)dt - \mathcal{E}_2/2 . \quad (9)$$

La probabilità di errore, a norma del teorema della probabilità totale, si esprime come

$$P(e) = P(e|s_1(t))P(s_1(t)) + P(e|s_2(t))P(s_2(t)) = \frac{1}{2} (P(e|s_1(t)) + P(e|s_2(t))) , \quad (10)$$

ove si è sfruttato il fatto che i segnali $s_1(t)$ ed $s_2(t)$ sono equiprobabili. A questo punto, cominciamo a calcolare la probabilità di errore condizionata alla trasmissione della forma d'onda $s_1(t)$. Supponendo quindi che sia stato trasmesso il segnale $s_1(t)$, il segnale ricevuto è $r(t) = s_1(t) + n(t)$. Sostituendo tale espressione nella regola di decisione (9) si ha che il ricevitore decide correttamente per $s_1(t)$ se accade che

$$\int_0^T (s_1(t) + n(t))s_1(t)dt - \mathcal{E}_1/2 > \int_0^T (s_1(t) + n(t))s_2(t)dt - \mathcal{E}_2/2 , \quad (11)$$

ovvero

$$\mathcal{E}_1 + \int_0^T n(t)s_1(t)dt - \mathcal{E}_1/2 > \rho\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2} + \int_0^T n(t)s_2(t)dt - \mathcal{E}_2/2 \quad \implies \quad (12)$$

$$\underbrace{\int_0^T n(t)(s_1(t) - s_2(t))dt}_z > -\mathcal{E}_1/2 - \mathcal{E}_2/2 + \rho\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}. \quad (13)$$

Ora, lo scalare z è una variabile aleatoria Gaussiana, in quanto elaborazione lineare del rumore gaussiano $n(t)$, ed a media nulla. La varianza di z si esprime come

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= E\{z^2\} = E\left\{\int_0^T n(t)(s_1(t) - s_2(t))dt \int_0^T n(\lambda)(s_1(\lambda) - s_2(\lambda))d\lambda\right\} = \\ &= \int_0^T \int_0^T E\{n(t)n(\lambda)\} (s_1(t) - s_2(t))(s_1(\lambda) - s_2(\lambda))dtd\lambda = \\ &= \frac{\mathcal{N}_0}{2} \int_0^T (s_1(t) - s_2(t))^2 dt = \frac{\mathcal{N}_0}{2} d^2, \end{aligned} \quad (14)$$

ove si è sfruttato il fatto che $E\{n(t)n(\lambda)\} = \frac{\mathcal{N}_0}{2}\delta(t - \lambda)$. Si noti inoltre che il secondo membro della (13) è pari a $-d^2/2$. Di conseguenza, possiamo dire che il ricevitore decide correttamente per il segnale $s_1(t)$ se vale la relazione

$$z > -d^2/2. \quad (15)$$

Ma allora, la probabilità di errore condizionata alla trasmissione del segnale $s_1(t)$ è data da

$$P(e|s_1(t)) = P(z < -d^2/2). \quad (16)$$

Ricordando che la pdf di z è pari, la probabilità che $z > -d^2/2$ coincide con la probabilità che $z > d^2/2$, per cui, ricordando che $z \sim \mathcal{N}(0, \mathcal{N}_0 d^2/2)$, si ha infine

$$P(e|s_1(t)) = P(z > d^2/2) = P\left(\frac{z}{\sqrt{\mathcal{N}_0 d^2/2}} > \frac{d^2/2}{\sqrt{\mathcal{N}_0 d^2/2}}\right) = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{\mathcal{N}_0}}\right). \quad (17)$$

E' facile rendersi conto che la probabilità di errore condizionata alla trasmissione del segnale $s_2(t)$ coincide con la (17), per cui la (17) coincide con la probabilità di errore incondizionata, ovvero si ha

$$P(e) = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{\mathcal{N}_0}}\right). \quad (18)$$

Per segnali equienergetici, tale relazione si particolarizza nel modo seguente

$$P(e) = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{2\mathcal{N}_0}(1 - \rho)}\right). \quad (19)$$

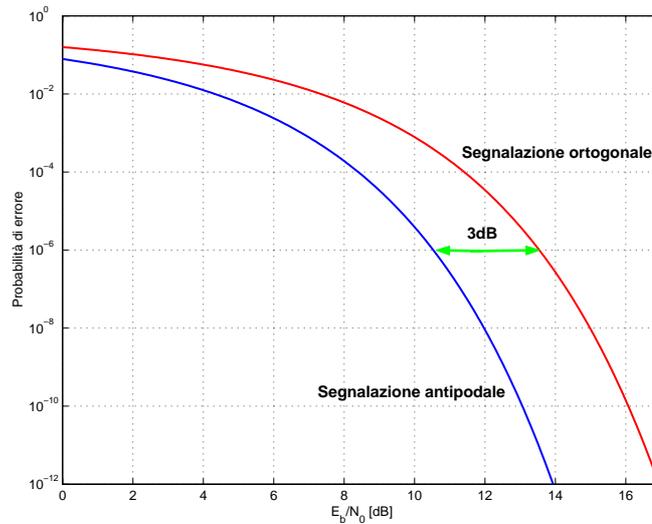


Figure 2: Diagramma della probabilità di errore delle segnalazioni binarie ortogonale e antipodale.

Essendo la funzione di errore complementare rapidamente decrescente, ne consegue che le prestazioni migliori si hanno per $\rho = 1$, ovvero per segnalazione antipodale, per la quale è

$$P(e) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{\mathcal{N}_0}} \right) . \quad (20)$$

Per una segnalazione ortogonale ($\rho = 0$) è invece

$$P(e) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{2\mathcal{N}_0}} \right) . \quad (21)$$

Confrontando la (20) e la (21) ci si accorge che per conseguire la stessa probabilità di errore nel caso di segnalazione ortogonale bisogna spendere una energia doppia rispetto al caso di segnalazione antipodale. In figura 2 sono riportati i grafici delle probabilità di errore di entrambe le segnalazioni in funzione del contrasto di energia per bit $\mathcal{E}_b/\mathcal{N}_0$.

3 Il bound dell'unione

Il bound dell'unione (o, in inglese, *union bound*), è una tecnica che permette di ottenere in maniera semplice un limite superiore alla probabilità di errore per una modulazione numerica operante su canale AWGN. Infatti, non sempre è possibile ottenere un'espressione matematica esatta della probabilità di

errore, e, inoltre, anche quando tale espressione matematica esiste (come ad esempio nel caso di segnalazione M -aria ortogonale, di cui parleremo nel seguito), può esser comodo avere a disposizione un bound semplificato che permetta di condurre in maniera agevole l'analisi delle prestazioni.

Consideriamo quindi una modulazione numerica M -aria operante su canale AWGN, e, al solito, sia $\mathcal{S} = \{s_1(t), \dots, s_M(t)\}$ il set di segnali utilizzato dal modulatore, ed $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_M$ gli M vettori L -dimensionali rappresentativi di tali segnali. Sappiamo bene che la probabilità di errore, a norma del teorema della probabilità totale, si esprime come

$$P(e) = \sum_{i=1}^M P(e|\mathbf{s}_i)P(\mathbf{s}_i) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M P(e|\mathbf{s}_i), \quad (22)$$

ove $P(e|\mathbf{s}_i)$ è la probabilità di errore nel caso in cui sia stato trasmesso il segnale $s_i(t)$. Definiamo ora l'evento $\{\mathbf{s}_i \rightarrow \mathbf{s}_j\}$, ovvero l'evento che si verifica quando, a valle della trasmissione del segnale $s_i(t)$, il ricevitore decide (erroneamente) per $s_j(t)$. Dal momento che, se si trasmette $s_i(t)$ e si verifica un errore, il ricevitore decide per una forma d'onda diversa da $s_i(t)$, allora l'evento errore condizionato alla trasmissione del segnale $s_i(t)$ coincide con l'unione, su $j \neq i$, degli eventi $\{\mathbf{s}_i \rightarrow \mathbf{s}_j\}$, ovvero si ha

$$P(e|\mathbf{s}_i(t)) = P \left(\bigcup_{\substack{j=1, \dots, M \\ j \neq i}} \{\mathbf{s}_i \rightarrow \mathbf{s}_j\} \right) \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M P(\{\mathbf{s}_i \rightarrow \mathbf{s}_j\}), \quad (23)$$

ove si è tenuto conto del fatto che la probabilità di un'unione di eventi è maggiorata dalla somma delle probabilità dei singoli eventi. Ora, la probabilità dell'evento $\{\mathbf{s}_i \rightarrow \mathbf{s}_j\}$, come si evince anche dalla figura 3 che fa riferimento ad una costellazione PSK, coincide con la probabilità che, a valle della trasmissione di $s_i(t)$, il vettore ricevuto appartenga alla regione di decisione di s_j . D'altro canto, tale probabilità è sicuramente maggiorata dalla probabilità che il vettore ricevuto appartenga alla regione \mathcal{P} riportata in figura 4, che include la regione di decisione associata a $s_j(t)$; ma, la probabilità che il vettore ricevuto appartenga al semipiano \mathcal{P} nel caso in cui sia stato trasmesso $s_i(t)$ non è altro che la probabilità di errore corrispondente ad una segnalazione binaria che utilizzi le forme d'onda $s_i(t)$ e $s_j(t)$. Indicando quindi col simbolo $d_{i,j}$ la distanza tra le forme d'onda $s_i(t)$ e $s_j(t)$ si ha

$$P(\{\mathbf{s}_i \rightarrow \mathbf{s}_j\}) \leq \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{i,j}}{2\sqrt{N_0}} \right), \quad (24)$$

per cui, è:

$$P(e|s_i(t)) \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{i,j}}{2\sqrt{\mathcal{N}_0}} \right) < \frac{M-1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{\min}(i)}{2\sqrt{\mathcal{N}_0}} \right), \quad (25)$$

ove $d_{\min}(i) = \min_{j \neq i} d_{i,j}$ e nell'ultima disuguaglianza si è sfruttato il fatto che la funzione di errore complementare è decrescente. Sostituendo la (25) nella (22), e definendo la distanza minima della costellazione $d_{\min} = \min_i d_{\min}(i)$, si ottiene infine

$$P(e) \leq \frac{M-1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{\min}}{2\sqrt{\mathcal{N}_0}} \right). \quad (26)$$

La relazione (26) rappresenta il cosiddetto *union-bound*, e costituisce una maggiorazione alla probabilità di errore di una segnalazione numerica M -aria la cui costellazione di segnali abbia distanza minima d_{\min} . Tale bound è estremamente utile in quanto può essere calcolato in maniera semplice, dal momento che gli unici parametri da cui esso dipende sono M e la distanza minima. Dato quindi un qualsiasi set di segnali \mathcal{S} , si può facilmente calcolare un limite superiore alla probabilità di errore che tale set di segnali permette di ottenere. Infine, è opportuno notare che l'espressione (26) conferma che la distanza minima di una costellazione è un parametro fondamentale che influenza in maniera netta le prestazioni. Quanto maggiore è la distanza minima di una costellazione, più bassa è la probabilità di errore che tale costellazione può conseguire. Laddove quindi il calcolo della probabilità di errore può risultare troppo complicato, gli schemi di modulazione numerica possono essere confrontati con buona approssimazione sulla base della loro distanza minima.

4 La segnalazione M -ASK

Consideriamo ora la segnalazione ASK a M livelli. In tale segnalazione, si ricorda, è

$$s_i(t) = A_i \psi(t), \quad (27)$$

ove $A_i \in \mathcal{R}$ e $\psi(t)$ è una funzione a norma unitaria nulla al di fuori dell'intervallo $[0, T]$. Assumeremo che le ampiezze A_i siano simmetricamente disposte intorno all'origine, e che valga la relazione $A_i - A_{i-1} = d, \forall i = 2, \dots, M$. Altrimenti detto, $M/2$ ampiezze sono negative, ed $M/2$ ampiezze sono positive, ed, inoltre, è

$$A_i = d \left(i - \frac{M+1}{2} \right).$$

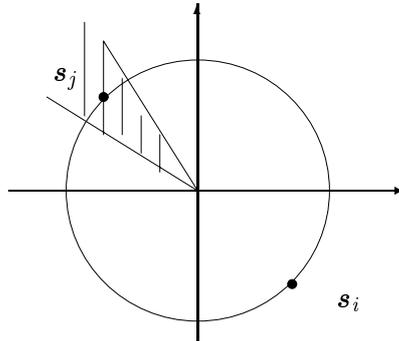


Figure 3: Regione di decisione associata al segnale $s_j(t)$.

Il ricevitore ottimo, una volta osservato il segnale ricevuto $r(t)$, considera la proiezione $r = \langle r(t), \psi(t) \rangle$ sul versore rappresentativo della costellazione e, poi, deciderà per il segnale trasmesso che è a minima distanza da r . Supposto che il modulatore abbia inviato una forma d'onda $s_i(t)$ che non sia nè $s_1(t)$ nè $s_M(t)$, il ricevitore prenderà una decisione corretta nel caso in cui

$$|r - A_i| < d/2 . \quad (28)$$

Infatti, se vale tale relazione, la proiezione r si troverà più vicino all'ampiezza A_i che a tutte le altre ampiezze. Supponendo quindi che sia stato trasmesso il segnale $s_i(t)$, ovvero che $r(t) = s_i(t) + n(t)$, è $r = A_i + n$, ove il contributo del rumore è una variabile aleatoria Gaussiana a media nulla e varianza $\mathcal{N}_0/2$. Di conseguenza, la condizione (28) si riscrive come

$$|n| < d/2 , \quad (29)$$

e la probabilità di errore condizionata alla trasmissione del segnale $s_i(t)$, con $i \neq 1$, M è pari a

$$P(e|s_i(t)) = P(|n| > d/2) = 2P(n > d/2) = 2P\left(\frac{n}{\sqrt{\mathcal{N}_0/2}} > \frac{d/2}{\sqrt{\mathcal{N}_0/2}}\right) = \text{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{\mathcal{N}_0}}\right) . \quad (30)$$

Consideriamo ora il caso in cui sia stato trasmesso il segnale $s_1(t)$. Dal momento che la regione di decisione associata a tale segnale è l'intervallo $]-\infty, A_1 + d/2]$, ne consegue che il ricevitore deciderà in maniera corretta se

$$r < A_1 + d/2 ,$$

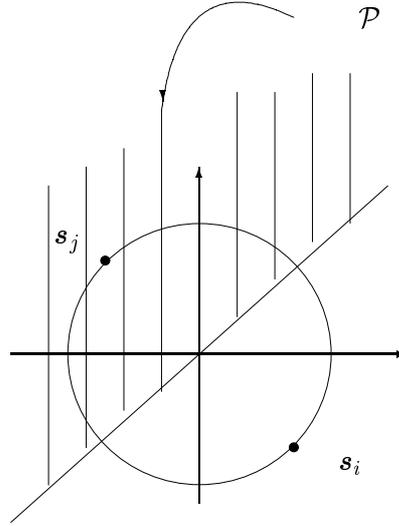


Figure 4: Regione di decisione associata ad una segnalazione binaria che utilizzi le forme d'onda $s_i(t)$ e $s_j(t)$.

ovvero, ricordando che $r = A_1 + n$ la condizione di corretta decisione è che sia

$$n < d/2 .$$

La probabilità di errore condizionata alla trasmissione del simbolo $s_1(t)$ si esprime quindi come

$$P(e|s_1(t)) = P(n > d/2) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d}{2\sqrt{\mathcal{N}_0}} \right) \quad (31)$$

Un ragionamento analogo porta a concludere che la probabilità di errore condizionata alla trasmissione del segnale $s_M(t)$ coincide con la (31). Ai segnali esterni della costellazione $s_1(t)$ ed $s_M(t)$ è associata quindi una probabilità di errore minore rispetto a quella associata ai segnali interni alla costellazione, in quanto, per i segnali esterni, la regione di decisione è più estesa. Per il teorema della probabilità totale, la probabilità di errore incondizionata si esprime come

$$P(e) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M P(e|s_i(t)) = \frac{2}{M} P(e|s_1(t)) + \frac{M-2}{M} P(e|s_i(t)) , \quad i \neq 1, M , \quad (32)$$

ovvero

$$P(e) = \frac{M-1}{M} \operatorname{erfc} \left(\frac{d}{2\sqrt{\mathcal{N}_0}} \right) . \quad (33)$$

La relazione (33) conferma ancora una volta che la distanza tra i segnali utilizzati è un parametro fondamentale che influenza la probabilità di errore. Ora, al fine di poter confrontare la modulazione ASK con altri tipi di modulazione, è di interesse esprimere la (33) in funzione del contrasto di energia per bit. E' necessario quindi individuare una relazione funzionale che permetta di esprimere la distanza d in funzione dell'energia mediamente spesa per ogni bit trasmesso \mathcal{E}_b . Cominciamo quindi col definire l'energia media della costellazione dei segnali ASK:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M A_i^2. \quad (34)$$

Ora, essendo $A_i = A_1 + (i - 1)d$, si ha

$$\mathcal{E} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [A_1^2 + (i - 1)^2 d^2 + 2A_1 d(i - 1)] = A_1^2 + \frac{d^2}{M} \underbrace{\sum_{i=1}^M (i - 1)^2}_{M(M-1)(2M-1)/6} + \frac{2A_1 d}{M} \underbrace{\sum_{i=1}^M (i - 1)}_{M(M-1)/2}, \quad (35)$$

Si noti inoltre che, per la condizione di simmetria delle ampiezze A_i intorno all'origine è $A_M = A_1 + (M - 1)d = -A_1$, e quindi vale la relazione

$$d = \frac{-2A_1}{M - 1}, \quad (36)$$

per cui la (35) si riscrive come

$$\mathcal{E} = \frac{A_1^2}{3} \frac{M + 1}{M - 1} \implies A_1 = -\sqrt{3\mathcal{E} \frac{M - 1}{M + 1}}, \quad (37)$$

e, sostituendo l'ultima relazione nella (36) si riesce infine ad esprimere la distanza d in funzione dell'energia media della costellazione ASK:

$$d = 2\sqrt{\frac{3\mathcal{E}}{M^2 - 1}} = 2\sqrt{\frac{3\mathcal{E}_b \log_2 M}{M^2 - 1}}, \quad (38)$$

per cui la probabilità di errore per simbolo della segnalazione M -ASK è data da

$$P(e)_{M-ASK} = \frac{M - 1}{M} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M}{M^2 - 1} \frac{\mathcal{E}_b}{\mathcal{N}_0}} \right) \quad (39)$$

Nella figura 4 è riportato il diagramma della probabilità di errore per simbolo della segnalazione ASK per $M = 4, 8, 16, 32$. Si nota che, all'aumentare della cardinalità della modulazione M le prestazioni

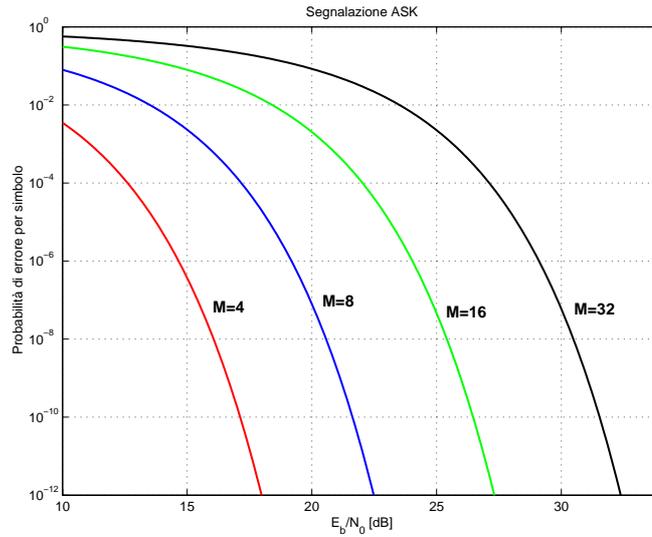


Figure 5: Diagramma della probabilità di errore per simbolo della segnalazione ASK in funzione del contrasto di energia e per vari valori di M .

vanno progressivamente peggiorando, ed infatti, se si vuole conseguire la stessa probabilità di errore con vari valori di M bisogna progressivamente aumentare il contrasto di energia per bit. Ne deriva quindi che la segnalazione ASK non è efficiente in potenza, e, naturalmente, c'era da aspettarsi un comportamento del genere perché la segnalazione ASK è efficiente in banda, in quanto la sua efficienza spettrale $R_b/W = \log_2 M$ aumenta al crescere della cardinalità della modulazione. Si osservi che l'inefficienza in potenza può essere intuita anche dall'osservazione diretta della (39). Infatti, tralasciando il fattore moltiplicativo $(M - 1)/M$ che al crescere di M si stabilizza intorno al suo valore asintotico (pari a 1), affinché all'aumentare di M la probabilità di errore resti costante c'è bisogno che l'argomento

$$\sqrt{\frac{3 \log_2 M}{M^2 - 1} \frac{\mathcal{E}_b}{\mathcal{N}_0}} \quad (40)$$

della funzione di errore complementare sia indipendente dal valore di M . Dal momento che il termine $\log_2 M / (M^2 - 1)$ tende a zero all'aumentare di M , affinché l'argomento della funzione di errore complementare resti costante bisogna far divergere il contrasto di energia $\mathcal{E}_b/\mathcal{N}_0$. La segnalazione ASK quindi è utilizzabile in quelle applicazioni in cui il sistema di trasmissione è limitato in banda e non in potenza. Tale modulazione, infatti, ha la capacità di trasmettere ad elevate velocità in piccole bande di frequenza, purché però il trasmettitore non sia limitato in potenza.

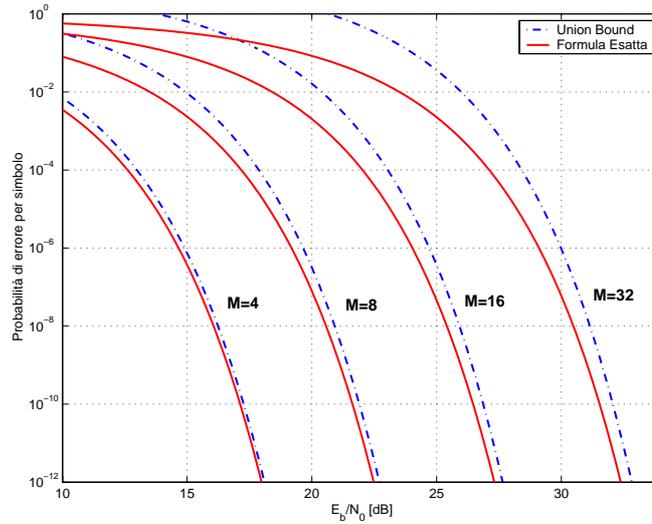


Figure 6: Diagramma della probabilità di errore (Formula esatta e formula approssimata tramite il bound dell'unione) per simbolo della segnalazione ASK in funzione del contrasto di energia e per vari valori di M .

4.1 Calcolo approssimato delle prestazioni tramite l'unione-bound

La formula (39) ci fornisce la formula esatta della probabilità di errore per la segnalazione ASK. Un'espressione approssimata di tale probabilità si può tuttavia ottenere ricorrendo al bound dell'unione (26). E' immediato verificare che per una segnalazione ASK la distanza minima è pari alla distanza tra due segnali adiacenti ed è quindi pari a d , ossia

$$d_{\min} = d = 2\sqrt{\frac{3\mathcal{E}_b \log_2 M}{M^2 - 1}}, \quad (41)$$

sostituendo tale relazione nella (26) si ottiene quindi

$$P(e)_{M\text{-ASK}} \leq \frac{M-1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M}{M^2 - 1} \frac{\mathcal{E}_b}{\mathcal{N}_0}} \right). \quad (42)$$

Dal confronto della (42) e della (39) si vede che l'argomento della funzione di errore complementare è lo stesso in entrambe le espressioni, per cui la differenza risiede solo nella costante moltiplicativa. E' importante osservare l'utilità del bound dell'unione, in quanto con un semplice passaggio si è potuti arrivare ad un'espressione, seppur approssimata, della probabilità di errore. Nella figura 6 sono riportate, per vari valori di M , le espressioni (39) e (42) in funzione del contrasto di energia $\mathcal{E}_b/\mathcal{N}_0$. La figura

dimostra come il bound dell'unione fornisca una buona approssimazione della probabilità di errore, specialmente nella zona di interesse di basse probabilità di errore.

4.2 Probabilità di errore per bit e codifica di Gray

La relazione (39) fornisce un'espressione in forma chiusa per la probabilità di errore *per simbolo* della modulazione ASK. In altri termini, la (39) esprime la probabilità che il demodulatore decida per un simbolo diverso da quello inviato sul canale dal modulatore. D'altra parte, è noto che ad ogni simbolo M -ario sono in realtà associati $k = \log_2 M$ simboli binari. Infatti, in trasmissione il modulatore associa a ogni k -upla di bit una tra le M forme d'onda a sua disposizione, mentre poi, in ricezione, il demodulatore, usando la stessa tabella del demodulatore, effettua la trasformazione inversa associando alla forma d'onda demodulata una k -upla di bit. Considerato quindi un simbolo binario di tale k -upla, ci chiediamo con che probabilità tale simbolo è diverso da quello presente in trasmissione. In altre parole, siamo interessati a capire in che modo la probabilità di errore per simbolo $P(e)$ influenzi la probabilità di errore per bit, che denotiamo con $P_b(e)$. Anzitutto, è evidente che, se $M = 2$, allora le due probabilità di errore sono coincidenti. Inoltre è anche ovvio che, qualsiasi sia M , se $P(e) = 0$ allora anche $P_b(e) = 0$. Nel caso generale, invece, possiamo ricavare solo dei limiti alla probabilità di errore per bit. Infatti, nel caso si sia verificato un errore su un simbolo M -ario, il numero di errori su simboli binari che tale errore può causare è compreso tra 1 e k . Nel primo caso, la stringa di bit associata al simbolo trasmesso e la stringa di bit associata al simbolo decodificato differiscono solo in una posizione; nel secondo caso, invece, le due stringhe differiscono in tutte le k posizioni. Sulla base di tale ragionamento, la probabilità di errore per bit $P_b(e)$ è compresa nei seguenti limiti

$$\frac{P(e)}{\log_2 M} \leq P_b(e) \leq P(e) . \quad (43)$$

Il limite inferiore corrisponde alla situazione ideale che ad ogni errore su un simbolo M -ario corrisponda un solo errore sulla stringa dei k bit decodificati, mentre il limite superiore corrisponde al *worst case* che ad ogni errore su un simbolo M -ario corrispondano k errori sulla stringa dei bit decodificati.

Sotto opportune condizioni, è inoltre possibile fare in modo che la probabilità di errore per bit raggiunga il suo valore minimo $P(e)/\log_2 M$. Infatti, in condizioni di elevato rapporto segnale-rumore, è ragionevole presupporre che, in presenza di un errore su un simbolo, è molto probabile che il ricevitore

decida per uno dei simboli adiacenti, in quanto è improbabile che il rumore abbia delle realizzazioni tali da far sì che il segnale ricevuto possa giacere in una regione di decisione lontana da quella associata al simbolo effettivamente trasmesso. Ma allora, se si associano a simboli adiacenti configurazioni di bit che differiscono in una sola posizione, è possibile far sì che in condizioni di elevato rapporto segnale-rumore ad ogni errore sul simbolo M -ario corrisponda un solo errore nella stringa dei k bit decodificata e quindi si consegue la relazione

$$P_b(e) \approx \frac{P(e)}{\log_2 M}. \quad (44)$$

L'assegnazione a simboli adiacenti di stringhe di bit che differiscano in una sola posizione va sotto il nome di *codifica di Gray*. Nel seguito si riporta la codifica di Gray per il caso $M = 8$:

$$\begin{aligned} A_1 &\longrightarrow 000 \\ A_2 &\longrightarrow 001 \\ A_3 &\longrightarrow 101 \\ A_4 &\longrightarrow 100 \\ A_5 &\longrightarrow 110 \\ A_6 &\longrightarrow 111 \\ A_7 &\longrightarrow 011 \\ A_8 &\longrightarrow 010 \end{aligned} \quad (45)$$

5 La segnalazione M -PSK

Consideriamo ora la segnalazione PSK M -aria. Ricordiamo che per tale segnalazione, definito un insieme di M fasi $\{\phi_1, \dots, \phi_M\}$, il generico segnale $s_i(t)$ si esprime come

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{T}} \cos(2\pi f_0 t + \phi_i) \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right), \quad i = 1, \dots, M, \quad (46)$$

ed il vettore s_i ha due componenti (ovvero è $L = 2$) pari a $(\sqrt{\mathcal{E}} \cos \phi_i, \sqrt{\mathcal{E}} \sin \phi_i)$, mentre i versori di base sono due portanti in quadratura finestrate all'intervallo $[0, T]$, ossia

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_0 t), \quad \psi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_0 t), \quad t \in [0, T]. \quad (47)$$

Il calcolo delle prestazioni per tale segnalazione richiede di trattare separatamente il caso che sia $M = 4$ ed il caso $M > 4$. Si noti che il caso $M = 2$ non è preso in considerazione perché si è già discusso della

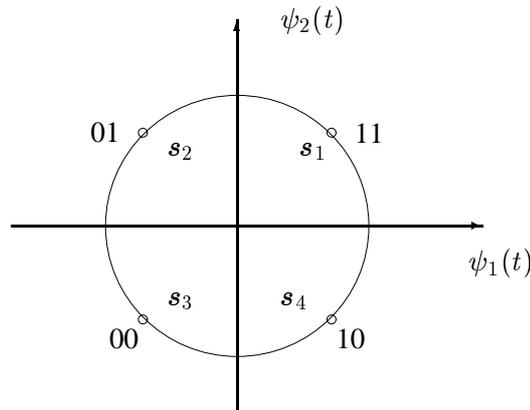


Figure 7: Rappresentazione della costellazione QPSK.

segnalazione binaria.

5.1 La segnalazione 4-PSK (QPSK)

Nella figura 7 è riportata la costellazione dei segnali 4-PSK o QPSK. Inoltre, sono rappresentate in figura le coppie di bit associate a ciascun segnale della costellazione. Osservando la figura, è immediato rendersi conto che il primo bit di tale coppie definisce l'ascissa del punto rappresentativo del segnale, mentre il secondo bit ne definisce solo l'ordinata. Ad esempio, al segnale $s_2(t)$ è associata la coppia di bit 01, in quanto il punto rappresentativo di s_2 ha ascissa negativa e ordinata positiva. Ora, si ricordi che, per segnali PSK, si ha

$$s_i(t) = \left[\sqrt{\mathcal{E}} \cos \phi_i \right] \psi_1(t) + \left[\sqrt{\mathcal{E}} \sin \phi_i \right] \psi_2(t) . \quad (48)$$

Bene, dal momento che il primo e il secondo bit della coppia di bit associata a $s_i(t)$ influenzano separatamente l'ascissa e l'ordinata del punto s_i , possiamo dire che il segno di $\sqrt{\mathcal{E}} \cos \phi_i$ dipenderà solo dal primo bit, mentre il segno di $\sqrt{\mathcal{E}} \sin \phi_i$ dipenderà solo dal secondo bit. Ne consegue, quindi, che il segnale $s_i(t)$ può essere riguardato come la somma di due segnali binari antipodali che usano come impulsi base i vettori $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$. Dal momento che $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$ rappresentano due portanti in quadratura, un modulatore QPSK può essere ottenuto utilizzando due modulatori BPSK che operano su portanti in quadratura, così come rappresentato in figura 8. Conclusioni analoghe possono trarsi con riferimento

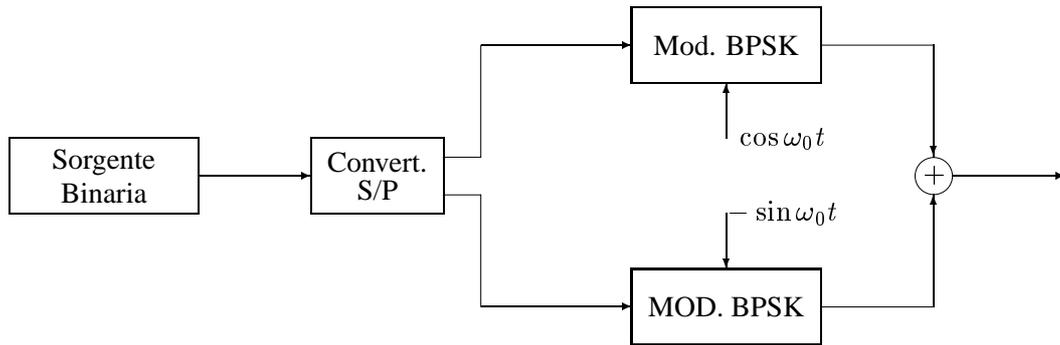


Figure 8: Schema di principio di un modulatore QPSK.

al demodulatore. Infatti, dalla figura 7 si vede che le regioni di decisione sono costituite dai quattro quadranti, ragion per cui il ricevitore ottimo determina a quale regione di decisione appartiene il vettore ricevuto \mathbf{r} sulla base del segno delle sue due componenti. Altrimenti detto, il segno di r_1 determinerà l'ascissa del punto della costellazione associato al segnale demodulato, mentre il segno di r_2 determinerà l'ordinata del punto della costellazione associato al segnale demodulato. Quindi, il segno di r_1 e di r_2 permettono di prendere una decisione separatamente sul primo e sul secondo bit associati al segnale demodulato, ragion per cui il demodulatore, a valle della proiezione del segnale ricevuto sui versori di base, è costituito da due blocchi di decisione indipendenti, che prendono decisioni separate sul primo e sul secondo bit trasmessi (vedi figura 9). Altrimenti detto, il demodulatore per il caso di segnalazione QPSK può essere costruito combinando insieme due demodulatori BPSK. Al fine di calcolare la probabilità di errore della segnalazione QPSK, assumiamo che sia stato trasmesso il segnale $s_1(t)$. Infatti, data la simmetria della costellazione dei segnali, la probabilità di errore condizionata alla trasmissione di qualsiasi segnale coincide con la probabilità di errore incondizionata. Posto, al solito

$$r_1 = \langle r(t), \psi_1(t) \rangle, \quad r_2 = \langle r(t), \psi_2(t) \rangle, \quad (49)$$

nell'ipotesi che sia stato trasmesso il segnale $s_1(t)$, ovvero per $r(t) = s_1(t) + n(t)$, è

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{\mathcal{E}} \cos(\pi/4) + n_1 = \sqrt{\mathcal{E}/2} + n_1, \\ r_2 &= \sqrt{\mathcal{E}} \sin(\pi/4) + n_2 = \sqrt{\mathcal{E}/2} + n_2, \end{aligned} \quad (50)$$

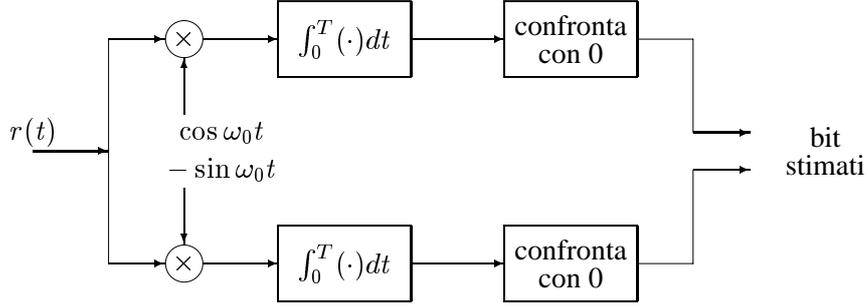


Figure 9: Schema di principio di un demodulatore QPSK.

ove n_1 ed n_2 rappresentano le proiezioni del rumore Gaussiano bianco $n(t)$ lungo i due versori $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$. E' facile dimostrare che n_1 ed n_2 sono due variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite, Gaussiane, a media nulla e con varianza $\mathcal{N}_0/2$. Ora, dato che è stato trasmesso il segnale $s_1(t)$, il demodulatore decide correttamente se gli osservabili r_1 ed r_2 sono entrambi positivi. Indicando quindi con $P(c|s_1)$ la probabilità di corretta decisione condizionata alla trasmissione di $s_1(t)$, si ha

$$P(c|s_1(t)) = P(\{r_1 > 0, r_2 > 0\}|s_1(t)) \quad (51)$$

Essendo r_1 ed r_2 condizionatamente indipendenti ed identicamente distribuiti, si ha

$$P(c|s_1(t)) = [P(\{r_1 > 0\}|s_1(t))]^2 = \left[P\left(n_1 > -\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2}}\right) \right]^2 = \left[1 - P\left(n_1 < -\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2}}\right) \right]^2 = \left[1 - P\left(n_1 > \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2}}\right) \right]^2 = \left[1 - \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2\mathcal{N}_0}}\right) \right]^2. \quad (52)$$

Ne consegue quindi che la probabilità di errore per la segnalazione QPSK si esprime come

$$P(e)_{\text{QPSK}} = 1 - \left[1 - \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2\mathcal{N}_0}}\right) \right]^2 = 1 - \left[1 - \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{\mathcal{N}_0}}\right) \right]^2, \quad (53)$$

ove si è tenuto conto del fatto che per una modulazione a cardinalità 4 è $\mathcal{E} = 2\mathcal{E}_b$.

E' il caso di notare che alla formula (53) era possibile giungere anche seguendo un ragionamento alternativo. Infatti, dal momento che la modulazione QPSK può essere riguardata come la sovrapposizione di due modulazioni BPSK aventi portanti in quadratura, e, inoltre, le realizzazioni di rumore n_1 ed n_2 sui

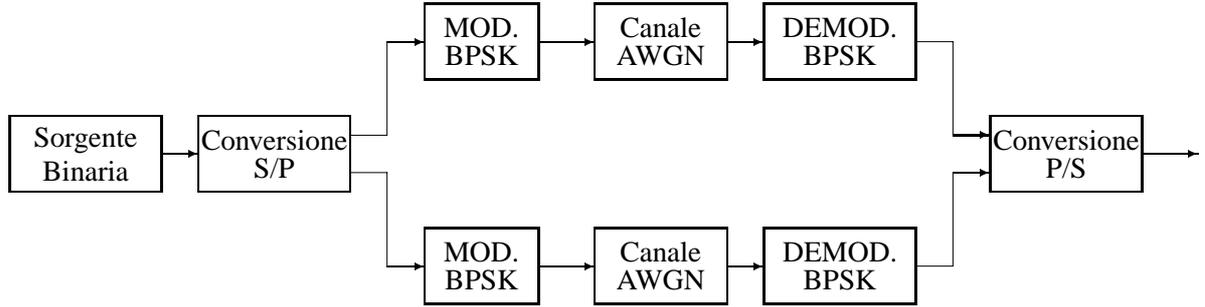


Figure 10: Schema equivalente di un sistema di trasmissione basato sulla modulazione QPSK.

due rami in quadratura sono indipendenti, è evidente che si decide correttamente sul simbolo trasmesso se e solo se i bit rivelati sui due rami in quadratura sono entrambi corretti. Ma allora, la probabilità di corretta decisione può essere espressa come il quadrato della probabilità di corretta decisione di una segnalazione BPSK, ovvero è

$$P(c)_{\text{QPSK}} = [P(c)_{\text{BPSK}}]^2 = \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{\mathcal{N}_0}} \right) \right]^2, \quad (54)$$

da cui, prendendo il complemento a uno della (54), si ottiene infine la (53). Dopo aver calcolato la probabilità di errore *per simbolo* della segnalazione QPSK occupiamoci ora del calcolo della probabilità di errore per bit. E' facile rendersi conto che tale probabilità coincide con la probabilità di errore di una segnalazione BPSK. Infatti, si consideri lo schema di figura 10, ove è esplicitamente mostrata l'equivalenza della segnalazione QPSK con una coppia di segnalazioni BPSK. Considerato un bit all'uscita del convertitore P/S, tale bit è stato inviato o attraverso il modulatore del ramo superiore o attraverso il modulatore del ramo inferiore. In entrambi i casi, la probabilità che tale bit sia errato coincide con la probabilità che il demodulatore BPSK del ramo attraverso cui il bit si è propagato abbia preso una decisione errata. Tale probabilità, ovviamente, è la stessa sia sul ramo superiore che su quello inferiore, ed è pari alla probabilità di errore della segnalazione BPSK. Si ha quindi

$$P_b(e)_{\text{QPSK}} = P_b(e)_{\text{BPSK}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{\mathcal{N}_0}} \right). \quad (55)$$

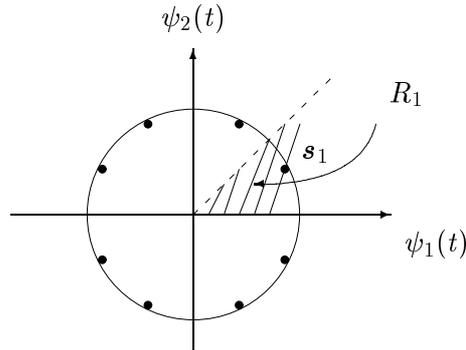


Figure 11: Costellazione di segnali PSK.

5.2 La segnalazione M -PSK nel caso $M > 4$

Assumiamo ora che sia $M > 4$. In tal caso, purtroppo, il calcolo delle prestazioni non è agevole come per la segnalazione QPSK. Si consideri ad esempio la costellazione di segnali PSK rappresentata in figura 11, ove è evidenziato il segnale s_1 e la regione di decisione R_1 associata a tale segnale. Indicando, al solito, con r_1 ed r_2 le proiezioni del segnale ricevuto $r(t)$ lungo i versori di base $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$, e assumendo che i segnali PSK siano uniformemente distribuiti lungo la circonferenza, ovvero che l'angolo di separazione tra due segnali contigui sia $2\pi/M$, allora la probabilità di corretta decisione per tale segnalazione si esprime come

$$P(c) = P(c|s_1) = P(\{(r_1, r_2) \in R_1\} | s_1) . \quad (56)$$

Indicando con θ l'angolo che la congiungente tra l'origine ed il punto di coordinate (r_1, r_2) forma col semiasse positivo delle ascisse, la probabilità di corretta decisione è

$$P(c) = P(\{\theta \in [0, 2\pi/M]\} | s_1) = \int_0^{2\pi/M} f_{\theta|s_1}(\theta|s_1) d\theta , \quad (57)$$

ove $f_{\theta|s_1}(\cdot|\cdot)$ denota la pdf dell'angolo θ nell'ipotesi che sia stato trasmesso il segnale $s_1(t)$. Dalla (57) si deduce quindi che il calcolo esatto delle prestazioni di una segnalazione MPSK richiede l'integrazione della pdf condizionale della fase del numero complesso $r_1 + jr_2$ su un settore angolare di ampiezza $2\pi/M$. Dal momento che tale strada risulta non del tutto agevole, ricorreremo ad una tecnica di *bounding*, basata su un raffinamento del bound dell'unione, al fine di ottenere un limite inferiore e superiore alla probabilità di errore. Assumiamo quindi che sia stato trasmesso il segnale s_1 e indichiamo con r il

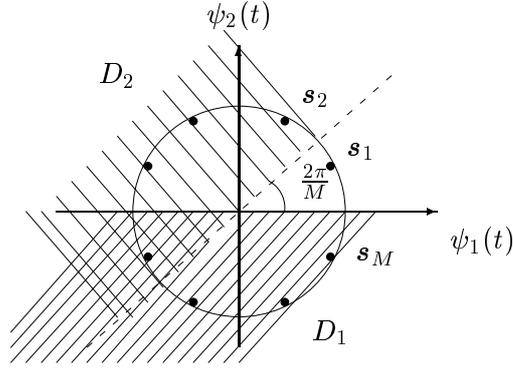


Figure 12: Costellazione di segnali PSK.

vettore di coordinate (r_1, r_2) . La probabilità di errore condizionata alla trasmissione del segnale $s_1(t)$ (che coincide con la probabilità di errore incondizionata data la simmetria del set di segnali), si esprime come

$$P(e) = P(e|s_1(t)) = P(\{\mathbf{r} \notin R_1\}) . \quad (58)$$

Considerati i due semipiani D_1 e D_2 rappresentati in figura 12, è immediato verificare che il complemento della regione R_1 è dato dall'unione di tali semipiani, ovvero che

$$\{\mathbf{r} \notin R_1\} = \{\mathbf{r} \in D_1 \cup D_2\} . \quad (59)$$

Inoltre, si ha anche

$$\{\mathbf{r} \in D_1\} \subset \{\mathbf{r} \notin R_1\} . \quad (60)$$

Sulla base delle ultime due relazioni, si può giungere alla seguente catena di disuguaglianze:

$$P(\{\mathbf{r} \in D_1\}|\mathbf{s}_1) < P(\{\mathbf{r} \notin R_1\}|\mathbf{s}_1) = P(e) < P(\{\mathbf{r} \in D_1\}|\mathbf{s}_1) + P(\{\mathbf{r} \in D_2\}|\mathbf{s}_1) . \quad (61)$$

Ora, condizionatamente alla trasmissione del segnale $s_1(t)$, è facile verificare che

$$P(\{\mathbf{r} \in D_1\}|\mathbf{s}_1) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{1,M}}{2\sqrt{\mathcal{N}_0}} \right) , \quad P(\{\mathbf{r} \in D_2\}|\mathbf{s}_1) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{1,2}}{2\sqrt{\mathcal{N}_0}} \right) . \quad (62)$$

D'altra parte, semplici considerazioni geometriche ci portano a dire che

$$d_{1,2} = d_{1,M} = 2\sqrt{\mathcal{E}} \sin \frac{\pi}{M} ,$$

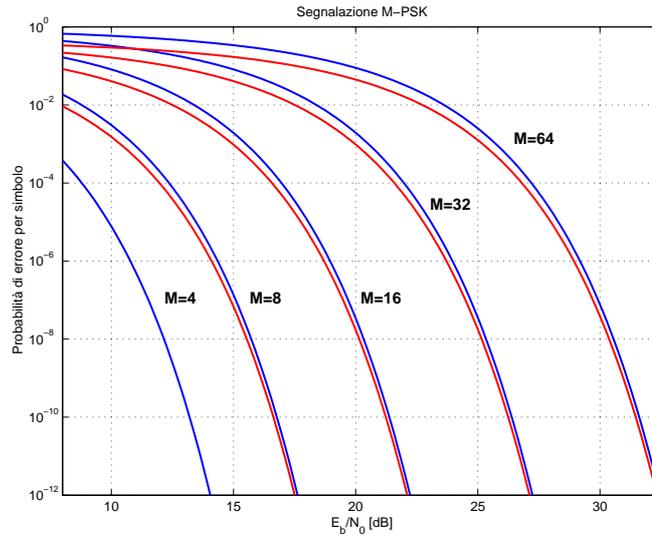


Figure 13: Prestazioni della segnalazione M -PSK.

per cui, sostituendo le ultime due relazioni nella (61) si giunge infine alla seguente coppia di limiti

$$\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b \log_2 M}{\mathcal{N}_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right) < P(e)_{M\text{-PSK}} < \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b \log_2 M}{\mathcal{N}_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right). \quad (63)$$

Nella figura 5.2 sono riportate la probabilità di errore (53) della segnalazione QPSK e i limiti (63) in funzione del contrasto di energia per bit e per vari valori della cardinalità della modulazione M . È possibile verificare che i limiti superiore ed inferiore alla probabilità di errore sono abbastanza vicini, ragion per cui essi forniscono una stima con ottima approssimazione delle prestazioni della segnalazione PSK. Analogamente a quanto visto per la segnalazione ASK, anche in tal caso le prestazioni peggiorano all'aumentare di M ; ovviamente, tale comportamento si giustifica sia esaminando l'argomento della funzione di errore complementare nei limiti (63), sia ricordando che la modulazione PSK è efficiente in banda, in quanto la sua occupazione spettrale è indipendente dalla cardinalità della modulazione.

Infine, esaminiamo il legame tra la probabilità di errore per simbolo e la probabilità di errore per bit. Bene, mentre per il caso $M = 4$ si è riusciti a dare un'espressione esatta della probabilità di errore per bit, nel caso che $M > 4$ si possono soltanto ripetere i ragionamenti fatti nel caso di segnalazione ASK. Altrimenti detto, la probabilità di errore per bit è compresa tra $P(e)/\log_2 M$ e $P(e)$, e, in condizioni di elevato rapporto segnale rumore, è possibile farle assumere il suo valore minimo ricorrendo a una codifica

di Gray, ovvero assegnando a punti adiacenti della costellazione configurazioni di bit che differiscano in un'unica posizione.

6 La segnalazione AM-PM

Nella segnalazione AM-PM la generica forma d'onda del modulatore si esprime come

$$s_i(t) = A_i \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_0 t + \phi_i), \quad t \in [0, T], \quad (64)$$

ovvero l'informazione associata al simbolo da trasmettere è codificata nella fase e nell'ampiezza della sinusoide trasmessa. E' immediato verificare che, posto

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_0 t), \quad \psi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_0 t), \quad t \in [0, T], \quad (65)$$

si ha

$$s_i(t) = [A_i \cos \phi_i] \psi_1(t) + [A_i \sin \phi_i] \psi_2(t). \quad (66)$$

Ne consegue quindi che la segnalazione AM-PM è una segnalazione bidimensionale e i suoi versori di base coincidono con quelli di una segnalazione PSK. Al generico segnale $s_i(t)$ è associato quindi un vettore bidimensionale s_i di coordinate $(A_i \cos \phi_i, A_i \sin \phi_i)$. Nella figura 14 è rappresentata una costellazione AM-PM a 16 livelli di tipo rettangolare. In tale figura è anche riportata la regione di decisione corrispondente ad un segnale interno alla griglia di punti. Si noti che le regioni di decisione sono dei quadrati per i punti interni, mentre sono costituite da semistrisce o da quadranti per i punti esterni della costellazione. Il calcolo delle prestazioni per tale tipo di segnalazione non è in generale semplice, tranne che per opportune configurazioni di segnali. Di conseguenza, la valutazione delle prestazioni può essere fatta in maniera approssimata utilizzando il bound dell'unione. Nel caso particolare, poi, che la costellazione dei punti sia costituita da una griglia quadrata regolare come quella della figura 14 e M è tale che \sqrt{M} è un numero intero, è possibile ottenere un'espressione in forma chiusa per la probabilità di errore per simbolo. Consideriamo quindi la costellazione di segnali rappresentata in figura 14. Anzitutto, si nota che le ascisse dei punti possono assumere solo 4 (ovvero \sqrt{M}) possibili valori, come pure le ordinate dei punti della costellazione. Ma allora, possiamo assegnare a ciascun segnale 4 bit in maniera tale che i primi due bit codifichino l'ascissa e i restanti due bit codifichino l'ordinata del punto rappresentativo del segnale considerato. Considerata la rappresentazione (66), ne consegue che il termine $A_i \cos \phi_i$

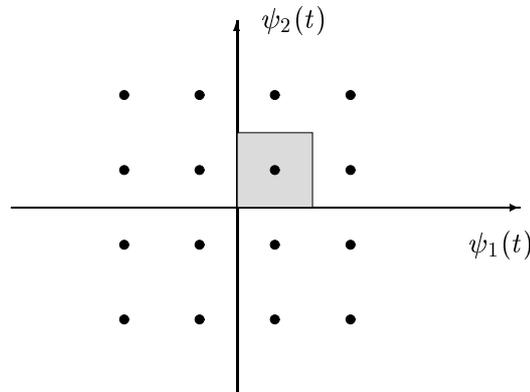


Figure 14: Costellazione AM-PM a 16 livelli.

può assumere solo quattro possibili valori e dipende dai primi due bit del quartetto di bit associato a ciascun segnale, e, analogamente, il termine $A_i \sin \phi_i$ può assumere solo 4 possibili valori e dipende dagli ultimi due bit del quartetto associato a ciascun segnale. Di conseguenza, il segnale $q(t)$ non è altro che la somma di due segnali ASK a quattro livelli e modulati sulle portanti in quadratura $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$. Tale ragionamento può essere esteso a tutte le costellazioni AM-PM i cui punti costituiscono un reticolo quadrato regolare e tali che \sqrt{M} è un intero (o, equivalentemente, tali che $\log_2 M$ è un numero pari). In tal caso, la segnalazione AM-PM prende anche il nome di segnalazione QAM (*Quadrature Amplitude Modulation*) ed è equivalente alla sovrapposizione di due segnalazione ASK a \sqrt{M} livelli e modulate su portanti in quadratura. In analogia a quanto visto per la segnalazione QPSK (che di fatto coincide con una segnalazione 4-QAM), un modulatore QAM M -ario si può realizzare utilizzando due modulatori ASK a \sqrt{M} livelli e operanti su due portanti in quadratura, e, analogamente, un demodulatore QAM può essere realizzato utilizzando due demodulatori ASK a \sqrt{M} livelli. Dal momento che le realizzazioni di rumore sul ramo in fase e sul ramo in quadratura sono indipendenti, ne consegue che la probabilità di corretta decisione è pari al quadrato della probabilità di corretta decisione per una segnalazione ASK a \sqrt{M} livelli. Si ha quindi

$$P(c)_{M\text{-QAM}} = \left[P(c)_{\sqrt{M}\text{-ASK}} \right]^2 = \left[1 - P(e)_{\sqrt{M}\text{-ASK}} \right]^2. \quad (67)$$

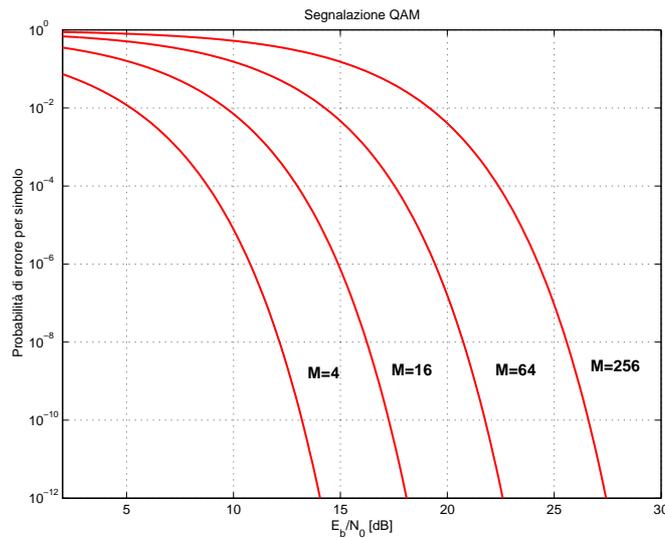


Figure 15: Prestazioni della segnalazione M -QAM.

Utilizzando la relazione (39) con \sqrt{M} in luogo di M si ha infine

$$P(e)_{M\text{-QAM}} = 1 - P(c)_{M\text{-QAM}} = 1 - \left[1 - \frac{\sqrt{M} - 1}{\sqrt{M}} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M}{2(M-1)} \frac{\mathcal{E}_b}{\mathcal{N}_0}} \right) \right]^2. \quad (68)$$

In figura 15 la relazione (68) è rappresentata in funzione del contrasto di energia per bit per vari valori della cardinalità M . Dall'esame di tale figura scaturiscono le seguenti osservazioni.

- Anche in tal caso le prestazioni peggiorano all'aumentare della cardinalità M , ossia la segnalazione QAM, essendo efficiente in banda, non è efficiente in potenza, e, quindi, all'aumentare di M , c'è bisogno di spendere un'energia per bit sempre maggiore per conseguire preassegnati livelli di prestazione.
- Confrontando la figura 15 con la figura 13 si evince che, per un dato M , la segnalazione QAM presenta in generale prestazioni migliori della segnalazione PSK. Ovvero, a parità di energia spesa per bit e di banda occupata (si ricordi che sia la segnalazione PSK che la QAM hanno la stessa efficienza spettrale), la segnalazione QAM consegue prestazioni migliori dalla segnalazione PSK. In maniera equivalente, è anche possibile dire che, a parità di banda impegnata e di probabilità di errore, utilizzare una modulazione QAM permette di conseguire un risparmio di energia rispetto al caso in cui si utilizzi una modulazione PSK.

- Sulla base della considerazione precedente, è naturale chiedersi se l'utilizzo della modulazione PSK sia vantaggioso per qualche aspetto. Di fatto, la segnalazione PSK, pur avendo prestazioni peggiori della segnalazione QAM, in talune applicazioni è preferita rispetto alla QAM in quanto essa utilizza forme d'onde ad inviluppo costante. In altri termini, i segnali utilizzati nella modulazione PSK sono delle sinusoidi finestrate aventi tutte la stessa energia, il che implica che un'onda PSK è dotata di inviluppo costante.

7 Segnalazione M -aria ortogonale

Occupiamoci ora della segnalazione M -aria ortogonale. Ricordiamo che in tale segnalazione le forme d'onda utilizzate dal modulatore sono mutuamente ortogonali, il che implica che la dimensionalità L del set di segnali utilizzato coincide con la cardinalità M . Esempi di segnalazione ortogonale sono rappresentati dalla segnalazione PPM e dalla segnalazione FSK con separazione tra le frequenze dei segnali pari a multipli interi di $1/(2T)$.

La valutazione delle prestazioni per la segnalazione M -aria ortogonale può essere condotta in maniera abbastanza agevole. Il risultato cui si giunge permette di esprimere la probabilità di errore per simbolo di una segnalazione ortogonale nel modo seguente

$$P(e) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(y - \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{N}_0}}\right)^2} \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(y)\right]^{M-1} dy . \quad (69)$$

Tuttavia, per semplicità, nel seguito valuteremo le prestazioni della segnalazione ortogonale in modo approssimato utilizzando il bound dell'unione. Al riguardo, ricordiamo che nella segnalazione ortogonale la distanza tra due generici segnali, $s_i(t)$ e $s_j(t)$ si esprime come

$$d_{i,j}^2 = \|s_i(t) - s_j(t)\|^2 = \mathcal{E}_i + \mathcal{E}_j - 2 \langle s_i(t), s_j(t) \rangle = 2\mathcal{E} , \quad (70)$$

ove si è sfruttato il fatto che i segnali sono assunti essere equienergetici e che, essendo ortogonali, hanno prodotto scalare mutuamente nullo. Dall'ultima relazione di evince che, nella segnalazione ortogonale, tutti i segnali sono equidistanti, ovvero, ciascun segnale dista dai rimanenti $M - 1$ segnali di $\sqrt{2\mathcal{E}}$. Il bound dell'unione porta quindi alla seguente maggiorazione della probabilità di errore di una segnalazione ortogonale

$$P(e) \leq \frac{M-1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2\mathcal{N}_0}} \right) . \quad (71)$$

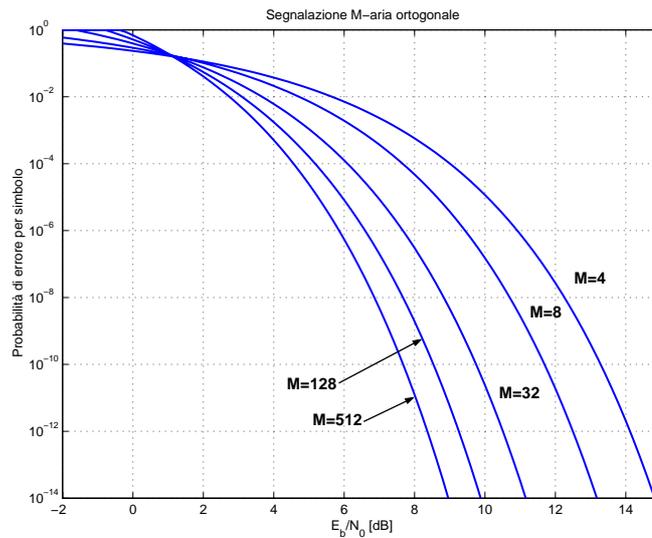


Figure 16: Prestazioni della segnalazione M -aria ortogonale ottenute utilizzando il bound dell'unione.

In figura 16 è riportata la relazione (71) in funzione del contrasto di energia per bit e per vari valori della cardinalità M della modulazione. Da tale figura si evidenzia come, all'aumentare di M , le prestazioni tendono a migliorare. Altrimenti detto, nella zona di interesse di basse probabilità di errore, si vede che, a parità di probabilità di errore, c'è bisogno di valori di energia spesa per bit sempre minori all'aumentare di M . Tale comportamento ovviamente non deve destare meraviglia, dal momento che, essendo la modulazione ortogonale non efficiente in banda, essa è efficiente in potenza. D'altra parte, poiché si è visto che la distanza tra i segnali nella modulazione ortogonale è data da

$$d = \sqrt{2\mathcal{E}} = \sqrt{2\mathcal{E}_b \log_2 M},$$

si deduce che, a parità di energia per bit, la distanza tra i segnali è funzione crescente di M , e ciò si traduce ovviamente in un miglioramento delle prestazioni all'aumentare della cardinalità della modulazione. Dal momento che le curve di probabilità di errore si spostano quindi progressivamente verso sinistra all'aumentare di M , ci si chiede se esiste una curva limite verso cui i grafici della probabilità di errore tendono all'aumentare di M . Consideriamo quindi l'espressione (71); utilizzando la maggiorazione

$$\operatorname{erfc}(x) \leq e^{-x^2},$$

si ha

$$\begin{aligned}
P(e) &\leq \frac{M-1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2\mathcal{N}_0}} \right) \\
&< M e^{-\frac{\mathcal{E}}{2\mathcal{N}_0}} \\
&= e^{\ln M} e^{-\frac{\mathcal{E}_b \log_2 M}{2\mathcal{N}_0}} \\
&= e^{\ln M} \left[1 - \frac{\mathcal{E}_b}{\mathcal{N}_0 2^{1/\ln 2}} \right],
\end{aligned} \tag{72}$$

ove $\ln(\cdot)$ indica il logaritmo naturale. Da tale relazione si vede che, al tendere di M all'infinito, la probabilità di errore per simbolo è maggiorata da una quantità tendente a zero (ossia tende essa stessa a zero), purché sia

$$1 - \frac{\mathcal{E}_b}{\mathcal{N}_0 2 \ln 2} > 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathcal{E}_b}{\mathcal{N}_0} > 2 \ln 2 .$$

Abbiamo trovato quindi, che, al divergere di M , la probabilità di errore della segnalazione ortogonale tende a zero quando il contrasto di energia per bit supera il valore limite $2 \ln 2$. Di fatto, tale risultato è stato ottenuto effettuando una serie di maggiorazioni dell'espressione approssimata della probabilità di errore (71), ottenuta come applicazione del bound dell'unione. Nella realtà, utilizzando la formula esatta della probabilità di errore (69) è possibile dimostrare che le prestazioni limite, al divergere di M , sono le seguenti

$$P(e) = \begin{cases} 1 & \text{se } \frac{\mathcal{E}_b}{\mathcal{N}_0} < \ln 2 (= -1.6\text{dB}) \\ 0 & \text{se } \frac{\mathcal{E}_b}{\mathcal{N}_0} > \ln 2 (= -1.6\text{dB}) \end{cases} \tag{73}$$

Altrimenti detto, la segnalazione ortogonale, al divergere di M , raggiunge la curva di Shannon nel punto di coordinate $(\ln 2, 0)$. Infatti, per $M \rightarrow \infty$ l'efficienza spettrale di tale segnalazione è nulla, mentre il contrasto di energia richiesto per ottenere prestazioni affidabili quanto si vuole è $\ln 2 = -1.6\text{dB}$. In figura 17 sono rappresentate le prestazioni (71) della segnalazione ortogonale per valori elevati di M . Si vede che, all'aumentare di M , le curve tendono ad avvicinarsi alla retta verticale di ascissa $2 \ln 2$, che è il limite predetto dal bound dell'unione. In figura è anche rappresentata la retta verticale di ascissa $\ln 2$, che è il vero limite al quale tendono le prestazioni reali della segnalazione ortogonale al divergere della cardinalità M .

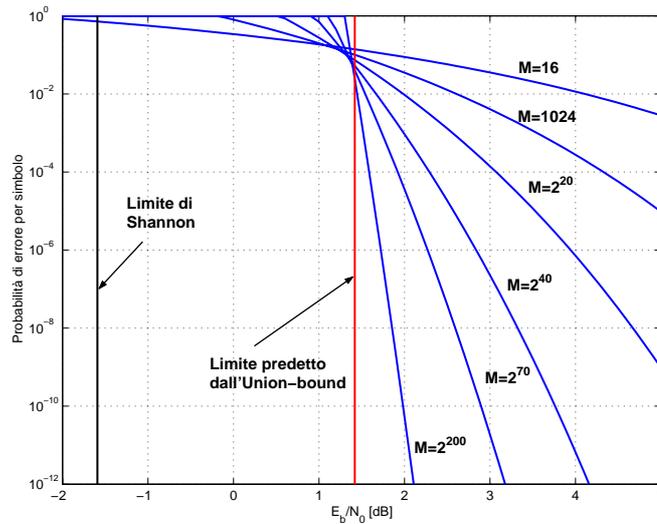


Figure 17: Prestazioni limite della segnalazione M -aria ortogonale.

7.1 Probabilità di errore per bit della segnalazione ortogonale

Occupiamoci ora del legame esistente tra probabilità di errore per bit e probabilità di errore per simbolo della segnalazione ortogonale. Anzitutto, ricordiamo che i segnali ortogonali sono tali che ciascun segnale è equidistante dai rimanenti $M - 1$ segnali. Di conseguenza, non essendoci segnali adiacenti (nel senso che i segnali sono tutti ugualmente adiacenti), non ha senso utilizzare la codifica di Gray per minimizzare la probabilità di errore per bit. Inoltre, essendo i segnali tutti egualmente distanti, in presenza di un errore sul simbolo rivelato, il demodulatore ha un'eguale probabilità di decidere per i restanti segnali diversi da quello trasmesso. In altre parole, se viene trasmessa la forma d'onda $s_i(t)$ ed il demodulatore commette un errore, esso potrà decidere con eguale probabilità per uno dei restanti $M - 1$ segnali, in quanto tali segnali sono tutti alla stessa distanza dal segnale trasmesso $s_i(t)$. In virtù di tale proprietà, è possibile ricavare una relazione in forma chiusa tra la probabilità di errore per simbolo e la probabilità di errore per bit. A tal fine, si ricordi che, in una modulazione M -aria, a ciascuna forma d'onda del modulatore è associata una stringa di $k = \log_2 M$ bit. Vi sono quindi in totale $2^k = M$ stringhe binarie lunghe k , e un totale di M forme d'onda a disposizione. Sia quindi \mathbf{x}_i la stringa di bit associata a $s_i(t)$. Se, a valle della trasmissione del segnale $s_i(t)$, il demodulatore commette un errore, la stringa di bit demodulata sarà diversa da \mathbf{x}_i , e, in particolare, potrà essere con eguale probabilità una tra le $2^k - 1$ restanti

stringhe binarie. Consideriamo ora un generico bit della stringa \mathbf{x}_i , ad esempio il primo, che indichiamo con $x(1)$. Tra le $2^k - 1 = M - 1$ stringhe binarie diverse da \mathbf{x}_i , ce ne saranno $M/2$ che avranno il primo bit diverso da $x_i(1)$, ed $M/2 - 1$ che avranno il primo bit coincidente con $x_i(1)$. Ma allora, in presenza di un errore sul simbolo, il primo bit della stringa decodificata sarà diverso da $x_i(1)$ in $M/2$ casi su un totale di $M - 1$ possibili scelte. Poiché tale ragionamento può essere ripetuto per ogni bit della stringa \mathbf{x}_i e non solo con riferimento al primo bit, ne consegue che esso ha validità generale, per cui la relazione tra la probabilità di errore per bit $P_b(e)$ e la probabilità di errore per simbolo $P(e)$ è quindi

$$P_b(e) = P(e) \frac{M/2}{M-1}. \quad (74)$$

Tale formula può essere ricavata anche con un procedimento alternativo. Infatti, supponendo di aver trasmesso il segnale associato alla stringa di k bit tutti nulli, in presenza di un errore, il numero di errori fatti sui k bit trasmessi è pari al numero di uni presenti nella stringa di bit rivelata. Tale numero coincide col numero medio \bar{n}_k di uni presenti in una stringa binaria di lunghezza k . Ricordando che il numero di configurazioni di bit lunghe k e con ℓ uni è $\binom{k}{\ell}$, si ha

$$\bar{n}_k = \sum_{\ell=1}^k \frac{\binom{k}{\ell}}{2^k - 1} \ell = \frac{k}{2^k - 1} \sum_{\ell=1}^k \binom{k-1}{\ell-1} = \frac{k2^{k-1}}{2^k - 1} = \frac{kM/2}{M-1}. \quad (75)$$

Se, quindi, \bar{n}_k è il numero medio di errori (ovvero di uni) presenti nella stringa di k bit demodulata condizionatamente all'occorrenza di un errore sul simbolo, la frazione di bit mediamente errata in presenza di un errore sul simbolo è pari a \bar{n}_k/k e, quindi, la probabilità di errore per bit si ottiene come

$$P_b(e) = P(e) \frac{\bar{n}_k}{k} = P(e) \frac{M/2}{M-1}. \quad (76)$$

Ritroviamo quindi, ovviamente, la stessa espressione. Naturalmente, la $P_b(e)$ presenta lo stesso comportamento asintotico (al divergere di M) della probabilità di errore per simbolo. In particolare, per M elevato vale la relazione

$$P_b(e) \approx P(e)/2 \quad (77)$$

per cui si può dire che la probabilità di errore per bit vale $1/2$ se il contrasto di energia per bit è minore di $\ln 2$ e vale zero se il contrasto di energia per bit è maggiore di $\ln 2$.

8 Il canale AWGN con ritardo di propagazione finito

Sino a questo momento, si è supposto che il canale AWGN non avesse alcun effetto sul segnale trasmesso e si limitasse esclusivamente a introdurre un disturbo additivo. Di fatto, si è già avuto modo di sottolineare come tale ipotesi sia non del tutto aderente alla realtà, in quanto il canale di propagazione usualmente introduce una qualche alterazione sul segnale trasmesso. Mentre lo studio dei canali distorcenti sarà effettuato con maggior dettaglio nel prossimo capitolo, in questo paragrafo vogliamo studiare l'effetto che il ritardo di propagazione (che è di fatto sempre presente in qualsiasi sistema di comunicazione reale) produce sul segnale trasmesso e quali sono i suoi effetti sulla struttura e sulle prestazioni dei sistemi di trasmissione numerica. Assumeremo, quindi, che a valle della trasmissione del segnale $s(t)$, il segnale ricevuto sia espresso come

$$r(t) = s(t - \tau) + n(t), \quad (78)$$

ove τ è il ritardo di propagazione che è usualmente dato dal rapporto tra la distanza tra il trasmettitore e il ricevitore e la velocità di propagazione del segnale elettrico nel mezzo considerato. Se ad esempio si trasmette un segnale sinusoidale avente una certa frequenza f_0 e una certa fase iniziale θ_0 , ossia $s(t) = \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$, il segnale ricevuto è dato da

$$s_R(t) = \cos(2\pi f_0(t - \tau) + \theta_0) = \cos(2\pi f_0 t + (\theta_0 - 2\pi f_0 \tau)). \quad (79)$$

Si deduce quindi che il ritardo di propagazione porta ad un disallineamento tra la fase del segnale trasmesso e la fase del segnale ricevuto. Tale disallineamento, se non portato opportunamente in conto, può avere effetti deleteri sulle prestazioni di alcune segnalazioni. Nel seguito, ci focalizzeremo essenzialmente sugli effetti di tale disallineamento sulle segnalazioni FSK e PSK.

Cominciamo col considerare la segnalazione FSK. E' stato visto che in una segnalazione FSK l'ortogonalità delle forme d'onda utilizzate è conseguita imponendo che la spaziatura fra le frequenze dei segnali sia un multiplo intero di $1/(2T)$, che rappresenta anche la minima spaziatura ammissibile consentita tra tali frequenze. Tale risultato è stato ricavato, nel capitolo precedente, considerando sinusoidi a frequenza diversa ma con la stessa fase. Ora, dal momento che il canale di propagazione introduce degli sfasamenti arbitrari che sono legati sia alla frequenza della sinusoide trasmessa che al ritardo di propagazione, è naturale chiedersi se la spaziatura $1/(2T)$ garantisce l'ortogonalità dei segnali anche

in presenza di tali disallineamenti di fase. Consideriamo quindi due segnali sinusoidali con fasi iniziali non nulle e verifichiamo se esiste una condizione che ne garantisce l'ortogonalità. Si consideri quindi il seguente prodotto scalare

$$\begin{aligned} & \int_0^T \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) \cos(2\pi f_2 t + \theta_2) dt = \\ & \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^T \cos(2\pi(f_1 + f_2)t + \theta_1 + \theta_2) dt + \frac{1}{2} \int_0^T \cos(2\pi(f_1 - f_2)t + \theta_1 - \theta_2) dt}_{\approx 0 \text{ per } f_1, f_2 \gg 1/T} = \\ & \frac{1}{4\pi(f_1 - f_2)} [\sin(2\pi(f_1 - f_2)T + \theta_1 - \theta_2) - \sin(\theta_1 - \theta_2)] . \end{aligned} \quad (80)$$

Essendo il seno una funzione periodica di periodo 2π , tale prodotto scalare assume valore nullo, indipendentemente dai valori degli sfasamenti θ_1 e θ_2 , se

$$2\pi(f_1 - f_2)T = 2\pi h , \quad h \text{ intero} . \quad (81)$$

Da tale relazione si evince che la spaziatura tra le portanti tale da garantire l'ortogonalità anche in presenza di sfasamenti è pari ad un multiplo intero di $1/T$, che è anche la minima spaziatura ammissibile tra le portanti. Si è quindi dimostrato che, affinché le forme d'onda appaiano ortogonali al ricevitore e non solo al trasmettitore¹ la minima spaziatura tra le frequenze deve essere un multiplo intero di $1/T$ e non più di $1/(2T)$.

Consideriamo ora il caso della segnalazione PSK. Si ricordi che la generica forma d'onda utilizzata da un modulatore PSK è espressa come

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{T}} \cos(2\pi f_0 t + \phi_i) , \quad t \in [0, T] , \quad (82)$$

ovvero l'informazione è codificata nella fase del segnale trasmesso. Si intuisce quindi che, a valle della trasmissione su un canale con ritardo di propagazione τ , i segnali trasmessi subiranno una rotazione di fase di $-2\pi f_0 \tau$, che, se non opportunamente compensata, impedisce il corretto recupero dell'informazione trasmessa. Ad esempio, si supponga di avere a che fare con una segnalazione BPSK, in cui il modulatore ha a disposizione due segnali, uno con fase nulla e l'altro con fase pari a π . Bene, se il ritardo di propagazione è tale che lo sfasamento $-2\pi f_0 \tau$ è pari ad un multiplo dispari di π , in ricezione

¹Nota che avere l'ortogonalità al ricevitore è condizione necessaria affinché le prestazioni siano effettivamente quelle predette dalla teoria.

le due forme d'onda si scambiano vicendevolmente ed il ricevitore demodulerà il complemento della sequenza binaria trasmessa. Di conseguenza, nei sistemi di trasmissione reale è prevista la presenza di un blocco di recupero del sincronismo di fase. Tale blocco, usualmente implementato con un PLL (*Phase Locked Loop*), ha il compito di stimare lo sfasamento introdotto dal canale e di compensarlo, al fine di permettere la corretta demodulazione dei segnali trasmessi. Il recupero del cosiddetto sincronismo di fase è un compito fondamentale che ogni demodulatore numerico deve assolvere, a meno che non si voglia procedere ad una demodulazione *incoerente*, ovvero che non preveda una compensazione degli sfasamenti introdotti dal canale. Per il momento, non ci dilunghiamo su tale questione, che è oggetto approfondito del corso di Trasmissione Numerica II; è sufficiente per ora aver fatto notare che nei sistemi reali esiste il problema del recupero del sincronismo di fase, che deve essere opportunamente trattato mediante l'utilizzo di opportune elaborazioni del segnale ricevuto.

9 La modulazione di fase differenziale (DPSK)

Si è detto nel paragrafo precedente che il canale AWGN con ritardo di propagazione non nullo introduce uno sfasamento arbitrario sui segnali trasmessi; si è poi visto come tale sfasamento sia particolarmente dannoso nel caso si utilizzi la segnalazione PSK, che affida proprio alla fase del segnale trasmesso l'informazione da trasmettere. Al fine di risolvere tale inconveniente, un possibile rimedio è quello di ricorrere ad un dispositivo di recupero del sincronismo di fase, che stimi lo sfasamento introdotto dal canale e lo compensi. Una soluzione alternativa è quella di ricorrere ad una modulazione di fase differenziale o DPSK (*Differential PSK*), che è immune agli sfasamenti aleatori introdotti dal canale, e che è illustrata nel seguito.

In tale modulazione, l'informazione da trasmettere non è affidata alla fase assoluta del segnale trasmesso, come accade nella modulazione PSK tradizionale, ma è bensì affidata alla differenza tra la fase della sinusoide trasmessa nell'intervallo di segnalazione attuale e la fase della sinusoide trasmessa nell'intervallo di segnalazione precedente. Precisamente, in una segnalazione DPSK M -aria si hanno ancora a disposizione M fasi, che per comodità indichiamo con i simboli $\Delta\phi_1, \Delta\phi_2, \dots, \Delta\phi_M$. Supposto, poi, che nell' $(n-1)$ -esimo intervallo di segnalazione $[(n-1)T, nT]$ sia stato trasmesso il segnale

$$s_T^{(n-1)}(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{T}} \cos(2\pi f_0 t + \phi(n-1)), \quad t \in [(n-1)T, nT], \quad (83)$$

nell' n -esimo intervallo di segnalazione si trasmette il segnale

$$s_T^{(n)}(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{T}} \cos(2\pi f_0 t + \underbrace{\phi(n-1) + \Delta\phi_i}_{\phi(n)}), \quad t \in [nT, (n+1)T], \quad (84)$$

ove $\Delta\phi_i$ contiene l'informazione su quale tra gli M simboli sia stato trasmesso. Da tali relazioni si capisce per quale motivo tale tipo di modulazione è immune agli sfasamenti introdotti dal canale. Infatti, a patto che lo sfasamento si mantenga approssimativamente costante su due intervalli di segnalazione consecutivi, poiché l'informazione trasmessa è codificata nella differenza tra le fasi delle sinusodi trasmesse su due intervalli di tempo consecutivi, lo sfasamento introdotto dal canale viene eliminato nel momento in cui si va a considerare tale differenza. E' anche opportuno osservare come tale modulazione appartenga alla classe delle modulazioni *con memoria*, in quanto la fase trasmessa in un dato intervallo di segnalazione è funzione non solo del simbolo di informazione da inviare in quel dato intervallo, ma anche della fase trasmessa negli intervalli di segnalazione precedenti.

Occupiamoci con più dettaglio della demodulazione di segnali DPSK. Anzitutto, si osservi che al fine di demodulare il simbolo trasmesso nell' n -esimo intervallo di segnalazione è necessario elaborare almeno² il segnale ricevuto negli intervalli $(n-1)$ -esimo ed n -esimo. Sia dunque

$$r^{(n-1)}(t) = s_T^{(n-1)}(t - \tau) + n(t), \quad (85)$$

il segnale ricevuto nell'intervallo $[(n-1)T, nT]$, e sia

$$r^{(n)}(t) = s_T^{(n)}(t - \tau) + n(t), \quad (86)$$

il segnale ricevuto nell'intervallo $[nT, (n+1)T]$. Si supponga che la modulazione abbia cardinalità M e che le differenze di fase siano esprimibili come $\Delta\phi_i = \frac{2\pi(i-1)}{M}$, $\forall i = 1, \dots, M$. Dal momento che i segnali PSK sono esprimibili come combinazione lineare dei versori

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_0 t), \quad \psi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_0 t), \quad (87)$$

²In effetti, avendo a che fare con una modulazione con memoria, la regola di demodulazione a minima probabilità di errore richiederebbe di elaborare congiuntamente l'intero segnale ricevuto, dal primo all'ultimo intervallo di segnalazione. Tuttavia, in questo contesto, non ci soffermeremo sulla regola di decisione a minima probabilità di errore per modulazioni con memoria.

si considerano quindi le seguenti proiezioni

$$r_1(n-1) = \int_{\tau+(n-1)T}^{\tau+nT} r^{(n-1)}(t) \psi_1(t - (n-1)T - \tau) dt, \quad (88)$$

$$r_2(n-1) = \int_{\tau+(n-1)T}^{\tau+nT} r^{(n-1)}(t) \psi_2(t - (n-1)T - \tau) dt,$$

e

$$r_1(n) = \int_{\tau+nT}^{\tau+(n+1)T} r^{(n)}(t) \psi_1(t - nT - \tau) dt, \quad (89)$$

$$r_2(n) = \int_{\tau+nT}^{\tau+(n+1)T} r^{(n)}(t) \psi_2(t - nT - \tau) dt,$$

e i vettori $\mathbf{r}(n-1) = [r_1(n-1) \ r_2(n-1)]^T$ e $\mathbf{r}(n) = [r_1(n) \ r_2(n)]^T$. La demodulazione dei segnali DPSK può essere fatta secondo due diverse strategie. Una prima strategia va sotto il nome di *demodulazione coerente* dei segnali DPSK. Tale strategia prevede prima che le fasi dei vettori $\mathbf{r}(n-1)$ e $\mathbf{r}(n)$ siano proiettate sulla costellazione delle differenze di fase utilizzate, e poi, che la differenza di fase trasmessa sia stimata come differenza di tali proiezioni. Più precisamente, indichiamo con $\theta(n)$ l'angolo che il vettore $\mathbf{r}(n)$ forma col semiasse positivo delle ascisse, e indichiamo con $[\theta_r(n)]_p$ l'operazione di *proiezione* sulla costellazione di segnali utilizzata, ovvero l'operazione che associa alla fase $\theta(n)$ il $\Delta\phi_i$ ad essa più vicino. Bene, la demodulazione coerente dei segnali DPSK prevede che la stima della differenza di fase trasmessa nell'intervallo di segnalazione $[nT, (n+1)T]$, che indichiamo con $\widehat{\Delta\phi}(n)$, sia espressa come

$$\widehat{\Delta\phi}(n) = [\theta_r(n)]_p - [\theta_r(n-1)]_p. \quad (90)$$

Tale strategia permette di realizzare un modulatore DPSK mediante un demodulatore PSK tradizionale seguito da un modulo che effettua la differenza prima della sequenza di fasi rivelate. La seconda strategia di rivelazione, detta *demodulazione differenziale*, prevede invece che l'operazione di differenza sia eseguita prima dell'operazione di proiezione sulla costellazione. Ovvero, in tal caso è

$$\widehat{\Delta\phi}(n) = [\theta_r(n) - \theta_r(n-1)]_p. \quad (91)$$

Non ci soffermiamo sull'analisi delle prestazioni di tali schemi di demodulazioni. Ci limitiamo soltanto ad osservare quanto segue.

- La probabilità di errore per simbolo della segnalazione DPSK con demodulazione coerente è approssimativamente pari al doppio della probabilità di errore di una segnalazione PSK. Tale raddoppio di probabilità di errore è dovuto essenzialmente al fatto che la regola di codifica differenziale introduce una memoria nel sistema, per cui una rivelazione errata di fase comporta in generale una decisione errata su due simboli. Per i valori di interesse di basse probabilità di errore, tale raddoppio è tuttavia poco critico.
- La segnalazione DPSK con demodulazione differenziale, per elevati rapporti segnale-rumore, evidenzia una perdita di circa 3dB rispetto alla segnalazione PSK non differenziale.
- Tale perdita di 3dB è pessimistica nel caso binario. Nel caso binario, infatti, la probabilità di errore della segnalazione DPSK può essere calcolata in forma esatta. Il risultato cui si giunge è

$$P(e) = \frac{1}{2} e^{-\frac{\epsilon_b}{N_0}} . \quad (92)$$