



Università degli Studi di Cassino

Magnetostatica e magnetoquasistatica nel vuoto

Antonio Maffucci, Fabio Villone

1. Le equazioni della magnetostatica.

Le equazioni della magnetostatica sono:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = i_{\gamma} \quad \forall \gamma \quad (1)$$

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \quad \forall \Sigma \quad (2)$$

dove $\mathbf{H}$ è il campo magnetico (misurato in A/m, ampèrespire/metro) e $\mathbf{B}$ è il campo induzione magnetica (misurato in T, tesla), γ è una qualsiasi linea chiusa ($\hat{\mathbf{t}}$ il suo versore tangente), e Σ una qualsiasi superficie chiusa ($\hat{\mathbf{n}}$ il versore normale uscente). La grandezza i_{γ} è la corrente *concatenata* con la linea chiusa γ , ossia la quantità:

$$i_{\gamma} = \iint_{S_{\gamma}} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}_S dS \quad (3)$$

dove S_{γ} è una qualsiasi superficie avente per orlo γ , e $\mathbf{n}_S$ è la normale ad essa, scelta con la regola della mano destra (ossia in modo da vedere l'orientamento di γ in senso antiorario), vedi Fig.1.

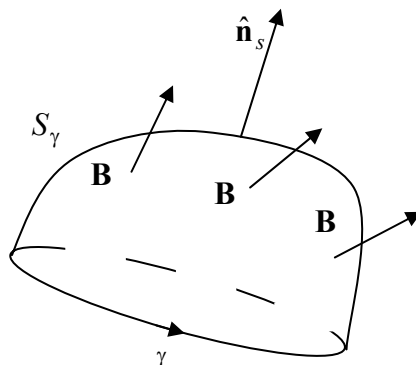


Fig. 1. Interpretazione della legge di Ampère

Ricordiamo che la (1) si ottiene dalla Legge di Ampère nel limite stazionario, mentre la (2) esprime la cosiddetta *solenoidalità* del campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$: per effetto della (2), il flusso di $\mathbf{B}$ attraverso una qualsiasi superficie aperta dipende solo dall'orlo di tale superficie. Per provarlo basta considerare due superfici Σ_1 e Σ_2 che si appoggiano allo stesso orlo γ ed applicare la (2) alla superficie chiusa ottenuta dall'unione di Σ_1 e $-\Sigma_2$ (per portare in conto il verso della normale a Σ_2 che risulta entrante), vedi Fig. 2. Per tale ragione si parla di flusso *concatenato* con la curva γ .

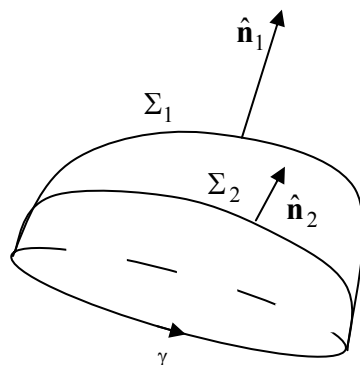


Fig. 2. Il flusso di $\mathbf{B}$ concatenato con una curva γ è indipendente dalla superficie aperta (di orlo γ) scelta per calcolarla

Un identico ragionamento ripetuto sulla densità di corrente permette di concludere che la quantità i_{γ} definita dalla (3) non dipende dalla particolare superficie S_{γ} scelta.

Supponendo di trovarci nel vuoto (ovvero nell'aria, che dal punto di vista della magnetostatica si comporta in maniera molto simile), il legame tra $\mathbf{H}$ e $\mathbf{B}$ (la cosiddetta *relazione costitutiva*) risulta:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (4)$$

dove μ_0 è detta *permeabilità magnetica del vuoto*, che è una costante sperimentale che nel Sistema Internazionale vale

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{H}{m}. \quad (5)$$

I risultati descritti nel seguito si possono formalmente estendere al caso in cui vengano considerati mezzi materiali caratterizzati da una relazione tra $\mathbf{H}$ e $\mathbf{B}$ del tipo

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}, \quad (6)$$

nella quale la quantità adimensionale μ_r è detta *permeabilità magnetica relativa*.

2. Campo magnetico di alcune configurazioni

2.1 Campo prodotto da un filo di corrente

Affrontiamo preliminarmente il calcolo del campo magnetico dovuto ad un filo rettilineo indefinito percorso da una corrente i (Fig. 3).

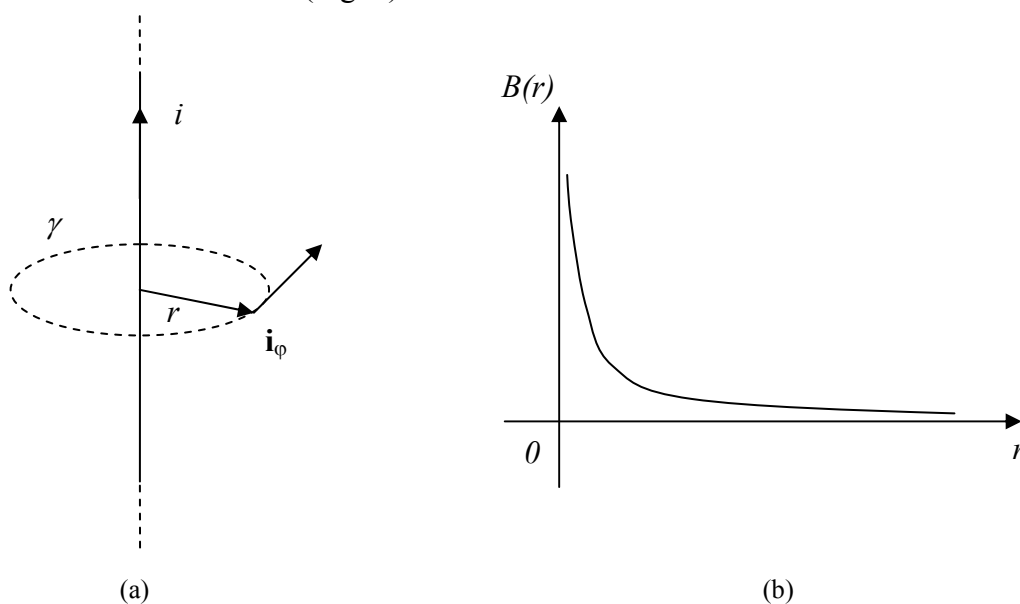


Fig. 3. a) Campo di un filo rettilineo indefinito percorso da corrente;
b) andamento del modulo del campo in funzione della distanza.

Introdotta un sistema di riferimento cilindrico (r, z, φ) , il cui asse z coincide con il filo, per motivi di simmetria il campo magnetico $\mathbf{H}$ deve essere diretto in ogni punto dello spazio lungo il versore $\mathbf{i}_\varphi$ di figura, ed il suo modulo può dipendere solo dalla coordinata r :

$$\mathbf{H} = H(r) \mathbf{i}_\varphi \quad (7)$$

Sfruttando la (7), la relazione (1) applicata alla circonferenza γ di figura (centrata sull'asse del filo, ad esso ortogonale, e di raggio r generico) permette di scrivere:

$$H(r) 2\pi r = i \Rightarrow H(r) = \frac{i}{2\pi r} \quad (8)$$

in quanto il versore tangente alla circonferenza coincide con $\mathbf{i}_\varphi$, e lungo di essa r (e quindi H) risulta essere costante. In definitiva:

$$\mathbf{H} = \frac{i}{2\pi r} \mathbf{i}_\varphi \Rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \mathbf{i}_\varphi \quad (9)$$

e quindi possiamo asserire che il campo magnetico di un filo rettilineo indefinito “si avvolge” intorno al filo con la regola della mano destra: allineando il pollice al riferimento di corrente, il campo si avvolge secondo il verso indicato dalle rimanenti dita, se la corrente è positiva secondo il riferimento scelto.

Le linee del campo magnetico sono dunque delle circonferenze centrate sull’asse del filo; il suo modulo varia in maniera inversamente proporzionale alla distanza dall’asse del filo stesso, il che vuol dire che, nel limite di filo di sezione trascurabile, il campo diverge, Fig. 4a. Chiaramente, questa situazione è da intendersi come un caso limite, in quanto un filo a sezione nulla non è fisicamente realizzabile.

Consideriamo, allora, un filo avente sezione non nulla (di raggio a), nell’ipotesi semplificativa che la densità di corrente $\mathbf{J}$ sia uniforme nella sezione del filo e sia diretta lungo l’asse del filo stesso, Fig. 4a. Si avrà, quindi, banalmente $i = J\pi a^2$.

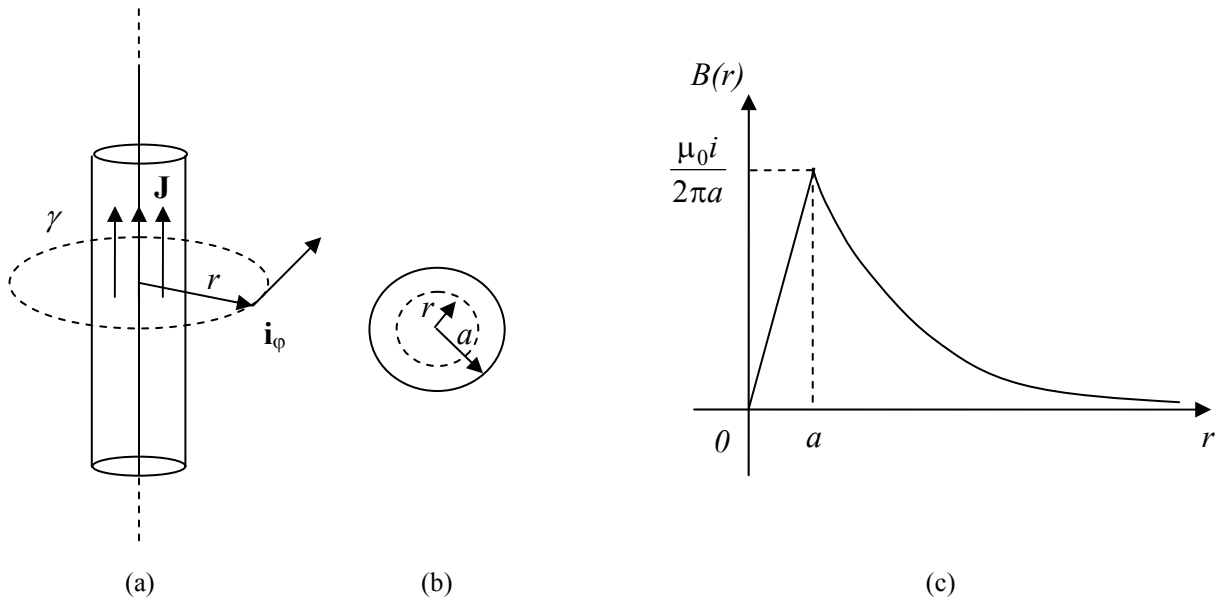


Fig. 4. a) Campo di un filo rettilineo indefinito a sezione non nulla percorso da corrente; b) sezione del conduttore; c) andamento del modulo del campo in funzione della distanza.

Nelle ipotesi in cui ci siamo messi, valgono le stesse considerazioni di simmetria che, nel caso di corrente filiforme, ci portano a concludere che il campo magnetico $\mathbf{H}$ deve avere la struttura evidenziata in (7). Per tale ragione, se consideriamo un punto qualsiasi fuori dal conduttore (quindi ad una distanza $r > a$) si possono svolgere le stesse considerazioni del caso filiforme e concludere che il campo è dato dalla (9). Per punti all’interno del conduttore $r < a$, alla circuitazione del campo $\mathbf{H}$ contribuisce solo la corrente concatenata con una circonferenza di raggio r (vedi Fig. 4b):

$$H(r) 2\pi r = J\pi r^2 \Rightarrow H(r) = \frac{ir}{2\pi a^2} \quad (10)$$

da cui:

$$\mathbf{H} = \frac{ir}{2\pi a^2} \mathbf{i}_\varphi \Rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0 ir}{2\pi a^2} \mathbf{i}_\varphi. \quad (11)$$

Quindi il campo cresce linearmente all’interno del conduttore, raggiunge il massimo per $r = a$ e decresce come $1/r$ per $r > a$, assumendo lo stesso valore che si avrebbe considerando una corrente concentrata sull’asse (Fig. 4c)

2.2 Campo prodotto da una spira di corrente

Calcoliamo ora il campo prodotto da una spira circolare piana percorsa da corrente, Fig. 5a. In Fig. 5b ne mostriamo una sezione, in cui supponiamo lo spessore del filo non trascurabile, e che il riferimento della corrente esca dal foglio nel filo di sinistra ed entri in quello di destra. In questo caso, possiamo asserire che, in punti molto prossimi alla spira stessa (intendendo con ciò punti la cui distanza dalla spira è molto minore del raggio di curvatura locale della spira), la spira appare, al limite, come un filo rettilineo indefinito. Pertanto, in prossimità della spira, le linee di campo saranno delle circonferenze centrate sull'asse della spira; questa geometria delle linee di campo viene deformata man mano che ci si allontana dalla spira stessa.

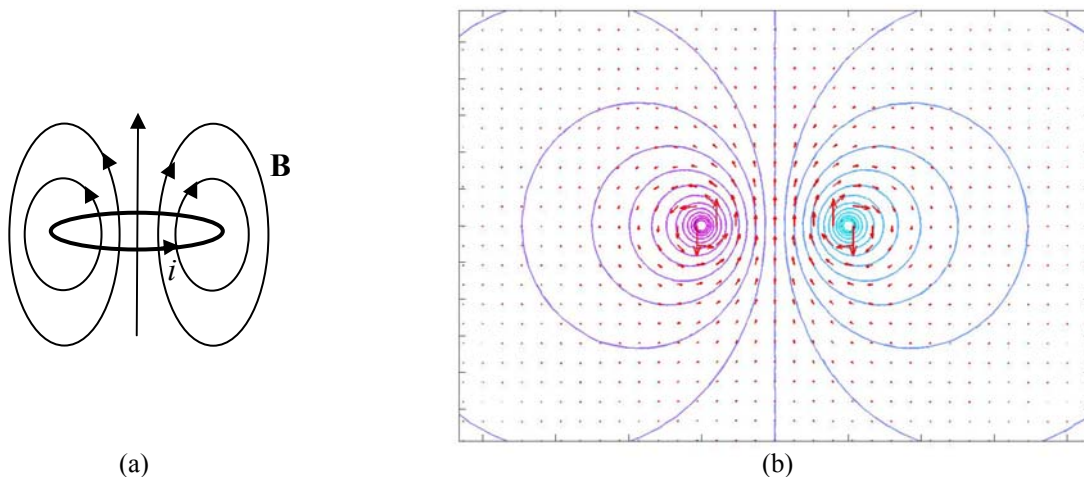


Fig. 5. Campo magnetico prodotto da una spira circolare piana

Il campo magnetico ha dunque una configurazione “a fontana”, la cui direzione può essere ancora trovata con la regola della mano destra: allineando le dita al verso di riferimento della corrente, la direzione del campo è indicata dal pollice. La dipendenza spaziale del campo magnetico è quindi ben più complessa di quella del caso precedente; in generale, possiamo comunque scrivere che, nel generico punto P , si ha:

$$\mathbf{B}(P) = i \mathbf{K}(P) \quad (12)$$

dove $\mathbf{K}$ è una quantità vettoriale che varia da punto a punto dello spazio, ma non dipende dalla corrente. Con una opportuna espressione di $\mathbf{K}$, la (12) può descrivere il campo prodotto da una spira nel caso generale, quindi anche rimuovendo l'ipotesi che la spira sia circolare piana.

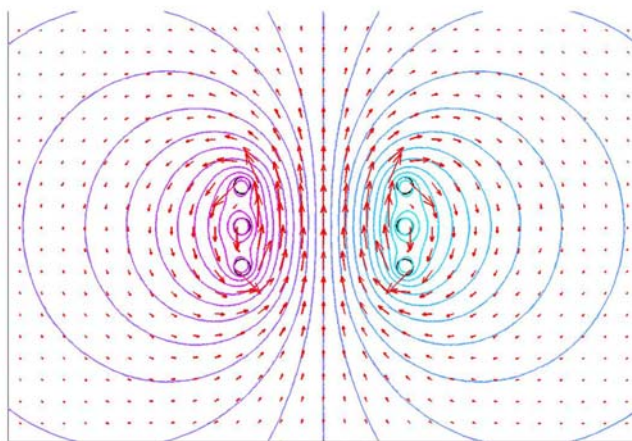


Fig. 6. Campo magnetico dovuto a $N=3$ spire

Ci poniamo ora il seguente problema: cosa accade se avviciniamo un certo numero di spire uguali, percorse dalla stessa corrente? In Fig. 6 riportiamo un risultato qualitativo per 3 spire: osserviamo che il campo risulta essere rinforzato, e pressoché uniforme, nella regione di spazio “interna” alle spire stesse, mentre si indebolisce nella regione esterna, e negli interstizi tra una spira e l’altra assume un andamento assai poco regolare. Da questa semplice osservazione traiamo il suggerimento di costruire un oggetto fatto avvolgendo un unico filo (in modo da garantire sempre la stessa corrente) in un numero N di spire molto elevato e molto ravvicinate tra di loro: un *solenoid*.

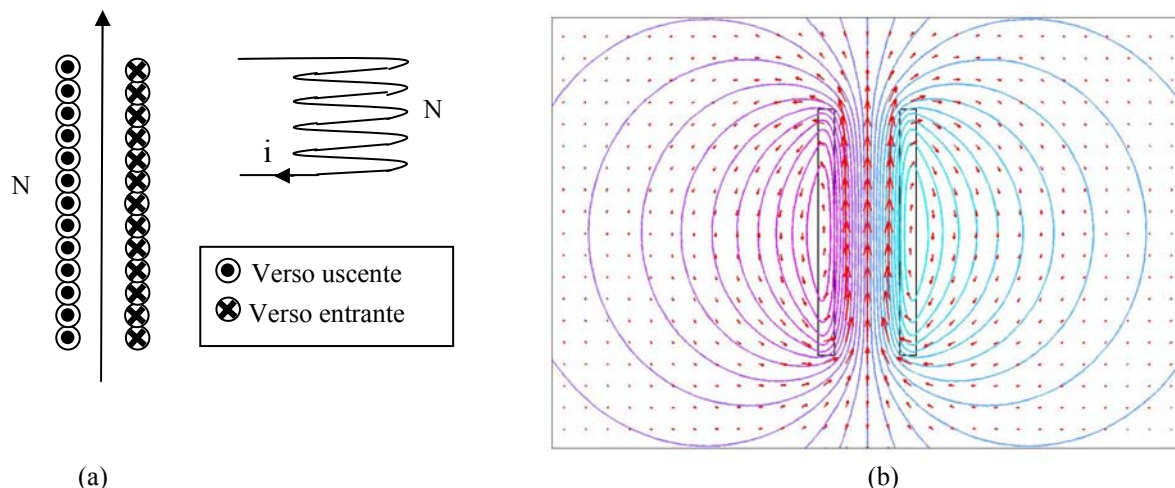


Fig. 7. Solenoide rettilineo costituito da N spire: (a) sezione; (b) campo magnetico prodotto

In Fig. 7b è mostrato il campo magnetico prodotto da un siffatto oggetto, avendo fatto l’ipotesi semplificativa che le spire fossero talmente vicine da poter trascurare del tutto gli interstizi e considerare un conduttore massiccio al posto degli N fili (Fig. 7a). Osserviamo che il campo magnetico prodotto dal solenoide è pressoché uniforme e diretto assialmente nella regione interna ad esso, e praticamente nullo in quella esterna. Queste considerazioni valgono rigorosamente nel caso di un solenoide rettilineo indefinito; poiché nella pratica non è chiaramente possibile realizzare un oggetto siffatto, si ricorre spesso a solenoidi toroidali, ossia con le sue estremità richiuse “a ciambella”.

Con riferimento alla Fig. 7, osserviamo che è possibile identificare una regione del solenoide (quella superiore) da cui le linee di campo “escono”, ed una regione (quella inferiore) in cui le linee di campo “entrano”. La prima viene detta *polo nord* del solenoide, la seconda *polo sud*.

Calcoliamo ora il campo magnetico prodotto da un solenoide di lunghezza l , composto da N spire, facendo l’ipotesi semplificativa di considerare tale campo uniforme e diretto assialmente all’interno, e nullo all’esterno. Applicando la (1) alla linea γ mostrata in Fig. 8, si ha:

$$H l = N i \Rightarrow H = \frac{N i}{l}, \quad B = \mu_0 \frac{N i}{l} \quad (13)$$

dove H e B sono le componenti di $\mathbf{H}$ e $\mathbf{B}$ in direzione assiale, e i è la corrente circolante in ognuna delle N spire, cosicché il prodotto Ni (le cosiddette *ampèrespire del solenoide*) è la corrente complessivamente concatenata con la linea γ .

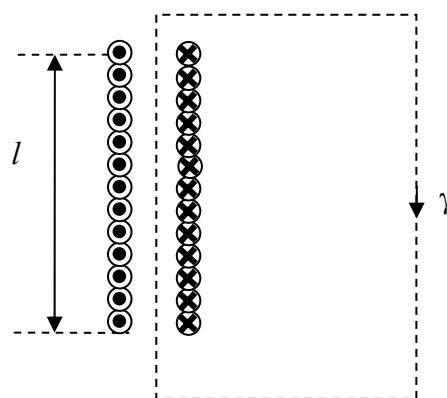


Fig. 8. Calcolo del campo magnetico di un solenoide

3. Flusso; coefficiente di auto e mutua induzione

Si definisce *flusso concatenato* con una linea chiusa γ la quantità:

$$\Phi_\gamma = \iint_{S_\gamma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \quad (14)$$

dove S_γ è una qualsiasi superficie che ha per orlo la linea γ , e $\mathbf{n}$ è la normale ad essa orientata con la regola della mano destra. Come già evidenziato, questa quantità non dipende dalla particolare superficie S_γ scelta (purché abbia per orlo γ).

Questa definizione vale del tutto in generale; in particolare, possiamo applicarla nel caso in cui la linea chiusa coincida con l'asse di un conduttore chiuso percorso da una corrente i , ed il campo induzione magnetica sia dovuto a tale corrente (Fig. 9). Si osservi che la linea chiusa è orientata con lo stesso riferimento scelto per la corrente.

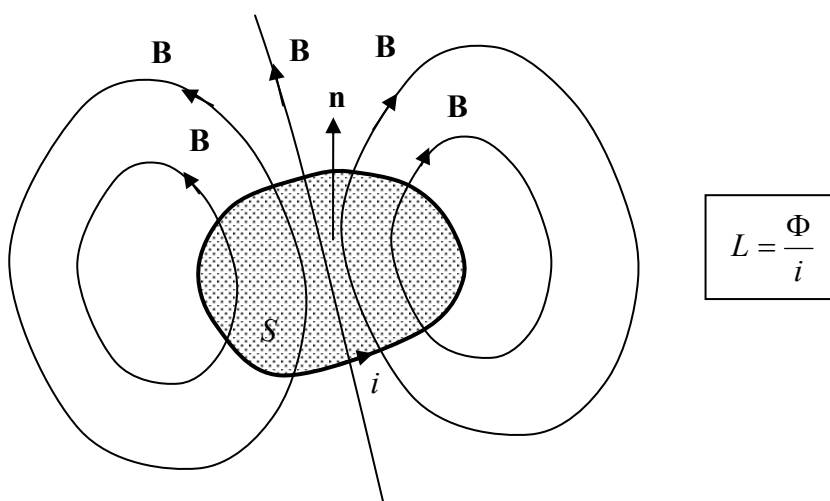


Fig. 9. Valutazione del coefficiente di autoinduzione per un circuito di corrente

Ricordando la (12), abbiamo:

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \iint_S i \mathbf{K}(P) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = L i \quad (15)$$

dove la quantità L , detta *coefficiente di autoinduzione* o induttanza della spira, dipende solo da parametri geometrici ed è intrinsecamente positiva (si ricordi infatti che sia $\mathbf{n}$ che $\mathbf{B}$ si orientano entrambi con la regola della mano destra), per cui il loro prodotto scalare è positivo in ogni punto della superficie S .

Questi ragionamenti valgono evidentemente anche nel caso del solenoide; in questo caso, la superficie su cui calcolare il flusso deve avere per contorno una linea che si avvolge a spirale, seguendo il conduttore con il quale realizziamo l'avvolgimento. Invece di fare il calcolo per questa complicata superficie elicoidale, facciamo il seguente ragionamento approssimato. Prima di tutto, se le spire sono molto ravvicinate (come in effetti sono in pratica), possiamo supporre che i tratti di superficie “di raccordo” tra una spira e l'altra diano un contributo assai piccolo all'integrale, che quindi diventa approssimabile come:

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \cong \sum_{k=1}^N \iint_{S_k} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \cong N \iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \quad (16)$$

dove S_k è una superficie che ha per orlo la k -esima spira, e dove abbiamo sfruttato il fatto che, essendo il campo uniforme, l'integrale su una qualsiasi superficie S_k è uguale a quello sulla generica sezione S del solenoide. Ricordando l'espressione (13) del campo magnetico del solenoide, si ha:

$$\Phi \cong N \iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = N S B = N S \frac{\mu_0 N i}{l} \Rightarrow L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} \quad (17)$$

Pertanto il valore dell'induttanza si può aumentare, a parità di dimensioni geometriche, aumentando il numero di spire oppure avvolgendo le spire su un cilindro di materiale magnetico caratterizzato da una relazione del tipo (6): in tal caso L aumenta di un fattore pari alla permeabilità magnetica relativa μ_r .

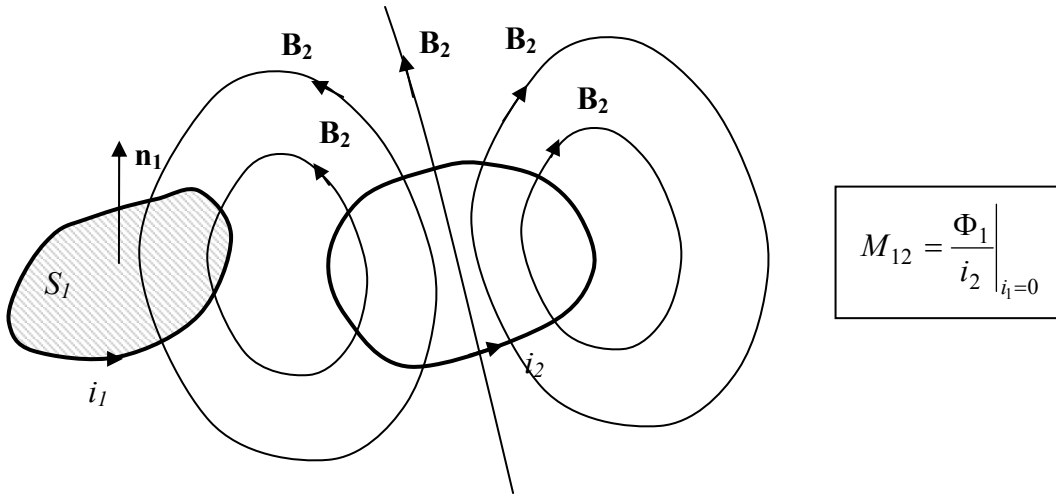


Fig. 10. Valutazione del coefficiente di mutua induzione tra due spire.

Supponendo, ora, di considerare due spire percorse da correnti i_1 e i_2 rispettivamente (Fig. 10), possiamo scrivere, grazie alla linearità delle equazioni (1)-(3), che il campo induzione magnetica totale è pari alla somma dei campi generati dalle singole correnti agenti separatamente:

$$\mathbf{B}(P) = \mathbf{B}_1(P) + \mathbf{B}_2(P) = \mathbf{K}_1(P) i_1 + \mathbf{K}_2(P) i_2 \quad (18)$$

Il flusso concatenato con la prima spira risulta quindi dato dalla somma del flusso del campo prodotto dalla stessa spira (Φ_{11}) e del flusso del campo prodotto dall'altra spira (Φ_{12}):

$$\Phi_1 = \iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS = \iint_{S_1} (i_1 \mathbf{K}_1(P) + i_2 \mathbf{K}_2(P)) \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS = \Phi_{11} + \Phi_{12} = L_1 i_1 + M_{12} i_2. \quad (19)$$

Analogo risultato si otterrà per il flusso concatenato con la seconda spira:

$$\Phi_2 = \iint_{S_2} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS = \iint_{S_2} (i_1 \mathbf{K}_1(P) + i_2 \mathbf{K}_2(P)) \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS = \Phi_{21} + \Phi_{22} = M_{21} i_1 + L_2 i_2. \quad (20)$$

Nelle (19) e (20) abbiamo introdotto i coefficienti di proporzionalità tra flussi e correnti: L_1 e L_2 sono i coefficienti di autoinduzione delle spire 1 e 2 prima definiti (intrinsecamente positivi), mentre M_{12} e M_{21} sono detti *coefficienti di mutua induzione* delle due spire, che possono essere di segno qualsiasi, e risultano (come dimostreremo più avanti) uguali tra loro.

4. Magnetoquasistatica: il passaggio dai campi ai circuiti

Ci poniamo, ora, il problema di realizzare praticamente un oggetto che possa comportarsi, almeno in modo approssimato, come il bipolo “induttore” introdotto nella Teoria dei Circuiti, Fig.11a. Consideriamo, allora, un solenoide costituito avvolgendo in numerose spire un conduttore perfetto (quasi filiforme), e diciamo A e B i morsetti del solenoide (punto di inizio e di fine del filo), come in Fig. 11b.

In condizioni stazionarie, tale dispositivo può essere studiato con le leggi della magnetostatica, come fatto finora. Supponendo di introdurre una variabilità temporale lenta delle grandezze in esame (discuteremo in seguito in che senso si debba parlare di variazioni “lente”), le equazioni che occorre risolvere sono ovviamente quelle della magnetoquasistatica:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{S_{\gamma}} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad \forall \gamma \quad (21)$$

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \quad \forall \Sigma \quad (22)$$

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \quad \forall \Sigma \quad (23)$$

con le relazioni costitutive che descrivono i mezzi materiali, cioè l’aria ed il conduttore perfetto

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{E} = \eta \mathbf{J} \quad (\eta \rightarrow 0). \quad (24)$$

Ricordiamo che, mentre le (21) e (23) valgono in condizioni generali, la (22) è approssimata e vale solo nel limite quasi-stazionario magnetico (quando si può trascurare la variazione temporale della carica contenuta all’interno della superficie Σ).

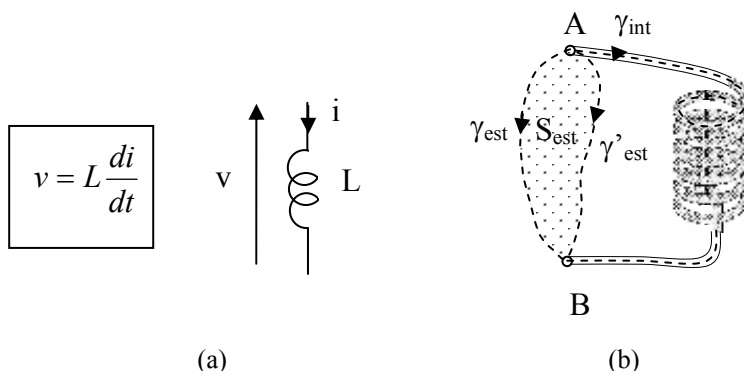


Fig. 11. a) bipolo induttore; b) realizzazione di un induttore con un solenoide

Vogliamo dimostrare il seguente:

Teorema. Supponendo valide le relazioni della magnetoquasistatica (21)-(24), il solenoide di Fig.11b, visto ai morsetti A-B, si comporta come un bipolo induttore, con induttanza pari al coefficiente di autoinduzione del solenoide (17), Fig. 11a.

Dimostrazione. In primo luogo, dimostriamo che il dispositivo da analizzare si comporta come un bipolo, ossia soddisfa le seguenti condizioni:

- la tensione tra i punti A e B è indipendente dalla linea scelta per unire i due punti, purché questa linea non intersechi il bipolo;
- la corrente entrante nel morsetto A è uguale alla corrente uscente dal morsetto B;
- esiste un legame (caratteristica) tra tensione e corrente.

La proprietà b) è certamente verificata, in quanto la densità di corrente risulta essere solenoidale, come prescrive la (22). La proprietà a) è più delicata, in quanto nel presente caso il campo elettrico,

secondo la (21), risulta non essere conservativo. In particolare, con riferimento alla Fig. 11, scegliendo la linea chiusa data dall'unione di due curve che si sviluppino all'esterno dell'oggetto, $\gamma_{\text{est}} \cup (-\gamma'_{\text{est}})$ (adottando un unico verso per circolare sui due tratti) si ha:

$$\int_{A\gamma_{\text{est}}B} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl - \int_{A\gamma'_{\text{est}}B} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = -\frac{d}{dt} \iint_{S_{\text{est}}} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (25)$$

Siccome le linee γ_{est} e γ'_{est} si sviluppano all'esterno del solenoide (come richiesto dalla proprietà a), ed in quella regione di spazio il campo induzione magnetica risulta essere trascurabile, possiamo concludere che è ben definita la tensione tra i morsetti A-B:

$$V_{AB} = \int_{A\gamma_{\text{est}}B} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \int_{A\gamma'_{\text{est}}B} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl - \frac{d}{dt} \iint_{S_{\text{est}}} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \cong \int_{A\gamma'_{\text{est}}B} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl \quad (26)$$

Per quanto riguarda la proprietà c), consideriamo la linea chiusa $\gamma = \gamma_{\text{int}} \cup (-\gamma_{\text{est}})$ ottenuta dall'unione di un tratto che si sviluppa all'esterno ed un tratto che si sviluppa all'interno del conduttore, adottando come verso quello entrante rispetto al morsetto A (Fig. 11b). Applicando la (21):

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = -\frac{d}{dt} \iint_{S_{\gamma}} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \Leftrightarrow \oint_{\gamma_{\text{int}} \cup (-\gamma_{\text{est}})} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = -\frac{d}{dt} \iint_{S_{\gamma}} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \Leftrightarrow -\int_{\gamma_{\text{est}}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = -\frac{d\Phi_{\gamma}}{dt} \quad (27)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che il tratto γ_{int} si sviluppa in un conduttore perfetto, dove il campo elettrico risulta essere nullo, ed abbiamo chiamato Φ_{γ} il flusso concatenato con il solenoide. Ricordando la (26) e la definizione (10) di coefficiente di autoinduzione, si ha:

$$V_{AB} = \frac{d\Phi_{\gamma}}{dt} = L \frac{di}{dt} \quad (28)$$

dove i è la corrente che fluisce nel solenoide secondo il riferimento scelto per γ_{int} e L ha, per il solenoide, l'espressione (17). ♦

Proviamo ora a rimuovere alcune delle ipotesi che ci hanno consentito di ricavare il risultato. Se, ad esempio il filo con cui realizziamo il solenoide non è un conduttore perfetto, l'unica cosa che cambia è che nella (27) il tratto γ_{int} fornisce un contributo non nullo, che, con facili passaggi, si dimostra uguale a:

$$\int_{\gamma_{\text{int}}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = R i \quad (29)$$

con R resistenza del filo stesso. Pertanto, in questo caso risulta:

$$V_{AB} = L \frac{di}{dt} + R i \quad (30)$$

ossia il circuito equivalente di un solenoide ottenuto avvolgendo un filo di resistività non nulla è la serie di un resistore e di un induttore.

Più delicata è l'interpretazione dell'ipotesi di quasi-stazionarietà, cioè di variazioni *lente* delle grandezze in esame, che è alla base delle approssimazioni introdotte nelle (22) e (26). Se per semplicità ci riferiamo alla situazione in cui le grandezze elettriche sono pure sinusoidi a frequenza assegnata f , è evidente che i termini che trascuriamo nelle (22) e (26) dipendono linearmente da f , visto che tali termini coinvolgono le derivate temporali delle sinusoidi. Per stabilire il limite di validità delle approssimazioni in cui abbiamo ricavato il risultato occorre, allora, verificare che $f \ll f_c$, dove f_c è una frequenza caratteristica che dipende da vari parametri fisici del solenoide, tra cui le dimensioni assolute e il rapporto tra sezione e lunghezza. E' possibile controllare questi parametri in modo da realizzare induttori per i quali f_c può essere anche dell'ordine delle centinaia di MHz. Per frequenze maggiori entrano in gioco fenomeni quali la radiazione elettromagnetica che non descrivibili dal modello magneto-quasi-statico: l'avvolgimento si comporta da antenna.

Consideriamo ora due solenoidi vicini, ciascuno accessibile da una coppia di morsetti (A-B e C-D in Fig. 12), realizzati in conduttore perfetto. Ripetendo ragionamenti analoghi a quelli fatti in precedenza, è facile convincersi che per ciascuna coppia di morsetti possono essere definite tensione e corrente (diciamole v_1 , i_1 e v_2 , i_2).

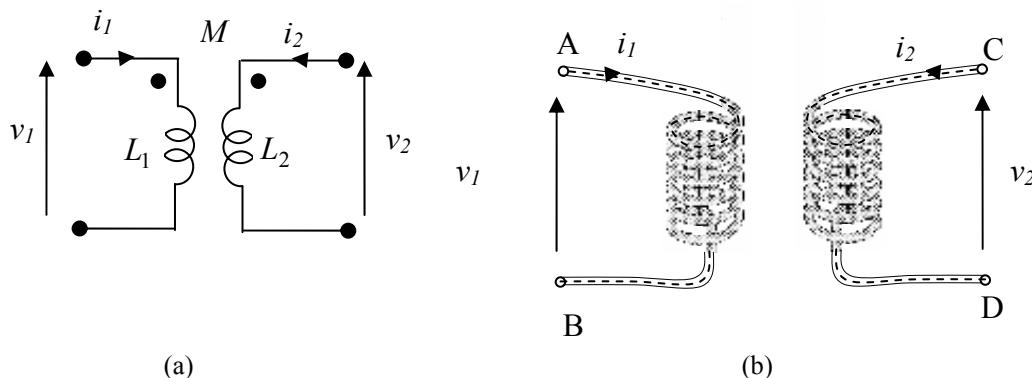


Fig. 12. a) Doppio-bipolo “circuiti mutuamente accoppiati”; b) realizzazione del doppio-bipolo con due solenoidi

Circa la caratteristica, ricordando la definizione di coefficienti di auto e mutua induzione, si ottiene, con passaggi analoghi a quelli visti in precedenza:

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = M_{21} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases} \quad (31)$$

Dunque, l’oggetto in questione è accessibile tramite due coppie di morsetti, per ciascuna delle quali valgono le ipotesi che rende lecita la definizione di tensione e di corrente, ed esistono due relazioni che collegano le quattro grandezze v_1 , i_1 e v_2 , i_2 . Esso è dunque una generalizzazione del bipolo induttore, che definiamo *doppio bipolo* (in quanto generalizzazione di bipolo) *circuiti mutuamente accoppiati* (in quanto generalizzazione dell’induttore).

5. Aspetti energetici

Valutiamo ora, dal punto di vista del campo, gli aspetti energetici discussi a suo tempo sull’induttore ideale inteso come bipolo della teoria dei circuiti. Sappiamo infatti che l’induttore è un bipolo passivo, per il quale si può definire energia posseduta ad un certo istante t la quantità:

$$W(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) \geq 0 \quad (32)$$

in funzione della quale la potenza (istantanea) $p(t) = v(t)i(t)$ assorbita (avendo fatto la convenzione dell’utente) dal bipolo risulta:

$$p(t) = \frac{dW}{dt} \quad (33)$$

La variazione di energia infinitesima in un intervallo di tempo dt risulta quindi:

$$dW = p dt = v i dt = \frac{d\Phi_\gamma}{dt} i dt = i d\Phi_\gamma \quad (34)$$

dove abbiamo sfruttato la (28). Ricordando la (13) e la (17), valide per il solenoide, abbiamo:

$$dW = i d\Phi_\gamma = H \frac{l}{N} N S dB = H dB V \quad (35)$$

dove H e B sono i moduli del campo magnetico ed induzione magnetica, e V è il volume della regione di spazio in cui è presente il campo magnetico (ossia la regione interna al solenoide). Possiamo dunque definire una *variazione di densità di energia* (energia per unità di volume):

$$dw = H dB \quad (36)$$

e quindi una *densità di energia del campo magnetico*:

$$w = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \quad (37)$$

Dunque, un induttore è in grado di immagazzinare energia nel campo magnetico che si instaura al suo interno (fenomeno di carica), per poi eventualmente restituirla a tempo debito (scarica). Per tale ragione si parla di bipolo passivo *conservativo*, per distinguerlo dai bipoli passivi *dissipativi* come il resistore.

Per quanto riguarda il doppio bipolo “circuiti mutuamente accoppiati”, ci aspettiamo di dover trovare risultati analoghi, in quanto il meccanismo fisico di immagazzinamento dell’energia è lo stesso. La potenza assorbita dal doppio bipolo risulta:

$$\begin{aligned} p(t) &= v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = i_1 \left(L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} \right) + i_2 \left(M_{21} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) + M_{12} i_1 \frac{di_2}{dt} + M_{21} i_2 \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \quad (38)$$

Affinché valga la (33) (ossia la potenza possa essere espressa come derivata temporale di una funzione che definiamo *energia posseduta dal sistema*), deve risultare $M_{12} = M_{21} = M$. In questa ipotesi, dalla (38) si desume che l’energia posseduta dal doppio bipolo risulta:

$$W = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \quad (39)$$

Per evidenti motivi fisici (passività), anche ora deve risultare $W \geq 0$, il che implica che:

$$\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad L_1 + L_2 y^2 + 2M y \geq 0, \quad y = \frac{i_2}{i_1} \quad (40)$$

dove si è supposto $i_1 \neq 0$ (altrimenti sceglieremmo i_2). Con semplici ragionamenti sul discriminante del trinomio, si desume che affinché valga la condizione (40) $\forall y$ reale, deve risultare:

$$M^2 \leq L_1 L_2 \quad (41)$$

La situazione limite:

$$M^2 = L_1 L_2 \quad (42)$$

si definisce condizione di *accoppiamento perfetto*. In questo caso, è possibile trovare un valore reale di y (ossia del rapporto tra le correnti) tale da annullare l’energia posseduta dal doppio bipolo, ossia tale da annullare il campo magnetico in ogni punto dello spazio. E’ facile convincersi che, affinché ciò sia possibile, tutte le linee di campo magnetico che si concatenano con un avvolgimento si devono concatenare anche con l’altro.